This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

http://books.google.com





A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

UNIVERSITY OF
ILLINOIS LIBRARY
AT URBANA-CHAMPAIGN
GEOLOGY

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

ANNALES

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

DE

DELFT.

TOME I

1885.

LEIDE. — E. J. BRILL.
1885.

Digitized by Google

COMITÉ DE RÉDACTION:

A. C. OUDEMANS Jr. *Président.*
Th. H. BEHRENS.
G. J. MORRE.
Ch. M. SCHOLS.
J. A. SNIJDERS C.Jz.

MEMBRE HONORAIRE:

J. BOSSCHA.

Digitized by Google

505
DEL
V.1-3

Geology
141

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

CH. M. SCHOLS. Sur l'emploi de la projection de Mercator pour le calcul d'une triangulation dans le voisinage de l'équateur.

I. Introduction . . . . . 1.
II. Calcul des coordonnées et du rapport d'agrandissement . . . . . 4.
III. Équation différentielle de la projection de la ligne géodésique . . . . . 8.
IV. Développement de ψ_0, ψ_1 et de $log \frac{S}{s}$ jusqu'aux termes du second ordre inclus. . . . . 12.
V. Développement de ψ_0, ψ_1 et de $log \frac{S}{s}$ pour la sphère. . . . . 24.
VI. Développement des termes d'ordre supérieur dans ψ_0, ψ_1 et $log \frac{S}{s}$. . . . . 38.
VII. L'azimut astronomique et la corde . . . . . 52.

J. BOSSCHA. Relation des expériences qui ont servi à la construction de deux mètres étalons en platine iridié, comparés directement avec le Mètre des Archives. Première Partie.

I. Introduction.
§ 1. Origine de la Commission internationale du mètre . . . . . 65.
§ 2. Travaux et résolutions de la Commission internationale du mètre . . . . . 68.
§ 3. Travaux de la Section française et concours du Comité Permanent . . . . . 71.
§ 4. Conférence diplomatique du mètre. . . . . 81.
II. Élasticité d'une des règles. Degré de précision des mesures micrométriques . . . . . 84.
III. Examen des qualités chimiques des règles. . . . . 107.
IV. Recherche d'une cause d'erreur dans la mesure de la longueur d'un mètre à bouts . . . 118.

H. HAGA. Étude expérimentale sur l'effet thermo-électrique découvert par Thomson . . . . . 145.

J. BOSSCHA FILS. Remarques sur les inclusions de certains quartz des porphyres. 169.

TH. H. BEHRENS. Sur l'analyse microchimique des minéraux.

§ 1. Introduction . . . . . 176.
§ 2. Méthodes microchimiques . . . . . 180.
§ 3. La méthode de M. Boricky . . . . . 181.
§ 4. Méthode microchimique nouvelle . . . . . 187.
§ 5. Préparation de la matière minérale à examiner . . . . . 188.

Digitized by Google

Pages.

§ 6. Dissolution et attaque des minéraux . . . . . 189.
§ 7. Recherche du calcium . . . . . 191.
§ 8. Recherche du potassium . . . . . 193.
§ 9. Recherche du sodium . . . . . 194.
§ 10. Recherche du lithium . . . . . 196.
§ 11. Recherche du baryum et du strontium . . . . . 197.
§ 12. Recherche du magnésium . . . . . 197.
§ 13. Recherche de l'aluminium. . . . . 199.
§ 14. Recherche du fer et du manganèse . . . . . 200.
§ 15. Recherche des métalloïdes. . . . . 200.
§ 16. Recherche du soufre. . . . . 200.
§ 17. Recherche du phosphore (et de l'arsénic) . . . . . 201.
§ 18. Recherche du chlore. . . . . 201.
§ 19. Recherche du fluorium . . . . . 204.
§ 20. Recherche du silicium et du bore . . . . . 205.
§ 21. Recherche de l'eau . . . . . 206.
§ 22. Analyses de contrôle . . . . . 208.

CH. M. SCHOLS. La série semi-convergente pour l'évaluation de l'intégrale $\psi(Z) = e^{Z^2} \int_Z^\infty e^{-z^2} dz$. . . . . 213.

Digitized by Google

Geology

ANNALES

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

DE

DELFT.

THE LIBRARY OF THE
JUL 23 1973
UNIVERSITY OF ILLINOIS
AT URBANA-CHAMPAIGN

I

JUL 26 1973

1re LIVRAISON.

LEIDE. — E. J. BRILL.
1884.

GEOLOGY

Digitized by Google

Digitized by Google

VIII in 23 fol.
A 110
733/418

ANNALES

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

DE

DELFT.

1re LIVRAISON.

LEIDE. — E. J. BRILL.
1884.

Digitized by Google

Digitized by Google

505
DEL
v.1-3

Le Conseil de Direction de l'École Polytechnique de Delft a pris la résolution de publier un Recueil périodique, qui contiendra divers mémoires des professeurs, anciens élèves et élèves, ainsi que de ceux qui, pour entreprendre des travaux scientifiques, auraient profité des moyens de recherche que présentent les laboratoires et les collections de cette École.

Le conseil a pensé qu'il serait utile pour l'École Polytechnique de posséder un organe spécial, qui témoignerait des études scientifiques qui s'y accomplissent ou auxquelles elle donne l'impulsion. Cet organe pourrait servir en même temps à publier ce qui, dans les Rapports présentés au Gouvernement au sujet de questions techniques soumises à la Direction, pourrait être d'un intérêt général.

Le Recueil paraîtra sous le titre de „Annales de l'École Polytechnique de Delft", en livraisons trimestrielles formant ensemble un volume d'environ 200 pages par an.

Dans le cas où l'étendue d'un Mémoire dépasserait la mesure d'une livraison et qu'une division ne pourrait se faire sans inconvénient on réunira deux livraisons en un seul fascicule.

Le Conseil de Direction,

J. BOSSCHA,
Président.

A. C. OUDEMANS,
Secrétaire.

Digitized by Google

Digitized by Google

SUR L'EMPLOI DE LA PROJECTION DE MERCATOR POUR LE CALCUL D'UNE TRIANGULATION DANS LE VOISINAGE DE L'ÉQUATEUR

PAR

CH. M. SCHOLS.

I. INTRODUCTION.

§ 1. Le calcul des triangulations secondaires est relativement compliqué à cause de la courbure de la terre. Les corrections qu'il faut introduire pour en tenir compte, quoique très petites, ne peuvent pas être négligées si l'on veut avoir un ensemble bien raccordé. Afin de réduire ce problème à la forme la plus simple on fait usage dans les derniers temps des projections conformes ou orthomorphes, par lesquelles on exécute tout le calcul dans le plan. C'est surtout en Prusse et en Autriche qu'on emploie à présent cet artifice sur une grande échelle et avec le meilleur résultat.

Après avoir calculé la triangulation de premier ordre de la manière usuelle sur la sphéroïde et après avoir déterminé les coordonnées géographiques des sommets des triangles on en calcule les coordonnées planes à l'aide de la projection. Le canevas de second ordre est alors réduit au plan à l'aide de petites corrections qu'on fait aux angles; la compensation de ce canevas et le raccordement au canevas de premier ordre se fait ensuite dans le plan, et l'on détermine enfin les positions géographiques des sommets, soit après avoir ramené le canevas compensé sur la sphéroïde comme en Prusse, soit à l'aide des coordonnées rectilignes de la carte. En Autriche on suit, comme nous le verrons tantôt, un chemin intermédiaire.

Même pour les problèmes compliqués qu'on rencontre dans les triangulations

Digitized by Google

de premier ordre, on peut faire un usage avantageux de cet artifice. Quand le canevas de premier ordre est divisé en plusieurs parties, qui sont compensées séparément, on rencontre parfois des parties qui sont enclavées dans d'autres déjà compensées. On doit alors établir plusieurs équations de condition plus ou moins compliquées, à cause de la courbure de la terre. En Prusse on emploie à présent une projection conforme pour réduire ces équations à une forme plus simple en ramenant le canevas au plan.

§ 2. GAUSS a déjà employé cette méthode lors de la triangulation du Hanovre, en réduisant au plan tout le canevas de premier ordre à l'aide d'une projection conforme dans laquelle les distances sur le méridien principal (celui de Göttingue) restent invariables. (Voyez: O. SCHREIBER, *Theorie der Projectionsmethode der Hannoverschen Landesvermessung, Hannover* 1866). Une seconde application en a été faite par GAUSS dans le mémoire intitulé: *Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, Göttingen* 1844—1847 où le canevas est projeté sur une sphère.

Dans le troisième volume de la publication: *Die Königlich Preussische Landes-Triangulation, Haupt-Dreiecke, Berlin* 1876, on trouve deux applications de cette méthode au calcul de la triangulation primaire, pour laquelle on a fait usage de la projection conique orthomorphe et de coordonnées polaires.

C'est surtout depuis 1876 qu'on fait en Prusse un usage étendu de cette méthode pour la triangulation secondaire. La projection employée à cet effet est une projection double. Le canevas est projeté d'abord sur la sphère à l'aide de la méthode que GAUSS a décrite dans ses „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie" citées plus haut, puis ce canevas est réduit au plan par une projection analogue à celle employée par GAUSS pour la triangulation du Hanovre et qui n'est autre chose que la projection de Mercator appliquée à la sphère et dans laquelle l'équateur a été remplacé par le méridien. Sur cette application on n'a publié que peu de chose; on en trouve quelques indications dans la préface du cinquième volume de la publication: *Die Königlich Preussische Landes-Triangulation Polar-Coordinaten, Geographische Coordinaten und Höhen. Berlin* 1882 et dans: *Jordan und Steppes, Das Deutsche Vermessungswesen, Stuttgart* 1882. *Band I* p. 151. Dans le dernier ouvrage il est fait mention d'une autographie de M. SCHREIBER, *Rechnungsvorschriften für die trigonometrische Abtheilung der Landesaufnahme. Ausgleichung und Berechnung der Triangulation zweiter Ordnung*, qui n'est pas dans le commerce et dans laquelle cette application est décrite en détail. Au même sujet se rapporte encore un mémoire de M. HELMERT, *Näherungsformeln für die Gauss'sche Projection der Hannover'schen Landesvermessung. Zeitschrift für Vermessungswesen. Band V. Stuttgart* 1876 p. 238.

En Autriche on emploie également une projection double. Aprés avoir projeté

Digitized by Google

le canevas sur la sphère par la méthode de GAUSS, il est réduit au plan à l'aide de la projection stéréographique. (Voyez: J. MAREK, *Technische Anleitung zur Ausführung der trigonometrischen Operationen des Katasters. Budapest* 1875).

Pour la triangulation secondaire on néglige en Prusse et en Autriche les petites corrections résultant de la projection sur la sphère et l'on ne tient compte que des corrections qui sont dues à la projection de la sphère sur le plan.

Pour autant que nous avons pu tirer, des sources citées plus haut, des renseignements sur ce point, il paraît que pour le calcul des coordonnées géographiques on ramène en Prusse le canevas compensé à la sphéroïde pour calculer alors ces coordonnées d'après les formules qui se trouvent dans les formulaires: *Rechnungsvorschriften für die trigonometrische Abtheilung der Landesaufnahme. Formeln und Tafeln zur Berechnung der Geographischen Coordinaten aus den Richtungen und Längen der Dreiecksseiten.* 1ste 2te *und* 3te *Ordnung. Berlin* 1878.

En Autriche le canevas est ramené à la sphère sur laquelle on calcule les coordonnées géographiques, à l'aide des formules sphériques pour en déduire ensuite les coordonnées sur la sphéroïde.

§ 3. La circonstance qu'on allait commencer la triangulation de l'île de Sumatra et que deux officiers de l'armée des Indes étaient détachés à l'école polytechnique pour s'appliquer à l'étude de la Géodésie afin d'être chargés de cette triangulation, m'a conduit à étudier ce problème spécialement pour le cas qui se présentera dans cette opération.

Une particularité favorable se produit ici; l'île de Sumatra est coupée en deux par l'équateur et s'étend des deux côtés de l'équateur jusqu'à environ six degrés de latitude. Par cette raison la projection de Mercator appliquée directement à la sphéroïde se présente d'elle-même. A côté des avantages qui l'ont fait adopter en Prusse d'une manière un peu modifiée pour la projection de la sphère sur le plan, elle en présente encore d'autres dans ce cas-ci. D'abord on n'a pas besoin d'une double projection afin de tenir compte de la forme elliptique des méridiens et l'on peut déduire les coordonnées géographiques des coordonnées rectilignes d'une manière fort simple, sans avoir besoin de ramener le canevas à la sphère, comme en Autriche, ou à la sphéroïde, comme en Prusse.

En outre les corrections qu'on doit faire subir aux angles pour réduire le canevas au plan, peuvent être calculées par les mêmes formules très simples, sans qu'on ait à craindre des erreurs qui puissent être comparées aux erreurs d'observation, non seulement jusqu'à six degrés de latitude, comme cela suffirait pour l'île de Sumatra, mais même jusqu'à dix degrés de latitude et pour les plus grands côtés primaires qui se présentent.

Cette méthode peut donc être employée à l'aide de la projection de Mercator

Digitized by Google

pour toute l'étendue des Indes Néerlandaises, même pour la triangulation primaire si cela paraissait désirable.

On doit bien distinguer l'emploi qu'on fait d'une projection pour le calcul des triangulations, de celui qu'on en fait pour la construction d'une carte. Dans le premier cas il importe surtout que les formules soient d'un usage commode, dans le second cas ce sont les déformations qui doivent être aussi petites que possible. Pour les contrées situées près de l'équateur c'est la projection de Mercator qui donne les formules les plus simples; mais pour la construction d'une carte de l'île de Sumatra par exemple, il y a d'autres projections qui sont meilleures. En appliquant pour cette carte la projection de Mercator, le rapport d'agrandissement s'écarterait de $\frac{1}{365}$ de la valeur moyenne, tandis qu'une projection comme celle décrite dans le chapitre VII de mes études sur les projections des cartes (*Studiën over Kaartprojectiën. Nieuw Archief voor Wiskunde Deel VIII.* 1882) donnerait des écarts dix fois plus petits.

On pourrait aussi diviser la carte en feuilles limitées par des méridiens et des parallèles distants d'un nombre rond de minutes et construire chaque feuille d'après une projection à part, comme on fait en Prusse, en Autriche et en Italie.

§ 4. Dans les chapitres suivants nous développerons d'abord les formules pour le calcul des coordonnées rectilignes d'après les coordonnées géographiques et inversement et pour le calcul du rapport d'agrandissement. Ensuite nous développerons les corrections qu'il faut appliquer aux angles et aux côtés pour les projeter de la sphéroïde sur le plan ou du plan sur la sphéroïde. Les formules servant à calculer ces corrections ne seront développées d'abord qu'autant qu'on en a besoin pour la pratique ordinaire. Les termes d'ordres plus élevés seront développés plus tard dans le but de faire voir jusqu'à quel point on est autorisé à les négliger. Mais auparavant nous traiterons le cas de la terre sphérique, non seulement parce que les formules pour ce cas sont beaucoup plus simples, mais aussi parce qu'elles peuvent être déduites plus directement et qu'elles donnent en outre une vérification pour les formules plus compliquées dans le cas de la sphéroïde.

II. CALCUL DES COORDONNÉES ET DU RAPPORT D'AGRANDISSEMENT.

§ 5. Dans la projection de Mercator l'équateur est représenté par une ligne droite; cette droite sera prise pour l'axe des abcisses (X), que nous compterons dans le même sens que les longitudes (λ). Les ordonnées (Y) ainsi que les latitudes (φ) seront prises positives dans la direction du nord.

Digitized by Google

En désignant par a le demi grand axe, par e l'excentricité, par R le rayon de courbure du méridien et par r le rayon du parallèle on a les relations:

$$X = a\,\lambda \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

$$Y = a \int_0^{\varphi} \frac{R}{r}\, d\varphi = a \int_0^{\varphi} \frac{(1-e^2)\, d\varphi}{\cos\varphi\,(1-e^2\sin^2\varphi)} = \tfrac{1}{2}\, a \log\text{nat}\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} + \tfrac{1}{2}\, a\, e \log\text{nat}\frac{1-e\sin\varphi}{1+e\sin\varphi} \quad (2)$$

En développant la dernière formule suivant les puissances de sin φ on trouve la formule:

$$Y = a\,(1-e^2)\sin\varphi + \tfrac{1}{3}\, a\,(1-e^4)\sin^3\varphi + \tfrac{1}{5}\, a\,(1-e^6)\sin^5\varphi + \tfrac{1}{7}\, a\,(1-e^8)\sin^7\varphi + \ldots \quad (3)$$

ou, en substituant pour sin φ son développement en φ:

$$Y = A_1\,\varphi + A_3\,\varphi^3 + A_5\,\varphi^5 + A_7\,\varphi^7 + A_9\,\varphi^9 + A_{11}\,\varphi^{11} + \ldots \quad (4)$$

dans laquelle:

$A_1 = a\,(1-e^2)$

$A_3 = \frac{1}{6}\, a\,(1+e^2-2\,e^4)$

$A_5 = \frac{1}{120}\, a\,(5-e^2+20\,e^4-24\,e^6)$

$A_7 = \frac{1}{5040}\, a\,(61+e^2-182\,e^4+840\,e^6-720\,e^8)$

$A_9 = \frac{1}{362880}\, a\,(1385-e^2+1640\,e^4-23184\,e^6+60480\,e^8-40320\,e^{10})$

$A_{11} = \frac{1}{39916800}\, a\,(50521+e^2-14762\,e^4+599280\,e^6-3659040\,e^8+6652800\,e^{10}-3628800\,e^{12})$

En renversant les formules (1) et (3) nous trouvons:

$$\lambda = \frac{1}{a}\, X \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

$$\sin\varphi = C_1\,Y - C_3\,Y^3 + C_5\,Y^5 - C_7\,Y^7 + C_9\,Y^9 - C_{11}\,Y^{11} + \ldots \quad (6)$$

où

$$C_1 = \frac{1}{a\,(1-e^2)}$$

$$C_3 = \frac{1}{3\,a^3\,(1-e^2)^3}\,(1+e^2)$$

$$C_5 = \frac{1}{15\,a^5\,(1-e^2)^5}\,(2+7e^2+2\,e^4)$$

$$C_7 = \frac{1}{315\,a^7\,(1-e^2)^7}\,(17+129\,e^2+129\,e^4+17\,e^6)$$

$$C_9 = \frac{1}{2835\,a^9\,(1-e^2)^9}\,(62+824\,e^2+1776\,e^4+824\,e^6+62\,e^8)$$

$$C_{11} = \frac{1}{155925\,a^{11}\,(1-e^2)^{11}}\,(1382+28486\,e^2+107015\,e^4+107015\,e^6+28486\,e^8+1382\,e^{10})$$

A l'aide de la formule:

$$\varphi = \sin\varphi + \frac{\sin^3\varphi}{2.3} + \frac{3.\sin^5\varphi}{2.4.5} + \frac{3.5.\sin^7\varphi}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7.\sin^9\varphi}{2.4.6.8.9} + \frac{3.5.7.9.\sin^{11}\varphi}{2.4.6.8.10.11} +$$

on trouve enfin:

$$\varphi = B_1\,Y - B_3\,Y^3 + B_5\,Y^5 - B_7\,Y^7 + B_9\,Y^9 - B_{11}\,Y^{11} + \ldots \quad (7)$$

Digitized by Google

où:

$$B_1 = \frac{1}{a(1-e^2)}$$

$$B_3 = \frac{1}{6a^3(1-e^2)^3}(1+2e^2)$$

$$B_5 = \frac{1}{120a^5(1-e^2)^5}(5+36e^2+16e^4)$$

$$B_7 = \frac{1}{5040a^7(1-e^2)^7}(61+958e^2+1448e^4+272e^6)$$

$$B_9 = \frac{1}{362880a^9(1-e^2)^9}(1385+38056e^2+122112e^4+77312e^6+7936e^8)$$

$$B_{11} = \frac{1}{39916800a^{11}(1-e^2)^{11}}(50521+2147034e^2+11887952e^4+15895648e^6+5487360e^8+ \\ +353792e^{10})$$

§ 6. Le rapport d'agrandissement, que nous désignerons par m, est donné par la relation:

$$m = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}$$

qui peut être développée facilement suivant les puissances de $\sin\varphi$ ou de φ. Dans la pratique on aura besoin de la valeur de m ou plutôt de $\log m$ en fonction de Y. En prenant le logarithme de m et en différentiant par rapport à Y on trouve:

$$\frac{d\log\text{nat}\, m}{dY} = -\frac{d\log\text{nat}\, r}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dY} = \frac{R\sin\varphi}{r}\cdot\frac{d\varphi}{dY}$$

ou; en remarquant que de la formule (2) il suit:

$$\frac{d\varphi}{dY} = \frac{r}{aR} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

on trouve:

$$\frac{d\log\text{nat}\, m}{dY} = \frac{R\sin\varphi}{r}\cdot\frac{r}{aR} = \frac{\sin\varphi}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

En multipliant les deux membres de (6) par $\frac{dY}{a}$ nous trouvons donc en intégrant:

$$\log\text{nat}\, m = \frac{C_1}{2a}Y^2 - \frac{C_3}{4a}Y^4 + \frac{C_5}{6a}Y^6 - \frac{C_7}{8a}Y^8 + \frac{C_9}{10a}Y^{10} - \frac{C_{11}}{12a}Y^{12} + \ldots\ldots \quad (10)$$

Les formules (7) et (10) peuvent être développées aussi d'après la série de Maclaurin en partant des relations (8) et (9). Pour être sûr de nos formules nous les avons développées aussi de cette manière, ce calcul nous a donné exactement les mêmes expressions.

§ 7. Dans les formules des §§ 5 et 9 les quantités φ et λ sont exprimées en parties du rayon comme unité. Pour le calcul numérique il vaut mieux de

Digitized by Google

les exprimer en secondes et de changer le logarithme naturel de la formule (10) en logarithme ordinaire. En faisant ce changement et en désignant par M = 0,4342944819 le module des logarithmes ordinaires nous trouvons:

$$X = (a.\ \text{arc}\ 1'')\,\lambda \qquad \lambda = \frac{1}{a.\ \text{arc}\ 1''}\,X$$

$$Y = a_1\,\varphi + a_3\,\varphi^3 + a_5\,\varphi^5 + a_7\,\varphi^7 + a_9\,\varphi^9 + a_{11}\,\varphi^{11} +$$

$$\varphi = b_1\,Y - b_3\,Y^3 + b_5\,Y^5 - b_7\,Y^7 + b_9\,Y^9 - b_{11}\,Y^{11} +$$

$$\log m = c_2\,Y^2 - c_4\,Y^4 + c_6\,Y^6 - c_8\,Y^8 + c_{10}\,Y^{10} - c_{12}\,Y^{12} +$$

où:

$$a_1 = A_1\ \text{arc}\ 1'' \qquad b_1 = B_1\ \frac{1}{\text{arc}\ 1''} \qquad c_2 = \frac{C_1\ M}{2\,a}$$

$$a_3 = A_3\ \text{arc}^3\ 1'' \qquad b_3 = B_3\ \frac{1}{\text{arc}\ 1''} \qquad c_4 = \frac{C_3\ M}{4\,a}$$

$$a_5 = A_5\ \text{arc}^5\ 1'' \qquad b_5 = B_5\ \frac{1}{\text{arc}\ 1''} \qquad c_6 = \frac{C_5\ M}{6\,a}$$

$$a_7 = A_7\ \text{arc}^7\ 1'' \qquad b_7 = B_7\ \frac{1}{\text{arc}\ 1''} \qquad c_8 = \frac{C_7\ M}{8\,a}$$

$$a_9 = A_9\ \text{arc}^9\ 1'' \qquad b_9 = B_9\ \frac{1}{\text{arc}\ 1''} \qquad c_{10} = \frac{C_9\ M}{10\,a}$$

$$a_{11} = A_{11}\ \text{arc}^{11}\ 1'' \qquad b_{11} = B_{11}\ \frac{1}{\text{arc}\ 1''} \qquad c_{12} = \frac{C_{11}\ M}{12\,a}$$

En prenant le mètre comme unité de longueur et en adoptant d'après Bessel:

$$\log a = 6{,}8046434636.5$$
$$\log e^2 = 7{,}8244104149.1 - 10$$

nous trouvons pour les différents coëfficients:

$$a\ \text{arc}\ 1'' = 30{,}9184939033 \qquad \frac{1}{a.\ \text{arc}\ 1''} = 0'',032343101935 3$$

$$a_1 = 30{,}7121323703 \qquad b_1 = 0{,}0325604223094$$
$$\log a_3 = 0{,}0860673878 - 10 \qquad \log b_3 = 4{,}1368275041 - 20$$
$$\log a_5 = 8{,}8518033303 - 30 \qquad \log b_5 = 9{,}9459817 10 - 40$$
$$\log a_7 = 7{,}68655839 - 40 \qquad \log b_7 = 5{,}82888641 - 50$$
$$\log a_9 = 6{,}5565227 - 50 \qquad \log b_9 = 1{,}7550702 - 60$$
$$\log a_{11} = 5{,}448279 - 60 \qquad \log b_{11} = 7{,}709664 - 80$$

$$\log c_2 = 5{,}730375747 87 - 20$$
$$\log c_4 = 1{,}3516433017 - 30$$
$$\log c_6 = 7{,}1813002 84 - 50$$
$$\log c_8 = 3{,}07164003 - 60$$
$$\log c_{10} = 8{,}9947839 - 80$$
$$\log c_{12} = 4{,}939769 - 90$$

Dans les formules pour Y, φ et *log m*, nous avons développé plus de termes qu'il n'en faut ordinairement; nous l'avons fait afin de pouvoir examiner lesquels des termes peuvent être négligés. Nous donnons ici tous les termes que

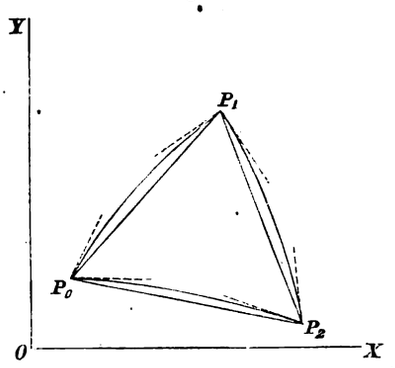
Digitized by Google

nous avons développés avec les valeurs ou les logarithmes des coëfficients; dans le chapitre IV nous examinerons lesquels de ces termes il faut calculer et avec combien de chiffres.

III. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LA PROJECTION DE LA LIGNE GÉODÉSIQUE.

§ 8. Dans les projections conformes ou orthomorphes les angles restent invariables, d'où il suit que les figures sur la carte sont semblables aux figures sur la sphéroïde. Mais cette similitude n'a lieu que pour des figures infinément petites; si l'on prend une figure d'une certaine étendue, on remarque des déformations qui se font sentir en premier lieu dans les variations du rapport d'agrandissement, exprimé, pour la projection de Mercator, par la formule (10).

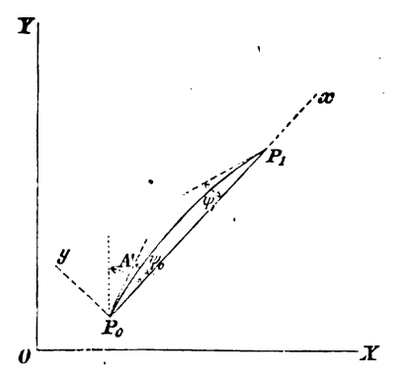
Fig. 1.



Des variations de ce rapport il suit immédiatement que les lignes qu'on doit regarder comme droites sur la sphéroïde, c'est-à-dire les lignes géodésiques, seront représentées sur la carte par des courbes; d'où il suit qu'un triangle géodésique aura pour projection un triangle curviligne (fig. 1).

Au lieu de ce triangle curviligne on prendra le triangle rectiligne formé par les droites qui relient sur la carte les projections des sommets du triangle géodésique. A cet effet les angles de ce triangle doivent subir des corrections qui sont égales à la somme ou à la différence des angles entre les lignes représentant sur la carte les lignes géodésiques, et les lignes droites reliant les projections des sommets des triangles ou, ce qui revient au même, les cordes des projections des lignes géodésiques.

Fig. 2.



De même, la longueur d'un côté sur la sphéroïde ne sera pas égale à la distance des projections des sommets.

Il faudra donc calculer les angles ψ_0 et ψ_1 (fig. 2) entre la projection de la ligne géodésique et la corde de cette projection; puis

Digitized by Google

il faudra développer la relation qui existe entre la longueur de la ligne géodésique, que nous nommerons S, et la distance $P_o P_1 = s$ sur la carte. Pour cela il faudra établir d'abord l'équation différentielle de la ligne géodésique.

§ 9. Dans les mémoires cités dans le § 2, l'équation différentielle de la projection de la ligne géodésique est établie au moyen du calcul des variations. Comme nous le verrons tantôt, la longueur de la ligne géodésique est exprimée par:

$$\int \frac{1}{m} \sqrt{d\,X^2 + d\,Y^2}$$

et comme cette ligne est, sur la sphéroïde, la plus courte distance entre les deux points, il faut chercher le minimum de cette intégrale.

Nous suiverons ici un autre chemin; en partant de la relation bien connue pour la ligne géodésique:

$$r \sin A = \text{const} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

où A désigne l'azimut sur la sphéroïde, nous déterminerons d'abord la courbure de la projection de la ligne géodésique.

Comme les méridiens sur la carte sont représentés par des lignes parallèles à l'axe des Y, l'angle qu'un élément de la ligne $P_1 P_2$ (fig. 2) fait avec cet axe est égale à l'azimut A sur la sphéroïde; d'où il suit que l'angle de contingence est égal à $d\,A$. En désignant la longueur d'un élément de la ligne géodésique sur la sphéroïde par $d\,S$, la longueur de l'élément correspondant dans la projection sera $m.\,d\,S$; d'où il suit pour la courbure de la projection de la ligne géodésique:

$$\frac{d\,A}{m\,d\,S} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

En différentiant l'équation (11) nous trouvons:

$$\frac{d\,r}{d\,\varphi}\,\frac{d\,\varphi}{d\,S} \sin A + r \cos A\,\frac{d\,A}{d\,S} = o$$

d'où il suit pour $\frac{d\,A}{d\,S}$, si nous remarquons qu'on a:

$$\frac{d\,\varphi}{d\,S} = \frac{\cos A}{R} \qquad \text{et} \qquad \frac{d\,r}{d\,\varphi} = -R \sin \varphi,$$

$$\frac{d\,A}{d\,S} = \frac{\sin \varphi \sin A}{r}.$$

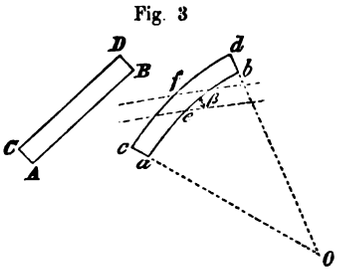
En introduisant cette valeur dans l'expression (12) et en observant que m est égal à $\frac{a}{r}$, on trouve pour la courbure

$$\frac{\sin \varphi}{a} \sin A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Digitized by Google

§ 10. Voici encore une autre démonstration de l'expression pour la courbure de la projection de la ligne géodésique.

Fig. 3



Prenons le rectangle A B C D (fig. 3) composé de lignes géodésiques infiniment petites; ce rectangle sera projeté suivant le rectangle curviligne $a\,b\,c\,d$. Traçons par les points e et f sur le milieu de $a\,b$ et de $c\,d$ les lignes pour lesquelles le rapport d'agrandissement est constant et désignons par m et $m + d\,m$ ces rapports. Désignons en outre par $d\,z$ la distance de ces deux lignes et par β l'angle que fait la première avec la ligne $a\,b$. Nous aurons:

$$a\,b = m \times \text{A B}.$$

$$c\,d = (m + d\,m) \times \text{C D} = (m + d\,m) \times \text{A B}.$$

$$a\,c = b\,d = e\,f = \frac{d\,z}{\cos\,\beta}.$$

En prolangeant les lignes $c\,a$ et $d\,b$ nous trouverons par leur intersection le centre o du cercle osculateur, de sorte que $\frac{1}{o\,a}$ est la courbure de la ligne $a\,b$. De la figure nous tirons la relation:

$$\frac{o\,c}{o\,a} = \frac{o\,a + a\,c}{o\,a} = \frac{c\,d}{a\,b}$$

ou, en substituant les valeurs de $a\,c$, $a\,b$ et de $c\,d$:

$$\frac{o\,a + \frac{d\,z}{\cos\,\beta}}{o\,a} = \frac{(m + d\,m)\,\text{A B}}{m.\,\text{A B}}$$

d'où il suit pour la courbure:

$$\frac{1}{o\,a} = \frac{d\,m}{m\,d\,z}\cos\beta = \frac{d\,\log\,\text{nat}\,m}{d\,z}\cos\beta.$$

De cette expression pour la courbure de la projection de la ligne géodésique, qui est tout à fait générale [1]), on peut déduire la forme particulière pour la projection de Mercator, en remarquant que dans cette projection ce sont les parallèles qui ont un rapport constant pour l'agrandissement; d'où il suit: $d\,z = d\,\text{Y}$ et $\beta = 90° - \text{A}$; l'expression pour la courbure se change donc en:

$$\frac{d\,\log\,\text{nat}\,m}{d\,\text{Y}}\sin\,\text{A}$$

---

1) Dans un mémoire sur la Théorie mathématique des Cartes géographiques (Journal de Liouville T. XVII. 1852), O. Bonnet donne à la page 314 l'expression générale pour la courbure de la projection d'une ligne quelconque, d'où l'on peut déduire facilement l'expression donnée pour la ligne géodésique.

Digitized by Google

ou, en ayant égard à l'équation (9), en:

$$\frac{\sin\varphi}{a}\sin A'$$

ce qui est conforme avec (13).

§ 11. Pour les applications que nous ferons dans les chapitres suivants nous prendrons un autre système de coordonnées. Nous prendrons le point P_o (fig. 2) comme origine, la droite $P_o P_1$ pour l'axe des x et une perpendiculaire sur $P_o P_1$ pour l'axe des y.

Si nous appelons A' l'angle que fait la ligne $P_o P_1$ avec l'axe des Y, c'est à dire l'azimut de $P_o P_1$ dans la carte, et si nous désignons par ψ l'angle que fait un élément de la courbe $P_o P_1$ avec l'axe des x, nous aurons $A = A' - \psi$. Par cela l'expression (13) devient:

$$\frac{\sin\varphi}{a}\sin(A'-\psi) = \frac{\sin\varphi}{a}(\sin A'\cos\psi - \cos A'\sin\psi)$$

ou, en posant

$$\frac{\sin\varphi}{a} = k \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tang}\psi = \frac{dy}{dx} = p$$

$$\frac{k\sin A' - k\,p\cos A'}{\sqrt{1+p^2}}$$

La courbure étant exprimée aussi par:

$$\frac{-\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{3/2}} = \frac{-\frac{d^2y}{dx^2}}{(1+p^2)^{3/2}}$$

nous trouvons en égalisant ces deux expressions:

$$\frac{-\frac{d^2y}{dx^2}}{(1+p^2)^{3/2}} = \frac{k\sin A' - p\,k\cos A'}{\sqrt{1+p^2}}$$

ou enfin:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -k\sin A' + p\,k\cos A' - p^2 k\sin A' + p^3 k\cos A' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

ce qui est l'équation différentielle de la projection de la ligne géodésique sous la forme que nous employerons dans la suite.

Digitized by Google

IV DÉVELOPPEMENT DE $\psi_o\ \psi_1$ ET DE $Log\ \frac{S}{s}$ JUSQU'AUX TERMES DU SECOND ORDRE INCLUS.

§ 12. Pour développer les quantités $\psi_o\ \psi_1$ et $\log \frac{S}{s}$ jusqu'aux termes du 2me ordre en $P_o\ P_1 = s$ il suffit de poser pour l'équation de la courbe $P_o\ P_1$:

$$y = \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)_o x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\,y}{d\,x^2}\right)_o x^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3\,y}{d\,x^3}\right)_o x^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15$$

La quantité $\left(\frac{d\,y}{a\,x}\right)_o = p_o$ est une des constantes [1]) de l'intégration; pour la déterminer il faut mettre dans (15) $y = o$, $x = s$. On a alors:

$$o = \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)_o s + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\,y}{d\,x^2}\right)_o s^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3\,y}{d\,x^3}\right)_o s^3$$

d'où il suit:

$$p_o = -\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\,y}{d\,x^2}\right)_o s - \frac{1}{6}\left(\frac{d^3\,y}{d\,x^3}\right)_o s^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

La quantité p_o est donc du premier ordre en s. Pour la déterminer jusqu'aux termes du second ordre inclus, on peut négliger les termes du second ordre dans $\left(\frac{d^3\,y}{d\,x^3}\right)_o$. Pour cette dernière quantité on a donc d'après (14):

$$\left(\frac{d^2\,y}{d\,x^2}\right)_o = -k_o \sin A' + p_o k_o \cos A'$$

où k_o représente la valeur de k pour le point P_o, c'est à dire pour $Y = Y_o$.

Pour avoir $\frac{d^3\,y}{d\,x^3}$ nous différentions l'équation (14) par rapport à x et nous trouvons, en désignant par k' la dérivée de k par rapport à Y:

$$\frac{d^3\,y}{d\,x^3} = (-k' \sin A' + p\,k' \cos A' - p^2\,k' \sin A' + p^3 k' \cos A')\frac{d\,Y}{d\,x} +$$

$$+ (k \cos A' - 2\,p\,k \sin A' + 3\,p^2\,k \cos A')\frac{d\,p}{d\,x}$$

ou, en remarquant qu'on a: $\frac{d\,p}{d\,x} = \frac{d^3\,y}{d\,x^2}$ et $\frac{d\,Y}{d\,x} = \cos A' + p \sin A'$:

$$\frac{d^3\,y}{d\,x^3} = -(k' + k^2)\sin A' \cos A' + p\,[(k' + k^2)\cos^2 A' - (k' - 2\,k^2)\sin^2 A'] - 6\,p^2\,k^2 \sin A' \cos A' +$$

$$+ p^3\,[(k' + 4\,k^2)\cos^2 A' - (k' - 2\,k^2)\sin^2 A'] + p^4\,(k' + 5\,k^2)\sin A' \cos A' + 3\,p^5\,k^2 \cos^2 A'$$

---

1) L'équation (14) étant du second ordre, on doit avoir deux constantes. Ici une de ces constantes est égale à zéro parce que nous avons pris pour origine des coordonnées un des points de la courbe.

Digitized by Google

d'où nous tirons pour la valeur de $\left(\frac{d^3 y}{d x^3}\right)_o$ jusqu'aux termes du premier degré exclusivement:

$$\left(\frac{d^3 y}{d x^3}\right)_o = -(k_o' + k_o^2) \sin A' \cos A'.$$

En substituant les valeurs de $\left(\frac{d^2 y}{d x^2}\right)_o$ et de $\left(\frac{d^3 y}{d x^3}\right)_o$ dans (16), nous trouvons:

$$p_o = -\frac{1}{2}[-k_o \sin A' + k_o p_o \cos A'] s + \frac{1}{6}(k_o' + k_o^2) \sin A' \cos A' s^2$$

d'où il suit:

$$p_o = \frac{1}{2} k_o s \sin A' + \frac{1}{12}(2 k'_o - k_o^2) s^2 \sin A' \cos A'$$

$$\left(\frac{d^2 y}{d x^2}\right)_o = -k_o \sin A + \frac{1}{2} k_o^2 s \sin A' \cos A'$$

$$\left(\frac{d^3 y}{d x^3}\right)_o = -(k'_o + k_o^2) \sin A' \cos A'.$$

§ 13. L'angle ψ_o (fig. 2) est égal à la valeur de ψ pour $x = o$, d'où il suit jusqu'aux termes du second ordre inclus:

$$\psi_o = \text{tang}\, \psi_o = p_o = \frac{1}{2} k_o s \sin A' + \frac{1}{12}(2 k'_o - k_o^2) s^2 \sin A' \cos A'$$

L'angle ψ_1 est la valeur de ψ pour $x = s$ avec le signe contraire, d'où il suit:

$$\psi_1 = \text{tang}\, \psi_1 = -p_1$$

De (15) on tire en différentiant:

$$p = \frac{d y}{d x} = \left(\frac{d y}{d x}\right)_o + \left(\frac{d^2 y}{d x^2}\right)_o x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^3 y}{d x^3}\right)_o x^2$$

ou, en posant $x = s$:

$$\psi_1 = -p_1 = -\left(\frac{d y}{d x}\right)_o - \left(\frac{d^2 y}{d x^2}\right)_o s - \frac{1}{2}\left(\frac{d^3 y}{d x^3}\right)_o s^2 = \frac{1}{2} k_o s \sin A' + \frac{1}{12}(4 k'_o + k_o^2) s^2 \sin A' \cos A'.$$

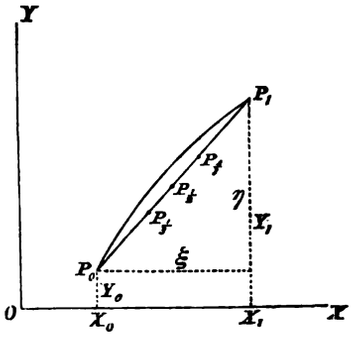
§ 14. Si nous désignons par ξ et par η les différences des abscisses et des ordonnées des points P_o et P_1 dans le premier système des coordonnées, nous aurons (fig. 4)

$$\xi = X_1 - X_o = s \sin A' \quad \text{et:} \quad \eta = Y_1 - Y_o = s \cos A'$$

et les formules pour ψ_o et ψ_1 deviennent:

$$\left.\begin{aligned} \psi_o &= \frac{1}{2} k_o \xi + \frac{1}{12}(2 k'_o - k_o^2) \xi \eta \\ \psi_1 &= \frac{1}{2} k_o \xi + \frac{1}{12}(4 k'_o + k_o^2) \xi \eta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Fig. 4.



Digitized by Google

Dans ces formules, k_o et k'_o désignent les valeurs de k et de k' pour le point P_o. On peut leur donner d'autres formes en introduisant les valeurs de k et de k' pour un autre point situé entre P_o P_1.

En prenant le point $P_{\frac{1}{2}}$ sur le milieu de la corde $P_o P_1$ et en désignant par $k_{\frac{1}{2}}$ et $k'_{\frac{1}{2}}$ les valeurs de k et de k' pour ce point, c'est à dire pour $Y = Y_o + \frac{1}{2}\eta = \frac{1}{2}(Y_o + Y_1)$, on doit poser:

$$k_o = k_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\eta\, k'_{\frac{1}{2}} \qquad k_o' = k'_{\frac{1}{2}}$$

d'où il suit pour ψ_o et ψ_1:

$$\left.\begin{aligned} \psi_o &= \frac{1}{2} k_{\frac{1}{2}}\xi - \frac{1}{12}(k'_{\frac{1}{2}} + k_{\frac{1}{2}}^2)\,\xi\,\eta \\ \psi_1 &= \frac{1}{2} k_{\frac{1}{2}}\xi + \frac{1}{12}(k'_{\frac{1}{2}} + k_{\frac{1}{2}}^2)\,\xi\,\eta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Une autre forme très commode pour le calcul s'obtient en introduisant dans ψ_o les valeurs de k et de k' pour le point $P_{\frac{1}{3}}$, situé à une distance $P_o P_{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\delta$ de P_o, et dans la formule pour ψ_1 les valeurs pour le point $P_{\frac{2}{3}}$, situé à une distance $P_o P_{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\delta$ de P_o. Posons donc:

$$k_o = k_{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\eta\, k'_{\frac{1}{3}} \qquad k_o' = k'_{\frac{1}{3}}$$

$$k_o = k_{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}\eta\, k'_{\frac{2}{3}} \qquad k_o' = k'_{\frac{2}{3}}$$

nous trouvons

$$\left.\begin{aligned} \psi_o &= \frac{1}{2} k_{\frac{1}{3}}\xi - \frac{1}{12} k_{\frac{1}{3}}^2\,\xi\,\eta \\ \psi_1 &= \frac{1}{2} k_{\frac{2}{3}}\xi + \frac{1}{12} k_{\frac{2}{3}}^2\,\xi\,\eta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Dans toutes ces formules, k désigne la valeur $\frac{\sin\varphi}{a}$, qu'on peut exprimer en fonction de Y à l'aide de la formule (6). Pour avoir la valeur de k' en fonction de Y on peut différentier cette expression pour k par rapport à Y. Dans la pratique on n'en aura pas besoin et pour discuter les formules (17) à (19) il vaut mieux de l'exprimer en fonction de la latitude correspondente φ. Pour cela nous trouvons en différentiant l'expression: $k = \frac{\sin\varphi}{a}$

$$k' = \frac{\cos\varphi}{a}\cdot\frac{d\varphi}{dY} = \frac{\cos\varphi}{a}\cdot\frac{r}{aR} = \frac{\cos^2\varphi}{a^2}\cdot\frac{1-e^2\sin^2\varphi}{1-e^2} = \frac{\cos^2\varphi}{a^2}\left(1+\frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\varphi\right)$$

§ 15. Examinons maintenant les différentes formules obtenues pour ψ_o et ψ_1. Les formules (17) sont les moins propres pour le calcul. Les termes en $\xi\eta$ ont des valeurs différentes dans les deux formules, et ils ne peuvent être négligés même pour des valeurs très petites de φ. Pour $\varphi = o$ la valeur de k' devient

Digitized by Google

égale à $\frac{1}{a^2(1-e^2)} = \frac{1}{b^2}$, en désignant par b le petit demi-axe de l'ellipsoïde, et la valeur maximum de $\xi\eta$ pour une valeur déterminée de s est $\frac{1}{2}s^2$, de sorte que les termes en $\xi\eta$ peuvent avoir la valeur de: $\frac{1}{12}\frac{s^2}{b^2}$ dans ψ_0 et de: $\frac{1}{6}\frac{s^2}{b^2}$ dans ψ_1, c'est à dire pour $s = 100$ K M. 4″,255 et 8″,509.

Les formules (18) se prêtent mieux au calcul; les termes en $\xi\eta$ sont les mêmes dans les deux formules, de sorte qu'on n'a qu'à les calculer une fois. De plus le facteur qui entre dans ce terme est à peu près constant, puisqu'on a:

$$k' + k^2 = \frac{\cos^2\varphi}{a^2}\left(1 + \frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\varphi\right) + \frac{\sin^2\varphi}{a^2} = \frac{1}{a^2}\left(1 + \frac{e^2}{1-e^2}\cos^4\varphi\right)$$

En mettant pour ce facteur sa valeur pour $\varphi = o$, c'est à dire:

$$\frac{1}{a^2}\left(1 + \frac{e^2}{1-e^2}\right) = \frac{1}{a^2(1-e^2)} = \frac{1}{b^2}$$

on néglige la quantité:

$$\frac{1}{12}\frac{a^2}{1-e^2}e^2(1-\cos^4\varphi)\xi\eta = \frac{s^2e^2}{24\,b^2}(1-\cos^4\varphi)\sin 2A'$$

qui n'a qu'une valeur maximum pour $s = 100$ K. M. de:

0″,00031	pour	$\varphi = 6°$
0″,00084	»	$\varphi = 10°$

Observons toutefois que les termes négligés du troisième ordre peuvent avoir dans ce cas, comme nous le verrons plus tard, les valeurs de:

0″,0034	pour	$\varphi = 6°$
0″,0056	»	$\varphi = 10°$

de sorte que les formules:

$$\left.\begin{aligned}\psi_0 &= \frac{1}{2}k\xi - \frac{1}{12\,b^2}\xi\eta \\ \psi_1 &= \frac{1}{2}k\xi + \frac{1}{12\,b^2}\xi\eta\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

où k est pris avec l'argument $Y = \frac{1}{2}(Y_0 + Y_1)$, peuvent être employées pour toute l'étendue de l'île de Sumatra sans commettre une erreur qui dépasse 0″,0034 pour la distance de $s = 100$ K. M., et pour toute l'étendue des Indes Néerlandaises sans commettre une erreur qui dépasse 0″,0056 dans les mêmes circonstances.

Les formules (19) se prêtent aussi très bien au calcul, quoiqu'il faille calculer deux fois le terme en ξ. Pour ψ_0 on doit prendre la valeur de k avec l'argument $Y = Y_0 + \frac{1}{3}\eta = \frac{1}{3}(2\,Y_0 + Y_1)$ et pour ψ_1 avec l'argument $Y = Y_0 + \frac{2}{3}\eta =$

Digitized by Google

$= \frac{1}{3}(Y_o + 2\,Y_1)$. Par contre on peut négliger tout à fait le second terme, dont la valeur maximum est égale à:

$$\frac{s^2 \sin^2 \varphi}{24\,a^2}$$

c'est à dire pour $s = 100$ K. M.:

0″,0231	pour	$\varphi = 6°$
0″,0637	»	$\varphi = 10°$

Comme ces quantités sont plus petites que les erreurs fortuites des observations on pourra employer les formules:

$$\left.\begin{array}{lll} \psi_o = \frac{1}{2} k\,\xi & \text{argument} & Y = \frac{1}{3}(2\,Y_o + Y_1) \\ \psi_1 = \frac{1}{2} k\,\xi & \text{»} & Y = \frac{1}{3}(Y_o + 2\,Y_1) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

même pour les plus grands côtés, dans le cas où le canevas non compensé doit être projeté de la sphéroïde sur le plan.

Dans le cas où il faut ramener un canevas compensé sur la sphéroïde et qu'on exige la plus grande précision pour les grandes distances, il faudra tenir compte des termes en $\xi\eta$, mais il vaudra mieux dans ce cas d'employer les formules (20).

§ 16. Dans les formules développées pour le calcul de ψ_o et de ψ_1 il n'entre qu'une seule quantité qui soit fonction de φ et par conséquent de l'ordonnée Y; c'est la quantité:

$$\frac{1}{2} k = \frac{\sin \varphi}{2\,a}$$

Cette quantité peut être exprimée en fonction de Y par la formule (6) au moyen de laquelle nous trouvons:

$$\frac{1}{2} k = \frac{C_1}{2\,a} Y \left[1 - \frac{C_3}{C_1} Y^2 + \frac{C_5}{C_1} Y^4 - \frac{C_7}{C_1} Y^6 + \frac{C_9}{C_1} Y^8 - \frac{C_{11}}{C_1} Y^{10} + \ldots\right]$$

Comme on calculera la valeur du terme $\frac{1}{2} k\,\xi$ à l'aide de logarithmes, nous prendrons le logarithme de cette expression, pour lequel nous trouvons:

$$\log \text{nat}\, \frac{1}{2} k = \log \text{nat}\, Y + D_o - D_2 Y^2 + D_4 Y^4 - D_6 Y^6 + D_8 Y^8 - D_{10} Y^{10} + \ldots \quad (22)$$

où

$$D_o = \log \text{nat}\, \frac{C_1}{2\,a} = \log \text{nat}\, \frac{1}{2\,a^2(1-e^2)} = \log \text{nat}\, \frac{1}{2\,b^2}$$

$$D_2 = \frac{1}{3\,a^2(1-e^2)^2}(1+e^2)$$

$$D_4 = \frac{1}{90\,a^4(1-e^2)^4}(7 + 32\,e^2 + 7\,e^4)$$

Digitized by Google

$$D_6 = \frac{1}{2835\, a^6 (1-e^2)^6}(62 + 699\, e^2 + 699\, e^4 + 62\, e^6)$$

$$D_8 = \frac{1}{18900\, a^8 (1-e^2)^8}(127 + 2704\, e^2 + 6456\, e^4 + 2704\, e^6 + 127\, e^8).$$

$$D_{10} = \frac{1}{467775\, a^{10} (1-e^2)^{10}}(1022 + 35386\, e^2 + 155660\, e^4 + 155660\, e^6 + 35386\, e^8 + 1022\, e^{10}).$$

Pour le calcul numérique il convient de disposer la formule de sorte qu'on obtienne ψ_0 et ψ_1 directement en secondes et d'employer les logarithmes vulgaires. Mettons pour cela:

$$\frac{k}{2 \operatorname{arc} 1''} = H$$

nous aurons:

$$\log H = \log Y + d_0 - d_2\, Y^2 + d_4\, Y^4 - d_6\, Y^6 + d_8\, Y^8 - d_{10}\, Y^{10} + \ldots\ldots$$

où:

$$d_0 = M D_0 - \log \operatorname{arc} 1'' = \log \frac{1}{2 b^2 \operatorname{arc} 1''}$$

$$d_2 = M D_2$$
$$d_4 = M D_4$$
$$d_6 = M D_6$$
$$d_8 = M D_8$$
$$d_{10} = M D_{10}$$

$$d_0 = 1{,}4070165697 - 10$$
$$\log d_2 = 5{,}5600818608 - 20$$
$$\log d_4 = 1{,}334771006 - 30$$
$$\log d_6 = 7{,}19892395 - 50$$
$$\log d_8 = 3{,}1098146 - 60$$
$$\log d_{10} = 9{,}052542 - 80$$

Pour la même raison il convient de mettre le second terme de (20) sous la forme:

$$[1]\, \xi\, \eta$$

où

$$[1] = \frac{1}{12\, b^2 \operatorname{arc} 1''} \qquad \log [1] = 0{,}628865 - 10$$

§ 17. Pour déterminer la longueur de la ligne géodésique nous remarquons que, lorsque nous désignons par dS l'élément de la ligne géodésique, cet élément aura pour projection une longueur $m\, dS$; cette même longueur est exprimée aussi par $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, d'où il suit:

$$dS = \frac{1}{m}\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{1}{m}\sqrt{1 + p^2}\, dx.$$

En intégrant entre les limites $x = o$ et $x = s$ nous trouvons pour la ligne géodésique entre les points P_o et P_1:

$$S = \int_o^s \frac{1}{m}\sqrt{1 + p^2}\, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Pour avoir le rapport $\frac{S}{s}$ jusqu'aux quantités de second ordre incluses il suffit de poser:

$$\sqrt{1 + p^2} = 1 + \tfrac{1}{2} p^2.$$

Digitized by Google

Pour la valeur de p nous tirons de (15):

$$p = \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)_o + \left(\frac{d^2\,y}{d\,x^2}\right)_o x = \tfrac{1}{2}\,k_o\,s\,\sin A' - k_o\,x\,\sin A' = k_o \sin A'\,(\tfrac{1}{2}\,s - x)$$

d'où il suit:

$$\sqrt{1+p^2} = 1 + \tfrac{1}{2}\,p^2 = 1 + \tfrac{1}{2}\,k_o^2 \sin^2 A'\,(\tfrac{1}{4}\,s^2 - s\,x + x^2).$$

La valeur de m est donnée par (9)

$$\frac{d \log \text{nat}\, m}{d\,Y} = \frac{\sin \varphi}{a} = k$$

d'où nous tirons:

$$\frac{d\,\frac{1}{m}}{d\,Y} = -\frac{1}{m^2}\frac{d\,m}{d\,Y} = -\frac{1}{m}\frac{d \log \text{nat}\, m}{d\,Y} = -\frac{1}{m}\,k.$$

Pour avoir la valeur de $\frac{1}{m}$ pour les différents points de la courbe $P_0 P_1$ (fig. 2) en fonction de x nous développons par la formule de Maclaurin et nous trouvons:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_o} + \left(\frac{d\,\frac{1}{m}}{d\,x}\right)_o x + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\,\frac{1}{m}}{d\,x^2}\right)_o x^2.$$

Les coefficients qui entrent dans cette formule peuvent être déduits de $\frac{d\,\frac{1}{m}}{d\,Y}$. On a:

$$\frac{d\,\frac{1}{m}}{d\,x} = \frac{d\,\frac{1}{m}}{d\,Y} \cdot \frac{d\,Y}{d\,x} = -\frac{1}{m}\,k\,(\cos A' + p \sin A')$$

et en différentiant par rapport à x

$$\frac{d^2\,\frac{1}{m}}{d\,x^2} = \frac{1}{m}\,k^2\,(\cos A' + p \sin A')^2 - \frac{1}{m}\,k'\,(\cos A' + p \sin A')^2 - \frac{1}{m}\,k\,\frac{d^2\,y}{d\,x^2}\sin A'$$

De ces deux formules on tire, en mettant pour p_o et $\left(\frac{d^2\,y}{d\,x^2}\right)_o$ leurs valeurs,

$$\left(\frac{d\,\frac{1}{m}}{d\,x}\right)_o = -\frac{1}{m_o}\,(k_o \cos A' + \tfrac{1}{2}\,k_o^2\,s \sin^2 A')$$

$$\left(\frac{d^2\,\frac{1}{m}}{d\,x^2}\right)_o = \frac{1}{m_o}\,(k_o^2 \cos^2 A' - k'_o \cos^2 A' + k_o^2 \sin^2 A')$$

d'où il suit pour la valeur de $\frac{1}{m}$:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_o}\left[1 - (k_o \cos A' + \tfrac{1}{2}\,k_o^2\,s \sin^2 A')\,x + \tfrac{1}{2}\,(k_o^2 \cos^2 A' + k_o^2 \sin^2 A' - k'_o \cos^2 A')\,x^2\right]$$

En mettant cette valeur, ainsi que celle de $\sqrt{1+p^2}$, dans la formule (23) nous trouvons:

Digitized by Google

$$S = \int_o^s \frac{1}{m_o}\Big[1 - (k_o \cos A' + \tfrac{1}{2} k_o^2 s \sin^2 A')\, x + \tfrac{1}{2}(k_o^2 \cos^2 A' + k_o^2 \sin^2 A' - k'_o \cos^2 A')\, x^2 + \\ + \tfrac{1}{2} k_o^2 \sin^2 A' (\tfrac{1}{3} s^2 - s x + x^2)\Big] d x$$

ou, lorsque nous intégrons:

$$S = \frac{1}{m_o}\Big[s - \tfrac{1}{2} k_o s^2 \cos A' - \tfrac{1}{2\,3} s^3 (4 k'_o \cos^2 A' - 4 k_o^2 \cos^2 A' + k_o^2 \sin^2 A')\Big].$$

En séparant le facteur s et en introduisant les quantités $\xi = s \sin A'$ et $\eta = s \cos A'$ cette expression devient:

$$S = \frac{s}{m_o}\Big[1 - \tfrac{1}{2} k_o \eta - \tfrac{1}{2\,3} (4 k'_o \eta^2 - 4 k_o^2 \eta^2 + k_o^2 \xi^2)\Big]$$

et en prenant les logarithmes:

$$\log \text{nat}\, S = \log \text{nat} \frac{s}{m_o} - \tfrac{1}{2} k_o \eta - \tfrac{1}{2\,3} (4 k'_o \eta^2 - k_o^2 \eta^2 + k_o^2 \xi^2).$$

Cette expression prend une forme plus simple en introduisant les valeurs $m_{\frac{1}{2}}$ $k_{\frac{1}{2}}$ en $k'_{\frac{1}{2}}$ pour le point $P_{\frac{1}{2}}$ sur le milieu de P_o P_1. Pour cela nous avons:

$$\log \text{nat}\, m_o = \log \text{nat}\, m_{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2} k_{\frac{1}{2}} \eta + \tfrac{1}{8} k'_{\frac{1}{2}} \eta^2$$
$$k_o = k_{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2} k'_{\frac{1}{2}} \eta$$
$$k'_o = k'_{\frac{1}{2}}$$

et par suite:

$$\log \text{nat}\, S = \log \text{nat} \frac{s}{m_{\frac{1}{2}}} - \tfrac{1}{2\,3} (k'_{\frac{1}{2}} - k_{\frac{1}{2}}^2)\, \eta^2 - \tfrac{1}{2\,3} k_{\frac{1}{2}}^2 \xi^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

§ 18. En mettant pour k' et k leurs valeurs exprimées en φ nous avons:

$$k' - k^2 = \frac{\cos^2 \varphi}{a^2}\Big(1 + \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^2 \varphi\Big) - \frac{\sin^2 \varphi}{a^2} = \frac{1}{b^2} - \frac{2}{b^2} \sin^2 \varphi + \frac{e^2}{b^2} \sin^4 \varphi;$$

en négligeant le dernier terme de $k' - k^2$ nous pouvons donc écrire pour (24):

$$\log S = \log \frac{s}{m_{\frac{1}{2}}} - \frac{M}{24\, b^2} \eta^2 + \frac{M}{12\, b^2} \sin^2 \varphi \,.\, \eta^2 - \frac{M}{24\, a^2} \sin^2 \varphi \,.\, \xi^2.$$

Pour le calcul numérique il convient d'exprimer le sinus de φ au moyen de la quantité H, dont on a besoin pour le calcul de ψ_0 et de ψ_1, et de calculer les petits termes en unités de la septième décimale. A cet effet nous écrirons:

$$\log S = \log \frac{s}{m} - [2]\, \eta^2 + [3]\, H^2 \eta^2 - [4]\, H^2 \xi^2 \quad . \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

où m et H doivent être prises avec l'argument $Y = \frac{1}{2}(Y_0 + Y_1)$ et où les constantes [2], [3] et [4] ont les valeurs suivantes:

$$[2] = \frac{M\, 10^7}{24\, b^2} \qquad \log [2] = 1{,}6511945 - 10$$

$$[3] = \frac{M\, 10^7 \,\text{arc}^2\, 1''}{3\,(1 - e^2)} \qquad \log [3] = 5{,}53472 - 10$$

$$[4] = \frac{M\, 10^7 \,\text{arc}^2\, 1''}{6} \qquad \log [4] = 5{,}23078 - 10$$

Digitized by Google

La formule (25) suffit pour tous les besoins de la pratique, même pour les plus grands côtés qu'on rencontre, car les termes négligés atteignent pour $s = 100$ K M. seulement la moitié de l'unité de la dixième décimale. Le terme du second ordre en s, que nous avons négligé, c'est à dire

$$-\frac{M\,e^2}{24\,b^2}\sin^4\varphi\,.\,\eta^2$$

est, pour $s = 100$ K M. en unités de la dixième décimale, au plus égal à $-0{,}036$ pour $\varphi = 6°$ et égal à $-0{,}272$ pour $\varphi = 10°$, tandis que les termes du 4me degré ont leur valeur maximum pour $\varphi = 0°$, et cette valeur est au plus égal à $+0{,}459$ ou à $-0{,}046$; de sorte que ces deux erreurs ensemble ne peuvent atteindre la valeur de 0,5 de l'unité de la dixième décimale.

Pour la triangulation secondaire, où l'on n'a jamais d'aussi grands côtés ni besoin d'une aussi grande précision, on peut négliger les deux derniers termes, ce qui donne pour $s = 100$ K M. une erreur de 0,98 unités de la 7me décimale pour $\varphi = 6°$ et de 2,70 pour $\varphi = 10°$. Dans ce cas on peut prendre aussi au lieu de $[2] = \frac{M\,10^7}{24\,b^4}$ le coefficient $\frac{M\,10^7}{24\,a^2}$ dont le logarithme est 1,6483—10. L'erreur maximum n'est alors que de 0,68 pour $\varphi = 6°$ et de 2,40 pour $\varphi = 10°$.

§ 19. Pour les besoins de la pratique il convient de calculer d'avance des tables de Y en fonction de φ et de φ, log m et log $\frac{H}{Y}$ en fonction de Y; pour le calcul de X et de λ il suffit d'avoir une petite table des multiples de $a.\ arc\ 1'' = 30{,}9184939$ Mètres et de $\frac{1}{a.\ arc\ 1''} = 0'',0323431019$.

Pour que ces tables puissent servir dans tous les cas, il faut leur donner une telle étendue qu'elles puissent servir pour les plus grands côtés et pour la plus grande précision qu'on peut exiger.

Pour évaluer la limite de la précision nous mettons qu'on donne les latitudes et les longitudes avec 4 décimales de la seconde. Comme l'unité de la quatrième décimale de la seconde correspond à 3 millimètres sur la surface de la terre il convient de donner Y jusqu'en millimètres et la valeur de φ en 5 décimales de la seconde afin d'être sûr de la quatrième décimale. En prenant pour le plus grand côté 100 K M., la valeur de 3 millimètres correspond à un peu plus qu'une unité de la 8me décimale du logarithme, de sorte que pour les côtés et pour m il suffit d'avoir les logarithmes avec 8 chiffres; pour les tables il convient d'en avoir neuf. La valeur de 3 millimètres correspond à une distance de 100 K M. à un angle de 0,"006, de sorte qu'il suffit d'avoir les angles et les valeurs de ψ_0 et de ψ_1 avec trois décimales de la seconde, sans qu'il soit nécessaire que la dernière décimale soit tout-à-fait exacte. Comme la valeur de ψ_0 ou ψ_1 est pour $s = 100$

Digitized by Google

K M. et $\varphi = 10^{o}$ au plus 281″, il suffit pour le calcul du terme H ξ de ψ_0 ou ψ_1 des logarithmes à 6 décimales. La table des logarithmes de $\frac{H}{Y}$ doit donc avoir au plus 7 décimales.

Nous donnons ici une petite partie des quatre tables. Nous avons choisi une partie dans le voisinage de $\varphi = 6°$, qui est la plus grande latitude de l'île de Sumatra, pour faire voir que, lorsqu'on fait monter les latitudes par minutes et les ordonnées par Kilomètres, on n'a que rarement besoin d'interpoler avec les secondes différences. Comme l'erreur qu'on fait en négligeant les secondes différences est au plus égal à $\frac{1}{8}$ de cette différence en voit que dans le cas de l'île de Sumatra on fait une erreur de 7 millimètres tout au plus dans les ordonnées et de 0,″00007 dans les latitudes, de sorte que seulement pour les latitudes dans le voisinage de 6° on a à calculer l'influence de la 2de différence.

Table pour le calcul de Y.

φ	Y	1re diff	2de d.
5° 55′	655349,711		
		1852,757	
56′	657202,468		56
		1852,813	
57′	659055,281		58
		1852,871	
58′	660908,152		56
		1852,927	
59′	662761,079		58
		1852,985	
6° 0′	664614,064		

Table pour le calcul de φ.

Y	φ	1re diff.	2de d.
660000	5° 57′ 30″,59230		
		32″,38189	
661000	5° 58′ 2″,97419		51
		32″,38138	
662000	5° 58′ 35″,35557		54
		32″,38084	
663000	5° 59′ 7″,73641		55
		32″,38029	
664000	5° 59′ 40″,11670		53
		32″,37976	
665000	6° 0′ 12″,49646		

Digitized by Google

Table pour le calcul de log m et de log H.

Y	log m	diff.	log $\frac{H}{Y}$	diff.
660000	0,0023370.84		1,4054388	
		70.75		48
661000	23441.59		340	
		70.85		48
662000	23512.44		292	
		70.95		47
663000	23583.39		245	
		71.07		48
664000	23654.46		197	
		71.17		48
665000	0,0023725.63		1,4054149	

Aux logarithmes de $\frac{H}{Y}$ il faut ajouter: — 10.

Ces tables sont calculées à l'aide des formules des §§ 7 et 16. Nous reproduisons ces formules en ne mettant que les termes et le nombre de chiffres nécessaire. Les nombres mis entre parenthèses désignent les logarithmes vulgaires des coefficients, et la première formule a été changée de manière que φ doit être exprimé en minutes

$$Y = 1842{,}7279422\ \varphi + (5{,}42052114 - 10)\,\varphi^3 + (7{,}742560 - 20)\,\varphi^5 + (0{,}1336 - 20)\,\varphi^7$$

$$\varphi = 0'',0325604223\ Y - (4{,}13682750 - 20)\,Y^3 + (9{,}945982 - 40)\,Y^5 - (5{,}8289 - 50)\,Y^7$$

$$\log m = (5{,}73037575 - 20)\,Y^2 - (1{,}351643 - 30)\,Y^4 + (7{,}1813 - 50)\,Y^6$$

$$\log \frac{H}{Y} = 1{,}407016570 - 10 - (5{,}5600819 - 20)\,Y^2 + (1{,}33477 - 30)\,Y^4 - (7{,}199 - 50)\,Y^6$$

§ 20. En récapitulant les formules trouvées pour ψ_0 ψ_1 et log S nous avons:

1°. Pour les petites distances:

$\psi_0 = H\,\xi$	argument pour H	$Y = \frac{1}{3}(2\,Y_0 + Y_1)$
$\psi_1 = H\,\xi$	» » H	$Y = \frac{1}{3}(Y_0 + 2\,Y_1)$
$\log S = \log \frac{s}{m} - [2]\,\eta^2$	» » m	$Y = \frac{1}{2}(Y_0 + Y_1)$

$$\log [2] = 1{,}6512 - 10$$

Erreur maximum dans ψ_0 et ψ_1 pour $s = 100$ KM.: 0″,023 pour $\varphi = 6°$; 0″,064 „ $\varphi = 10°$

Erreur maximum dans log S en unités de la 7e décimale pour $s = 100$ KM.: 0,98 „ $\varphi = 6°$; 2,70 „ $\varphi = 10°$

Digitized by Google

2°. Pour les plus grandes distances:

$$\left.\begin{aligned} \psi_0 &= H\xi - [1]\xi\eta \\ \psi_1 &= H\xi + [1]\xi\eta \\ \log S &= \log\frac{s}{m} - [2]\eta^2 + [3]H^2\eta^2 - [4]H^2\xi^2 \end{aligned}\right\} \text{ arg. pour H et } m.\ Y = \tfrac{1}{2}(Y_0 + Y_1)$$

$$\log [1] = 0{,}6289 - 10\ ^1) \qquad \log [2] = 1{,}6512 - 10$$

$$\log [3] = 5{,}5347 - 10 \qquad \log [4] = 5{,}2308 - 10$$

Erreur maximum dans ψ_0 et ψ_1 pour $s = 100$ KM.: $\begin{cases} 0'',0034 \text{ pour } \varphi = 6° \\ 0'',0056 \quad \text{„} \quad \varphi = 10° \end{cases}$

Erreur maximum dans log S pour $s = 100$ KM.
en unités de la 10me décimale: 0,5

Quant au signe qu'il faut donner à ψ_0 et à ψ_1 on ne peut s'y tromper en observant que la projection de la ligne géodésique tourne sa concavité toujours vers l'équateur.

§ 21. En terminant ce chapitre, qui contient tout ce qui est nécessaire pour les besoins ordinaires de la pratique, nous donnerons deux applications. Prenons les deux points avec les ordonnées $Y_0 = 655000$ et $Y_1 = 670000$ et avec la différence des abscisses $\xi = 15000$ Mètres et appliquons le premier système de formules. Pour le calcul de ψ_0 et de ψ_1 nous devons prendre H avec les arguments $Y = 660000$ et 665000.

$\log 660000 = 5{,}819544$	$\log 665000 = 5{,}822822$
$\log \frac{H}{Y} = 1{,}405439 - 10$	$\log \frac{H}{Y} = 1{,}405415 - 10$
$\log \xi = 4{,}176091$	$\log \xi = 4{,}176091$
$\log \psi_0 = 1{,}401074$	$\log \psi_1 = 1{,}404328$
$\psi_0 = 25'',181$	$\psi_1 = 25'',371$

Des valeurs $\xi = 15000$ et $\eta = 15000$ on tire $\log s = 4{,}32660626$. Pour le calcul de log S on doit prendre $\log m$ avec l'argument $Y = 662500$. On a donc:

$\log s = 4{,}3266062.6$	$\log [2] = 1{,}6512 - 10$
$\text{c.log } m = -23547.9$	$\log \eta^2 = 8{,}3522$
$-[2]\eta^2 = -1.0$	$\log [2]\eta^2 = 0{,}0034$
$\log S = 4{,}3242513.7$	

Comme second exemple nous prendrons deux points avec les mêmes ordonnées

---

1) Comme on mesure dans la pratique les angles entre les sections normales et non pas entre les lignes géodésiques, il faut, pour les grandes distances, en tenir compte quand les angles mesurés sont reduits au plan. Comme nous le verrons dans le Chapitre VII on peut le faire en prenant pour [1] la valeur $[1]' = \frac{1 + 2e^2}{12 b^2 \text{ arc } 1''}$, c'est-à-dire log $[1]' = 0{,}6346 - 10$.

Digitized by Google

mais avec une plus grande différence des abscisses, afin d'avoir une plus grande distance des points. Prenons $\xi = 50000$ Mètres nous avons alors $\log s = 4{,}71768375$. L'argument tant pour H que pour $\log m$ est ici $Y = 662500$.

Pour le calcul de ψ_0 et ψ_1 nous avons:

$$\log 662500 = 5{,}821186 \qquad \log [1] = 0{,}6289 - 10$$
$$\log \frac{H}{Y} = 1{,}405427 - 10 \qquad \log \xi = 4{,}6990$$
$$\log H = \overline{7{,}226613} - 10 \qquad \log \eta = \underline{4{,}1761}$$
$$\log \xi = \underline{4{,}698970} \qquad \log \tfrac{1}{2}(\psi_1 - \psi_0) = 9{,}5040 - 10$$
$$\log \tfrac{1}{2}(\psi_1 + \psi_0) = \overline{1{,}925583}$$

$$\tfrac{1}{2}(\psi_1 + \psi_0) = 84'',253$$
$$\tfrac{1}{2}(\psi_1 - \psi_0) = \underline{0'',319}$$
$$\psi_0 = 83'',934 = 1'\,23'',934$$
$$\psi_1 = 84'',572 = 1'\,24'',572$$

Et pour le calcul de $\log S$:

$$\log s = 4{,}7176837.5 \qquad \log [2] = 1{,}6512 - 10 \qquad \log [3] = 5{,}5347 - 10$$
$$c \log m = -\ 23547.91 \qquad \log \eta^2 = \underline{8{,}3522} \qquad \log H^2 = 4{,}4532 - 10$$
$$-[2]\eta^2 = -\ 1.01 \qquad \overline{0{,}0034} \qquad \log \eta^2 = \underline{8{,}3522}$$
$$+[3]H^2\eta^2 = +\ 0.02 \qquad \overline{8{,}3401 - 10}$$
$$-[4]H^2\xi^2 = -\ 0.12$$
$$\log S = \overline{4{,}7153288.5} \qquad \log [4] = 5{,}2308 - 10$$
$$\log H^2 = 4{,}4532 - 10$$
$$\log \xi^2 = \underline{9{,}3979}$$
$$\overline{9{,}0819 - 10}$$

V. DÉVELOPPEMENT DE ψ_0, ψ_1 ET DE *Log* $\frac{S}{s}$ POUR LA SPHÈRE.

§ 22. En prenant le rayon de la sphère comme unité et en mettant zéro pour l'excentricité, les équations (1) et (2) deviennent:

$$X = \lambda$$
$$Y = \tfrac{1}{2} \log \text{nat.} \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

En résolvant la dernière équation par rapport à sin φ nous trouvons:

$$\sin \varphi = \frac{e^Y - e^{-Y}}{e^Y + e^{-Y}} = \text{Th } Y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

d'où il suit:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\text{Ch } Y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

et:

$$\text{tang } \varphi = \text{Sh } Y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Digitized by Google

En mettant pour tang φ son expression en quantités imaginaires, c'est à dire:

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{e^{2\varphi\sqrt{-1}}-1}{e^{2\varphi\sqrt{-1}}+1}$$ et en résolvant par rapport à φ on trouve:

$$\varphi = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \text{nat} \frac{1+\sqrt{-1}\,\text{Sh}\,Y}{1-\sqrt{-1}\,\text{Sh}\,Y}$$

d'où il suit, que le développement de φ en série suivant les puissances de Y, a les mêmes coefficients que le développement de Y suivant les puissances de φ, seulement les termes ont alternativement le même signe et le signe contraire.

Ces développements sont:

$$Y = \varphi + \frac{1}{6}\varphi^3 + \frac{1}{24}\varphi^5 + \frac{61}{5040}\varphi^7 + \frac{277}{72576}\varphi^9 + \frac{50521}{39916800}\varphi^{11} + \ldots\ldots$$

$$\varphi = Y - \frac{1}{6}Y^3 + \frac{1}{24}Y^5 - \frac{61}{5040}Y^7 + \frac{277}{72576}Y^9 - \frac{50521}{39916800}Y^{11} + \ldots\ldots$$

et peuvent servir de vérification pour les formules (4) et (7).

En appliquant le développement de la tangente et du logarithme de la tangente à la formule (26) on trouve:

$$\sin\varphi = Y - \frac{1}{3}Y^3 + \frac{2}{15}Y^5 - \frac{17}{315}Y^7 + \frac{62}{2835}Y^9 - \frac{1382}{155925}Y^{11} + \ldots\ldots$$

$$\log\text{nat}\sin\varphi = \log\text{nat}\,Y - \frac{1}{3}Y^2 + \frac{7}{90}Y^4 - \frac{62}{2835}Y^6 + \frac{127}{18900}Y^8 - \frac{146}{66825}Y^{10} + \ldots\ldots$$

qui peuvent servir de vérification pour les formules (6) et (22).

Pour le rapport d'agrandissement on a:

$$m = \frac{1}{\cos\varphi} = \text{Ch}\,Y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

ou en appliquant la série pour le logarithme du cosinus:

$$\log\text{nat}\,m = \frac{1}{2}Y^2 - \frac{1}{12}Y^4 + \frac{1}{45}Y^6 - \frac{17}{2520}Y^8 + \frac{31}{14175}Y^{10} - \frac{691}{935550}Y^{12} + \ldots\ldots$$

Cette série peut servir de vérification pour la serie (10).

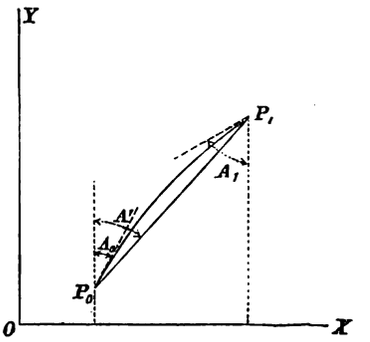
§ 23. Pour avoir ψ_0 et ψ_1 nous remarquons qu'en nommant A_0 l'azimut de la tangente à la courbe au point P_0 compté depuis le nord, (fig. 5), A_1 l'azimut de la tangente au point P_1 compté depuis le sud, on a

$$A_0 = A' - \psi_0$$
$$A_1 = A' + \psi_1$$

d'où il suit:

$$\frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_0) = \frac{1}{2}(A_1 - A_0) = \frac{1}{2}\alpha \ldots\ldots \quad (30)$$

Fig. 5.



1) Pour les fonctions hyperboliques: Sh. Ch. Th. on peut voir entre autres: Houël, Recueil de formules et de tables numériques, Paris 1868. p. XXX.

Digitized by Google

$$\frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_0) = \frac{1}{2}(A_1 + A_0) - A' = A_m - A' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

quand on désigne par α la convergence des méridiens et par A_m l'azimut moyen sur la sphère.

L'azimut A' sur la carte est déterminé par la formule:

$$\operatorname{tang} A' = \frac{\xi}{\eta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

tandis que α et A_m peuvent être calculés par la trigonométrie sphérique. Dans le triangle sphérique, qui a pour sommets le pôle et les deux points P_0 et P_1, on a par les analogies de Néper:

$$\operatorname{tang} A_m = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_0) \frac{\cos \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_0)}{\sin \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_0)} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_0) \sqrt{\frac{1 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_0 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_0}{1 - \cos\varphi_1 \cos\varphi_0 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_0}}$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_0) \frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_0)}{\sin \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_0)} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_0) \sqrt{\frac{1 - \cos\varphi_1 \cos\varphi_0 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_0}{1 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_0 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_0}}$$

En substituant dans ces expressions les valeurs de $\sin\varphi_0 \cos\varphi_0 \sin\varphi_1 \cos\varphi_1$ d'après (26) et (27) et en remarquant qu'on a: $\lambda - \lambda_0 = X_1 - X_0 = \xi$, elles deviennent:

$$\operatorname{tang} A_m = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\xi \sqrt{\frac{\operatorname{Ch} Y_1 \operatorname{Ch} Y_0 + 1 - \operatorname{Sh} Y_1 \operatorname{Sh} Y_0}{\operatorname{Ch} Y_1 \operatorname{Ch} Y_0 - 1 - \operatorname{Sh} Y_1 \operatorname{Sh} Y_0}} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\xi \sqrt{\frac{\operatorname{Ch}(Y_1 - Y_0) + 1}{\operatorname{Ch}(Y_1 - Y_0) - 1}}$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\xi \sqrt{\frac{\operatorname{Ch} Y_1 \operatorname{Ch} Y_0 - 1 + \operatorname{Sh} Y_1 \operatorname{Sh} Y_0}{\operatorname{Ch} Y_1 \operatorname{Ch} Y_0 + 1 + \operatorname{Sh} Y_1 \operatorname{Sh} Y_0}} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\xi \sqrt{\frac{\operatorname{Ch}(Y_1 + Y_0) - 1}{\operatorname{Ch}(Y_1 + Y_0) + 1}}$$

et par suite:

$$\operatorname{tang} A_m = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\xi}{\operatorname{Th} \frac{1}{2}\eta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\xi . \operatorname{Th} Y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

où η désigne la différence des ordonnées $Y_1 - Y_0$ et Y la moyenne $\frac{1}{2}(Y_1 + Y_0)$, c'est à dire l'ordonnée du point situé sur le milieu de la corde $P_0 P_1$.

§ 24. Les formules (32), (33) et (34) donnent sous forme finie tout ce qui est nécessaire pour le calcul de ψ_0 et de ψ_1; elles peuvent servir aussi pour le développement en serie. En mettant pour tang A_m son expression en quantités imaginaires, nous avons:

$$\frac{e^{2A_m\sqrt{-1}} - 1}{e^{2A_m\sqrt{-1}} + 1} = \frac{\sin\frac{1}{2}\xi . \operatorname{Ch}\frac{1}{2}\eta}{\cos\frac{1}{2}\xi . \operatorname{Sh}\frac{1}{2}\eta}\sqrt{-1}$$

d'où il suit:

$$e^{2A_m\sqrt{-1}} = \frac{\operatorname{Sh}\frac{1}{2}\eta\cos\frac{1}{2}\xi + \sqrt{-1}\operatorname{Ch}\frac{1}{2}\eta\sin\frac{1}{2}\xi}{\operatorname{Sh}\frac{1}{2}\eta\cos\frac{1}{2}\xi - \sqrt{-1}\operatorname{Ch}\frac{1}{2}\eta\sin\frac{1}{2}\xi} = \frac{\operatorname{Sh}\frac{1}{2}(\eta + \xi\sqrt{-1})}{\operatorname{Sh}\frac{1}{2}(\eta - \xi\sqrt{-1})}$$

Digitized by Google

et en prenant les logarithmes:

$$A_m = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left[\log \text{nat Sh } \tfrac{1}{2}(\eta + \xi\sqrt{-1}) - \log \text{nat Sh } \tfrac{1}{2}(\eta - \xi\sqrt{-1}) \right]$$

De l'expression (32) on déduit d'une manière analogue;

$$A' = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left[\log \text{nat } \tfrac{1}{2}(\eta + \xi\sqrt{-1}) - \log \text{nat } \tfrac{1}{2}(\eta - \xi\sqrt{-1}) \right]$$

On a donc suivant (31)

$$\frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_0) = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left[\log \text{nat} \frac{\text{Sh } \frac{1}{2}(\eta + \xi\sqrt{-1})}{\frac{1}{2}(\eta + \xi\sqrt{-1})} - \log \text{nat} \frac{\text{Sh } \frac{1}{2}(\eta - \xi\sqrt{-1})}{\frac{1}{2}(\eta - \xi\sqrt{-1})} \right] \ldots (35)$$

En développant cette formule d'après la série du logarithme du sinus on trouve:

$$\frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_0) = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left[\frac{B_1}{2!2} \left\{ (\eta + \xi\sqrt{-1})^2 - (\eta - \xi\sqrt{-1})^2 \right\} - \right.$$

$$\left. - \frac{B_2}{4!4} \left\{ (\eta + \xi\sqrt{-1})^4 - (\eta - \xi\sqrt{-1})^4 \right\} + \frac{B_3}{6!6} \left\{ (\eta + \xi\sqrt{-1})^6 - (\eta - \xi\sqrt{-1})^6 \right\} \ldots \right]$$

où $B_1\ B_2\ B_3 \ldots$ désignent les nombres Bernouilliens.

Cette formule donne en développant:

$$\frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_0) = \frac{1}{12}\xi\eta - \frac{1}{720}(\xi\eta^3 - \xi^3\eta) + \frac{1}{90720}(3\xi\eta^5 - 10\xi^3\eta^3 + 3\xi^5\eta) -$$

$$- \frac{1}{1209600}(\xi\eta^7 - 7\xi^3\eta^5 + 7\xi^5\eta^3 - \xi^5\eta) + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (36)$$

ou en mettant $\xi = s \sin A'$, $\eta = s \cos A'$:

$$\frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_0) = \frac{1}{24}s^2 \sin 2A' - \frac{1}{2880}s^4 \sin 4A' + \frac{1}{181440}s^6 \sin 6A' - \frac{1}{9676800}s^8 \sin 8A' + \ldots (37)$$

Afin de pouvoir juger de l'influence des différents termes nous prendrons pour s la valeur de 1000 KM. et pour le rayon de la terre le rayon d'un cercle qui a 40000 KM. de circonférence.

Terme du 2d ordre	212″,057
4me ordre	0″,043603
6me ordre	0″,000017077
8me ordre	0″.000000007900

Comme on le voit, même pour la distance de 1000 KM. les deux premiers termes suffisent. Pour les distances jusqu'à 100 KM., comme on les rencontre dans les triangulations, le terme du quatrième ordre devient au plus 0″,00000436, de sorte qu'on n'a besoin que du premier terme, qui peut avoir alors une valeur de 2″,1206.

§ 25. De la formule (34) nous déduisons:

$$\frac{e^{\alpha\sqrt{-1}} - 1}{\alpha\sqrt{-1} + 1} = \frac{\text{Sh Y sin } \frac{1}{2}\xi}{\text{Ch Y cos } \frac{1}{2}\xi}\sqrt{-1}$$

Digitized by Google

ou, en résolvant par rapport à $e^{\alpha\sqrt{-1}}$

$$e^{\alpha\sqrt{-1}} = \frac{\mathrm{Ch}\ Y \cos\frac{1}{2}\xi + \sqrt{-1}\ \mathrm{Sh}\ Y \sin\frac{1}{2}\xi}{\mathrm{Ch}\ Y \cos\frac{1}{2}\xi - \sqrt{-1}\ \mathrm{Sh}\ Y \sin\frac{1}{2}\xi} = \frac{\mathrm{Ch}\,(Y + \frac{1}{2}\xi\sqrt{-1})}{\mathrm{Ch}\,(Y - \frac{1}{2}\xi\sqrt{-1})}$$

et si nous prenons les logarithmes:

$$\frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_0) = \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[\log\mathrm{nat}\,\mathrm{Ch}\,(Y + \tfrac{1}{2}\xi\sqrt{-1}) - \log\mathrm{nat}\,\mathrm{Ch}\,(Y - \tfrac{1}{2}\xi\sqrt{-1})\right] \quad (38)$$

En développant cette expression par la formule de Taylor nous trouvons, en observant qu'on a $\frac{d\log\mathrm{nat}\,\mathrm{Ch}\,Y}{dY} = \frac{d\log\mathrm{nat}\,m}{dY} = k$:

$$\frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_0) = \frac{k\xi}{1!2} - \frac{k''\xi^3}{3!2^3} + \frac{k^{IV}\xi^5}{5!2^5} - \frac{k^{VI}\xi^7}{7!2^7} + \ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

ou

$$\frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_0) = \frac{1}{2}k\,s\sin A' - \frac{1}{48}k''s^3\sin^3 A' + \frac{1}{3840}k^{IV}s^5\sin^5 A' - \frac{1}{645120}k^{VI}s^7\sin^7 A' + \ldots \quad (40)$$

Dans cette formule les quantités $k\,k''\,k^{IV}\,k^{VI}$ doivent être prises avec l'argument $Y = \frac{1}{2}(Y_0 + Y_1)$.

Si l'on veut avoir une série dans laquelle ces quantités soient fonctions de $Y = Y_0$ on n'a qu'à remplacer dans (38) Y par $Y + \frac{1}{2}\eta$; on trouve alors:

$$\frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_0) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[\log\mathrm{nat}\,\mathrm{Ch}\,(Y + \tfrac{1}{2}\eta + \tfrac{1}{2}\xi\sqrt{-1}) - \log\mathrm{nat}\,\mathrm{Ch}\,(Y + \tfrac{1}{2}\eta - \tfrac{1}{2}\xi\sqrt{-1})\right]$$

En développant par la formule de Taylor on trouve:

$$\frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_0) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[\frac{k}{1!2}\left\{(\eta + \xi\sqrt{-1}) - (\eta - \xi\sqrt{-1})\right\} + \frac{k'}{2!2^2}\left\{(\eta + \xi\sqrt{-1})^2 - \right.\right.$$
$$\left.\left. - (\eta - \xi\sqrt{-1})^2\right\} + \frac{k''}{3!2^3}\left\{(\eta + \xi\sqrt{-1})^3 - (\eta - \xi\sqrt{-1})^3\right\} + \ldots\ldots\right]$$

ou:

$$\frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_0) = \frac{k}{2}\xi + \frac{k'}{4}\xi\,\eta + \frac{k''}{48}(3\xi\eta^2 - \xi^3) + \frac{k'''}{96}(\xi\eta^3 - \xi^3\eta) + \frac{k^{IV}}{3840}(5\xi\eta^4 - 10\xi^3\eta^2 + \xi^5) +$$
$$+ \frac{k^V}{23040}(3\xi\eta^5 - 10\xi^3\eta^3 + 3\xi^5\eta) + \frac{k^{VI}}{645120}(7\xi\eta^6 - 35\xi^3\eta^4 + 21\xi^5\eta^2 - \xi^7) + \ldots \quad (41)$$

et en remplaçant ξ et η par $s\sin A'$ et $s\cos A'$:

$$\frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_0) = \frac{k}{2}s\sin A' + \frac{k'}{8}s^2\sin 2A' + \frac{k''}{48}s^3\sin 3A' + \frac{k'''}{384}s^4\sin 4A' + \frac{k^{IV}}{3840}s^5\sin 5A' +$$
$$+ \frac{k^V}{46080}s^6\sin 6A' + \frac{k^{VI}}{645120}s^7\sin 7A' \ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

Si l'on veut avoir enfin une série dans laquelle les quantités $k\,k'\,k''$ etc.

Digitized by Google

soient fonctions de $Y = \frac{1}{3}(2\,Y_0 + Y_1)$, on doit remplacer dans (38) Y par $Y + \frac{1}{6}\eta$; on trouve alors, en développant par la formule de Taylor:

$$\frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_0) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[\frac{k}{1!\,6}\left\{(\eta + 3\xi\sqrt{-1}) - (\eta - 3\xi\sqrt{-1})\right\} + \frac{k'}{2!\,6^2}\left\{(\eta + 3\xi\sqrt{-1})^2 - \right.\right.$$
$$\left.\left. - (\eta - 3\xi\sqrt{-1})^2\right\} + \frac{k''}{3!\,6^3}\left\{(\eta + 3\xi\sqrt{-1})^3 - (\eta - 3\xi\sqrt{-1})^3\right\} + \ldots\ldots\right]$$

ou

$$\frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_0) = \frac{k}{2}\xi + \frac{k'}{12}\xi\eta + \frac{k''}{144}(\xi\eta^2 - 3\xi^3) + \frac{k'''}{2592}(\xi\eta^3 - 9\xi^3\eta) + \frac{k^{IV}}{311040}(5\xi\eta^4 - 90\xi^3\eta^2 + 81\xi^5) +$$
$$+ \frac{k^{V}}{1866240}(\xi\eta^5 - 30\xi^3\eta^3 + 81\xi^5\eta) + \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

§ 26. Les fonctions $k'\ k''\ k'''$ etc. qui entrent dans les formules précédentes sont les dérivées par rapport à Y de $k = \sin\varphi = \mathrm{Th}\,Y$; on peut les trouver en séries suivant les puissances de Y en différentiant la série:

$$k = \mathrm{Th}\,Y = Y - \frac{1}{3}Y^3 + \frac{2}{15}Y^5 - \frac{17}{315}Y^7 + \frac{62}{2835}Y^9 - \frac{1382}{155925}Y^{11} + \ldots\ldots$$

On peut aussi les exprimer sous forme finie en fonction de $k = \sin\varphi = \mathrm{Th}\,Y$; en différentiant cette expression, on trouve:

$$\left.\begin{aligned}
k' &= \frac{1}{\mathrm{Ch}^2 Y} = 1 - \mathrm{Th}^2 Y = 1 - k^2 \\
k'' &= -2k(1-k^2) = -2k + 2k^3 \\
k''' &= (-2 + 6k^2)(1-k^2) = -2 + 8k^2 - 6k^4 \\
k^{IV} &= (16k - 24k^3)(1-k^2) = 16k - 40k^3 + 24k^5 \\
k^{V} &= (16 - 120k^2 + 120k^4)(1-k^2) = 16 - 136k^2 + 240k^4 - 120k^6 \\
k^{VI} &= (-272k + 960k^3 - 720k^5)(1-k^2) = -272k + 1232k^3 - 1680k^5 + 720k^7 \\
k^{VII} &= (-272 + 3696k^2 - 8400k^4 + 5040k^6)(1-k^2) = \\
&= -272 + 3968k^2 - 12096k^4 + 13440k^6 - 5040k^8
\end{aligned}\right\} \ldots \quad (44)$$

On voit par ces expressions que, dans les limites dont nous nous occupons, les dérivées d'ordre impair ont leur valeur maximum pour $\varphi = o$ et celles d'ordre pair pour la plus grande valeur de φ que nous considérons.

Ces valeurs maximum sont pour les dérivées d'ordre impair:

$$k' = 1 \qquad k''' = -2 \qquad k^{V} = +16 \qquad k^{VII} = -272$$

et pour celles d'ordre pair en y ajoutant la valeur de k:

	$\varphi = 6°$	$\varphi = 10°$
k	+ 0,10453	+ 0,17365
k''	− 0,20677	− 0,33682
k^{IV}	+ 1,6270	+ 2,5728
k^{VI}	− 27,045	− 41,043

Digitized by Google

A l'aide de ces valeurs on peut calculer facilement la valeur maximum de chacun des différents termes des séries (39) à (43). Nous donnons ici ces valeurs pour la distance $s = 1000$ KM.

$\varphi = 6°$

ORDRE DES TERMES.	Valeurs maximum des termes de la série:		
	(39) ou (40). Arg: $\frac{1}{2}(Y_0 + Y_1)$	(41) ou (42). Arg: Y_0	(43). Arg: $\frac{1}{3}(2\,Y_0 + Y_1)$
1	1693″,4	1693″,4	1693″,4
2	—	636″,18	212″,06
3	3″,444	3″,444	3″,444
4	—	0″,6540	0″,2726
5	0″,00836	0″,00836	0″,00836
6	—	0″,001076	0″,000519
7	0″,0000204	0″,0000204	0″,0000204

$\varphi = 10°$

ORDRE DES TERMES	Valeurs maximum des termes de la série:		
	(39) ou (40). Arg: $\frac{1}{2}(Y_0 + Y_1)$	(41) ou (42). Arg: Y_0	(43). Arg: $\frac{1}{3}(2\,Y_0 + Y_1)$
1	2813″,1	2813″,1	2813″,1
2	—	636″,18	212″,06
3	5″,610	5″,610	5″,610
4	—	0″,6540	0″,2726
5	0″,01322	0″,01322	0″,01322
6	—	0″,001076	0″,000519
7	0″,0000310	0″,0000310	0″,0000310

Comme on le voit, les formules (39) ou (40), où les quantités $k\,k''\,k^{IV}$ etc. sont prises avec l'argument $Y = \frac{1}{2}(Y_0 + Y_1)$, sont les plus expéditives pour le calcul de $\frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_0)$. Pour $s = 100$ KM. le terme de troisième ordre devient au plus

Digitized by Google

égal à 0″0034 pour $\varphi = 6°$ et égal à 0″,0056 pour $\varphi = 10°$, de sorte que pour les distances qu'on rencontre ordinairement dans les triangulations il suffit de calculer le premier terme.

§ 27. Pour avoir la valeur de ψ_0 il suffit de prendre la différence de (36) ou (37) avec une des séries (39) à (43). De cette manière nous trouvons:

Argument: $Y = \frac{1}{2}(Y_0 + Y_1)$

$$\psi_0 = \frac{k}{1!2} s \sin A' - \frac{B_1}{2!2} s^2 \sin 2A' - \frac{k''}{3!2^3} s^3 \sin^3 A' + \frac{B_2}{4!4} s^4 \sin 4A' + \frac{k^{IV}}{5!2^5} s^5 \sin^5 A' - \\ - \frac{B^3}{6!6} s^6 \sin 6A' - \frac{k^{VI}}{7!2^7} s^7 \sin^7 A' + \ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

Argument: $Y = Y_0$

$$\psi_0 = \frac{k}{1!2} s \sin A' + \left(\frac{k'}{2!2^2} - \frac{B_1}{2!2}\right) s^2 \sin 2A' + \frac{k''}{3!2^3} s^3 \sin 3A' + \left(\frac{k'''}{4!2^4} + \frac{B_2}{4!4}\right) s^4 \sin 4A' + \\ + \frac{k^{IV}}{5!2^5} s^5 \sin 5A' + \left(\frac{k^V}{6!2^6} - \frac{B_3}{6!6}\right) s^6 \sin 6A' + \frac{k^{VI}}{7!2^7} s^7 \sin 7A' + \ldots \quad (46)$$

Argument: $Y = \frac{1}{3}(2Y_0 + Y_1)$

$$\psi_0 = \frac{k}{2}\xi + \left(\frac{k'}{12} - \frac{1}{12}\right)\xi\eta + \frac{k''}{144}(\xi\eta^2 - 3\xi^3) + \left\{\frac{k'''}{2592}(\xi\eta^3 - 9\xi^3\eta) + \frac{1}{720}(\xi\eta^3 - \xi^3\eta)\right\} + \\ + \frac{k^{IV}}{311040}(5\xi\eta^4 - 90\xi^3\eta^2 + 81\xi^5) + \left\{\frac{k^V}{1866240}(\xi\eta^5 - 30\xi^3\eta^3 + 81\xi^5\eta) - \right. \\ \left. - \frac{1}{90720}(3\xi\eta^5 - 10\xi^3\eta^3 + 3\xi^5\eta)\right\} + \ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

Comme on le voit, la dernière formule a la forme la plus compliquée, seulement le second terme peut être mis sous une forme plus simple; en remarquant que k' est égal à $1 - k^2$, ce terme devient:

$$-\frac{1}{12} k^2 \xi\eta$$

Remarquons encore qu'on peut facilement établir directement la formule pour ψ_0; dans le même triangle employé dans le paragraphe 23 on a:

$$\cot A_0 = \frac{\cos\varphi_0 \sin\varphi_1 - \sin\varphi_0 \cos\varphi_1 \cos(\lambda_1 - \lambda_0)}{\cos\varphi_1 \sin(\lambda_1 - \lambda_0)}$$

ou, parsuite de (26) et (27):

$$\cot A_0 = \frac{\mathrm{Sh}\, Y_1 - \mathrm{Sh}\, Y_0 \cos\xi}{\mathrm{Ch}\, Y_0 \sin\xi}$$

d'où il suit:

$$\frac{e^{2A_0\sqrt{-1}} - 1}{e^{2A_0\sqrt{-1}} + 1} = \frac{\mathrm{Sh}\, Y_1 - \mathrm{Sh}\, Y_0 \cos\xi}{\sqrt{-1}\, \mathrm{Ch}\, Y_0 \sin\xi}$$

Digitized by Google

et en résolvant par rapport à $e^{2A_0\sqrt{-1}}$

$$e^{2A_0\sqrt{-1}} = \frac{\operatorname{Sh} Y_1 - \operatorname{Sh} Y_0 \cos\xi + \sqrt{-1}\operatorname{Ch} Y_0 \sin\xi}{\operatorname{Sh} Y_1 - \operatorname{Sh} Y_0 \cos\xi - \sqrt{-1}\operatorname{Sh} Y_0 \sin\xi} = \frac{\operatorname{Sh} Y_1 - \operatorname{Sh}(Y_0 - \xi\sqrt{-1})}{\operatorname{Sh} Y_1 - \operatorname{Sh}(Y_0 + \xi\sqrt{-1})} =$$

$$= \frac{\operatorname{Ch}\frac{1}{2}(Y_1 + Y_0 - \xi\sqrt{-1})\operatorname{Sh}\frac{1}{2}(Y_1 - Y_0 + \xi\sqrt{-1})}{\operatorname{Ch}\frac{1}{2}(Y_1 + Y_0 + \xi\sqrt{-1})\operatorname{Sh}\frac{1}{2}(Y_1 - Y_0 - \xi\sqrt{-1})} = \frac{\operatorname{Ch}(Y - \frac{1}{2}\xi\sqrt{-1})\operatorname{Sh}\frac{1}{2}(\eta + \xi\sqrt{-1})}{\operatorname{Ch}(Y + \frac{1}{2}\xi\sqrt{-1})\operatorname{Sh}\frac{1}{2}(\eta - \xi\sqrt{-1})}$$

ou en prenant les logarithmes et en retranchant de:

$$2A'\sqrt{-1} = \log\text{nat}\,\tfrac{1}{2}(\eta + \xi\sqrt{-1}) - \log\text{nat}\,\tfrac{1}{2}(\eta - \xi\sqrt{-1})$$

on trouve, après avoir divisé par $2\sqrt{-1}$:

$$\psi_0 = A' - A_0 = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[\log\text{nat}\operatorname{Ch}(Y + \tfrac{1}{2}\xi\sqrt{-1}) - \log\text{nat}\operatorname{Ch}(Y - \tfrac{1}{2}\xi\sqrt{-1})\right] -$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[\log\text{nat}\frac{\operatorname{Sh}\frac{1}{2}(\eta + \xi\sqrt{-1})}{\frac{1}{2}(\eta + \xi\sqrt{-1})} - \log\text{nat}\frac{\operatorname{Sh}\frac{1}{2}(\eta - \xi\sqrt{-1})}{\frac{1}{2}(\eta - \xi\sqrt{-1})}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

En développant cette formule de la même manière dont nous avons développé les formules (35) et (38), soit directement, soit après avoir remplacé Y par $Y + \frac{1}{4}\eta$ ou par $Y + \frac{1}{6}\eta$, nous retrouvons de suite les séries (45), (46) et (47).

§ 28. Afin de savoir laquelle des séries (45), (46) ou (47) est la plus propre pour le calcul direct de la valeur de ψ_0 nous donnons ici la valeur maximum de chacun des différents termes pour $s = 1000$ KM. et pour $\varphi = 6°$ et $\varphi = 10°$.

$\varphi = 6°$

ORDRE DES TERMES.	Valeurs maximum des termes de la série:		
	(45). Arg: $\frac{1}{2}(Y_0 + Y_1)$	(46). Arg: Y_0	(47). Arg: $\frac{1}{3}(2Y_0 + Y_1)$
1	1693″,4	1693″,4	1693″,4
2	212″,06	424″,12	2″,32
3	3″,444	3″,444	3″,444
4	0″,0436	0″,6104	0″,2354
5	0″,00836	0″,00836	0″,00836
6	0″,000017	0″,001059	0″,000508
7	0″,0000204	0″,0000204	0″,0000204

Digitized by Google

$\varphi = 10$

ORDRE DES TERMES.	Valeurs maximum des termes de la série:		
	(45). Arg: $\frac{1}{2}(Y_0 + Y_1)$	(46). Arg: Y_0	(47). Arg: $\frac{1}{3}(2\,Y_0 + Y_1)$
1	2813″,1	2813″,1	2813″,1
2	212″,06	424″,12	6″,39
3	5″,610	5″,610	5″,610
4	0″,0436	0″,6104	0″,2354
5	0″,01322	0″,01322	0″,01322
6	0″,000017	0″,001059	0″,000508
7	0″,0000310	0″,0000310	0″,0000310

Par ces deux tableaux on voit que les termes de la série (46) égalent ou dépassent en valeur ceux de la série (45), que de sorte la dernière est toujours préférable. Pour la série (47) il en est de même, à l'exception du second terme, qui est beaucoup plus petit que le terme correspondant de la série (45); d'où il suit que, dans le cas où l'on peut négliger les autres termes, mais seulement pour ce cas, on peut préférer la série (47) à la série (45). Ce cas se présente dans les triangulations secondaires, où les distances sont relativement petites, et dans le paragraphe 15 nous avons déjà vu que dans ce cas on peut restreindre la série au premier terme. Pour tout autre cas on doit préférer la série (45), surtout lorsqu'on doit avoir en même temps ψ_0 et ψ_1; car dans ce dernier cas on devrait prendre l'argument $\frac{1}{3}(Y_0 + 2\,Y_1)$ pour trouver ψ_1 de sorte que tous les termes devraient être calculés deux fois; tandis qu'en employant la série (45) on n'a besoin de les calculer qu'une seule fois, puisque la série pour ψ_1 est la même que pour ψ_0 à l'exception des signes.

§ 29. Passons maintenant au calcul de la distance des deux points sur la sphère.

Du même triangle, qui a pour sommets le pôle et les deux points P_0 et P_1, on tire a l'aide de la formule des cosinus:

$$\cos S = \sin \varphi_0 \sin \varphi_1 + \cos \varphi_0 \cos \varphi_1 \cos (\lambda_1 - \lambda_0)$$

ou, parsuite des formules (26) et (27):

$$\cos S = \frac{\mathrm{Sh}\, Y_0\, \mathrm{Sh}\, Y_1 + \cos \xi}{\mathrm{Ch}\, Y_0\, \mathrm{Ch}\, Y_1}$$

Digitized by Google

en retranchant de l'unité et en divisant par 2 on trouve:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} S = \frac{\operatorname{Ch} Y_0 \operatorname{Ch} Y_1 - \operatorname{Sh} Y_0 \operatorname{Sh} Y_1 - \cos \xi}{2 \operatorname{Ch} Y_0 \operatorname{Ch} Y_1} = \frac{\operatorname{Ch} \eta - \cos \xi}{2 \operatorname{Ch} Y_0 \operatorname{Ch} Y_1} =$$

$$= \frac{\operatorname{Sh}^2 \tfrac{1}{2} \eta + \sin^2 \tfrac{1}{2} \xi}{\operatorname{Ch} Y_0 \operatorname{Ch} Y_1} = \frac{\operatorname{Sh} \tfrac{1}{2} (\eta + \xi \sqrt{-1}) \operatorname{Sh} \tfrac{1}{2} (\eta - \xi \sqrt{-1})}{\operatorname{Ch} Y_0 \operatorname{Ch} Y_1}$$

Si nous prenons les logarithmes et si nous remarquons que, d'après (29), $\operatorname{Ch} Y_0$ et $\operatorname{Ch} Y_1$ sont égaux aux rapports d'agrandissement m_0 et m_1 aux points P_0 et P_1; nous trouvons en divisant par 2:

$$\operatorname{log\,nat} \sin \tfrac{1}{2} S = \tfrac{1}{2} \left[\operatorname{log\,nat} \operatorname{Sh} \tfrac{1}{2} (\eta + \xi \sqrt{-1}) + \operatorname{log\,nat} \operatorname{Sh} \tfrac{1}{2} (\eta - \xi \sqrt{-1}) \right] - \operatorname{log\,nat} \sqrt{m_0 m_1}$$

et comme on a: $s^2 = \eta^2 + \xi^2 = (\eta + \xi \sqrt{-1})\,(\eta - \xi \sqrt{-1})$ d'où il suit:

$$\operatorname{log\,nat} s = \tfrac{1}{2} \left[\operatorname{log\,nat} (\eta + \xi \sqrt{-1}) + \operatorname{log\,nat} (\eta - \xi \sqrt{-1}) \right]$$

on peut écrire pour la formule précédente en y ajoutant le logarithme de 2:

$$\operatorname{log\,nat} 2 \sin \tfrac{1}{2} S = \operatorname{log\,nat} \frac{s}{\sqrt{m_0 m_1}} + \tfrac{1}{2} \left[\operatorname{log\,nat} \frac{\operatorname{Sh} \tfrac{1}{2} (\eta + \xi \sqrt{-1})}{\tfrac{1}{2} (\eta + \xi \sqrt{-1})} + \operatorname{log\,nat} \frac{\operatorname{Sh} \tfrac{1}{2} (\eta - \xi \sqrt{-1})}{\tfrac{1}{2} (\eta - \xi \sqrt{-1})} \right] \quad (49)$$

Cette formule donne immédiatement le logarithme de la corde, c'est à dire de la ligne droite qui relie les deux points P_0 et P_1 sur la sphère. En la développant suivant la série du logarithme du sinus on trouve:

$$\operatorname{log\,nat} 2 \sin \tfrac{1}{2} S = \operatorname{log\,nat} \frac{s}{\sqrt{m_0 m_1}} + \frac{B_1}{2!2} \frac{(\eta + \xi \sqrt{-1})^2 + (\eta - \xi \sqrt{-1})^2}{2} -$$

$$- \frac{B_2}{4!4} \frac{(\eta + \xi \sqrt{-1})^4 + (\eta - \xi \sqrt{-1})^4}{2} + \frac{B_3}{6!6} \frac{(\eta + \xi \sqrt{-1})^6 + (\eta - \xi \sqrt{-1})^6}{2} - \ldots\ldots$$

ou en développant:

$$\operatorname{log\,nat} 2 \sin \tfrac{1}{2} S = \operatorname{log\,nat} \frac{s}{\sqrt{m_0 m_1}} + \frac{\eta^2 - \xi^2}{24} - \frac{\eta^4 - 6\,\xi^2\,\eta^2 + \xi^4}{2880} + \frac{\eta^6 - 15\,\xi^2\,\eta^4 + 15\,\xi^4\,\eta^2 - \xi^6}{181440} -$$

$$- \frac{\eta^8 - 28\,\xi^2\,\eta^6 + 70\,\xi^4\,\eta^4 - 28\,\xi^6\,\eta^2 + \xi^8}{9676800} + \ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

et en remplaçant ξ et η par $s \sin A'$ et $s \cos A'$:

$$\operatorname{log\,nat} 2 \sin \tfrac{1}{2} S = \operatorname{log\,nat} \frac{s}{\sqrt{m_0 m_1}} + \frac{1}{24} s^2 \cos 2A' - \frac{1}{2880} s^4 \cos 4A' + \frac{1}{181440} s^6 \cos 6A' -$$

$$- \frac{1}{9676800} s^8 \cos 8A' + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

§ 30. Au lieu de calculer la longueur de la corde avec la série (50) ou (51), où il entre la valeur de $\sqrt{m_0 m_1}$, on pourrait y introduire la valeur de m, prise avec l'argument $Y = \frac{1}{2}(Y_0 + Y_1)$. Mais cette série n'est pas préférable, parcequ'elle est plus compliquée et moins convergente.

Digitized by Google

Comme on a

$$\log \text{nat} \sqrt{m_0 m_1} = \log \text{nat}\, m + \frac{k'}{2!2}\eta^2 + \frac{k'''}{4!2^4}\eta^4 + \frac{k^{\text{V}}}{6!2^6}\eta^6 + \frac{k^{\text{VII}}}{8!2^8}\eta^8 + \ldots\ldots$$

la série (51) devient:

$$\log \text{nat}\, 2 \sin \tfrac{1}{2} S = \log \text{nat} \frac{s}{m} - s^2\left[\frac{k'}{2!2^2}\cos^2 A' - \frac{B_1}{2!2}\cos 2A'\right] - s^4\left[\frac{k'''}{4!2^4}\cos^4 A' + \frac{B_2}{4!4}\cos 4A'\right] -$$
$$- s^6\left[\frac{k^{\text{V}}}{6!2^6}\cos^6 A' - \frac{B_3}{6!6}\cos 6A'\right] - s^8\left[\frac{k^{\text{VII}}}{8!2^8}\cos^8 A' + \frac{B_4}{8!8}\cos 8A'\right] - \ldots \quad (52)$$

Cette série est plus compliquée que la série (51), non seulement parcequ'elle contient le double des termes de (51), mais surtout parceque dans ces termes il entre des fonctions de $Y = \frac{1}{2}(Y_0 + Y_1)$, tandis que dans (51), tous les coefficients sont indépendants de la valeur de Y.

Elle est aussi moins convergente; pour s'en convaincre il suffit de remarquer que les valeurs maximum des différents termes pour la même valeur de s sont:

$$\frac{2}{24}s^2 \qquad \frac{14}{2880}s^4 \qquad \frac{62}{181440}s^6 \qquad \frac{254}{9676800}s^8$$

tandis que pour la série (50) ou (51), ces valeurs ne sont que:

$$\frac{1}{24}s^2 \qquad \frac{1}{2880}s^4 \qquad \frac{1}{181440}s^6 \qquad \frac{1}{9676800}s^8$$

§ 31. Pour obtenir la valeur de S on peut commencer par calculer la longueur $2 \sin \frac{1}{2} S$ de la corde, pour en déduire ensuite la valeur de S. En partant de la série:

$$\log \text{nat}\, \alpha = \log \text{nat} \sin \alpha + \frac{1}{6}\sin^2\alpha + \frac{11}{180}\sin^4\alpha + \frac{191}{5670}\sin^6\alpha + \frac{2497}{113400}\sin^8\alpha + \ldots\ldots$$

nous trouvons en représentant la longueur de la corde $2 \sin \frac{1}{2} S$ par Z:

$$\log \text{nat}\, S = \log \text{nat}\, Z + \frac{1}{24}Z^2 + \frac{11}{2880}Z^4 + \frac{191}{362880}Z^6 + \frac{2497}{29030400}Z^8 + \ldots\ldots \quad (53)$$

Pour montrer combien de termes des séries (51) et (53) il faut calculer, nous donnons ici la valeur maximum de chacun des différents termes de ces séries, de la première pour s et de la seconde pour Z égal à 1000 KM. Nous exprimons ces valeurs en parties de la dixième décimale du logarithme vulgaire en multipliant les différents termes par 10^{10} M.

ORDRE DES TERMES.	Valeurs maximum des termes de la série:	
	(50) ou (51)	(53)
2	4464911,	4464911,
4	918,06	10098,67
6	0,3596	34,3378
8	0,000166	0,138455

Digitized by Google

Comme on voit, de la série (51) les termes de 2d et de 4me ordre suffisent même pour des distances de 1000 KM. et en calculant avec des logarithmes à dix décimales. De la série (53) il faut dans ce cas calculer les termes de 2d, 4me et 6me ordre.

Pour des distances de 100 KM., comme on les rencontre dans les triangulations, les termes du quatrième ordre ont les valeurs maximum:

0,09 et 1,01

de sorte que dans ce cas on peut employer les formules très simples:

$$\log Z = \log \frac{s}{\sqrt{m_0 m_1}} + \frac{1}{24} M s^2 \cos 2A'$$

$$\log S = \log Z + \frac{1}{24} M Z^2$$

§ 32. Pour obtenir une formule directe pour le calcul de S ou de son logarithme, nous n'avons besoin que de développer la valeur de $Z = 2 \sin \frac{1}{2} S$ en série suivant les puissances de ξ et de η. Pour cela nous partons de la formule:

$$Z^2 = 4 \sin^2 \tfrac{1}{2} S = \frac{2 (\mathrm{Ch}\, \eta - \cos \xi)}{\mathrm{Ch}\, Y_0 \, \mathrm{Ch}\, Y_1}$$

du § 29; en y remplaçant Y_0 et Y_1 par $Y - \frac{1}{2}\eta$ et $Y + \frac{1}{2}\eta$, nous trouvons:

$$Z^2 = \frac{2 (\mathrm{Ch}\, \eta - \cos \xi)}{\mathrm{Ch}^2 Y - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \mathrm{Ch}\, \eta} = \frac{(\eta^2 + \xi^2) + \frac{1}{12}(\eta^4 - \xi^4) + \frac{1}{360}(\eta^6 + \xi^6) + \frac{1}{20160}(\eta^8 - \xi^8) + \ldots}{m^2 + \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{48}\eta^4 + \frac{1}{1440}\eta^6 + \ldots}$$

ou, en effectuant la division:

$$Z^2 = \left[\frac{1}{m^2}\eta^2 + \frac{1}{m^2}\xi^2\right] + \frac{1}{12}\left[\left(\frac{1}{m^2} - \frac{3}{m^4}\right)\eta^4 - \frac{3}{m^4}\xi^2\eta^2 - \frac{1}{m^2}\xi^4\right] +$$
$$+ \frac{1}{720}\left[\left(\frac{2}{m^2} - \frac{30}{m^4} + \frac{45}{m^6}\right)\eta^6 - \left(\frac{15}{m^4} - \frac{45}{m^6}\right)\xi^2\eta^4 + \frac{15}{m^4}\xi^4\eta^2 + \frac{2}{m^2}\xi^6\right] +$$
$$+ \frac{1}{20160}\left[\left(\frac{1}{m^2} - \frac{63}{m^4} + \frac{315}{m^6} - \frac{315}{m^8}\right)\eta^8 - \left(\frac{14}{m^4} - \frac{210}{m^6} + \frac{315}{m^8}\right)\xi^2\eta^6 +\right.$$
$$\left. + \left(\frac{35}{m^4} - \frac{105}{m^6}\right)\xi^4\eta^4 - \frac{14}{m^4}\xi^6\eta^2 - \frac{1}{m^2}\xi^8\right] + \ldots$$

En substituant cette valeur dans (53), nous trouvons:

$$\log \mathrm{nat}\, S = \log \mathrm{nat}\, Z + \frac{1}{24}\left[\frac{1}{m^2}\eta^2 + \frac{1}{m^2}\xi^2\right] + \frac{1}{2880}\left[\left(\frac{10}{m^2} - \frac{19}{m^4}\right)\eta^4 - \frac{8}{m^4}\xi^2\eta^2 - \left(\frac{10}{m^2} - \frac{11}{m^4}\right)\xi^4\right] +$$
$$+ \frac{1}{362880}\left[\left(\frac{42}{m^2} - \frac{399}{m^4} + \frac{443}{m^6}\right)\eta^6 - \left(\frac{84}{m^4} - \frac{132}{m^6}\right)\xi^2\eta^4 + \left(\frac{84}{m^4} - \frac{120}{m^6}\right)\xi^4\eta^2 + \left(\frac{42}{m^2} - \frac{231}{m^4} + \frac{191}{m^6}\right)\xi^6\right] +$$
$$+ \frac{1}{29030400}\left[\left(\frac{60}{m^2} - \frac{2394}{m^4} + \frac{8860}{m^6} - \frac{7073}{m^8}\right)\eta^8 - \left(\frac{224}{m^4} - \frac{1760}{m^6} + \frac{1712}{m^8}\right)\xi^2\eta^6 +\right.$$
$$\left. + \left(\frac{560}{m^4} - \frac{1680}{m^6} + \frac{1392}{m^8}\right)\xi^4\eta^4 - \left(\frac{224}{m^4} - \frac{1600}{m^6} + \frac{1472}{m^8}\right)\xi^6\eta^2 - \left(\frac{60}{m^2} - \frac{1386}{m^4} + \frac{3820}{m^6} - \frac{2497}{m^8}\right)\xi^8\right] + \ldots$$

Digitized by Google

Et en remplaçant enfin la valeur de $\frac{1}{m^2}$ par $1 - k^2$ et le log nat Z par la série (52), nous trouvons en développant:

$$\log \text{nat S} = \log \text{nat} \frac{s}{m} - \frac{1}{24}\left[(1-2k^2)\eta^2 + k^2\xi^2\right] +$$

$$+\frac{1}{2880}\left[(5-32k^2+26k^4)\eta^4 - (2-16k^2+8k^4)\xi^2\eta^2 - (12k^2-11k^4)\xi^4\right] -$$

$$-\frac{1}{362880}\left\{\begin{array}{l}(38-498k^2+960k^4-502k^6)\eta^6 - \\ -(18-228k^2+312k^4-132k^6)\xi^2\eta^4 + \\ +(6-192k^2+276k^4-120k^6)\xi^4\eta^2 + \\ -(-153k^2+342k^4-191k^6)\xi^6\end{array}\right\} +$$

$$+\frac{1}{29030400}\left\{\begin{array}{l}(215-4720k^2+17118k^4-18368k^6+7102k^8)\eta^8 - \\ -(92-2016k^2+5216k^4-5088k^6+1712k^8)\xi^2\eta^6 + \\ +(62-1648k^2+3872k^4-3888k^6+1392k^8)\xi^4\eta^4 - \\ -(12-1536k^2+4256k^4-4288k^6+1472k^8)\xi^6\eta^2 + \\ +(-1240k^2+4908k^4-6168k^6+2497k^8)\xi^8\end{array}\right\} - \ldots \quad (54$$

Comme on le voit, cette série est beaucoup plus compliquée que les séries (51) et (53); aussi les valeurs maximum des différents termes, à l'exception du terme de second ordre, sont plus grandes que celles de la série (51). Pour les grandes distances on se servira donc des formules (51) et (53).

Pour les petites distances, pour lesquelles on peut négliger les termes du 4me ordre, on peut employer la formule directe. La valeur maximum du terme de 4me ordre est $\frac{5}{2880}s^4$, ou, en prenant pour s la valeur 100 KM. et en multipliant par 10^{10} M. pour exprimer cette valeur en parties de l'unité de la 10me décimale des logarithmes vulgaires:

0,459

De sorte que pour les distances telles qu'elles se rencontrent dans les triangulations, on peut employer la formule simple:

$$\log S = \log \frac{s}{m} - \frac{1}{24}M\eta^2 + \frac{1}{12}Mk^2\eta^2 - \frac{1}{24}Mk^2\xi^2$$

§ 33. Les formules que nous venons de développer peuvent être appliquées directement aux problèmes comme ils se présentent dans la *Landes-Aufnahme* de la Prusse, en remplaçant la latitude φ par la distance au méridien η (Voyez: Jordan et Steppes. Das Deutsche Vermessungswesen. Band I. p. 152) et la longitude λ par la latitude φ' du pied de cette distance. Les coordonnées restent les mêmes, puisque les abscisses sont comptées dans la direction du nord et les ordonnées dans la direction de l'est. Au lieu de l'azimut on emploie l'angle de direction, qui est l'angle avec l'axe des X. Dans les formules de ce chapitre il faudrait donc remplacer A′ par le complément de cet angle.

Digitized by Google

Pour déduire l'azimut d'une ligne de l'angle de direction il faut connaître l'angle que fait le méridien de ce point avec le méridien principal. En représentant par c cet angle, que Gauss a désigné sous le nom de convergence des méridiens, mais qu'il faut bien distinguer de la convergence des méridiens désignée par α dans le paragraphe 23, on a:

$$\text{tang } c = \sin \eta \text{ tang } \varphi' = \text{Th Y tang } \varphi'$$

La valeur de c peut être facilement développée en série suivant les puissances de Y; en remplaçant tang c par $\frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{2c\sqrt{-1}} - 1}{e^{2c\sqrt{-1}} - 1}$ on trouve en résolvant:

$$e^{2c\sqrt{-1}} = \frac{\text{Ch Y cos } \varphi' + \sqrt{-1} \text{ Sh Y sin } \varphi'}{\text{Ch Y cos } \varphi' - \sqrt{-1} \text{ Sh Y sin } \varphi'} = \frac{\cos(\varphi' - \text{Y}\sqrt{-1})}{\cos(\varphi' + \text{Y}\sqrt{-1})}$$

ou en prenant les logarithmes:

$$c = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left[\text{log nat cos}(\varphi' - \text{Y}\sqrt{-1}) - \text{log nat cos}(\varphi' + \text{Y}\sqrt{-1}) \right]$$

En développant cette expression suivant la formule de Taylor, on a:

$$c = \text{L. Y} - \frac{\text{L}''}{3!}\text{Y}^3 + \frac{\text{L}^{\text{IV}}}{5!}\text{Y}^5 - \frac{\text{L}^{\text{VI}}}{7!}\text{Y}^7 + \ldots\ldots$$

où $\text{L} = \text{tang } \varphi'$ et où L'' L^{IV} etc. sont les dérivées de L par rapport à φ'. Pour ces dérivées on a:

$$\text{L}'' = 2\,\text{L} + 2\,\text{L}^3$$
$$\text{L}^{\text{IV}} = 16\,\text{L} + 40\,\text{L}^3 + 24\,\text{L}^5$$
$$\text{L}^{\text{VI}} = 272\,\text{L} + 1232\,\text{L}^3 + 1680\,\text{L}^5 + 720\,\text{L}^7$$
$$\text{etc.}$$

VI DÉVELOPPEMENT DES TERMES D'ORDRE SUPÉRIEUR DANS ψ_0 ψ_1 ET *Log* $\frac{S}{s}$.

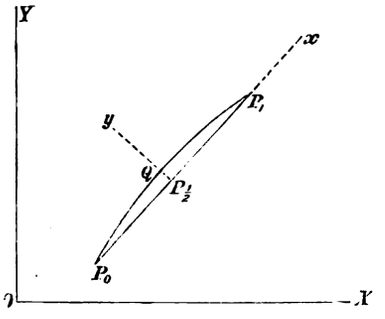
§ 34. Les formules que nous avons développées dans le chapitre IV suffisent pour tous les cas qui se présentent dans les triangulations. Dans le cas où l'on aura une ligne très longue et qu'on voudra effectuer le calcul avec la dernière précision on devra avoir les termes au dessus du 2^{d} ordre. C'est pour cela que nous allons les développer ici. Nous avons développé ces termes jusqu'au sixième ordre inclus; toutefois nous ne donnerons les détails du développement que pour les termes des quatre premiers ordres, à la fin nous ajouterons les termes du 5me et du 6me ordre sans démonstration.

Digitized by Google

Comme nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il est avantageux de prendre les différentes fonctions qui entrent dans les séries avec l'argument $Y = \frac{1}{2}(Y_0 + Y_1)$ et comme nous avons traité dans le chapitre IV le seul cas où l'on peut avec avantage employer un autre argument, nous développerons ici les formules seulement pour l'argument $Y = \frac{1}{2}(Y_0 + Y_1)$.

Dans ce développement nous prendrons l'origine des axes auxiliaires xy dans le point $P_{\frac{1}{2}}$ (fig. 6) sur le milieu de la corde $P_0 P_1$, ce qui donne beaucoup de facilités dans les calculs. Toutefois les fonctions qui entrent dans les séries seront alors prises avec l'ordonnée du point Q comme argument, mais il sera facile de les transformer ensuite en d'autres avec l'argument $Y = \frac{1}{2}(Y_0 + Y_1)$.

Fig. 6.



Avec ce nouveau système d'axes auxiliaires l'équation différentielle (14) reste la même; mais dans l'équation (15) de la projection de la ligne géodésique nous devons introduire un terme indépendant de x parceque l'origine n'est plus sur la courbe. En ajoutant encore deux termes a cette équation, pour pouvoir développer les termes de 3me et de 4me ordre dans ψ_0 ψ_1 et $log \frac{S}{s}$, nous avons pour la projection de la ligne géodésique:

$$y = y_q + \left(\frac{dy}{dx}\right)_q x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_q x^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_q x^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_q x^4 + \frac{1}{120}\left(\frac{d^5y}{dx^5}\right)_q x^5 + \ldots \quad (55)$$

où l'indice q désigne que les quantités entre parenthèses doivent être prises pour le point Q (fig. 6) c'est-à-dire pour $x = o$.

Comme l'équation différentielle (14) est du second ordre, on doit avoir deux constantes. Nous prendrons pour ces constantes les valeurs de y_q et de $p_q = \left(\frac{dy}{dx}\right)_q$. Pour les déterminer nous avons les deux conditions que y doit devenir égal à zéro pour x égal à $-\frac{1}{2}s$ et pour x égal à $+\frac{1}{2}s$. En introduisant ces deux conditions dans l'équation (55), nous trouvons:

$$y_q = -\frac{1}{8}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_q s^2 - \frac{1}{384}\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_q s^4 - \ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

$$p_q = -\frac{1}{24}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_q s^2 - \frac{1}{1920}\left(\frac{d^5y}{dx^5}\right)_q s^4 - \ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

§ 35. En différentiant l'équation (14) de la même manière que nous l'avons fait dans le paragraphe 12 et en ne conservant que le nombre de termes en p strictement nécessaire pour trouver le terme indépendant de p dans $\frac{d^5y}{dx^5}$, nous avons:

Digitized by Google

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -k\sin A' + pk\cos A' - p^2 k\sin A' + p^3 k\cos A'$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -(k'+k^2)\sin A'\cos A' + p\left[(k'+k^2)\cos^2 A' - (k'-2k^2)\sin A'\right] - 6p^2k^2\sin A'\cos A'$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -(k''+3k'k+k^3)\sin A'\cos^2 A' + (k'k-2k^3)\sin^3 A' +$$
$$+ p\left[(k''+3k'k+k^3)\cos^3 A' + (-2k''+k'k+14k^3)\sin^2 A'\cos A'\right]$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = -(k'''+4k''k+3k'^2+6k'k^2+k^4)\sin A'\cos^3 A' +$$
$$+ (3k''k+k'^2-7k'k^2-14k^4)\sin^3 A'\cos A'$$

En mettant dans l'expression pour $\frac{d^3y}{dx^3}$, $x=0$ et en supprimant les deux derniers termes, qui deviennent alors du 2me et du 4me ordre, nous avons:

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_q = -(k'_q+k_q^2)\sin A'\cos A'$$

ce que substituant dans (57), nous trouvons pour p_q jusqu'aux termes du 4me ordre exclus:

$$p_q = \tfrac{1}{24}(k'_q+k_q^2)\,s^2\sin A'\cos A'$$

ou, si nous introduisons les valeurs de $\xi = s\sin A'$ et de $\eta = s\cos A'$

$$p_q = \tfrac{1}{24}(k'_q+k_q^2)\,\xi\eta$$

A l'aide de cette valeur de p_q nous tirons des expressions pour $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ et $\frac{d^5y}{dx^5}$ en y mettant $x=0$, en multipliant par s, s^2, s^3 et s^4 afin de pouvoir introduire les valeurs de ξ et de η, et en supprimant les termes d'ordre supérieur dont nous n'avons pas besoin:

$$s\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_q = -k\xi + \tfrac{1}{24}(k'k+k^3)\,\xi\eta^2$$

$$s^2\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_q = -(k'+k^2)\,\xi\eta + \tfrac{1}{24}\left[(k'^2+2k'k^2+k^4)\,\xi\eta^3 - (k'^2-k'k^2-2k^4)\,\xi^3\eta\right]$$

$$s^3\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_q = -(k''+3k'k+k^3)\,\xi\eta^2 + (k'k-2k^3)\,\xi^3$$

$$s^4\left(\frac{d^5y}{dx^5}\right)_q = -(k'''+4k''k+3k'^2+6k'k^2+k^4)\,\xi\eta^3 + (3k''k+k'^2-7k'k^2-14k^4)\,\xi^3\eta$$

Dans ces formules, ainsi que dans toutes celles qui vont suivre, nous avons supprimé l'indice q qui devrait accompagner les quantités $k\,k'\,k''$ etc.

En substituant maintenant ces valeurs dans (56) et (57), nous trouvons jusqu'aux termes du 6me ordre exclus:

$$y_q = \tfrac{1}{6}k\,s\,\xi + \tfrac{1}{360}\left[(k''+k'k-k^3)\,s\,\xi\eta^2 + (-k'k+2k^3)\,s\,\xi^3\right] \quad \ldots \quad (58)$$

$$p_q = \tfrac{1}{24}(k'+k^2)\,\xi\eta + \tfrac{1}{5760}\left[(3k'''+12k''k-k'^2-2k'k^2-7k^4)\,\xi\eta^3 + \right.$$
$$\left. + (-9k''k+7k'^2+11k'k^2+22k^4)\,\xi^3\eta\right] \quad \ldots \quad (59)$$

Digitized by Google

§ 36. Pour avoir la valeur de ψ_0 nous savons que la tangente de ψ_0 est égale à la valeur de $\frac{dy}{dx}$ pour $x = -\frac{1}{2}s$. En différentiant l'équation (55) par rapport à x et en posant $x = -\frac{1}{2}s$, nous trouvons donc:

$$\text{tang}\,\psi_0 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_q - \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_q s + \frac{1}{8}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_q s^2 - \frac{1}{48}\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_q s^3 + \frac{1}{384}\left(\frac{d^5y}{dx^5}\right)_q s^4 - \ldots$$

ou, en substituant les valeurs trouvées dans le paragraphe précédent:

$$\text{tang}\,\psi_0 = \tfrac{1}{2}k\xi - \tfrac{1}{12}(k' + k^2)\,\xi\eta + \tfrac{1}{48}\left[(k'' + 2k'k)\,\xi\eta^2 + (-k'k + 2k^3)\,\xi^3\right] -$$

$$- \tfrac{1}{1440}\left[(3k''' + 12k''k + 4k'^2 + 8k'k^2 - 2k^4)\,\xi\eta^3 + (-9k''k + 2k'^2 + 16k'k^2 + 32k^4)\,\xi^3\eta\right]$$

d'où nous trouvons pour ψ_0

$$\psi_0 = \text{tang}\,\psi_0 - \tfrac{1}{3}\text{tang}^3\psi_0 = \tfrac{1}{2}k\xi - \tfrac{1}{12}(k' + k^2)\,\xi\eta + \tfrac{1}{48}\left[(k'' + 2k'k)\,\xi\eta^2 - k'k\xi^3\right] -$$

$$- \tfrac{1}{1440}\left[(3k''' + 12k''k + 4k'^2 + 8k'k^2 - 2k^4)\,\xi\eta^3 + (-9k''k + 2k'^2 - 14k'k^2 + 2k^4)\,\xi^3\eta\right]$$

Pour avoir la valeur de ψ_1 nous pourrions prendre la valeur de $\frac{dy}{dx}$ pour $x = +\frac{1}{2}s$, qui est égale a la tangente de ψ_1 avec le signe contraire; mais il est clair qu'en développant nous devons trouver la même expression que pour ψ_0 à l'exception des signes des termes d'ordre pair qui doivent changer; de sorte que nous pouvons écrire de suite:

$$\tfrac{1}{2}(\psi_1 + \psi_0) = \tfrac{1}{2}k\xi + \tfrac{1}{48}\left[(k'' + 2k'k)\,\xi\eta^2 - k'k\xi^3\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

$$\tfrac{1}{2}(\psi_1 - \psi_0) = \tfrac{1}{12}(k' + k^2)\,\xi\eta + \tfrac{1}{1440}\left[(3k''' + 12k''k + 4k'^2 + 8k'k^2 - 2k^4)\,\xi\eta^3 + \right.$$

$$\left. + (-9k''k + 2k'^2 - 14k'k^2 + 2k^4)\,\xi^3\eta\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

§ 37. Pour avoir la longueur de la ligne géodésique nous avons:

$$S = \int \frac{1}{m}\sqrt{1 + p^2}\,dx$$

où l'intégrale doit être prise entre les limites $-\frac{1}{2}s$ et $+\frac{1}{2}s$. Pour la valeur de p nous trouvons en différentiant (55):

$$p = \left(\frac{dy}{dx}\right)_q + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_q x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_q x^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_q x^3 + \ldots$$

ou, en éliminant $\left(\frac{dy}{dx}\right)_q = p_q$ à l'aide de (57):

$$p = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_q x + \frac{1}{24}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_q (12x^2 - s^2) + \frac{1}{6}\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_q x^3 + \ldots$$

Avec cette valeur de p nous trouvons

$$\sqrt{1 + p^2} = 1 + \tfrac{1}{2}p^2 - \tfrac{1}{8}p^4 = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_q x^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_q\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_q (12x^3 - s^2x) +$$

$$+ \frac{1}{1152}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_q^2 (144x^4 - 24s^2x^2 + s^4) + \frac{1}{6}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_q\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_q x^4 - \frac{1}{8}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_q^4 x^4$$

Digitized by Google

et en multipliant par:

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{m_q}+\left(\frac{d\frac{1}{m}}{dx}\right)_q x+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\frac{1}{m}}{dx^2}\right)_q x^2+\frac{1}{6}\left(\frac{d^3\frac{1}{m}}{dx^3}\right)_q x^3+\frac{1}{24}\left(\frac{d^4\frac{1}{m}}{dx^4}\right)_q x^4+\ldots$$

nous avons:

$$\frac{1}{m}\sqrt{1+p^2}=\frac{1}{m_q}+\left(\frac{d\frac{1}{m}}{dx}\right)_q x+\frac{1}{2m_q}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_q^2 x^2+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\frac{1}{m}}{dx^2}\right)_q x^2+\frac{1}{24m_q}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_q\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)(12x^3-s^2x)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{d\frac{1}{m}}{dx}\right)_q\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_q x^3+\frac{1}{6}\left(\frac{d^3\frac{1}{m}}{dx^3}\right)_q x^3+\frac{1}{1152m_q}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_q^2(144x^4-24s^2x^2+s^4)+$$

$$+\frac{1}{6m_q}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_q\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_q x^4-\frac{1}{8m_q}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_q^4 x^4+\frac{1}{24}\left(\frac{d\frac{1}{m}}{dx}\right)_q\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_q\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_q(12x^4-s^2x^2)+$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{d^2\frac{1}{m}}{dx^2}\right)_q\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_q^2 x^4+\frac{1}{24}\left(\frac{d^4\frac{1}{m}}{dx^4}\right)_q x^4+\ldots\ldots$$

En multipliant cette expression par dx et en intégrant entre les limites $-\frac{1}{2}s$ et $+\frac{1}{2}s$ nous trouvons enfin pour la longueur de la ligne géodésique:

$$S=\frac{s}{m_q}+\left[\frac{1}{24m_q}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_q^2+\frac{1}{24}\left(\frac{d^2\frac{1}{m}}{dx^2}\right)_q\right]s^3+\left[\frac{1}{1440m_q}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_q^2+\frac{1}{480m_q}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_q\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_q-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{640m_q}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_q^4+\frac{1}{360}\left(\frac{d\frac{1}{m}}{dx}\right)_q\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_q\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_q+\frac{1}{320}\left(\frac{d^2\frac{1}{m}}{dx^2}\right)_q\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_q^2+\frac{1}{1920}\left(\frac{d^4\frac{1}{m}}{dx^4}\right)_q\right]s^5+\ldots$$

§ 38. Les valeurs de $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_q$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_q$ et $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_q$ qu'il faut substituer dans l'expression trouvée pour S sont déjà développées dans le paragraphe 35; pour obtenir les valeurs de $\left(\frac{d\frac{1}{m}}{dx}\right)_q$, $\left(\frac{d^2\frac{1}{m}}{dx^2}\right)_q$ etc. il faut différentier l'expression:

$$\frac{d\frac{1}{m}}{dx}=-\frac{1}{m}(k\cos A'+pk\sin A')$$

trouvée dans le paragraphe 17. Cette différentiation nous donne en ne tenant compte que des termes nécessaires pour trouver le terme de $\frac{d^4\frac{1}{m}}{dx^4}$ qui est indépendant de p:

$$\frac{d^2\frac{1}{m}}{dx^2}=-\frac{1}{m}\left[(k'-k^2)\cos^2A'-k^2\sin^2A'+p(2k'-k^2)\sin A'\cos A'+p^2(k'-2k^2)\sin^2A'\right]$$

$$\frac{d^3\frac{1}{m}}{dx^3}=-\frac{1}{m}\left[(k''-3k'k+k^3)\cos^3A'-(4k'k-2k^3)\sin^2A'\cos A'+\right.$$
$$\left.+p\{(3k''-5k'k+k^3)\sin A'\cos^2A'-(4k'k-5k^3)\sin^3A'\}\right]$$

$$\frac{d^4\frac{1}{m}}{dx^4}=-\frac{1}{m}\left[(k'''-4k''k-3k'^2+6k'k^2-k^4)\cos^4A'-\right.$$
$$\left.-(7k''k+4k'^2-15k'k^2+3k^4)\sin^2A'\cos^2A'+(4k'k^2-5k^4)\sin^4A'\right]$$

Digitized by Google

Appliquons ces expressions au point Q, mettons pour y_q la valeur (59), multiplions par s, s^2, s^3 et s^4 afin de pouvoir introduire les valeurs $\xi = s \sin A'$ et $\eta = s \cos A'$ et supprimons l'indice q qui devrait accompagner m, k, k' etc., nous trouvons pour autant que nous en avons besoin:

$$s\left(\frac{d\frac{1}{m}}{dx}\right)_q = -\frac{1}{m} k \eta$$

$$s^2\left(\frac{d^2\frac{1}{m}}{dx^2}\right)_q = -\frac{1}{m}\left[(k' - k^2)\eta^2 - k^2\xi^2 + \tfrac{1}{24}(2k'^2 + k'k^2 - k^4)\xi^2\eta^2\right]$$

$$s^4\left(\frac{d^4\frac{1}{m}}{dx^4}\right)_q = -\frac{1}{m}\Big[(k''' - 4k''k - 3k'^2 + 6k'k^2 - k^4)\eta^4 - \\ - (7k''k + 4k'^2 - 15k'k^2 + 3k^4)\xi^2\eta^2 + (4k'k^2 - 5k^4)\xi^4\Big]$$

En substituant ces valeurs ainsi que les valeurs de $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_q$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_q$ et $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_q$ dans l'expression trouvée à la fin du paragraphe précédent nous trouvons après réduction, pour la longueur de la ligne géodésique:

$$S = \frac{s}{m}\Big\{1 - \tfrac{1}{24}\Big[(k' - k^2)\eta^2 - 2k^2\xi^2\Big] - \tfrac{1}{5760}\Big[(3k''' - 12k''k - 9k'^2 + 18k'k^2 - 3k^4)\eta^4 - \\ - (33k''k - 4k'^2 - 65k'k^2 + 17k^4)\xi^2\eta^2 + (24k'k^2 - 48k^4)\xi^4\Big] + \ldots\ldots\Big\}$$

ou, en prenant les logarithmes:

$$\log \text{nat } S = \log \text{nat } \frac{s}{m} - \tfrac{1}{24}\Big[(k' - k^2)\eta^2 - 2k^2\xi^2\Big] - \tfrac{1}{5760}\Big[(3k''' - 12k''k - 4k'^2 + 8k'k^2 + 2k^4)\eta^4 - \\ - (33k''k - 4k'^2 - 45k'k^2 - 3k^4)\xi^2\eta^2 + (24k'k^2 - 28k^4)\xi^4\Big] + \ldots \quad (62)$$

§ 39. Dans les formules que nous avons développées dans les paragraphes précédents pour y_q, $\frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_0)$, $\frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_0)$ et log nat S, les quantités m, k, k' k'' et k''' devraient avoir l'indice q, c'est-à-dire que ces quantités doivent être prises avec l'ordonnée de Q (fig. 6) comme argument.

En désignant par $Y = \frac{1}{2}(Y_0 + Y_1)$ l'ordonnée de $P_{\frac{1}{2}}$, l'ordonnée de Q est égale à $Y + y_q \sin A'$. Si nous voulons avoir ces quantités avec l'argument Y nous devons substituer d'après la formule de Taylor:

$$\log m_q = \log m + k(y_q \sin A') + \tfrac{1}{2}k'(y_q \sin A')^2$$

$$k_q = k + k'(y_q \sin A') \qquad k'_q = k' + k''(y_q \sin A') \qquad k''_q = k'' \qquad k'''_q = k'''$$

Pour la valeur de $(y_q \sin A')$ nous tirons de (58) jusqu'aux termes du second ordre inclus:

$$y_q \sin A' = \tfrac{1}{8} k s \xi \sin A' = \tfrac{1}{8} k \xi^2$$

Digitized by Google

avec laquelle nous trouvons:

$$k_q = k + \tfrac{1}{8}\, k\, k'\, \xi^2$$

et en mettant cette valeur dans (58) nous avons jusqu'aux termes du quatrième ordre inclus:

$$y_q = \tfrac{1}{8}\, k\, s\, \xi + \tfrac{1}{384}\left[(k'' + k'k - k^3)\, s\, \xi\, \eta^2 + (5\, k'\, k + 2\, k^3)\, s\, \xi^3\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

où k, k' et k'' sont maintenant des fonctions de $Y = \tfrac{1}{2}(Y_0 + Y_1)$.

Avec cette valeur de y_q nous trouvons:

$$\log \text{nat}\, m_q = \log \text{nat}\, m + \tfrac{1}{8}\, k^2\, \xi^2 + \tfrac{1}{384}\left[(k''\, k + k'\, k^2 - k^4)\, \xi^2\, \eta^2 + (8\, k'\, k^2 + 2\, k^3)\, \xi^4\right]$$

$$k_q = k + \tfrac{1}{8}\, k\, k'\, \xi^2 \qquad k'_q = k' + \tfrac{1}{8}\, k\, k''\, \xi^2 \qquad k''_q = k'' \qquad k'''_q = k'''$$

où m, k, k', k'' et k''' sont des fonctions de $Y = \tfrac{1}{2}(Y_0 + Y_1)$.

§ 40. En mettant ces dernières valeurs dans les séries (60), (61) et (62) nous trouvons les séries pour: $\tfrac{1}{2}(\psi_1 + \psi_0)$, $\tfrac{1}{2}(\psi_1 - \psi_0)$ et log S jusqu'aux termes du 4me ordre inclus et où toutes les fonctions m, k, k' etc. doivent être prises avec l'argument $Y = \tfrac{1}{2}(Y_0 + Y_1)$.

En y ajoutant les termes du 5me et du 6me ordre comme nous l'avons promis au paragraphe 34, ces séries sont:

$$\tfrac{1}{2}(\psi_1 + \psi_0) = \tfrac{1}{2}\, k\, \xi + \tfrac{1}{48}\left[(k'' + 2\, k'\, k)\, \xi\, \eta^2 + 2\, k'\, k\, \xi^3\right] + \tfrac{1}{11520}\left[A_1\, \xi\, \eta^4 + A_2\, \xi^3\, \eta^2 + A_3\, \xi^5\right]. \quad (64)$$

où

$$A_1 = 3\, k^{IV} + 12\, k'''\, k + 20\, k''\, k' + 8\, k''\, k^2 + 16\, k'^2\, k - 8\, k'\, k^3$$

$$A_2 = 12\, k'''\, k + 20\, k''\, k' + 32\, k''\, k^2 + 64\, k'^2\, k + 16\, k'\, k^3$$

$$A_3 = 24\, k''\, k^2 + 48\, k'^2\, k + 24\, k'\, k^3$$

$$\tfrac{1}{2}(\psi_1 - \psi_0) = \tfrac{1}{12}(k' + k^2)\, \xi\, \eta + \tfrac{1}{1440}\left[(3\, k''' + 12\, k''\, k + 4\, k'^2 + 8\, k'\, k^2 - 2\, k^4)\, \xi\, \eta^3 + \right.$$

$$\left. + (6\, k''\, k + 2\, k'^2 + 16\, k'\, k^2 + 2\, k^4)\, \xi^3\, \eta\right] + \tfrac{1}{1451520}\left[B_1\, \xi\, \eta^5 + B_2\, \xi^3\, \eta^3 + B_3\, \xi^5\, \eta\right] \quad . \quad (65)$$

où

$$B_1 = 27\, k^V + 162\, k^{IV}\, k + 216\, k'''\, k' + 270\, k''^2 + 216\, k'''\, k^2 + 864\, k''\, k'\, k + 48\, k'^3 -$$
$$- 216\, k''\, k^3 + 144\, k'^2\, k^2 - 288\, k'\, k^4 + 48\, k^6$$

$$B_2 = 108\, k^{IV}\, k + 144\, k'''\, k' + 180\, k''^2 + 576\, k'''\, k^2 + 2304\, k''\, k'\, k + 128\, k'^3 +$$
$$+ 1152\, k''\, k^3 + 2256\, k'^2\, k^2 + 384\, k'\, k^4 - 160\, k^6$$

$$B_3 = + 216\, k'''\, k^2 + 864\, k''\, k'\, k + 48\, k'^3 + 1080\, k''\, k^3 + 2304\, k'^2\, k^2 + 1440\, k'\, k^4 + 48\, k^6$$

Digitized by Google

$$\log \text{nat } S = \log \text{nat } \frac{s}{m} - \tfrac{1}{24}\left[(k' - k^2)\,\eta^2 + k^2\,\xi^2\right] - \tfrac{1}{5760}\left[(3k''' - 12k''k - 4k'^2 + 8k'k^2 + 2k^4)\eta^4 + \right.$$

$$\left. + (12k''k + 4k'^2 - 12k^4)\xi^2\eta^2 + (24k'k^2 + 2k^4)\xi^4\right] - \tfrac{1}{967680}\left[C_1\eta^6 + C_2\xi^2\eta^4 + C_3\xi^4\eta^2 + C_4\xi^6\right] . \quad (66)$$

où

$$C_1 = 9k^v - 54k^{iv}k - 72k'''k' - 90k''^2 + 72k'''k^2 + 288k''k'k + 16k'^3 + \\ + 72k''k^3 - 48k'^2k^2 - 96k'k^4 - 16k^6$$

$$C_2 = 54k^{iv}k + 72k'''k' + 90k''^2 - 576k''k^3 - 120k'^2k^2 + 240k^6$$

$$C_3 = 216k'''k^2 + 864k''k'k + 48k'^3 + 360k''k^3 + 768k'^2k^2 - 864k'k^4 - 240k^6$$

$$C_4 = 432k''k^3 + 1224k'^2k^2 + 576k'k^4 + 16k^6$$

§ 41. Dans le paragraphe 32 nous avons vu que la formule pour le calcul direct de la ligne géodésique est très compliquée, même pour le cas de la sphère, et qu'il vaut mieux dans ce cas de calculer d'abord la longueur de la corde pour en déduire ensuite la longueur de la ligne géodésique.

Nous pourrions demander s'il n'est pas possible d'agir ici dans le cas général d'une manière analogue. Pour des raisons que nous verrons plus tard, il n'est pas préférable de calculer d'abord la longueur de la corde; il vaut mieux de calculer d'abord une longueur auxiliaire Z, qui, dans le cas de la sphère, est égale à la corde et qui donne dans le cas général une formule simple analogue à la formule (53).

Posons donc:

$$\log \text{nat } S = \log \text{nat } Z + \frac{1}{24}\left(\frac{Z}{\varrho}\right)^2 + \frac{11}{2880}\left(\frac{Z}{\varrho}\right)^4 + \frac{191}{362880}\left(\frac{Z}{\varrho}\right)^6 + \ldots . \quad (67)$$

dans laquelle ϱ est une quantité qui remplace le rayon de la sphère dans le cas de la formule (53) et dont nous pouvons disposer pour rendre la formule pour le calcul de Z aussi simple que possible.

Pour déterminer la quantité auxiliaire Z nous renversons la formule (67) et nous trouvons:

$$\log \text{nat } Z = \log \text{nat } S - \frac{1}{24}\left(\frac{S}{\varrho}\right)^2 - \frac{1}{2880}\left(\frac{S}{\varrho}\right)^4 - \frac{1}{181440}\left(\frac{S}{\varrho}\right)^6 - \ldots . \quad (68)$$

en substituant dans cette série la valeur de S de la série (66) nous trouvons la valeur de Z.

Avant d'effectuer cette substitution il faut déterminer la valeur de ϱ. A cet effet nous déterminons d'abord la valeur de log Z jusqu'aux termes du second ordre inclus. Remplaçons pour cela log nat S par sa valeur dans (66) et S^2 dans le terme du second ordre par $\frac{s^2}{m^2} = \frac{\xi^2 + \eta^2}{m^2}$; nous aurons alors:

$$\log \text{nat } Z = \log \text{nat } \frac{s}{m} - \frac{1}{24}\left[\left(k' - k^2 + \frac{1}{m^2\varrho^2}\right)\eta^2 + \left(k^2 + \frac{1}{m^2\varrho^2}\right)\xi^2\right]$$

Digitized by Google

ou, en introduisant la quantité $\sqrt{m_0 m_1}$ par la relation:

$$\log \text{nat} \sqrt{m_0 m_1} = \log \text{nat} m + \tfrac{1}{8} k' \eta^2$$

nous trouvons:

$$\log \text{nat} Z = \log \text{nat} \frac{s}{\sqrt{m_0 m_1}} + \frac{1}{24}\left[\left(2k' + k^2 - \frac{1}{m^2 \varrho^2}\right)\eta^2 - \left(k^2 + \frac{1}{m^2 \varrho^2}\right)\xi^2\right]$$

En comparant cette formule avec (50) nous voyons que, pour la rendre aussi simple que possible, il faut déterminer ϱ de manière que les coefficients de ξ^2 et de η^2 soient égaux et de signes contraires, d'où nous tirons: $\frac{1}{m^2 \varrho^2} = k'$ ou:

$$\varrho^2 = \frac{1}{m^2 k'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (69)$$

Cette valeur de ϱ a une signification très simple; en différentiant la relation $k = \frac{\sin \varphi}{a}$ par rapport à Y on trouve:

$$k' = \frac{\cos \varphi}{a} \cdot \frac{d\varphi}{d\mathrm{Y}} = \frac{\cos \varphi}{a} \cdot \frac{r}{a\mathrm{R}} = \frac{r^2}{a^2 \mathrm{R N}} = \frac{1}{m^2 \mathrm{R N}}$$

d'où il suit:

$$\varrho = \frac{1}{m\sqrt{k'}} = \sqrt{\mathrm{R N}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (70)$$

c'est-à-dire que ϱ est le rayon de courbure moyen correspondant au point milieu entre P_0 et P_1 sur la corde.

Afin de déterminer la valeur de log Z jusqu'aux termes du quatrième ordre inclus nous tirons de (66) en multipliant par 2 et en soustrayant log nat ϱ^2:

$$\log \text{nat}\left(\frac{\mathrm{S}}{\varrho}\right)^2 = \log \text{nat} \frac{s^2}{m^2 \varrho^2} - \tfrac{1}{12}\left[(k' - k^2)\eta^2 + k^2 \xi^2\right]$$

d'où l'on tire:

$$\left(\frac{\mathrm{S}}{\varrho}\right)^2 = \frac{s^2}{m^2 \varrho^2}\left\{1 - \tfrac{1}{12}\left[(k' - k^2)\eta^2 + k^2 \xi^2\right]\right\}$$

ou en remplaçant $\frac{s^2}{m^2 \varrho^2}$ par $k' s^2 = k'(\xi^2 + \eta^2)$:

$$\left(\frac{\mathrm{S}}{\varrho}\right)^2 = k'\eta^2 + k'\xi^2 - \tfrac{1}{12}\left[(k'^2 - k'k^2)\eta^4 + k'^2 \xi^2 \eta^2 + k'k^2 \xi^4\right]$$

En mettant cette valeur ainsi que la valeur de log nat S d'après (66) dans (68) et en introduisant la quantité $\sqrt{m_0 m_1}$ à l'aide de la relation:

$$\log \text{nat} \sqrt{m_0 m_1} = \log \text{nat} m + \tfrac{1}{8} k' \eta^2 + \tfrac{1}{384} k''' \eta^4$$

on trouve la valeur de log Z jusqu'aux termes du quatrième ordre inclus.

En y ajoutant les termes du sixième ordre, comme nous l'avons fait dans le paragraphe précédent, nous avons:

Digitized by Google

$$\log \text{nat}\, Z = \log \text{nat}\, \frac{s}{\sqrt{m_0 m_1}} + \tfrac{1}{24}(k'+k^2)(\eta^2-\xi^2) + \tfrac{1}{2880}\Big[(6k'''+6k''k+11k'^2-14k'k^2-k^4)\eta^4 -$$
$$-6(k''k-k'^2-k^4)\xi^2\eta^2-(k'^2+2k'k^2+k^4)\xi^4\Big] + \tfrac{1}{1451520}\Big[D_1\eta^6-D_2\xi^2\eta^4+D_3\xi^4\eta^2-D_4\xi^6\Big]. \quad (71)$$

où:

$$D_1 = 27k^v + 27k^{IV}k + 99k'''k' + 45k''^2 - 36k'''k^2 - 396k''k'k - 226k'^3 - 36k''k^3 + 528k'^2k^2 - 120k'k^4 + 8k^6$$

$$D_2 = 27k^{IV}k - 27k'''k' + 45k''^2 + 66k'^3 - 288k''k^3 - 144k'^2k^2 + 120k^6$$

$$D_3 = -108k'''k^2 - 180k''k'k + 120k'^3 - 180k''k^3 - 216k'^2k^2 + 432k'k^4 + 120k^6$$

$$D_4 = 8k'^3 + 216k''k^3 + 24k'^2k^2 + 456k'k^4 + 8k^6$$

Après avoir calculé la quantité auxiliaire Z à l'aide de cette formule on trouve la valeur de S par la formule (67) ou ϱ est determiné par (70).

§ 42. Les formules développées dans ce chapitre sont appliquables à toute surface de révolution. Pour l'appliquer a une surface particulière il faut commencer par déterminer les valeurs particulières des quantités k, k', k'', k''' etc. pour cette surface.

Pour la sphère ces quantités sont données dans le paragraphe 26; en les substituant dans les formules (64), (65), (66) et (71) on retrouve exactement les formules (39), (36), (54) et (50), ce qui est une vérification complète des formules développées dans ce paragraphe.

Pour les appliquer à l'ellipsoïde on trouve en différentiant la quantité $k = \frac{\sin\varphi}{a}$ par rapport à Y et en mettant pour simplifier:

$$\frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\varphi = c$$

les expressions suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
k &= \frac{\sin\varphi}{a}\\
k' &= \frac{\cos^2\varphi}{a^2}(1+c)\\
k'' &= -2\frac{\sin\varphi\cos^2\varphi}{a^3}(1+c)(1+2c^2)\\
k''' &= -2\frac{\cos^2\varphi}{a^4}(1+c)\Big[\cos^2\varphi(1+3c+2c^2)-\sin^2\varphi(2+12c+12c^2)\Big]\\
k^{IV} &= 8\frac{\sin\varphi\cos^2\varphi}{a^5}(1+c)\Big[\cos^2\varphi(2+13c+22c^2+11c^3)-\sin^2\varphi(1+14c+36c^2+24c^3)\Big]\\
k^v &= 8\frac{\cos^2\varphi}{a^6}(1+c)\left\{\begin{array}{l}\cos^4\varphi(2+15c+35c^2+33c^3+11c^4)-\\ -\sin^2\varphi\cos^2\varphi(11+135c+430c^2+510c^3+204c^4)+\\ +\sin^4\varphi(2+60c+300c^2+480c^3+240c^4)\end{array}\right\}
\end{aligned}\right\}. \quad (72)$$

Digitized by Google

§ 43. En substituant les valeurs (72) dans (64) on trouve pour $\frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_0)$

$$\frac{1}{2}(\psi_1+\psi)_0 = \frac{\sin\varphi}{2a}\xi + \frac{\sin\varphi\cos^2\varphi}{24a^3}(1+c)\,\xi^3 - \frac{\sin\varphi\cos^2\varphi}{12a^3}(c+c^2)\,\xi\eta^2 +$$
$$+\frac{\sin\varphi\cos^2\varphi}{480a^5}(1+c)\Big[(2+2c)\cos^2\varphi-(1+4c)\sin^2\varphi\Big]\xi^5 -$$
$$-\frac{\sin\varphi\cos^2\varphi}{360a^5}(c+c^2)\Big[(4+4c)\cos^2\varphi-(5+9c)\sin^2\varphi\Big]\xi^3\eta^2 +$$
$$+\frac{\sin\varphi\cos^2\varphi}{1440a^5}(c+c^2)\Big[(17+50c+33c^2)\cos^2\varphi-(10+72c+72c^2)\sin^2\varphi\Big]\xi\eta^4 . \quad (73)$$

Les deux derniers termes peuvent toujours être négligés, même pour les plus grandes distances, car pour $s = 1000$ KM. et $\varphi = 10°$ leurs valeurs sont:

$$0'',0000418 \qquad \text{et} \qquad 0'',0000708$$

Les termes en $\xi\,\eta^2$ et ξ^5 ont aussi des valeurs peu fortes. Dans les mêmes circonstances ces valeurs sont au maximum:

$$0'',02818 \qquad \text{et} \qquad 0'',01327$$

Le terme en ξ^3 enfin peut avoir dans ce cas une valeur égale à:

$$5'',617$$

qui ne doit pas être négligée pour ces grandes distances.

Pour les distances comme on les rencontre dans les triangulations de premier ordre, c'est-à-dire pour $s = 100$ KM., cette valeur n'est pour $\varphi = 10°$ que:

$$0'',005617$$

de sorte que dans ce cas il peut encore être négligé, mais pour des distances un peu plus fortes il faut en tenir compte quand on veut obtenir une grande précision dans les calculs.

§ 44. Pour la valeur de $\frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_0)$ on obtient en substituant les valeurs (72) dans (65):

$$\frac{1}{2}(\psi_1-\psi_0) = \frac{1}{12a^2}(1+c\cos^2\varphi)\,\xi\eta - \frac{\xi\eta^3}{720a^4}\Big[1+c(8+13c+6c^2)\cos^4\varphi -$$
$$-c(10+48c+36c^2)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\Big] +$$
$$+\frac{\xi^3\eta}{720a^4}\Big[1+c(2+c)\cos^4\varphi - c(10+12c)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\Big] +$$
$$+\frac{1}{181440a^6}\Big[B'_1\xi\eta^5 - B'_2\xi^3\eta^3 + B'_3\xi^5\eta\Big] \quad . \; . \; . \quad (74)$$

où

$$B'_1 = 6 + c\left\{\begin{array}{l}(207+882c+1464c^2+1080c^3+297c^4)\cos^6\varphi - \\ -(882+7110c+17010c^2+16308c^3+5508c^4)\sin^2\varphi\cos^4\varphi + \\ +(126+3024c+11988c^2+15552c^3+6480c^4)\sin^4\varphi\cos^2\varphi\end{array}\right\}$$

Digitized by Google

$$B'_2 = 20 + c \left\{ \begin{array}{l} (132 + 276\,c + 236\,c^2 + 72\,c^3)\cos^6\varphi - \\ -(420 + 3000\,c + 4500\,c^2 + 1980\,c^3)\sin^2\varphi\cos^4\varphi + \\ +(420 + 2520\,c + 4752\,c^2 + 2592\,c^3)\sin^4\varphi\cos^2\varphi \end{array} \right\}$$

$$B'_3 = 6 + c \left\{ \begin{array}{l} (18 + 18\,c + 6\,c^2)\cos^6\varphi - \\ -(504 + 1062\,c + 540\,c^2)\sin^2\varphi\cos^4\varphi + \\ +(126 + 756\,c + 648\,c^2)\sin^4\varphi\cos^2\varphi \end{array} \right\}$$

Afin de juger de l'influence des différents termes nous pourrions calculer leurs valeurs maximum; mais comme les termes du même ordre sont de signe contraire il vaut mieux de les mettre d'abord sous la forme suivante:

$$\frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_0) = \frac{s^2 \sin 2A'}{24\,a^2}(1 + c\cos^2\varphi) - \frac{s^4 \sin 4A'}{2880\,a^4}\Big[1 + c(5 + 7c + 3c^2)\cos^4\varphi - c(10 + 30c + 18c^2)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\Big] - \frac{s^4 \sin 2A'}{480\,a^4}(c + c^2)\Big[(1 + c)\cos^4\varphi - 6\,c\sin^2\varphi\cos^2\varphi\Big] + \frac{s^6}{5806080\,a^6}\Big[B''_1 \sin 6A' + B''_2 \sin 4A' + B''_3 \sin 2A'\Big] . \quad (75)$$

où

$$B''_1 = 32 + c \left\{ \begin{array}{l} (357 + 1176\,c + 1706\,c^2 + 1152\,c^3 + 297\,c^4)\cos^6\varphi - \\ -(1806 + 11172\,c + 22050\,c^2 + 18288\,c^3 + 5508\,c^4)\sin^2\varphi\cos^4\varphi + \\ +(672 + 6300\,c + 17388\,c^2 + 18144\,c^3 + 6480\,c^4)\sin^4\varphi\cos^2\varphi \end{array} \right\}$$

$$B''_2 = 108\,(c + c^2) \left\{ \begin{array}{l} (7 + 25\,c + 29\,c^2 + 11\,c^3)\cos^6\varphi - \\ -(14 + 210\,c + 400\,c^2 + 204\,c^3)\sin^2\varphi\cos^4\varphi \\ +(84\,c + 336\,c^2 + 240\,c^3)\sin^4\varphi\cos^2\varphi \end{array} \right\}$$

$$B''_3 = 27\,(c + c^2) \left\{ \begin{array}{l} (27 + 109\,c + 137\,c^2 + 55\,c^3)\cos^6\varphi - \\ -(210 + 970\,c + 1780\,c^2 + 1020\,c^3)\sin^2\varphi\cos^4\varphi + \\ +(420\,c + 1392\,c^2 + 1200\,c^3)\sin^4\varphi\cos^2\varphi \end{array} \right\}$$

Sous cette forme les trois termes du sixième ordre ont pour $s = 1000$ KM. les valeurs maximum:

0″,00001819
0″,00000277
0″,00000268

et peuvent donc toujours être négligés.

Les deux termes du quatrième ordre ont dans ce cas les valeurs maximum:

0″,04476
0″,00177

pour les grandes distances on doit tenir compte du premier de ces termes.

Pour les cas qui se présentent dans les triangulations on peut toujours se contenter du terme en $\xi\eta$ ou s^3.

Digitized by Google

§ 45. En substituant les valeurs (72) dans (66) on trouve la formule pour le calcul direct du log S. Comme nous le savons déjà par le cas de la sphère, cette formule doit être très compliquée. C'est pour cela que nous ne donnerons que les termes du 2d et du 4me ordre:

$$\log\text{nat}\,S = \log\text{nat}\,\frac{s}{m} - \frac{\eta^2}{24\,a^2}\left[\cos^2\varphi\,(1+c) - \sin^2\varphi\right] - \frac{\xi^2}{24\,a^2}\sin^2\varphi +$$
$$+ \frac{\eta^4}{2880\,a^4}\left[\cos^4\varphi\,(5+16\,c+17\,c^2+6\,c^3) - \sin^2\varphi\cos^2\varphi\,(22+82\,c+96\,c^2+36\,c^3) - \sin^4\varphi\right] -$$
$$- \frac{\xi^2\,\eta^2}{2880\,a^4}\left[\cos^4\varphi\,(2+4\,c+2\,c^2) - \sin^2\varphi\cos^2\varphi\,(12+36\,c+24\,c^2) - 6\sin^4\varphi\right] -$$
$$- \frac{\xi^4}{2880\,a^4}\left[12\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,(1+c) + \sin^4\varphi\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (76)$$

Les deux premiers termes du quatrième ordre ont leurs valeurs maximum pour $\varphi = o$, le troisième pour la plus grande latitude dont nous nous occupons. Prenons pour cette latitude $\varphi = 10°$ et mettons pour la distance s 100 KM., alors ces trois termes prennent les valeurs maximum suivantes qui sont exprimées en unités de la 10me décimale des logarithmes vulgaires:

0,4657 0,0462 0,0323

Comme le premier terme est toujours positif et les deux autres negatifs, l'ensemble des trois termes ne peut excéder la moitié de l'unité de la dixième décimale du logarithme, et peut donc être négligé; de sorte que pour les cas qui se présentent dans les triangulations on peut se contenter des termes du second ordre comme nous l'avons indiqué dans le paragraphe 18.

§ 46. Pour les grandes distances il vaut mieux de calculer d'abord la quantité auxiliaire Z pour en déduire ensuite la valeur de S à l'aide de la série (67).

Pour la quantité Z nous trouvons en substituant les valeurs (72) dans (71):

$$\log\text{nat}\,Z = \log\text{nat}\,\frac{s}{\sqrt{m_0\,m_1}} + \frac{1+c\cos^2\varphi}{24\,a^2}(\eta^2-\xi^2) -$$
$$- \frac{1}{2880\,a^4}\left\{\begin{array}{c} \eta^4\,[1+c\,(26+49\,c+24\,c^2)\cos^4\varphi - c\,(118+264\,c+144\,c^2)\sin^2\varphi\cos^2\varphi] \\ -6\,\xi^2\,\eta^2\,[1+c\,(2+c)\cos^4\varphi + c\,(6+4\,c)\sin^2\varphi\cos^2\varphi] \\ +\xi^4\,[1+c\,(2+c)\cos^4\varphi + 2\,c\sin^2\varphi\cos^2\varphi] \end{array}\right\} +$$
$$+ \frac{1}{362880\,a^6}\left[D'_1\,\eta^6 - D'_2\,\xi^2\,\eta^4 + D'_3\,\xi^4\,\eta^2 - D'_4\,\xi^6\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (77)$$

où

$$D'_1 = 2 + c\left\{\begin{array}{l} (501+2085\,c+3269\,c^2+2277\,c^3+594\,c^4)\cos^6\varphi - \\ -(4884+24942\,c+46224\,c^2+37188\,c^3+11016\,c^4)\sin^2\varphi\cos^4\varphi + \\ +(2310+16344\,c+38664\,c^2+37584\,c^3+12960\,c^4)\sin^4\varphi\cos^2\varphi \end{array}\right\}$$

$$D'_2 = 30 + c\left\{\begin{array}{l} (117+171\,c+111\,c^2+27\,c^3)\cos^6\varphi + \\ +(792+1926\,c+1836\,c^2+612\,c^3)\sin^2\varphi\cos^4\varphi - \\ -(378+2412\,c+3240\,c^2+1296\,c^3)\sin^4\varphi\cos^2\varphi \end{array}\right\}$$

Digitized by Google

$$D'_3 = 30 + c \left\{ \begin{array}{l} (90 + 90c + 30c^2)\cos^6\varphi + \\ +(468 + 666c + 288c^2)\sin^2\varphi\cos^4\varphi - \\ -(378 + 1116c + 648c^2)\sin^4\varphi\cos^2\varphi \end{array} \right\}$$

$$D'_4 = 2 + c \left\{ \begin{array}{l} (6 + 6c + 2c^2)\cos^6\varphi + \\ +(12 + 6c)\sin^2\varphi\cos^4\varphi - \\ -(210 + 216c)\sin^4\varphi\cos^2\varphi \end{array} \right\}$$

Cette série peut être mise aussi sous la forme suivante:

$$\log\text{nat}\, Z = \log\text{nat}\frac{s}{\sqrt{m_0 m_1}} + \frac{s^2\cos 2A'}{24a^4}(1 + c\cos^2\varphi) -$$

$$- \frac{s^4\cos 4A'}{2880a^4}\left[1 + c(5 + 7c + 3c^2)\cos^4\varphi - c(10 + 30c + 18c^2)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\right] -$$

$$- \frac{s^4\cos 2A'}{240a^4}(c + c^2)\left[(1 + c)\cos^4\varphi - (5 + 6c)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\right] -$$

$$- \frac{s^4}{960a^4}(c + c^2)\left[(3 + 3c)\cos^4\varphi - (16 + 18c)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\right] +$$

$$+ \frac{s^6}{5806080a^6}\left[D''_1\cos 6A' + D''_2\cos 4A' + D''_3\cos 2A' + D''_4\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

où

$$D''_1 = 32 + c \left\{ \begin{array}{l} (357 + 1176c + 1706c^2 + 1152c^3 + 297c^4)\cos^6\varphi - \\ -(1806 + 11172c + 22050c^2 + 18288c^3 + 5508c^4)\sin^2\varphi\cos^4\varphi + \\ +(672 + 6300c + 17388c^2 + 18144c^3 + 6480c^4)\sin^4\varphi\cos^2\varphi \end{array} \right\}$$

$$D''_2 = 18(c + c^2) \left\{ \begin{array}{l} (84 + 267c + 282c^2 + 99c^3)\cos^6\varphi - \\ -(798 + 3290c + 4328c^2 + 1836c^3)\sin^2\varphi\cos^4\varphi + \\ +(420 + 2268c + 4032c^2 + 2160c^3)\sin^4\varphi\cos^2\varphi \end{array} \right\}$$

$$D''_3 = 9(c + c^2) \left\{ \begin{array}{l} (411 + 1317c + 1401c^2 + 495c^3)\cos^6\varphi - \\ -(4130 + 16794c + 21844c^2 + 9180c^3)\sin^2\varphi\cos^4\varphi + \\ +(1792 + 11844c + 20592c^2 + 10800c^3)\sin^4\varphi\cos^2\varphi \end{array} \right\}$$

$$D''_4 = 18(c + c^2) \left\{ \begin{array}{l} (136 + 437c + 466c^2 + 165c^3)\cos^6\varphi - \\ -(1378 + 5622c + 7304c^2 + 3060c^3)\sin^2\varphi\cos^4\varphi + \\ +(700 + 3972c + 6912c^2 + 3600c^3)\sin^4\varphi\cos^2\varphi \end{array} \right\}$$

Les termes du sixième ordre ont pour la distance de 1000 KM. les valeurs maximum suivantes exprimées en unités de la 10me décimale des logarithmes vulgaires:

0,383 0,116 0,284 0,188

et comme ces termes ont tous le même signe et qu'ils atteignent en même temps leurs valeurs maximum, l'ensemble des termes du sixième ordre peut atteindre la valeur de 0,971 et peut encore être négligé.

Digitized by Google

Les termes du 4me ordre ont pour la même distance les valeurs maximum:

942,6 74,5 55,9

ou l'ensemble de ces termes:

1073

ou un peu plus d'une unité de la 7me décimale.

Pour les distances de 100 KM. les termes du 4me ordre n'atteignent pas plus d'une unité de la onzième décimale.

§ 47. Les coefficients des termes du 3me au 6me ordre développés dans ce chapitre sont donnés en fonction de la latitude qui correspond à l'ordonnée $Y = \frac{1}{2}(Y_0 + Y_1)$ Nous renonçons à les developper en fonction de Y parce que pour les cas très rares dans lesquels on en aura besoin, on peut les calculer à l'aide de cette latitude. Les valeurs maximum des différents termes que nous avons données peuvent servir de guide pour savoir quels termes il faut calculer et avec quelle précision.

Dans le calcul de ces coefficients on peut négliger les hautes puissances de l'excentricité ou de la quantité $c = \frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\varphi$. Dans quelques-unes de ces formules l'excentricité a une grande influence; de sorte qu'on ne pourra négliger que la 6me ou la 8me puissance. Dans le coefficient D'_1 (77) par exemple, nous trouvons pour la valeur indépendante de l'excentricité: 2, tandis que le coefficient de la seconde puissance de l'excentricité a une valeur de 501, ce qui fait que ce terme a une valeur plus forte que le terme indépendant de l'excentricité.

VII. L'AZIMUT ASTRONOMIQUE ET LA CORDE.

§ 48. Dans les développements des chapitres précédents nous avons pris comme point de départ la ligne géodésique et développé les formules pour le calcul de la correction que subit l'azimut géodésique. Dans la pratique on ne mesure pas les angles entre les lignes géodésiques mais entre les sections normales, c'est pour cela que nous développerons encore la correction que doit subir l'azimut de la section normale, c'est-à-dire l'azimut astronomique.

Pour l'azimut astronomique A_0 dans le point P_0 on a la formule directe:

$$\cot A_0 = \frac{N_1(\sin\varphi_1\cos\varphi_0 - \sin\varphi_0\cos\varphi_1\cos\lambda) - e^2(N_1\sin\varphi_1 - N_0\sin\varphi_0)\cos\varphi_0}{N_1\cos\varphi_1\sin\lambda} \quad \ldots\ldots (79)$$

Digitized by Google

pour laquelle nous pouvons écrire en divisant par $\frac{N_0 N_1}{a}$

$$\cot A_0 = \frac{P + Q(1 - \cos \lambda)}{R \sin \lambda} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (80)$$

où

$$P = (\sin \varphi_1 \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0 \cos \varphi_1) \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0} - e^2 (\sin \varphi_1 \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0} - \sin \varphi_0 \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_1}) \cos \varphi_0$$

$$Q = \sin \varphi_0 \cos \varphi_1 \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}$$

$$R = \cos \varphi_1 \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}$$

Les quantités P, Q et R sont des fonctions de φ_0 et de φ_1 ou des ordonnées correspondantes $Y_0 = Y - \frac{1}{2}\eta$ et $Y_1 = Y + \frac{1}{2}\eta$. Elles peuvent être développées suivant les puissances de η; les coefficients des différentes puissances de η seront alors des fonctions de $Y = \frac{1}{2}(Y_0 + Y_1)$ ou de la latitude correspondante φ:

$$\left.\begin{aligned}
P &= \cos \varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \left[\frac{\eta}{a} - \frac{\eta^3}{24 a^3} p_1 - \frac{\eta^4}{48 a^4} p_2 \sin \varphi + \frac{\eta^5}{1920 a^5} p_3 \right] \\
Q &= \cos \varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \left[\sin \varphi - \frac{\eta}{2a} q_1 - \frac{\eta^2}{8 a^2} q_2 \sin \varphi + \frac{\eta^3}{48 a^3} q_3 \right] \\
R &= \cos \varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \left[1 - \frac{\eta}{2a} \sin \varphi - \frac{\eta^2}{8 a^2} r_1 + \frac{\eta^3}{48 a^3} p_1 \sin \varphi + \frac{\eta^4}{384 a^4} r_2 \right]
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (81)$$

où

$$p_1 = (5 + 15c + 10c^2) \cos^2 \varphi - (1 + 12c + 12c^2) \sin^2 \varphi$$

$$q_1 = (1 + c) \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi$$

$$r_1 = (1 + 3c + 2c^2) \cos^2 \varphi - (1 + 4c + 4c^2) \sin^2 \varphi$$

$$p_2 = (6c + 12c^2 + 6c^3) \cos^2 \varphi$$

$$q_2 = (1 + 7c + 6c^2) \cos^2 \varphi - (1 + 4c + 4c^2) \sin^2 \varphi$$

$$r_2 = (5 + 42c + 101c^2 + 96c^3 + 32c^4) \cos^4 \varphi - (18 + 182c + 548c^2 + 640c^3 + 256c^4) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + (1 + 40c + 184c^2 + 288c^3 + 144c^4) \sin^4 \varphi$$

$$p_3 = (61 + 450c + 1045c^2 + 984c^3 + 328c^4) \cos^4 \varphi - (58 + 1110c + 3860c^2 + 4680c^3 + 1872c^4) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + (1 + 120c + 840c^2 + 1440c^3 + 720c^4) \sin^4 \varphi$$

$$q_3 = (5 + 20c + 25c^2 + 10c^3) \cos^4 \varphi + (4 - 10c - 50c^2 - 36c^3) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - (1 + 12c + 12c^2) \sin^4 \varphi$$

Si nous substituons les valeurs (81) de P, Q et R dans (80) et si nous remplaçons λ par sa valeur $\frac{\xi}{a}$, nous trouvons en divisant le numérateur et le dénominateur par $\frac{\cos \varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}{a}$:

$$\cot A_0 = \frac{N}{D}$$

Digitized by Google

où

$$N = \eta + \frac{\sin\varphi}{2a}\xi^2 - \frac{1}{24a^2}\left[\eta^3 p_1 + 6\xi^2\eta\, q_1\right] - \frac{\sin\varphi}{48a^3}\left[\eta^4 p_2 + 3\xi^2\eta^2 q_2 + 2\xi^4\right] +$$
$$+ \frac{1}{1920a^4}\left[\eta^5 p_3 + 20\xi^2\eta^3 q_3 + 40\xi^4\eta\, q_1\right.$$

$$D = \xi - \frac{\sin\varphi}{2a}\xi\eta - \frac{1}{24a^2}\left[3\xi\eta^2 r_1 + 4\xi^3\right] + \frac{\sin\varphi}{48a^3}\left[\xi\eta^3 p_1 + 4\xi^3\eta\right] +$$
$$+ \frac{1}{1920a^4}\left[5\xi\eta^4 r_2 + 40\xi^3\eta^2 r_1 + 16\xi^5\right]$$

Pour l'azimut A′ dans la carte nous avons:

$$\cot A' = \frac{\eta}{\xi}$$

d'où il suit pour ψ_0 la formule:

$$\operatorname{tang}\psi_0 = \operatorname{tang}(A' - A_0) = \frac{\cot A_0 - \cot A'}{\cot A_0 \cot A' + 1} = \frac{\frac{N}{D} - \frac{\eta}{\xi}}{\frac{N}{D}\frac{\eta}{\xi} + 1} = \frac{\xi N - \eta D}{\eta N + \xi D}$$

dans laquelle:

$$\xi N - \eta D = \frac{\sin\varphi}{2a}\left[\xi\eta^2 + \xi^3\right] - \frac{1}{24a^2}\left[\xi\eta^3(p_1 - 3r_1) + \xi^3\eta(6q_1 - 4)\right] -$$

$$- \frac{\sin\varphi}{48a^3}\left[\xi\eta^4(p_2 + p_1) + \xi^3\eta^2(3q_2 + 4) + 2\xi^5\right] + \frac{1}{1920a^4}\left[\xi\eta^5(p_3 - 5r_2) + \xi^3\eta^3(20q_3 - 40r_1) + \xi^5\eta(40q_1 -\right.$$

$$\eta N + \xi D = \left[\eta^2 + \xi^2\right] - \frac{1}{24a^2}\left[\eta^4 p_1 + \xi^2\eta^2(6q_1 + 3r_1) + 4\xi^4\right] - \frac{\sin\varphi}{48a^3}\left[\eta^5 p_2 - \xi^2\eta^3(p_1 - 3q_2) - 2\right.$$

En substituant dans ces expressions les valeurs de $p_1\, p_2\, p_3\, q_1\, q_2\, q_3\, r_1$ et r_2 e en les divisant l'une par l'autre nous trouvons la valeur de tang ψ_0. En en sous trayant la valeur de $\frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\psi_0$ pour laquelle nous trouvons:

$$\tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^3\psi_0 = \frac{\sin^3\varphi}{24a^3}\xi^3 - \frac{1}{48a^4}\,\frac{\xi^3\eta^3\sin^2\varphi(1 + 3c\cos^2\varphi + 2c^2\cos^2\varphi) + \xi^5\eta\sin^2\varphi(1 + 3c\cos^2\varphi)}{\eta^2 + \xi^2}$$

nous obtenons pour la valeur de ψ_0 l'expression suivante:

$$\psi_0 = \frac{\sin\varphi}{2a}\xi - \frac{1}{12a^2}\,\frac{\xi\eta^3(1 + 3c\cos^2\varphi + 2c^2\cos^2\varphi) + \xi^3\eta(1 + 3c\cos^2\varphi)}{\eta^2 + \xi^2} -$$
$$- \frac{\sin\varphi\cos^2\varphi}{24a^3}\,\frac{3\xi\eta^4(c + 2c^2 + c^3) - \xi^2\eta^3(1 - 3c - 6c^2) - \xi^5}{\eta^2 + \xi^2} +$$
$$+ \frac{1}{720a^4}\,\frac{A\xi\eta^7 + B\xi^3\eta^5 - C\xi^5\eta^3 - D\xi^7\eta}{(\eta^2 + \xi^2)^2}$$

où

Digitized by Google

$$A = 1 + (15c + 40c^2 + 39c^3 + 13c^4)\cos^4\varphi - (30c + 230c^2 + 360c^3 + 162c^4)\sin^2\varphi\cos^2\varphi$$

$$B = 1 + (15c + 50c^2 + 69c^3 + 33c^4)\cos^4\varphi - (30c + 400c^2 + 540c^3 + 162c^4)\sin^2\varphi\cos^2\varphi$$

$$C = 1 + (15c - 10c^2 - 30c^3)\cos^4\varphi - (30c - 170c^2 - 180c^3)\sin^2\varphi\cos^2\varphi$$

$$D = 1 + 15c\cos^4\varphi - 30c\sin^2\varphi\cos^2\varphi$$

En effectuant la division par $\eta^2 + \xi^2$ et $(\eta^2 + \xi^2)^2$ nous trouvons enfin, en remarquant que $\frac{\eta^2}{\eta^2 + \xi^2}$ est égal à $\cos^2 A'$, l'expression suivante pour ψ_0:

$$\begin{aligned}\psi_0 = {} & \frac{\sin\varphi}{2a}\xi - \frac{\xi\eta}{12a^2}\left[1 + 3c\cos^2\varphi + 2c^2\cos^2\varphi\cos^2 A'\right] + \\ & + \frac{\sin\varphi\cos^2\varphi}{24a^3}\left[\xi^3 - \xi\eta^2(3c + 6c^2 + 3c^3\cos^2 A')\right] + \\ & + \frac{\xi\eta^3 - \xi^3\eta}{720a^4}\left[1 + 15c\cos^4\varphi - 30c\sin^2\varphi\cos^2\varphi\right] + \\ & + \frac{\xi\eta^3}{720a^4}\left[(10c^2 + 30c^3)\cos^4\varphi - (170c^2 + 180c^3)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\right] + \\ & + \frac{\xi\eta^3}{720a^4}\cos^2 A'\left[(30c^2 + 9c^3 + 33c^4)\cos^4\varphi - (60c^2 + 180c^3 + 162c^4)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\right] \\ & + \frac{\xi\eta^3}{720a^4}\cos^4 A'\left[-20c^4\cos^4\varphi\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82)\end{aligned}$$

La valeur de ψ_1 peut être déduite de cette formule en changeant les signes des termes du second et du 4me ordre. A l'aide de cette valeur on trouve pour $\frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_0)$ et $\frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_0)$ les expressions suivantes:

$$\frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_0) = \frac{\sin\varphi}{2a}\xi + \frac{\sin\varphi\cos^2\varphi}{24a^3}\xi^3 - \frac{c\sin\varphi\cos^2\varphi}{8a^3}\xi\eta^2(1 + 2c + c^2\cos^2 A') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (83)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_0) = {} & \frac{\xi\eta}{12a^2}\left[1 + 3c\cos^2\varphi + 2c^2\cos^2\varphi\cos^2 A'\right] - \frac{\xi\eta^3 - \xi^3\eta}{720a^4}\left[1 + 15c\cos^4\varphi - 30c\sin^2\varphi\cos^2\varphi\right] - \\ & - \frac{c^2\cos^2\varphi}{720a^4}\xi\eta^2\left[(10 + 30c)\cos^2\varphi - (170 + 180c)\sin^2\varphi + (30 + 9c + 33c^2)\cos^2\varphi\cos^2 A' - \right. \\ & \left. - (60 + 180c + 162c^2)\sin^2\varphi\cos^2 A' - 20c^2\cos^2\varphi\cos^4 A'\right] \quad . \quad . \quad (84)\end{aligned}$$

§ 49. On aurait pu trouver directement les valeurs de $\frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_0)$ et $\frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_0)$ en partant des expressions:

$$\text{tang}(A_1 - A_0) = \text{tang}(\psi_1 + \psi_0) \qquad \text{tang}(A_1 + A_0) = \text{tang}(2A' + \psi_1 - \psi_0)$$

A fin de vérifier nos formules nous les avons développées aussi de cette manière qui est un peu plus laborieuse; c'est pour cette dernière raison que nous ne donnons pas ces calculs.

Digitized by Google

Une autre vérification très efficace est obtenue par la comparaison avec les formules du chapitre précédent. En prenant la différence de (73) et de (74) on trouve pour la différence de l'azimut géodésique avec l'azimut de la carte dans le point P_0.

$$\frac{\sin\varphi}{2a}\xi - \frac{\xi\eta}{12a^2}(1+c\cos^2\varphi) + \frac{\sin\varphi\cos^2\varphi}{24a^3}\Big[\xi^3(1+c) - \xi\eta^2(2c+2c^2)\Big] +$$
$$+ \frac{\xi\eta^3}{720a^4}\Big[1+(8c+13c^2+6c^3)\cos^4\varphi - (10c+48c^2+36c^3)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\Big] -$$
$$- \frac{\xi^3\eta}{720a^4}\Big[1+(2c+c^2)\cos^4\varphi - (10c+12c^2)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\Big]$$

En soustrayant cette expression de (82) on trouve pour l'angle entre la ligne géodésique et la section normale l'expression suivante:

$$-\frac{c\cos^2\varphi}{6a^2}\xi\eta(1+c\cos^2 A') - \frac{c\sin\varphi\cos^2\varphi}{24a^3}\Big[\xi^3+\xi\eta^2(1+4c+3c^2\cos^2 A')\Big] -$$
$$-\frac{c\cos^2\varphi}{720a^4}\xi^3\eta\Big[(13-c)\cos^2\varphi - (20-12c)\sin^2\varphi\Big] +$$
$$+\frac{c\cos^2\varphi}{720a^4}\xi\eta^3\Big[(7-3c+24c^2)\cos^2\varphi - (20+122c+144c^2)\sin^2\varphi\Big] +$$
$$+\frac{c\cos^2\varphi}{720a^4}\xi\eta^3\cos^2 A'\Big[(30+9c+33c^2)\cos^2\varphi - (60+180c+162c^2)\sin^2\varphi - 20c^3\cos^2\varphi\cos^2 A'\Big]$$

ou, en remplaçant ξ et η par $s\sin A'$ et $s\cos A'$:

$$-\frac{s^2}{6a^2}c\cos^2\varphi\sin A'\cos A'\Big[1+c\cos^2 A'\Big]$$
$$-\frac{s^3}{24a^3}c\sin\varphi\cos^2\varphi\sin A'\Big[1+4c\cos^2 A'+3c^2\cos^4 A'\Big]$$
$$-\frac{s^4}{720a^4}c\cos^2\varphi\sin A'\cos A'\Big[\Big\{(13-c)\cos^2\varphi - (20-12c)\sin^2\varphi\Big\} -$$
$$-\Big\{(20-4c+24c^2)\cos^2\varphi - (40+110c+144c^2)\sin^2\varphi\Big\}\cos^2 A' -$$
$$-\Big\{(30+9c+33c^2)\cos^2\varphi - (60+180c+162c^2)\sin^2\varphi\Big\}\cos^4 A' +$$
$$+20c^3\cos^2\varphi\cos^6 A'\Big] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (85)$$

Pour ce même angle on a sur la surface de l'ellipsoïde:

$$-\frac{S^2}{6N^2}c\sin A\cos A\Big[1+c\cos A\Big] + \frac{S^3}{24N^3}\frac{c\sin\varphi}{\cos\varphi}\sin A\Big[1+10c\cos^2 A+9c^2\cos^4 A\Big] -$$
$$-\frac{S^4}{360N^4}\frac{c}{\cos^2\varphi}\sin A\cos A\Big[(4-3c)\cos^2\varphi+81c\sin^2\varphi - \Big\{(18c+42c^2)\cos^2\varphi - 342c^2\sin^2\varphi\Big\}\cos^2 A -$$
$$-\Big\{(12c^2+39c^3)\cos^2\varphi - 261c^3\sin^2\varphi\Big\}\cos^4 A + 10c^3\cos^2\varphi\cos^6 A\Big]$$

Digitized by Google

où φ désigne la latitude du point P_0 et A l'azimut géodésique dans ce point, N la longueur de la normale de ce point et S la longueur de la ligne géodésique *).

En remplaçant φ et A par:

$$\varphi = \varphi_m - \frac{S}{2N_m}(1 + c_m)\cos A_m$$

$$A = A_m - \frac{S}{2N_m}\operatorname{tang}\varphi_m \sin A_m$$

on trouve cet angle exprimé en fonction de la latitude moyenne φ_m et l'azimut moyen A_m. Cette substitution donne, en supprimant l'indice m:

$$-\frac{S^2}{6N^2} c \sin A \cos A (1 + c\cos^2 A) - \frac{S^3}{24N^3}\frac{c\sin\varphi}{\cos\varphi}\sin A(1 + 4c\cos^2 A + 3c^2\cos^4 A) -$$

$$-\frac{S^4}{720N^4}\frac{c}{\cos^2\varphi}\sin A\cos A\Big[(23 + 9c)\cos^2\varphi + 12c\sin^2\varphi -$$

$$-\{(30 - 24c - 6c^2)\cos^2\varphi + (30 + 36c^2)\sin^2\varphi\}\cos^2 A -$$

$$-\{(60c + 39c^2 + 33c^3)\cos^2\varphi + (60c + 90c^2 + 108c^3)\sin^2\varphi\}\cos^4 A +$$

$$+ 20c^3\cos^2\varphi\cos^6 A\Big]$$

Afin de pouvoir comparer cette expression avec (85) il faut remplacer l'azimut géodésique d'après (75) par:

$$A_m = A' + \tfrac{1}{2}(\psi_1 - \psi_0) = A' + \frac{s^2}{12a^2}(1 + c\cos^2\varphi)\sin A'\cos A'$$

la latitude moyenne par sa valeur exprimée en fonction de la latitude correspondant à l'ordonnée $Y = \frac{1}{2}(Y_0 + Y_1)$, c'est-à-dire par:

$$\varphi_m = \varphi + \tfrac{1}{8}\eta^2\left(\frac{d^2\varphi}{dY^2}\right)_0 = \varphi - \frac{\eta^2}{8a^2}\sin\varphi\cos\varphi(1 + 4c + 3c^2) =$$

$$= \varphi - \frac{s^2}{8a^2}\sin\varphi\cos\varphi\cos^2 A'(1 + 4c + 3c^2)$$

et la longueur S de la ligne géodésique d'après (76) par:

$$S = \frac{s}{m}\left[1 - \frac{\eta^2}{24a^2}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + c\cos^2\varphi) - \frac{\xi^2}{24a^2}\sin^2\varphi\right] =$$

$$= \frac{s}{a}N\cos\varphi\left[1 - \frac{s^2}{24a^2}\{\sin^2\varphi + (\cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi + c\cos^2\varphi)\cos^2 A'\}\right]$$

En exécutant ces substitutions on retrouve exactement l'expression (85), ce qui est une vérification pour les formules développées.

---

*) Cette expression est empruntée au mémoire de C. G. Andrae, Problèmes de haute géodésie extraits de l'ouvrage danois: »Den Danske Gradmaaling", Copenhague 1881. A la page 16 se trouvent les termes du second et du troisième ordre; le terme du 4me ordre est développé à l'aide de la valeur de y^v_0 donnée à la page 12.

Digitized by Google

§ 50. En comparant la formule (82) avec les formules trouvées dans le chapitre précédent on voit qu'elle est plus compliquée, surtout parce que les coefficients des différentes puissances de ξ et η ne sont plus des fonctions de φ ou de Y seulement mais qu'ils contiennent en outre l'azimut A'.

Pour la pratique ces termes ont peu d'influence, parce qu'ils contiennent comme facteur au moins la 4me puissance de l'excentricité.

Prenons d'abord des distances jusqu'à 100 KM. qui sont rarement dépassées dans les triangulations. Alors les termes du 3me ordre peuvent être négligés, car ils n'atteignent pour cette distance que les valeurs de:

$$0'',003426 \qquad \text{pour} \qquad \varphi = 6°$$
$$0'',005580 \qquad » \qquad \varphi = 10°$$

Le terme du second ordre qui contient A' peut aussi être négligé, car il n'atteint pour cette distance que la valeur encore plus petite de:

$$0'',000124$$

De plus on pourra prendre pour le facteur $(1 + 3\,c\cos^2\varphi)$, qui entre dans le terme du second ordre, la valeur constante de $1 + 3\,\frac{e^2}{1-e^2}$; car l'erreur qu'on commet alors a pour valeur:

$$\frac{e^2}{1-e^2}\,\frac{\xi\eta}{4a^2}\,(1-\cos^4\varphi)$$

et est au plus égale à:

$$0'',000926 \qquad \text{pour} \qquad \varphi = 6°$$
$$0'',002530 \qquad » \qquad \varphi = 10°$$

Pour des distances jusqu'à 100 KM. on peut donc employer les formules:

$$\left.\begin{aligned}\psi_0 &= H\xi - [1]'\xi\eta \\ \psi_1 &= H\xi + [1]'\xi\eta\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (86)$$

où H a la même signification que dans les paragraphes 16 et 20 et où:

$$[1]' = \frac{1+2e^2}{12a^2(1-e^2)\,\text{arc}\,1''} = \frac{1+2e^2}{12b^2\,\text{arc}\,1''} \qquad \log[1]' = 0{,}634624 - 10.$$

§ 51. Pour des distances plus grandes jusqu'à $s = 1000$ KM. on doit employer le terme du second ordre tel qu'il est développé. Dans les termes du troisième ordre on peut négliger le terme en $\cos^2 A'$ qui n'atteint que la valeur de:

$$0'',000001326$$

pour $s = 1000$ KM. et $\varphi = 10°$ ou, ce qui vaut encore mieux, remplacer le $\cos^2 A'$ par l'unité, parce que l'expression du terme du 3me ordre devient alors plus simple et l'erreur encore un peu plus petite (0'',000000861).

Digitized by Google

Dans les termes du quatrième ordre on peut négliger complètement les termes qui contiennent c^3 ou e^4 et dont la valeur est au plus égale à:

$$0'',00008673$$

De plus le facteur $1 + 15\,c\,(\cos^4\varphi - 2\sin^2\varphi\cos^2\varphi)$ peut être remplacé par la constante $1 + 15\,\frac{e^2}{1-e^2}$ car l'erreur qu'on commet alors est égale à:

$$\frac{s^4}{192\,a^4}\,\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\varphi\,(1 + \cos^2\varphi + 3\cos^4\varphi)$$

et a pour $\varphi = 10°$ et $s = 1000$ KM. une valeur de:

$$0'',00063$$

Si l'on veut avoir la valeur de ψ_0 pour $s = 1000$ KM. jusqu'à une unité de la troisième décimale des secondes, on doit tenir compte des termes du 5me ordre qui peuvent avoir, comme nous l'avons vu pour le cas de la sphère, une valeur de:

$$0'',01322$$

Nous n'avons pas développé ce terme, mais il suffit de le prendre comme nous l'avons développé pour la sphère.

En réunissant tous les termes qui ont de l'influence sur la troisième décimale de la seconde pour des distances de $s = 1000$ KM. et pour des latitudes jusqu'à 10°, on a pour le calcul de ψ_0 la formule suivante:

$$\psi_0 = \frac{\sin\varphi}{2\,a}\,\xi - \frac{\xi\,\eta}{12\,a^2}\,(1 + 3\,c\cos^2\varphi + 2\,c^2\cos^2\varphi\cos^2 A') + \frac{\xi^3}{24\,a^3}\sin\varphi\cos^2\varphi -$$

$$- \frac{\xi\,\eta^2}{8\,a^3}\,c\,(1+c)^2\sin\varphi\cos^2\varphi + \frac{\xi\,\eta^3 - \xi^3\,\eta}{720\,a^4}\left(1 + 15\,\frac{e^2}{1-e^2}\right) + \frac{\xi^5}{480\,a^5}\sin\varphi\cos^2\varphi\,(2\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

où la quantité c est égale à $\frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\varphi$

Pour avoir la valeur de ψ_1 on n'a qu'à changer le signe des termes du second et du quatrième ordre.

Pour des distances plus petites on peut négliger les trois derniers termes et remplacer le $\cos^2 A'$ dans le second terme par $\frac{1}{2}$.

Pour pouvoir juger de l'influence des erreurs que l'on commet alors, nous donnons leurs valeurs maximum pour $s = 1000$ KM. avec lesquelles on peut trouver facilement l'influence pour d'autres distances. Ces valeurs sont:

Partie négligée du terme du 2d ordre	0'',0042
Terme du 3me ordre en $\xi\,\eta^2$	0'',0423
» » 4me »	0'',0477
» » 5me »	0'',0133

Digitized by Google

Avec ces valeurs on trouve par exemple que pour $s = 200$ KM. l'ensemble de ces termes n'a plus d'influence sur la troisième décimale de la seconde, de sorte que pour cette distance on a les formules:

$$\psi_0 = \frac{\xi}{2a}\sin\varphi - \frac{\xi\eta}{12a^2}\left[1+3\frac{e^2}{1-e^2}\cos^4\varphi+\left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)^2\cos^6\varphi\right]+\frac{\xi^3}{24a^3}\sin\varphi\cos^2\varphi$$

$$\psi_1 = \frac{\xi}{2a}\sin\varphi + \frac{\xi\eta}{12a^2}\left[1+3\frac{e^2}{1-e^2}\cos^4\varphi+\left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)^2\cos^6\varphi\right]+\frac{\xi^3}{24a^3}\sin\varphi\cos^2\varphi$$

§ 52. Pour terminer nous donnons encore la formule pour le calcul de la longueur de la corde, c'est-à-dire de la ligne droite qui relie les deux points sur la terre.

Pour le carré de la corde on a la formule:

$$K^2 = (N_0\cos\varphi_0 - N_1\cos\varphi_1)^2 + (1-e^2)^2(N_1\sin\varphi_1 - N_0\sin\varphi_0)^2 + 2N_0N_1\cos\varphi_0\cos\varphi_1(1-\cos\lambda)$$

ou, en multipliant par $m_0 m_1 = \dfrac{a}{N_0\cos\varphi_0}\,\dfrac{a}{N_1\cos\varphi_1}$:

$$K^2 m_0 m_1 = a^2\left[\frac{(N_0\cos\varphi_0 - N_1\cos\varphi_1)^2+(1-e^2)^2(N_1\sin\varphi_1 - N_0\sin\varphi_0)^2}{N_0N_1\cos\varphi_0\cos\varphi_1}+2(1-\cos\lambda)\right] \quad (87)$$

Le premier terme entre les parenthèses est fonction de φ_0 et de φ_1, ou des ordonnées correspondantes $Y_0 = Y - \frac{1}{2}\eta$ et $Y_1 = Y + \frac{1}{2}\eta$ et peut être développé suivant les puissances de η. Ce développement nous donne:

$$\frac{\eta^2}{a^2}+\frac{\eta^4}{12a^4}\left[1-c^2\cos^2\varphi\right]+\frac{\eta^6}{720a^6}\left[2+B\,c^2\cos^2\varphi\right]$$

où:

$$B = (5+18c+11c^2)\cos^2\varphi - (40+90c+54c^2)\sin^2\varphi$$

et:

$$c = \frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\varphi$$

En substituant cette valeur dans (87) et en remplaçant λ par sa valeur $\frac{\xi}{a}$ on trouve:

$$K^2 m_0 m_1 = \eta^2+\xi^2+\frac{\eta^4-\xi^4}{12a^2}+\frac{\eta^6+\xi^6}{360a^4}-\frac{c^2\cos^2\varphi}{12a^2}\eta^4+B\frac{c^2\cos^2\varphi}{720a^4}\eta^6$$

ou, en séparant le facteur $\eta^2+\xi^2 = s^2$ et en divisant par $m_0 m_1$:

$$K^2 = \frac{s^2}{m_0 m_1}\left[1+\frac{\eta^2-\xi^2}{12a^2}+\frac{\eta^4-\xi^2\eta^2+\xi^4}{360a^4}-\frac{c^2\cos^2\varphi}{12a^2}\eta^2\cos^2A'+B\frac{c^2\cos^2\varphi}{720a^4}\eta^4\cos^2A'\right]$$

Si nous prenons enfin les logarithmes et si nous divisons par deux, nous trouvons:

$$\log\text{nat}\,K = \log\text{nat}\frac{s}{\sqrt{m_0 m_1}}+\frac{\eta^2-\xi^2}{24a^2}-\frac{\eta^4-6\xi^2\eta^2+\xi^4}{2880a^4}-\frac{c^2\cos^2\varphi}{24a^2}\eta^2\cos^2A'+$$

$$+B_1\frac{c^2\cos^2\varphi}{1440a^4}\eta^4\cos^2A'-\frac{c^2\cos^2\varphi}{288a^4}\xi^2\eta^2\cos^2A'-\frac{c^4\cos^4\varphi}{576a^4}\eta^4\cos^4A' \quad . \quad . \quad . \quad (88)$$

Digitized by Google

où

$$B_1 = (10 + 18\,c + 11\,c^2)\cos^2\varphi - (35 + 90\,c + 54\,c^2)\sin^2\varphi$$

et en remplaçant ξ et η par leurs valeurs $s \sin A'$ et $s \cos A'$:

$$\log \text{nat}\, K = \log \text{nat}\, \frac{s}{\sqrt{m_0 m_1}} + \frac{s^2}{24\,a^2}\left[\cos 2A' - c^2\cos^2\varphi\cos^4 A'\right] - \frac{s^4}{2880\,a^4}\Big[\cos 4A' + 10\,c^2\cos^2\varphi\cos^4 A' -$$

$$- \{(30\,c^2 + 36\,c^3 + 22\,c^4)\cos^4\varphi - (60\,c^2 + 180\,c^3 + 108\,c^4)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\}\cos^6 A' + 5\,c^4\cos^4\varphi\cos^8 A'\Big]. \quad (89)$$

Au lieu de $\sqrt{m_0 m_1}$ on peut aussi introduire la valeur de m correspondant à l'ordonnée $Y = \frac{1}{2}(Y_0 + Y_1)$ à l'aide de la formule:

$$\log \text{nat}\,\sqrt{m_0 m_1} = \log \text{nat}\, m + \frac{1}{8}\,k'\,\eta^2 + \frac{1}{384}\,k'''\,\eta^4 =$$

$$= \log \text{nat}\, m + \frac{s^2}{8\,a^2}(1 + c)\cos^2\varphi\cos^2 A' - \frac{s^4}{192\,a^4}\Big[(1 + 4\,c + 5\,c^2 + 2\,c^3)\cos^4\varphi -$$

$$- (2 + 14\,c + 24\,c^2 + 12\,c^3)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\Big]\cos^4 A'$$

on trouve alors l'expression suivante:

$$\log \text{nat}\, K = \log \text{nat}\, \frac{s}{m} - \frac{s^2}{24\,a^2}\left[1 + (\cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi + 3\,c\cos^2\varphi)\cos^2 A' + c^2\cos^2\varphi\cos^4 A'\right] -$$

$$- \frac{s^4}{2880\,a^4}\Big[\cos 4A' - \{(15 + 60\,c + 65\,c^2 + 30\,c^3)\cos^4\varphi - (30 + 210\,c + 370\,c^2 + 180\,c^3)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\}\cos^4 A' -$$

$$- \{(30\,c^2 + 36\,c^3 + 22\,c^4)\cos^4\varphi - (60\,c^2 + 180\,c^3 + 108\,c^4)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\}\cos^6 A' + 5\,c^4\cos^4\varphi\cos^8 A'\Big] \quad . \quad (90)$$

qui est un peu plus compliquée que (89).

§ 53. Afin de vérifier l'expression trouvée pour log K nous en déduirons d'abord la longueur S_n de la section normale, que nous comparerons ensuite avec la longueur de la ligne géodésique donnée par (76). Le logarithme de S_n est donné par:

$$\log \text{nat}\, S_n = \log \text{nat}\, K + \frac{K^2}{24\,R_A^2} - \frac{K^3}{8\,R_A^3}\,\frac{c_0 \operatorname{tang}\varphi_0 \cos A_0}{1 + c_0\cos^2 A_0} +$$

$$+ \frac{K^4}{2880\,R_A^4}\left[11 - 108\,\frac{c_0(\cos^2 A_0 - \operatorname{tang}^2\varphi_0)}{1 + c_0\cos^2 A_0} + 720\,\frac{c_0^2\operatorname{tang}^2\varphi_0\cos^2 A_0}{(1 + c_0\cos^2 A_0)^2}\right]$$

où R_A désigne le rayon de courbure de la section normale dans le point P_0 et c_0 la quantité:

$$c_0 = \frac{e^2}{1 - e^2}\cos^2\varphi_0$$

En substituant dans cette expression:

$$\varphi_0 = \varphi_m - \frac{K}{2\,N_m}(1 + c_m)\cos A_m$$

$$A_0 = A_m - \frac{K}{2\,N_m}\operatorname{tang}\varphi_m \sin A_m$$

Digitized by Google

on trouve le logarithme de S_n exprimé au moyen de la latitude moyenne φ_m et de l'azimut moyen A_m. Cette substitution nous donne en supprimant l'indice m:

$$\log \text{nat } S_n = \log \text{nat } K + \frac{K^2}{24\,N^2}(1 + c\cos^2 A)^2 + \frac{K^4}{2880\,N^4\cos^4\varphi}\Big[11\cos^4\varphi - 12\,c\sin^2\varphi\cos^2\varphi +$$
$$+ \{(86\,c + 150\,c^2)\cos^4\varphi + (90\,c - 66\,c^2)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\}\cos^2 A -$$
$$- \{(60\,c + 78\,c^2 - 240\,c^3)\cos^4\varphi + (60\,c + 216\,c^3)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\}\cos^4 A -$$
$$- \{(60\,c^2 + 250\,c^3 - 90\,c^4)\cos^4\varphi + (60\,c^2 + 90\,c^3 + 162\,c^4)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\}\cos^6 A - 97\,c^4\cos^4\varphi\cos^8 A\Big]$$

ou en remplaçant φ_m et A_m par:

$$\varphi_m = \varphi - \frac{\eta^2}{8\,a^2}\sin\varphi\cos\varphi(1 + 4\,c + 3\,c^2) = \varphi - \frac{K^2}{8\,N^2}\operatorname{tang}\varphi(1 + 4\,c + 3\,c^2)\cos^2 A'$$

$$A_m = A' + \tfrac{1}{2}(\psi_1 - \psi_0) = A' + \frac{\xi\,\eta}{12\,a^2}(1 + 3\,c\cos^2\varphi + 2\,c^2\cos^2\varphi\cos^2 A') =$$
$$= A' + \frac{K^2}{12\,N^2\cos^2\varphi}(1 + 3\,c\cos^2\varphi + 2\,c^2\cos^2\varphi\cos^2 A')\sin A'\cos A'.$$

afin d'introduire la latitude correspondant à l'ordonnée $Y = \frac{1}{2}(Y_0 + Y_1)$ et l'azimut A' de la carte:

$$\log \text{nat } S_n = \log \text{nat } K + \frac{K^2}{24\,N^2}(1 + c\cos^2 A')^2 + \frac{K^4}{2880\,N^4\cos^4\varphi}\Big[11\cos^4\varphi - 12\,c\sin^2\varphi\cos^2\varphi +$$
$$+ \{(46\,c + 30\,c^2)\cos^4\varphi + (80\,c + 24\,c^2)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\}\cos^2 A' -$$
$$- \{(20\,c - 2\,c^2 - 40\,c^3)\cos^4\varphi - (40\,c + 260\,c^2 + 144\,c^3)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\}\cos^4 A' -$$
$$- \{(20\,c^2 + 50\,c^3 - 10\,c^4)\cos^4\varphi - (40\,c^2 + 180\,c^3 + 108\,c^4)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\}\cos^6 A' - 17\,c^4\cos^4\varphi\cos^8 A'\Big] \quad (91)$$

De (90) nous tirons:

$$K = \frac{s}{m}\Big[1 - \frac{s^2}{24\,a^2}\Big\{1 + (\cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi + 3\,c\cos^2\varphi)\cos^2 A' + c^2\cos^2\varphi\cos^4 A'\Big\}\Big]$$

ou en remarquant qu'on a: $m = \frac{a}{r} = \frac{a}{N\cos\varphi}$ et en élevant au carré:

$$\frac{K^2}{N^2} = \frac{s^2}{a^2}\cos^2\varphi - \frac{s^4}{12\,a^2}\Big[\cos^2\varphi + \{(1 + 3\,c)\cos^4\varphi - 2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\}\cos^2 A' + c^2\cos^4\varphi\cos^4 A'\Big]$$

En substituant cette valeur ainsi que la série (90) dans (91) nous trouvons enfin pour la longueur S_n de la section normale:

$$\log \text{nat } S_n = \log \text{nat } \frac{s}{m} - \frac{s^2}{24\,a^2}\Big[(1 + c)\cos^2\varphi\cos^2 A' - \sin^2\varphi\cos 2A'\Big] - \frac{s^4}{2880\,a^4}\Big[12(1 + c)\sin^2\varphi\cos^2\varphi +$$
$$+ \{(2 + 4\,c - 30\,c^2)\cos^4\varphi - (36 + 60\,c + 24\,c^2)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\}\cos^2 A' -$$
$$- \{(7 + 20\,c - 13\,c^2 + 70\,c^3)\cos^4\varphi - (46 + 130\,c + 120\,c^2 + 36\,c^3)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\}\cos^4 A' +$$
$$+ \{(64\,c^3 - 32\,c^4)\cos^4\varphi\cos^6 A + 32\,c^4\cos^4\varphi\cos^8 A' + \sin^4\varphi\cos 4A'\Big] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (92)$$

Digitized by Google

La longueur de la ligne géodésique est donnée par (76), en y remplaçant ξ et η par $s \sin A'$ et $s \cos A'$ on trouve:

$$\log \text{nat}\, S = \log \text{nat}\, \frac{s}{m} - \frac{s^2}{24 a^2}\left[(1+c)\cos^2\varphi \cos^2 A' - \sin^2\varphi \cos 2A'\right] - \frac{s^4}{2880 a^4}\Big[12(1+c)\sin^2\varphi\cos^2\varphi +$$
$$+ \{(2+4c+2c^2)\cos^4\varphi - (36+60c+24c^2)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\}\cos^2 A' -$$
$$- \{(7+20c+19c^2+6c^3)\cos^4\varphi - (46+130c+120c^2+36c^3)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\}\cos^4 A' + \sin^4\varphi \cos 4A'\Big]$$

et en soustrayant cette expression de (92) on aura:

$$\log \text{nat}\, S_n = \log \text{nat}\, S + \frac{s^4\cos^4\varphi}{2880 a^4}\left[32c^2\cos^2 A' - (32c^3 - 64c^3)\cos^4 A' - (64c^3 - 32c^4)\cos^6 A' - 32c^4\cos^8 A'\right] =$$
$$= \log \text{nat}\, S + \frac{s^4 c^2 \cos^4\varphi \sin^2 A' \cos^2 A'}{90 a^4}(1 + c\cos^2 A')^2$$

d'où nous tirons pour la valeur de S_n, lorsque nous remplaçons en même temps s par $S\,m = \dfrac{S\,a}{N\cos\varphi}$ et c par sa valeur $\dfrac{e^2}{1-e^2}\cos^2\varphi$:

$$S_n = S + \frac{S^5}{90\, N^4}\left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)^2 \cos^4\varphi \sin^2 A' \cos^2 A' \left(1 + \frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\varphi\cos^2 A'\right)^2$$

ce qui est l'expression connue pour la longueur de la section normale en fonction de la longueur de la ligne géodésique.

§ 54. Comme on le voit la formule (88) contient dans les coefficients des différentes puissances de ξ et de η l'azimut A', c'est pour cela que nous avons préféré remplacer dans le paragraphe 41 la corde par la quantité auxiliaire Z.

Pour le calcul numérique de K ces termes sont de peu de valeur parce qu'ils contiennent au moins la quatrième puissance de l'excentricité. Pour la distance de $s = 1000$ KM. les termes en s^4 dans (89) qui sont multipliés par $c^2\cos^2\varphi$ ont ensemble pour valeur maximum:

0,833

exprimée en unités de la dixième décimale des logarithmes vulgaires. Les termes du sixième ordre peuvent avoir, comme nous l'avons vu dans le paragraphe 31, la valeur de

0,360

De sorte que pour des distances jusqu'à $s = 1000$ KM. on peut prendre la formule

$$\log \text{nat}\, K = \log \text{nat}\, \frac{s}{\sqrt{m_0 m_1}} + \frac{s^2\cos 2A'}{24 a^2} - \frac{s^4 \cos 4A'}{2880 a^4} - \frac{s^2 e^4 \cos^6\varphi \cos^4 A'}{24 a^2 (1-e^2)^2}$$

sans faire une erreur plus grande que:

1,193

Digitized by Google

de l'unité de la dixième décimale des logarithmes vulgaires.

Les deux derniers termes de cette formule ont pour ce cas les valeurs maximum:

Terme en s^4	918
» » $s^2 e^4$	201

en unités de la dixième décimale, de sorte que la formule:

$$\log \text{nat } K = \log \text{nat} \frac{s}{\sqrt{m_0 m_1}} + \frac{s^2 \cos 2A'}{24 a^2}$$

qui est tout-à-fait sphérique donne encore le logarithme de la corde avec une erreur d'une seule unité de la septième décimale.

Pour une distance de $s = 100$ KM. cette formule donne le logarithme avec une erreur maximum de 2 unités de la dixième décimale, car pour cette distance les valeurs maximum des deux termes sont:

Terme en s^4	0,0918
» » $s^2 e^4$	2,0087

en somme 2,1 unités de la dixième décimale des logarithmes vulgaires.

DELFT, Avril 1884.

ERRATA.

Page 27. formule (36)	*au lieu de*	$-\xi^5 \eta$	*lisez*	$-\xi^7 \eta$
» 35. ligne 2	»	$\frac{k'}{2!2} \eta^2$	»	$\frac{k'}{2!2^2} \eta^2$
» 47. formules (72). Dans la formule pour k''	»	$(1 + 2c^2)$	»	$(1 + 2c)$
» 56. ligne 22	»	$[1 + c \cos A]$	»	$[1 + c \cos^2 A]$

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

CH. M. SCHOLS. Sur l'emploi de la projection de Mercator pour le calcul d'une triangulation dans le voisinage de l'équateur.

Pages.

I. Introduction . . . . . 1.

II. Calcul des coordonnées et du rapport d'agrandissement . . . . . 4.

III. Équation différentielle de la projection de la ligne géodésique. . . . . 8.

IV. Développement de ψ_0, ψ_1 et de $log\ \frac{S}{s}$ jusqu'aux termes du second ordre inclus . . . 12.

V. Développement de ψ_0, ψ_1 et de $log\ \frac{S}{s}$ pour la sphère . . . . . 24.

VI. Développement des termes d'ordre supérieur dans ψ_0, ψ_1 et $log\ \frac{S}{s}$ . . . . . 38.

VII. L'azimut astronomique et la corde . . . . . 52.

Digitized by Google

Geology

ANNALES

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

DE

DELFT.

2me LIVRAISON.

THE LIBRARY OF THE
JUL 23 1973
UNIVERSITY OF ILLINOIS
AT URBANA-CHAMPAIGN

LEIDE. — E. J. BRILL.
1885.

GEOLOGY
Digitized by Google

Digitized by Google

RELATION DES EXPÉRIENCES QUI ONT SERVI À LA CONSTRUCTION DE DEUX MÈTRES ÉTALONS EN PLATINE IRIDIÉ, COMPARÉS DIRECTEMENT AVEC LE MÈTRE DES ARCHIVES.

RAPPORT PRÉSENTÉ AU MINISTRE DES TRAVAUX PUBLICS, DU COMMERCE ET DE L'INDUSTRIE, PAR LA COMMISSION CHARGÉE DE RECEVOIR ET DE TRANSPORTER EN HOLLANDE LES NOUVEAUX ÉTALONS DU GOUVERNEMENT DES PAYS-BAS.

RAPPORTEUR: J. BOSSCHA.

I. INTRODUCTION.

§ 1. ORIGINE DE LA COMMISSION INTERNATIONALE DU MÈTRE.

1. La commission internationale du mètre, instituée le 1er Septembre 1869, par décret de l'empereur des Français, a été créée sur la proposition de l'Académie des Sciences de Paris dans le but de donner satisfaction à un voeu exprimé par plusieurs corps savants de l'Europe.

Ce fut M. Dumas, Secrétaire perpétuel de l'Académie, qui, dans la séance du 16 Août 1869, appela l'attention de ses collègues sur un rapport présenté à l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg et relatif aux mesures à prendre pour faciliter l'usage du système métrique dans divers pays.

Dans ce document, les auteurs, MM. STRUVE, WILD et JACOBI, font ressortir que toutes les nations sont tacitement d'accord pour reconnaître au système métrique français les avantages d'un système universel des poids et mesures de l'avenir et pour considérer les étalons déposés aux Archives de France comme des étalons prototypes de ces mesures. Ils estiment cependant que les moyens fournis aux Gouvernements pour se procurer des copies de ces étalons, tout en satisfaisant aux besoins du commerce et de l'industrie, ne sont pas à la hauteur de la science. „Les Gouvernements", — c'est ainsi que s'expriment les rapporteurs, — „obligés, par des nécessités scientifiques ou pratiques, à se procurer des

Digitized by Google

copies exactes des étalons prototypes métriques pour pouvoir y rapporter leurs propres mesures, ne peuvent obtenir ces copies à moins de demander le consentement des autorités de France et d'envoyer à cet effet des délégués à Paris. Il est vrai que ce consentement n'a jamais été refusé et a été même accordé avec toute la prévenance possible, sous condition toujours de se servir des comparateurs disponibles au Conservatoire impérial des Arts et Métiers et de ne pas prendre ces copies directement des étalons des Archives, mais des étalons du Conservatoire confectionnés en même temps, avec les mêmes matières et par les mêmes artistes que ceux des Archives. De cette manière un assez grand nombre de ces copies faites pour la plupart avec beaucoup de soins sont répandues aujourd'hui dans plusieurs parties du monde, elles peuvent satisfaire parfaitement, il faut l'avouer, aux besoins du commerce et de l'industrie."

Pour appuyer leur opinion que cette manière d'agir ne suffit pas cependant pour les besoins de la science, MM. Struve, Wild et Jacobi rappellent les résolutions du cinquième Congrès de Statistique et de la Conférence géodésique internationale, exprimant le voeu qu'une commission internationale serait instituée pour rédiger et mettre à exécution les prescriptions à suivre dans la construction de nouveaux étalons. Ils concluent en proposant de solliciter l'intervention du Ministre de l'Intérieur auprès du Gouvernement pour que tous les États étrangers soient invités à envoyer des délégués pour former une commission internationale, qui devrait se réunir dans une des capitales encore à désigner, dans le but de régler la confection des étalons prototypes métriques et de créer une unité de mesure véritablement universelle et effectivement internationale.

2. Le document signalé par M. Dumas a été l'objet d'un Rapport présenté à l'Académie des Sciences, dans la séance du 23 Août 1869, au nom d'une commission composée de MM. Elie de Beaumont, Mathieu, Morin, Regnault, le Verrier, Faye et Dumas, rapporteur. Les considérations suivantes, extraites textuellement de ce Rapport qui fut adopté à l'unanimité, font connaître les vues de l'Académie de Paris.

„Trois questions sont posées: 1° le mètre prototype des Archives représente-t-il l'unité fondamentale du système métrique? 2° le kilogramme des Archives représente-t-il l'unité de poids? 3° peut-on donner aux Gouvernements qui veulent adopter le système métrique, le moyen de se procurer avec certitude des étalons du mètre et du kilogramme absolument conformes à ces unités?

„Les Membres de votre Commission n'ont jamais hésité à ce sujet et leurs „nouvelles conférences n'ont fait que les fortifier dans leur sentiment.

„Le mètre et le kilogramme des Archives sont des prototypes représentant, „l'un l'unité fondamentale du système métrique, l'autre l'unité de poids.

Digitized by Google

„Ils doivent être conservés comme tels, sans modification.

„En effet, ce serait bien mal connaître la pensée des savants illustres qui „ont préparé et exécuté le travail relatif à la détermination des bases du système „métrique, que de supposer qu'ils aient considéré la distance du pôle boréal à „l'équateur comme invariable sur tous les méridiens, et la méridienne qui tra- „verse la France comme représentée, elle-même, par des chiffres absolus.

„La valeur du mètre changerait donc avec les pays et les époques, si on „n'acceptait pas comme unité fixe la valeur qui lui a été attribuée par leurs „premières opérations. Les changements, il est vrai, resteraient absolument „insensibles dans la pratique; ils auraient, néanmoins, pour effet de jeter le „trouble dans les travaux scientifiques, et d'exiger, pour leur comparaison de „nation à nation, ces calculs de conversion qu'on a voulu éviter par l'adoption „d'un type commun.

„La France est d'autant moins libre de considérer la valeur du mètre, dont „elle a gardé le prototype, comme destinée à subir les variations qui seraient „indiquées par les nouvelles mesures du méridien qu'on pourrait exécuter, „qu'elle n'a pas adopté seule cette unité fondamentale; que, comme nous l'avons „rappelé, diverses nations ont concouru par leurs délégués au travail de sa „Commission primitive des poids et mesures, et que depuis le commencement „du siècle beaucoup d'autres ont adopté le système métrique et fait exécuter „des étalons authentiques de son unité."

Après quelques réflexions à l'égard du kilogramme la Commission poursuit:

„La Commission ne saurait donc accepter, ni pour la détermination du mètre „ni pour celle du kilogramme, qu'il y ait lieu d'admettre l'utilité de nouvelles „opérations ayant pour but de fixer les deux types de ces mesures. Si, sous „prétexte du progrès de la science, on acceptait que ces types peuvent être mo- „difiés aujourd'hui, leur instabilité se perpétuerait d'âge en âge; les savants de „chaque siècle pourraient, en effet, avoir la prétention d'introduire à leur tour „de nouvelles corrections dans les méthodes employées par leurs prédécesseurs.

„La Commission, après avoir décidé, à l'unanimité, qu'il y a lieu de consi- „dérer les prototypes du mètre et du kilogramme déposés aux Archives comme „invariables et comme appartenant à toutes les nations, a examiné ce qui „restait à faire pour permettre aux délégués de tous les pays d'intervenir dans „l'étude des moyens à employer pour en reproduire des copies authentiques des- „tinées à servir d'étalons.

„Il lui a paru que, pour conserver au système métrique son large caractère „d'universalité et pour dégager de plus en plus la France de toute prétention à „une prépondérance qu'elle n'a jamais réclamée, il convenait de continuer ce qui

Digitized by Google

„s'était fait dès l'origine de ce travail, et d'appeler à un nouveau concert les „nations étrangères.

„Elle a donc l'honneur de proposer à l'Académie de demander au Gouver„nement de provoquer la formation d'une Commission internationale, qui serait „chargée d'étudier les moyens d'exécution des étalons destinés aux divers pays, „et de choisir les méthodes de comparaison ou les instruments de vérification „qu'il convient de mettre en usage pour les obtenir dans l'état actuel de la „science".

3. Le décret impérial du 1er Septembre 1869 a suivi de près cette déclaration. Inspiré par les mêmes pensées il rappelle que déjà en 1868 une Commission avait été constituée sous la présidence de M. le maréchal VAILLANT, pour aviser aux moyens de donner satisfaction aux désirs des Gouvernements étrangers. Il approuve les conclusions suivantes formulées par cette Commission:

1°. Qu'il sera fait une copie légale, par un mètre à traits, du mètre à bouts des Archives.

2°. Que cette copie sera effectuée par une Commission française à laquelle seront appelés des Commissaires désignés par les Puissances étrangères.

3°. Que par un décret sera nommée une Commission chargée dès à présent de préparer les éléments du travail.

La Commission française désignée par ce décret se composait de MM. MATHIEU, le général MORIN, LE VERRIER, LAUGIER, FAYE, FIZEAU, STE CLAIRE DEVILLE, le général JARRAS et TRESCA, secrétaire.

Remarquons que les deux premières conclusions, en établissant qu'une copie légale serait construite pour servir d'intermédiaire entre le mètre des Archives et les étalons nationaux, répondaient autant que possible aux vues différentes de l'Académie de St. Petersbourg et de l'Académie de Paris. La première en effet demandait un nouveau mètre international dérivé du mètre des Archives, ainsi que des étalons prototypes dérivés du mètre international, tandis que l'Académie de Paris proposait de construire des copies du mètre des Archives, pour être distribuées aux divers pays. En désignant le mètre intermédiaire comme une copie légale du mètre des Archives, le Gouvernement français donnait à entendre que, conformément aux intentions de l'Académie de Paris, le prototype des Archives continuerait à représenter l'unité fondamentale du système métrique.

§ 2. TRAVAUX ET RÉSOLUTIONS DE LA COMMISSION INTERNATIONALE DU MÈTRE.

4. Les Gouvernements étrangers invités à déléguer des savants, qui prendraient part aux travaux de la Commission, ayant presque tous répondu à l'appel du

Digitized by Google

Gouvernement français, une première conférence de la Commission internationale fut convoquée à se réunir à Paris le 4 Août 1870. La guerre a interrompu cette réunion, incomplète par suite de l'absence de plusieurs Membres étrangers. Ce ne fut que le 24 Septembre 1872 que la Commission internationale, composée de 45 Membres présents, put se constituer définitivement.

Le Gouvernement néerlandais avait nommé comme ses délégués dans la Commission: MM. KAISER et STAMKART et comme leurs suppléants: MM. COHEN STUART et BOSSCHA. Par suite du décès de M. KAISER, survenu en 1872, MM. STAMKART et BOSSCHA ont, depuis 1872, pris part aux travaux de la Commission du mètre.

5. Dans ses séances de Septembre et d'Octobre 1872 la Commission a fixé les bases scientifiques du travail commun et réglé en même temps son organisation. Les résolutions relatives aux principes de construction et de comparaison des prototypes, avaient déjà fait le sujet d'un examen approfondi de la part des Membres français réunis en *Section française*, et d'un *Comité des recherches préparatoires*, institué dans la réunion de 1870. Discutées de nouveau par des Commissions spéciales, présentées dans l'assemblée générale à la suite de rapports raisonnés, ces résolutions furent arrêtées presque toutes à l'unanimité des Membres de la Commission générale ou à des majorités très prononcées.

En ce qui regarde le mètre, les principales prescriptions furent les suivantes.

Le mètre des Archives sera le point de départ pour l'exécution du mètre.

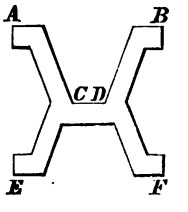
Le mètre international sera un mètre à traits ayant la longueur du mètre à zéro centigrade.

Pour la fabrication des mètres on emploiera un alliage composé de 90 parties de platine et 10 d'iridium, avec une tolérance de 2% en plus ou en moins.

L'alliage qui servira à la construction des mètres proviendra d'une coulée unique.

Les barres de platine iridié sur lesquelles on tracera les mètres, auront une longueur de 102 centimètres et leur section transversale sera représentée par le modèle indiqué par M. TRESCA (voir fig. 1 qui reproduit, en grandeur naturelle, le profil de la barre).

Fig. 1.



Pour le tracé des mètres on se servira d'un appareil à déplacement longitudinal, pour les comparaisons d'un appareil à déplacement transversal.

Les comparaisons seront faites en immergeant les nouveaux étalons dans un liquide et dans l'air, mais en réservant de ne plonger l'étalon des Archives dans aucun liquide avant la fin des opérations.

Le tracé des mètres à traits et leur première comparaison avec le mètre des Archives seront d'abord effectués par le procédé FIZEAU.

Pour la détermination des équations des divers étalons, on emploiera en

Digitized by Google

outre tous les moyens de comparaison déjà connus et éprouvés; c'est-a-dire suivant les cas, soit des touches de différentes formes, soit la méthode de MM. AIRY et STRUVE, soit celle de MM. STAMKART et STEINHEIL.

Les équations entre le mètre des Archives et le nouveau mètre international à traits, ainsi que les équations entre les autres étalons à traits et le mètre international seront déterminées par la discussion des résultats de toutes ces observations.

La Commission devra construire autant d'étalons identiques du mètre et du kilogramme que les Etats intéressés en voudront réclamer; tous ces étalons devront être comparés par les soins de la Commission et leurs équations établies aussi exactement que possible; ensuite l'un de ces mètres et l'un de ces kilogrammes devront être choisis comme prototypes internationaux par rapport auxquels les équations de tous les autres seront exprimées, enfin les autres étalons ainsi exécutés seront distribués indistinctement entre les différents États intéressés.

6. Quant à l'organisation du travail, il fut décidé que la confection des nouveaux prototypes, le tracé des mètres, la comparaison des nouveaux prototypes avec ceux des Archives, la construction des appareils auxiliaires nécessaires à ces opérations seraient confiés aux soins de la Section française avec le concours d'un Comité permanent.

Ce Comité, composé de douze membres appartenant tous à des pays différents, aurait pour tâche de diriger et de surveiller l'exécution des décisions de la Commission internationale au sujet de la comparaison des nouveaux prototypes métriques entre eux, ainsi que la construction des comparateurs, balances et autres appareils servant à ces comparaisons.

A la fin de ses opérations le Comité rendrait compte à la Commission internationale de tous les travaux. La Commission aurait à sanctionner les prototypes avant de les distribuer aux différents pays.

7. En dehors de cette organisation, quelques Membres de la Commission internationale avaient manifesté le voeu qu'il serait fondé un bureau permanent international, qui, après la distribution des étalons, servirait de dépôt aux prototypes internationaux et perpétuerait indéfiniment l'action de la Commission internationale. Il serait chargé des comparaisons périodiques des prototypes internationaux avec les étalons nationaux et avec les témoins, de la confection et de la vérification de nouveaux étalons qui pourraient être demandés dans la suite par d'autres Gouvernements, par des sociétés ou même par des artistes et des savants.

Comme les délégués de la Commission du mètre étaient loin de se trouver d'accord sur l'utilité de cet établissement et manquaient de pouvoirs pour en décréter la fondation, on se borna à émettre le voeu que les Gouvernements

Digitized by Google

intéressés s'entendraient au sujet de la création d'un bureau international des poids et mesures.

Les délégués néerlandais, tout en votant pour l'ensemble des propositions concernant l'organisation du travail commun, formulèrent expressément leur réserve par rapport au bureau d'étalonnage permanent.

§ 3. TRAVAUX DE LA SECTION FRANÇAISE ET CONCOURS DU COMITÉ PERMANENT.

8. Aussitôt après la clôture des séances de la Commission internationale du mètre la Section française s'est occupée de la confection des mètres et de la construction des comparateurs. Les difficultés techniqnes qu'elle avait à surmonter, pour réaliser les conditions imposées par la Commission en ce qui concerne la fabrication des règles, étaient d'autant plus grandes qu'on se trouvait placé sur un terrain entièrement inexploré jusque là.

Le choix du métal des prototypes avait été fixé par la Commission sur l'alliage dont les propriétés physiques avaient été étudiées par les Membres français. En dehors de son inoxydabilité et de sa résistance contre les agents destructeurs auxquels les prototypes pourraient être exposés, ce métal présentait deux qualités d'une grande importance au point de vue métrologique et qu'aucun autre métal inoxydable ne possède au même degré, savoir une dilatabilité à très peu près égale à celle du mètre des Archives et une élasticité à peu près équivalente à celle de l'acier.

L'alliage sur lequel avaient porté les expériences de MM. FIZEAU et TRESCA pour déterminer les coëfficients de dilatation et d'élasticité, avait été obtenu en employant le platine et l'iridium purifiés par M. DEVILLE d'après les méthodes connues en 1872. La densité du platine était évaluée à 21,15; l'iridium employé avait „exactement la même densité que celle du platine." [1])

Quant à l'alliage lui-même, il présentait encore la même densité; l'analyse et l'étude des propriétés physiques avaient montré que la fonte des deux métaux produisait une matière homogène. [2])

---

[1]) Procès-verbaux des séances du Comité de recherches préparatoires, Avril 1872 p. 20.

[2]) Voir le rapport de la Commission II de la Commission internationale du mètre (Procès-verbaux des réunions générales de 1872 pag. 45) où il est dit:

1° Les deux métaux cristallisent tous les deux dans le même système, le système régulier, et ils ont la même densité: 21,15.

2° Les alliages de ces deux métaux à 10, 20, 30% d'iridium ont encore la même densité: 21,15, de sorte qu'il n'y a aucune contraction pendant leur dissolution, ce qui exclut toute idée d'une séparation par liquation. Il en résulte que la fonte de ces alliages produira toujours une matière homogène; comme l'ont prouvé l'analyse et l'étude des propriétés physiques de la matière prise à diverses hauteurs dans les lingots.

Digitized by Google

Les expériences préliminaires avaient donc procuré les données nécessaires sur une matière qui par ses propriétés physiques répondrait parfaitement au but; elles avaient prouvé en même temps qu'on pourrait facilement se la procurer en quantité suffisante pour construire les nombreux prototypes des États représentés dans la Commission. Mais on était loin d'être aussi bien renseigné sur les moyens propres à remplir les conditions exigées pour le travail technique.

Pour empêcher autant que possible qu'une différence inévitable de constitution des diverses parties de l'alliage ne créât une inégalité, si peu considérable qu'elle fût, entre les propriétés physiques des divers prototypes, on avait prescrit que tout le métal devait être réuni et fondu dans un bain unique. Cependant la fusion du platine au moyen du chalumeau à gaz oxyhydrique n'avait été obtenue jusqu'ici que sur des quantités de métal relativement faibles, qui avaient permis d'employer des creusets en chaux vive. Il était évident que la fusion d'une masse dépassant le poids de 200 kilogrammes pourrait créer des difficultés sérieuses.

Le profil proposé par M. Tresca pour la construction des règles et adopté par la Commission, présentait sans doute, au point de vue métrologique, des avantages considérables. Il permettait d'obtenir avec une quantité donnée de matière un maximum du moment d'inertie de la section transversale en même temps qu'un maximum de surface, ce qui devait diminuer, dans la plus grande proportion possible, les deux sources d'erreur les plus redoutables dans les comparaisons, savoir l'influence de la flexion et celle d'une inégalité, soit de la température des diverses parties des mètres, soit de la température moyenne des mètres avec celle du milieu ambiant. La forme des mètres était combinée de manière que le centre de gravité de la section transversale fût situé dans le plan C D de la rainure intérieure (voir fig. 1) destiné à recevoir les traits limitatifs, de sorte que la distance des traits placés dans le plan des fibres neutres ne pût éprouver, par l'effet de la flexion, qu'une variation insensible. Elle offrait de plus l'avantage qu'on pourrait loger les thermomètres dans la cavité A C D B, de manière qu'ils se trouveraient presque enveloppés par le corps même des règles. Enfin le développement considérable de la surface des règles rendait possible un contrôle sévère de l'homogénéité de la matière et de l'absence de toute soufflure ou fissure, qui, dans la coulée et le travail des métaux, sont d'autant plus à craindre que ceux-ci sont plus résistants contre l'action du feu et les efforts mécaniques. Cependant dans la construction des règles en platine iridié de la forme prescrite tout était à prévoir, tout était à créer. On savait seulement qu'on aurait à résoudre ce problème difficile: produire des instruments de précision dans des conditions qui nécessiteraient l'application

Digitized by Google

de forces mécaniques considérables et par conséquent l'emploi d'outils et d'installations telles qu'elles se rencontrent dans la grande industrie.

9. La Section française, tout en s'occupant de la fabrication des mètres, continuait ses études sur les comparateurs et les instruments optiques qui leur seraient adaptés, ainsi que sur un projet d'un instrument propre à reporter, par des traits bien définis, la longueur du mètre des Archives sur les nouveaux prototypes.

Deux fois, sur l'invitation de la Section française, le Comité permanent s'est réuni pour prendre connaissance des travaux accomplis par les Membres français. Le Comité était composé de MM. Ibanez, président, Förster, Herr, Wild, Wrede, Hilgard, Morin, Chisholm, Broch, Stas, Husny Bey et Bosscha, Secrétaire. M. Husny Bey, retenu par d'autres fonctions, n'a pas pris part aux réunions du Comité.

Dès la première convocation MM. Förster, Herr et Wild qui, lors de la réunion de la Commission internationale en 1872, s'étaient fait connaître comme partisans du bureau permanent, avaient déclaré qu'ils ne pourraient prendre part aux séances du Comité, tant que la question du bureau permanent ne serait réglée d'après les vues de leurs Gouvernements.

10. La première réunion du Comité permanent eut lieu le 1° Octobre 1873.

Un exposé de la situation des travaux accomplis jusqu'à cette date par la Section française fut présenté au Comité par M. Tresca, secrétaire de la Section.

Il résultait de ce rapport que les travaux de la Commission avaient déjà fait des progrès considérables.

L'étude des propriétés chimiques des métaux platiniques avait fait reconnaître que le platine et l'iridium soi-disant purs, tels qu'on les fabriquait en 1872, étaient loin d'offrir une pureté absolue. Au moyen de nouveaux procédés d'analyse et d'épuration, MM. Deville et Debray étaient parvenus à préparer des échantillons de platine dont la teneur plus grande en métaux les plus denses du groupe platinique était attestée par des poids spécifiques plus élevés, savoir; 21,405 pour le platine, 22,248 pour l'iridium et 21,432 pour l'alliage du platine et 10% d'iridium. Quoique ces densités différassent notablement de celles de l'alliage adopté par la Commission, on se proposait d'employer pour la confection des prototypes des métaux purifiés d'après les nouvelles méthodes.

En se décidant pour cette substitution on admettait tacitement que les autres propriétés physiques des métaux mieux purifiés ne différeraient pas sensiblement de celles des métaux étudiés en 1872, que par conséquent les avantages qu'on avait reconnus à ces derniers, par rapport à leur élasticité et à l'identité de leur dilatation

Digitized by Google

avec celle du mètre des Archives, se retrouveraient dans le nouvel alliage. Dans cette supposition on pouvait, sans danger sérieux pour les qualités essentielles du mètre, donner satisfaction aux chimistes qui désiraient appliquer les nouvelles méthodes de séparation et d'analyse des métaux platiniques. Dans une des séances du Comité permanent, M. Stas, le Membre le plus compétent en cette matière, semblait même douter si ces procédés amèneraient une composition différente de l'alliage. Les questions se rattachant à ces méthodes lui paraissaient à cette époque encore entièrement inabordables, et ce ne fut qu'après avoir pris connaissance du régistre des observations de M. Deville que le chimiste belge crut pouvoir admettre que les procédés inventés par MM. Deville et Debray, tels qu'ils avaient été exécutés, étaient susceptibles de donner des résultats très précis. La suite du travail de la Commission a montré que la fabrication en masse de l'alliage à fait retomber sur une composition s'approchant beaucoup plus de celle de l'alliage étudié en 1872.

11. Dans la fonte et la coulée du platine iridié on était arrivé à traiter simultanément sans aucune difficulté des masses de dix kilogrammes [1]). On avait reconnu que les creusets en pierre calcaire, dont les parois se décarbonisaient par l'action de la chaleur, pouvaient être employés aussi bien que les creusets en chaux, dont il était très difficile d'augmenter les dimensions au delà d'une certaine limite. Dès lors M. Deville pouvait affirmer hardiment qu'il n'était en aucune façon limité dans le poids de l'alliage qu'il pouvait fondre [2]).

12. Après que les essais préliminaires de tréfilage faits sur un métal très malléable, le cuivre rouge, avaient donné un résultat satisfaisant [3]), on avait procédé à traiter de la même manière le platine iridié, qui, dans ses propriétés mécaniques, s'approche de l'acier. Un des lingots obtenus par la coulée avait été soumis au forgeage sous le marteau pilon de manière à produire un prisme de 23 millimètres de côté.

Pour le tréfilage, opéré dans les ateliers de M. Gueldry, on s'était servi d'une filière à coussinets variables, auxquels on pouvait donner successivement un serrage de plus en plus grand, d'abord sur les deux gorges latérales, ensuite sur les rainures supérieure et inférieure, enfin sur les quatre faces à la fois. Une

---

[1]) Le 6 Mai 1873 une quantité considérable de platine iridié a été fondue dans le laboratoire de M. Deville en présence du Président de la République, M. Thiers. Le poids de la masse fondue à cette occasion n'est pas indiqué dans le procès-verbal de la séance.

[2]) Situation des travaux, 1873. p. 9.

[3]) Un premier modèle de mètre en cuivre, ayant le profil adopté par la Commission, fut présenté par M. Tresca à la Section française dans la séance du 10 Janvier 1873. Procès-Verbaux des réunions des Membres français, 1872—1873. p. 21.

Digitized by Google

dernière passe avec une filière coupante, présentant exactement le profil défini par la Commission, terminait cette partie de la fabrication. Après chaque passe on avait dû recuire la règle dans un fourneau à haute température, chaque recuit étant suivi d'un décapage à l'acide chlorhydrique dilué pour enlever le fer qui adhérait à la surface et pour rendre au métal son éclat primitif.

L'étirage des barres forgées en règles au profil en X avait eu pour effet d'accroître la longueur de la barre dans le rapport de 1 à 3,5 et la surface de la barre dans le rapport de 1 à 4,33. Il en résultait que toute fissure ou défaut de soudure, tout pli de forgeage, qui ne serait pas détruit par le malaxage du métal, devait nécessairement s'allonger et ne pouvait manquer de se montrer à la surface.

L'expérience acquise dans ces difficiles et laborieux essais avait fait trouver un moyen bien simple pour éliminer ces défauts. Il suffit d'enlever au burin les parties de la surface qui présentent ces accidents, pour que le gonflement des parties sousjacentes dans les passes subséquentes, en comblant les vides, ramenât la surface à une parfaite continuité.

La dernière passe produisait toujours, quoique à un moindre degré que les précédentes, un gauchissement de la règle. Pour y remédier il fallait recourir à un dressage final. A cet effet la règle, portée au rouge, était serrée dans un étui en fonte garni de longs coins à serrage, ajustés chacun suivant la forme particulière des rainures. Cette opération avait pour effet de noircir la surface d'une couche ferrugineuse provenant du contact de la fonte à température rouge. Un décapage à chaud à l'acide chlorhydrique servait à enlever cette couche [1]).

13. Lors de la session du Comité permanent en 1873, deux règles en X étaient complètement terminées.

Une troisième se trouvait en cours de fabrication. On avait arrêté le travail pour que le Comité pût s'assurer lui-même de la marche tout à fait régulière de ce mode de fabrication [2]).

Le Comité permanent a en effet examiné avec attention le travail du tréfilage et il a consigné dans les procès-verbaux le résultat satisfaisant de cet examen en ces termes: „le Comité tient à déclarer que par les soins de M. Tresca „et la parfaite obligeance de M. Guelbry, directeur des ateliers des forges „d'Audincourt, il a pu assister aux opérations de tréfilage effectuées sur la règle „n°. 3 et qu'il s'est rendu compte de tous les détails de la fabrication. Le Co„mité déclare qu'il est entièrement satisfait de ces procédés remarquables, qui

---

[1]) Ce fait est relaté dans la »Situation des travaux" présentée en 1874 et était par conséquent connu du Comité permanent lors de la réunion de cette année.

[2]) Situation des travaux, 1873, p. 21.

Digitized by Google

„lui paraissent devoir assurer l'exécution des règles conformément aux résolutions „de la Commission" [1]).

14. Les deux règles terminées avaient été soumises à des expériences de flexion. Il en résultait que le coëfficient d'élasticité du métal forgé et étiré avait encore la même valeur que celui du métal étudié en 1872, savoir $21{,}38 \times 10^9$. Pour reconnaître si la limite de l'élasticité était assez élevée pour offrir une garantie suffisante contre des causes accidentelles de déformation, on avait chargé la règle n°. 2 en son milieu du poids considérable de 51,425 kilogrammes produisant une flèche de 7,29 mm.; après le déchargement la règle avait repris sa forme primitive.

MM. Broch et Wrede, Membres du Comité, ont déterminé pendant leur séjour à Paris, lors de la réunion du Comité, l'effet qu'un recuit prolongé à haute température pouvait avoir sur l'élasticité des règles. Ils ont trouvé que la flèche moyenne, produite par une charge de 3,97 kilogrammes appliquée au milieu de la règle, lorsque celle-ci était placée sur des supports écartés de 90 centimètres, s'élevait, avant le recuit, à 0,547 mm. La règle ayant été portée au laboratoire de M. Deville et soumise dans un fourneau à pétrole pendant huit heures à la température rouge, une nouvelle détermination donna dans les mêmes circonstances une flèche de 0,550 mm. La différence de ces deux valeurs rentre dans la limite des erreurs d'observation.

On pouvait donc conclure que la stabilité de la matière sous ce rapport était parfaitement suffisante.

15. En dehors des progrès accomplis dans la confection des nouveaux prototypes, la Section française put présenter au Comité les résultats satisfaisants obtenus dans la construction du comparateur et des appareils destinés à reporter sur les règles, aussi exactement que possible, la longueur du mètre des Archives. Le Comité a examiné les appareils placés sous ses yeux, savoir les comparateurs, le tracelet, le support à pointes pour l'application de la méthode Fizeau, et le support du mètre des Archives. Il a rendu compte de cet examen en ces termes:

„Les Membres du Comité ont employé la journée du 8 Octobre à examiner „en détail ces appareils installés dans la salle des poids et mesures du Conser- „vatoire des arts et métiers et M. Tresca s'est empressé de leur donner tous les „renseignements qu'ils désiraient. Le Comité s'est ainsi assuré qu'avec le concours „éclairé de M. Tresca, le travail dont la Section française a bien voulu se char-

[1]) Comité Permanent. Procès-Verbaux des séances de 1872 et 1873, p. 26. Les Membres présents étaient MM. le général Ibanez, président, le général baron Wrede, le général Morin, Chisholm, Broch, Stas, et Bosscha, secrétaire.

Digitized by Google

„ger a déjà fait des progrès importants, et que les soins apportés à l'étude des „problèmes difficiles qu'on avait à résoudre ont été secondés par le dévouement „et l'habilité des constructeurs: MM. Brunner, pour le comparateur à mouvement „longitudinal, M. Dumoulin-Froment pour le comparateur à mouvement trans- „versal. Le tracelet, exécuté par M. Dumoulin, sur le dessin de M. Gustave „Tresca, promet de fournir toutes les garanties désirables pour le tracé exact des „prototypes" [1]).

16. La Section française avait invité le Comité à donner son avis sur la quantité de l'alliage qu'il conviendrait de comprendre dans la coulée en bain unique, et à fixer la date de cette importante opération. En présence des résultats obtenus par les Membres français, le Comité n'hésita pas à demander qu'on réunît dans une même fonte une quantité suffisante pour construire tous les prototypes dont la demande pouvait être prévue, c'est-à-dire quarante mètres à traits, quelques mètres à bouts et les kilogrammes. Il considérait que, avec les moyens créés par la Section française, la coulée de cette masse considérable évaluée à 250 kilogrammes ne présenterait pas des difficultés assez sérieuses pour ne pas maintenir, dans la plus large mesure, la principale garantie que les nouveaux prototypes offriraient une composition identique. Quant à la date de cette coulée, le Comité ne put qu'émettre le voeu qu'elle pourrait avoir lieu vers la fin du mois d'Avril.

17. Après cette première réunion du Comité permanent, les travaux de la Section française furent en effet repris et poursuivis avec une telle énergie que, vers l'époque fixée, on avait réuni tout le métal nécessaire à la grande fonte. Vingt-deux coulées avaient été faites en lingots de 10 à 15 kilogrammes pour allier le platine, fourni par M. Matthey, avec l'iridium concassé ou pulvérisé, préparé par M. Deville. On avait acquis ainsi une grande expérience dans cette opération, ce qui avait permis d'améliorer encore la manière de procéder. Les creusets en pierre calcaire de Courson avaient été remplacés par des creusets en vergelé de St. Waast (Oise), matière plus poreuse qui laissait mieux échapper à travers de ses parois l'acide carbonique provenant de la décarbonation de la pierre.

La première fonte en quantité beaucoup plus considérable eut lieu le 25 Avril; elle comprenait 80 kilogrammes de platine iridié. Une fonte de 85 kilogrammes fut effectuée le 1° Mai 1874 en présence du Président de la République le maréchal de Mac Mahon, et de M. Deseilligny, ministre de l'agriculture et du commerce. Enfin une troisième fonte de 90 kilogrammes, complétant la masse

[1]) Comité Permanent, Procès-Verbaux de 1873, p. 32 et 33.

Digitized by Google

d'environ 250 kilogrammes d'alliage, eut lieu le 7 Mai en présence de plusieurs Membres de la Commission, venus à Paris pour assister à la grande coulée qui devait se faire quelques jours plus tard.

Les trois lingots coulés le 25 Avril, le 1er et le 7 Mai furent cassés transversalement au Conservatoire pour être forgés ensuite à l'usine de M. Laveissière. Trois des demi-lingots se laissèrent forger très facilement; ils furent laminés ensuite chez MM. Griset et Schmidt en 40 bandes de 5 millimètres d'épaisseur, de 2,5 à 3 centimètres de largeur, et pesant ensemble 137,126 kilogrammes. Les trois autres moitiés s'étant fissurées à la forge sur leurs faces inférieures, furent étirées au marteau pilon et coupées ensuite à chaud en morceaux de grosseur convenable pour être introduits dans le creuset. Leur poids s'élevait à 109,587 kilogrammes. On disposait ainsi d'un total de 246,713 kilogrammes de platine iridié dans une forme propre à subir par la fonte le mélange qui devrait produire une masse de composition homogène. Une analyse faite par M. Deville sur trois échantillons du même poids, pris sur différents points de chacun des trois blocs, avait donné en moyenne le résultat suivant:

Fer.	0,006
Cuivre.	0,13
Rhodium.	0,06
Iridium	10,37
Platine par différence .	89,44
	100,00

En regard de ces chiffres, il fut décidé qu'on ajouterait au métal des trois lingots le poids de platine pur, provenant de l'envoi de M. Matthey, et nécessaire pour compléter les 250 kilogrammes.

18. La fonte de cette masse fut effectuée au Conservatoire des arts et métiers, le 13 Mai 1874, en présence de M. Dumoustier de Frédilly, directeur du commerce intérieur, et de 18 membres de la Commission internationale, savoir: MM. Eliseo Acosta, Becquerel, Bonifaz, Bosscha, Margarinos Cervantes, Chisholm, Henri Ste Claire Deville, Fizeau, Heusschen, le général Jarras, Matthieu, le général Morin, Péligot, Stas, Otto Struve, Torres Caicedo, Tresca et le Verrier. M. Soret de Genève et MM. Becquerel père, Balard, Boussingault et Daubrée assistèrent également à l'opération, qui fut conduite par MM. Tresca, Matthey et Gustave Tresca avec le concours de MM. Deville et Debray.

Le creuset en pierre de St. Waast employé à cette occasion avait des parois de 15 centimètres d'épaisseur, offrant à l'intérieur un bassin des dimensions suivantes:

Digitized by Google

Longueur	1,14 m.
Largeur.	0,16 „
Profondeur.	0,075 „

Un cerclage extérieur en fer servait à donner au creuset la résistance nécessaire pour supporter à haute température le poids de la masse fondue. Le couvercle faiblement voûté à l'intérieur était percé de 7 trous écartés l'un de l'autre de 16 centimètres et destinés à recevoir les chalumeaux à gaz oxyhydrique. Des regards fermés par des bouchons en pierre calcaire permettaient de s'assurer du dehors de la marche de l'opération. A chaque extrémité du creuset un ouvreau, ayant la forme d'un canal à section rectangulaire plus large que haut, était taillé dans le bord. Il permettait d'introduire les lames de platine et de brasser en même temps la masse fondue. Pour protéger les parois de ces ouvreaux pendant cette manipulation, ils étaient munis de languettes de platine. Dans le creuset on avait déposé environ 110 kilogrammes de platine iridié en morceaux.

L'oxygène emmagasiné, en partie dans un gazomètre, en partie dans des cilindres en fer, sous une pression de plus de six atmosphères, constituait un volume mesurant à la pression ordinaire 59 mètres cubes. Des manomètres communiquant avec les tubes des chalumeaux permettaient d'observer et de régler au moyen de robinets la pression sous laquelle le gaz s'échappait.

L'importante opération s'est accomplie sans accidents. Après un chauffage préalable du creuset pendant 14 minutes on a élevé la pression de l'oxygène à 18 centimètres de mercure pour produire le maximum de combustion. Trente-six minutes ont suffi pour fondre les 110 kilogrammes de platine en morceaux, et dès ce moment la fusion des lames de platine introduites par les ouvreaux s'est opérée avec une grande rapidité. Soixante-neuf minutes après l'admission à forte pression de l'oxygène la masse entière était fondue. On pouvait alors, en regardant par les ouvreaux, apercevoir la surface entière du bain complètement liquide et suivre les ondulations du métal produites par les intenses jets de feu verticaux que les chalumeaux dardaient sur le bain. Les parois épaisses du creuset emprisonnaient si bien la chaleur dégagée, qu'on pouvait à ce moment, sans éprouver la moindre douleur, appliquer la main sur le couvercle.

On a continué à chauffer encore pendant quelques minutes en employant un excès d'hydrogène pour empêcher le rocheage qui résulterait de l'absorption de l'oxygène; mais l'un des ouvreaux, qui malgré les languettes de platine se trouvait détérioré par l'effet du brassage, commençant à laisser échapper une petite quantité de métal qui se solidifiait sur les parois extérieures, on a cru prudent

Digitized by Google

de terminer l'action des chalumeaux. Le lingot obtenu après le refroidissement, débarrassé des morceaux de chaux tombés du couvercle pendant la dernière période et qui avaient nagé sur la surface, s'est trouvé répondre parfaitement aux conditions imposées par la Commission internationale du mètre [1]).

19. Lors de la deuxième réunion du Comité Permanent, ouverte le 6 Octobre 1874, la Section française pouvait déjà, dans son rapport sur la situation des travaux, rendre compte des opérations de forgeage et d'étirage exécutées sur le gros bloc fourni par la fonte en bain unique, et soumettre à l'acceptation du Comité 16 mètres terminés et 16 mètres en cours de fabrication. Ce fut dans la séance du 10 Octobre 1874 que le Comité formula par une déclaration catégorique sa complète satisfaction au sujet de la confection des mètres en platine iridié. Dans les Procès-Verbaux des réunions du Comité ce fait important est relaté dans les termes suivants:

„Le Comité ayant assisté dans la matinée à une fonte de 19 kilogrammes de „platine iridié et ayant eu l'occasion d'examiner la qualité du métal d'un des „mètres qui, à cet effet, a été scié en deux dans le sens de sa longueur, M. le „Président propose de déclarer que le Comité considère le procédé de fabrication „comme parfaitement réussi et qu'il est complètement édifié sur la qualité de la „matière du mètre.

„Cette proposition fut adoptée à l'unanimité."

Les Membres présents furent MM. le général Ibanez, président, Broch, Chisholm, Hilgard, le général Morin, Stas et Bosscha.

MM. Ste Claire Deville, Heusschen et Tresca, Membres de la Commission assistèrent à la séance.

20. Dans sa réunion de 1874, le Comité, sur l'invitation de la Section française, eut de plus à émettre son avis sur plusieurs questions relatives à la continuation des travaux. Les résolutions les plus importantes adoptées par le Comité, après l'étude des communications de la Section française, furent les suivantes.

La question de savoir si l'on pourrait, pour compléter le nombre des mètres nécessaires, refondre les déchets de la fabrication, fut résolue dans le sens affirmatif sur les avis de MM. Broch, le Verrier, Stas et Ste Claire Deville, dont les derniers firent ressortir les avantages qu'une refonte pourrait avoir pour obtenir l'homogénéité de la masse. M. Stas constatait expressément l'évidence acquise par les analyses de M. Ste Claire Deville, que la composition de l'alliage ne pourrait subir par l'effet d'une refonte aucune altération appréciable [2]).

---

[1]) Conclusion de M. Deville. Procès-Verbaux des réunions des Membres français, 1873—1874 p. 86.

[2]) Comité Permanent. Procès-Verbaux 1874, p. 10.

Digitized by Google

La prescription de la Commission du mètre, selon laquelle les mètres, après leur façonnage définitif, devraient être soumis à un recuit de plusieurs jours à la température la plus élevée, avait été reconnue incompatible avec le procédé de fabrication. Elle fut modifiée par le Comité en ce sens qu'un recuit de vingt-quatre heures à une température élevée pourrait suffire après la première passe par la dernière dimension de la filière.

La Section française avait proposé d'employer, pour la délimitation de la longueur des mètres, des traits d'une épaisseur de 3 à 5 microns obtenus au moyen d'un outil approprié et sans ébarbage. Le tracé direct avec le mètre des Archives ne devrait se faire que sur quatre mètres. Un mètre spécial choisi parmi ces quatre servirait aux tracés de toutes les autres règles.

Quant aux comparaisons, il conviendrait de suivre la même marche. Ce ne seraient que les quatre mètres indiqués dont l'équation par rapport au mètre des Archives serait établie par des comparaisons directes. L'équation de tous les autres prototypes serait déduite de comparaisons de mètres à traits entre eux.

Le Comité, reconnaissant la valeur des considérations présentées à ce sujet par la Section française, a adopté ces propositions, qui, tout en restant dans les termes des résolutions de la Commission internationale, lui parurent préférables à toute autre solution. En effet, le tracé direct de tous les mètres avec le mètre des Archives n'offrirait aucun avantage réel, tandis qu'il exposerait les faces terminales du mètre des Archives à des accidents et ne permettrait pas de profiter d'un tracé exceptionnellement bien réussi pour le reporter sur les autres mètres par les moyens à la fois plus simples et plus sûrs de l'étalonnage d'un mètre à traits d'après un mètre de même nature. Quant aux comparaisons, quoiqu'on n'eût encore aucune expérience au sujet de l'efficacité des méthodes proposées, il était cependant évident que l'équation de deux mètres à traits entre eux pourrait offrir une exactitude bien plus grande que celle d'un mètre à traits avec un mètre à bouts. Il serait même assez difficile de fixer la valeur relative des données obtenues par ces deux procédés et d'établir avec une certitude suffisante les équations finales, qui devront servir à déduire de l'ensemble des mesures la valeur la plus probable de chaque mètre. Le Comité, sur ses raisons, donna à entendre que le tracé et la comparaison, convenablement exécutés, d'un seul mètre avec le mètre des Archives pourraient suffire pour rattacher les nouveaux mètres au prototype, qui est la base du système métrique.

§ 3. CONFÉRENCE DIPLOMATIQUE DU MÈTRE.

21. Le concours du Comité Permanent aux travaux de la Section française, prévu par l'organisation adoptée en 1872 par la Commission internationale, avait

Digitized by Google

ainsi conduit à un parfait accord entre les deux commissions exécutives, dans toutes les questions qui se rattachaient à la confection des nouveaux prototypes et à leur comparaison avec les prototypes des Archives. On pouvait donc considérer la partie consultative de la tâche du Comité comme définitivement accomplie. Le travail de la Section française, entrepris et poursuivi avec une supériorité marquée de conception et d'exécution, touchait à sa fin. Il était à prévoir qu'il serait entièrement accompli avant la suivante réunion annuelle du Comité, qui devait avoir lieu en Octobre 1875.

Le Comité eut donc à s'occuper sérieusement des moyens dont il aurait besoin pour entreprendre les travaux qui lui avaient été plus spécialement assignés par la Commission internationale, savoir, la comparaison des prototypes entre eux et la détermination des dilatations absolues et relatives des mètres.

Déjà, dans sa réunion de 1873, le Comité s'était adressé au Ministre de l'agriculture et du commerce de France pour provoquer la réunion d'une conférence diplomatique dans le but de régler les contributions des divers États aux frais de ses travaux. Le Comité avait proposé d'assurer en même temps la conservation des prototypes ainsi que l'exécution des comparaisons ultérieures, dont les différents Gouvernements pourraient faire la demande. Le Gouvernement français, pour satisfaire au voeu du Comité, s'était adressé aux Gouvernements intéressés. Les réponses avaient été communiquées en résumé au Comité dans sa réunion en 1874, mais il parut que le nombre des réponses affirmatives n'était pas suffisant pour permettre de convoquer la conférence. Le Comité résolut de réitérer sa demande et de déclarer en même temps qu'il ne se trouvait pas en mesure de continuer sa tâche avant que les Gouvernements se fussent entendus sur les moyens nécessaires pour le mettre à même d'exécuter ses travaux et de pourvoir à la conservation des prototypes internationaux et aux comparaisons à faire dans l'avenir.

22. Les démarches du Gouvernement français, faites à la suite de cette nouvelle demande, ont eu pour effet qu'une conférence diplomatique s'est réunie à Paris le 1er Mars 1875. L'un de nous a rendu compte des transactions de cette conférence et des raisons qui ont mis fin à la participation de quelques États à la nouvelle organisation de la Commission internationale [1]).

Il suffira de rappeler ici que, dès le début de ses délibérations, l'objet principal de la conférence fut la fondation d'un établissement permanent qui

---

[1]) La Commission internationale du mètre et la conférence diplomatique du mètre, par J. Bosscha. Verslagen en mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Afdeeling Natuurkunde. Tweede reeks. Deel X, p. 273.

Digitized by Google

continuerait à fonctionner après l'accomplissement de la tâche pour laquelle la Commission internationale avait été convoquée par la France.

Les délégués de quelques États déclarèrent que la création de ce bureau était la condition de la participation ultérieure de leurs Gouvernements à l'oeuvre commune. D'autres Gouvernements désiraient se borner au but primitif de la Commission du mètre et déclinèrent leur concours à la création d'un Institut dont ils ne pouvaient reconnaître l'utilité.

23. La difficulté qui résultait de cette diversité d'opinions ne pouvait évidemment être résolue que par une convention qui permît à tous les États de continuer à prendre part à la confection des nouveaux prototypes et qui en même temps assurât, à ceux des Gouvernements qui le désireraient, l'occasion de perpétuer dans un bureau permanent le travail de la Commission. Cette solution fut proposée en effet; elle échoua par suite d'une déclaration du délégué d'Allemagne, qui refusa d'adhérer à une convention qui n'imposerait pas à tous les signataires l'obligation de participer au Bureau Permanent.

24. La conférence diplomatique, convoquée pour fournir au Comité Permanent les moyens d'entreprendre ses travaux, a ainsi abouti à une convention qui avait pour but principal la création d'un bureau international des poids et mesures dans lequel, après la distribution des étalons, seraient continués les travaux de la Commission internationale. Les Gouvernements qui ne pouvaient adhérer à cette convention, quoiqu'ils eussent par leurs délégués pris une part active à ce qui avait été fait jusqu'alors, furent ainsi exclus de tout concours ultérieur à la création des nouveaux prototypes. Avec l'Angleterre, la Grèce et plus tard le Brésil, les Pays-Bas se trouvèrent dans cette situation. La convention diplomatique, ayant concentré les pouvoirs de la Commission internationale dans les mains d'un Comité international des poids et mesures composé de quatorze délégués de pays différents, avait bien désigné comme tels entre autres MM. Chisholm et Bosscha, délégués d'Angleterre et des Pays-Bas, mais il était évident que ces délégués ne pouvaient prendre part à l'administration d'un établissement dont l'utilité n'était pas reconnue par leurs Gouvernements, et auquel leur pays ne participerait pas.

25. Cependant le droit de ces pays dissidents de recevoir, dans toutes les conditions de garantie arrêtées par la Commission internationale, les prototypes qu'ils avaient demandés, restait intact: il fut reconnu expressément dans les dispositions transitoires de la convention.

Le Gouvernement néerlandais résolut de faire valoir son droit pour obtenir par les soins de la Section française avec le concours d'une Commission néerlandaise la livraison des deux prototypes du mètre qu'il avait demandés et dont l'un

Digitized by Google

devrait servir comme nouvel étalon des Pays-Bas, tandisque l'autre était destiné au service métrologique des Indes Orientales néerlandaises.

26. La Commission néerlandaise fut instituée par décret royal du 12 Mai 1876. Elle était composée de MM. F. J. Stamkart, J. Bosscha et J. A. C. Oudemans. M. Stamkart avait pris part à la réunion de la Commission internationale en 1872; M. Bosscha avait de plus participé comme membre et secrétaire à toutes les réunions du Comité Permanent et assisté comme délégué technique à la conférence diplomatique du mètre. M. Oudemans venait de retourner en Hollande après un séjour de 18 ans dans les Indes Orientales, où il avait dirigé, en qualité de chef du service géographique, les triangulations et les mesures des bases de l'île de Java.

C'est à la suite de ses conférences avec les Membres de la Section française, d'une correspondance suivie avec MM. le général Morin et Tresca, des travaux exécutés par M. G. Tresca, de ses propres expériences et mesures ainsi que de celles dont M. Fizeau a bien voulu se charger, que la Commission néerlandaise a pu, dès 1880, transférer en Hollande deux mètres en platine iridié, directement comparés avec le mètre des Archives dans des conditions satisfaisantes, et offrant, avec les données des observations, les moyens nécessaires pour reproduire à volonté et reporter sur d'autres étalons la véritable longueur de la base du système métrique.

Dans le présent rapport nous avons à rendre compte des opérations qui ont conduit à ce résultat.

II. ELASTICITÉ D'UNE DES RÈGLES. DEGRÉ DE PRÉCISION DES MESURES MICROMÉTRIQUES.

27. La Commission néerlandaise s'est rendue à Paris, le 5 Septembre 1876, pour se mettre en rapport avec la Section française et pour se concerter avec celle-ci au sujet des travaux que les deux commissions avaient à exécuter en commun.

M. le général Morin, Président, et M. H. Tresca, Secrétaire de la Section française fournirent aux Commissaires néerlandais tous les moyens d'étudier les qualités et le fonctionnement des appareils installés au Conservatoire des arts et métiers pour le tracé et la comparaison des nouveaux prototypes.

Le premier soin de la Commission fut de se mettre d'accord avec les Mem-

Digitized by Google

bres de la Section française pour désigner, parmi les règles en platine iridié provenant du bloc de 236 kilogrammes coulé le 13 Mai 1874, celle qui servirait de prototype néerlandais. Le choix se porta sur le n° 19. Parmi les règles en apparence identiques, le n° 19 se recommanda par cette considération qu'une analyse chimique d'après la méthode de CLAUS avait été exécutée par M. A. C. OUDEMANS, professeur de Chimie à l'École polytechnique de Delft, sur deux échantillons de métal provenant des bouts de cette règle.

La désignation du second mètre, demandé par le Gouvernement néerlandais pour le service de ses colonies, dut être différée jusqu'à ce qu'un plus grand nombre de règles eussent été construites. D'après l'opinion que M. TRESCA avait émise dans une des séances du Comité Permanent, il conviendrait de n'assigner à chaque État qu'un seul mètre provenant de la coulée unique, et de construire les duplicata qui seraient demandés, avec le métal provenant d'une seconde fonte des déchets [1]).

28. La Commission néerlandaise a examiné la règle n° 19, désignée comme futur étalon néerlandais, au point de vue de son élasticité. À cet effet sa flexion sous une charge déterminée fut mesurée par MM. G. TRESCA et BOSSCHA

La règle fut placée sur des supports solides en pierre. Les arêtes intérieures des deux surfaces d'appui étaient écartées de 90 centimètres. Pour protéger la surface inférieure de la règle, on avait interposé entre les bouts et les supports des plaques en laiton. La règle portait en son milieu un crochet avec plateau pesant ensemble 1,805 kilogrammes. Trois repères à fils croisés appliqués, l'un au milieu de la règle, les deux autres sur les bouts au dessus des points d'appui, permettaient de mesurer sur trois cathétomètres la flèche de la barre produite par les charges successives du plateau. Ces mesures furent exécutées sur dix charges de un à dix kilogrammes, soit en chargeant, soit en déchargeant le plateau.

L'abaissement des bouts de la règle produit par le poids d'un kilogramme étant trop faible pour pouvoir être mesuré aux cathétomètres, dont les verniers accusaient le 50me du millimètre, on ne relevait les cathétomètres de gauche et de droite qu'après une variation de la charge de 5 kilogrammes. Le tableau suivant contient les lectures obtenues.

---

[1]) Procès-Verbaux du Comité Permanent, Séances de 1872 et de 1873, p. 21. A l'époque où le premier mètre de la Commission néerlandaise fut désigné, il y avait d'autant plus de raison d'observer dans l'attribution des règles une certaine réserve, que la fabrication s'était montrée très laborieuse et surtout sujette à des hasards difficiles à contrôler. L'Exposé de la situation des travaux de la Section française au 1er Octobre 1876 accuse 23 règles terminées, en présence d'une demande de 26 mètres faite par les divers États. On trouve dans cet Exposé quelques détails concernant la fabrication qui peuvent faire juger des grandes difficultés que la Section française a eu à surmonter dans cette partie de sa tâche.

Digitized by Google

TABLEAU I.

12 Septembre 1876.

N°. de l'expérience.	Charge en kilogrammes.	Cathétomètres			Flèche.		Ecarts.
		du milieu.	de gauche.	de droite.	observée.	calculée.	
		mm.					
1	0	791.82	831,90	758,41			
2	1	791,68			0,12	0,14	— 0,02
3	2	791,52			0,28	0,27	+ 0,01
4	3	791,38			0,41	0,41	0,00
5	4	791,24			0,54	0,54	0,00
6	5	791,10	831,90	758,34	0,68	0,68	0,00
7	6	791,00			0,77	0,81	— 0,04
8	7	790,80			0,96	0,95	+ 0,01
9	8	790,66			1,09	1,09	0,00
10	9	790,52			1,22	1,22	0,00
11	10	790,38	831,86	758,30	1,36	1,36	0,00
12	9	790,52			1,22	1,22	0,00
13	8	790,66			1,08	1,09	— 0,01
14	7	790,80			0,95	0,95	0,00
15	6	790,92			0,83	0,81	+ 0,02
16	5	791,08	831,86	758,34	0,68	0,68	0,00
17	4	791,22			0,55	0,54	+ 0,01
18	3	791,36			0,42	0,41	+ 0,01
19	2	791,52			0,27	0,27	0,00
20	1	791,66			0,14	0,14	0,00
21	0	791,80	831,90	758,40			

Si l'on suppose que, pour les charges comprises entre 0, 5, 10, 5, 0 kilogrammes, les dépressions des supports ont été proportionnelles aux charges et que, pour la charge zéro, on prenne la moyenne des positions initiale et finale de la règle, on obtient pour les flèches de la barre les valeurs inscrites dans la sixième colonne du tableau.

En admettant que la flèche est proportionelle à la charge, on trouve pour sa valeur la plus probable, par kilogramme de charge:

Période de charge . .	0,1353
„ „ décharge .	0,1363
Moyenne .	0,1358.

La différence de ces deux valeurs est insensible pour les moyens d'observation employés. Il en est de même de la différence de 0,015 mm. des flèches produites

Digitized by Google

au commencement et à la fin de l'expérience par le poids de la règle et de ses appendices.

Il en résulte que la charge de dix kilogrammes, appliquée au milieu de la règle, ne dépasse pas sa limite d'élasticité. La proportionnalité des flèches avec les charges est en outre démontrée par l'accord des valeurs observées avec celles qui ont été calculées avec la moyenne 0,136 par kilogramme et qui, avec les écarts des observations, se trouvent indiquées dans les deux dernières colonnes du tableau.

Pour calculer le coëfficient d'élasticité E de la règle, il faut connaître le moment d'inertie de sa section transversale par rapport à un axe horizontal passant par son centre de gravité. A cet effet on a mesuré à Delft les dimensions des sections aux deux bouts de la barre. La moyenne de ces mesures a fourni pour ce moment la valeur:

$$4891{,}6 \text{ mm}^4.$$

On en déduit:

$$E = \frac{0{,}50 \times (0{,}45)^3}{3 \times 0{,}000136 \times 4891{,}6 \times 10^{-12}} = 2283 \times 10^7 \frac{\text{kilogramme}}{(\text{mètre})^2},$$

valeur qui dépasse celle de l'acier. La matière dont est formée la règle n° 19 peut, en effet, être considérée comme constituant un alliage qui, de tous ceux connus jusqu'ici, offre à égalité de volume la plus grande résistance aux forces extérieures qui tendraient à modifier ses dimensions.

29. Les moyens optiques que la Section française se proposait d'employer dans les comparateurs différaient considérablement de ceux dont, dans des expériences pareilles, on s'était servi jusque-là.

En partant de cette considération que, pour mesurer avec sûreté une petite longueur, il faut nécessairement pouvoir la distinguer, on était arrivé à demander des grossissements s'approchant de 300 fois, si l'on voulait établir les équations des mètres jusqu'à un dixième de micron. Ce grossissement devait être obtenu dans des conditions tout-à-fait anormales, résultant de la nécessité d'employer des objectifs à grande distance focale. En effet, la forme de la section transversale de la règle empêche d'approcher l'objectif des traits à viser, ceux-ci se trouvant à la hauteur du centre de gravité de cette section, c'est-à-dire à environ 10 millimètres de la face supérieure de la règle. Pour repartir convenablement entre le système de l'objectif et celui de l'oculaire le grossissement du microscope, il faut nécessairement éloigner de l'objectif l'image formée par ce dernier, ce qui force à donner au corps du microscope une longueur considérable. Les instruments employés dans les comparateurs de la Section française mesuraient jusqu'à 105 centimètres. Il est vrai que cette

Digitized by Google

longueur inusitée convenait très bien aux dispositions du comparateur, qu'on se proposait d'entourer d'une cage métallique dans le but d'exclure l'influence du rayonnement calorifique de l'observateur. La longueur des corps des microscopes permettrait de donner à cette cage des dimensions assez grandes, tout en mettant les oculaires des microscopes, qui traverseraient la paroi supérieure de la cage, à la portée de l'observateur.

On ne pouvait raisonnablement douter qu'au point de vue optique, le grossissement qu'on s'était proposé de réaliser dans les microscopes des comparateurs de la Section française, ne dût reculer considérablement la limite de la précision des pointés et de la sûreté des mesures. Assurément aucun naturaliste habitué à l'emploi de microscopes à fort grossissement n'hésitera à affirmer qu'un grossissement de 250 à 300 fois permet de distinguer, avec plus de détail qu'un grossissement de 60 fois, les bords d'un trait sur métal convenablement éclairé. Le grossissement de 300 fois est encore loin de la limite à laquelle, dans des microscopes bien construits, le défaut de netteté de l'image rend illusoire l'avantage de l'agrandissement de ses dimensions. Si un doute pouvait se présenter au sujet des qualités du système optique employé, ce n'était pas assurément du point de vue de l'avantage du grossissement considéré en lui-même, mais bien plutôt en ce qui regarde les conditions spéciales imposées par la forme des règles. Évidemment ce ne sont pas des considérations générales et nécessairement plus ou moins vagues qui puissent éclairer cette partie de la question optique [1]). Il en est de même d'une autre question non moins importante, mais sur laquelle aucun doute ne s'était prononcé: celle de savoir s'il serait possible d'assurer aux microscopes une stabilité proportionnée à leur puissance optique. Il est clair que ce n'était que par l'examen de l'image même d'un trait bien réussi et par des essais de pointé, qu'on pouvait se rendre compte du degré de perfectionnement que l'innovation introduite par la Section française dans les mesures micrométriques avait réellement fait atteindre.

30. La Commission néerlandaise crut devoir profiter de ce que l'un des micro-

---

[1]) Voir la Note: Sur le rapport entre le grossissement des microscopes et la précision des mesures micrométriques par M. W. Förster, publiée comme Annexe III des Procès-verbaux des Séances de 1878 du Comité international des poids et mesures. Dans cette Note M. Förster s'applique à démontrer par des considérations théoriques que les grossissements élevés ne peuvent profiter à la précision des pointés. Elle se termine par ces mots: »Nous ne méconnaissons pas ce qu'il y a encore de vague dans ces dernières remar»ques; car dans toutes ces questions, il ne s'agit pas de possibilités, mais il faut fournir des preuves numé»riques. D'un autre côté, on ne peut pas nier qu'il serait plus naturel d'exiger des preuves numériques suffi»santes pour les avantages des grossissements excessifs que d'en exiger pour démontrer leurs inconvénients, »qui sont bien plus évidents de prime abord."

Digitized by Google

scopes du comparateur longitudinal se trouvait installé dans son support, pour exécuter quelques mesures qui pourraient faire juger des qualités micrométriques de cet instrument. Le support était placé au dessus du banc du comparateur transversal, déposé provisoirement dans la salle des poids et mesures du Conservatoire des arts et métiers. Le pied du support et le banc du comparateur reposaient simplement sur le carreau de la salle. Aucun écran ne les protégeait contre les courants d'air ni contre le rayonnement des objets environnants. En faisant servir cette installation provisoire et incomplète à effectuer des expériences micrométriques, on était donc sûr de se trouver dans des conditions beaucoup moins favorables que celles des expériences définitives.

Pour exécuter quelques pointés, on choisit comme objet un trait tracé sur platine iridié et pareil à ceux qu'on se proposait d'appliquer sur les mètres. Six séries de dix pointés, dont deux prises par M. Bosscha, une par M. Stamkart et trois par M. Oudemans, se trouvent inscrites dans le tableau II (page suivante).

31. Presque toutes ces séries indiquent clairement un déplacement continu du point de rencontre de l'axe du microscope avec le plan de vision. Il provient probablement d'une inégale variation de température des diverses parties du support ou du microscope, inégalité causée par le rayonnement calorifique, soit de l'observateur soit d'objets environnants. Pour éliminer autant que possible cet effet, on a supposé, dans le calcul de l'erreur moyenne d'un pointé, que le déplacement fût proportionnel au temps et que l'intervalle entre deux pointés successifs fût toujours le même. En désignant par p la lecture, par α la variation de la lecture due au déplacement survenu entre deux pointés consécutifs, par N le numéro d'ordre de chaque pointé, les dix pointés feraient connaître la valeur la plus probable P de la première lecture, ainsi que celle de α, au moyen des équations normales suivantes:

$$\begin{aligned} 10\,P + 45\,\alpha &= [p] &&= R_1 \\ 45\,P + 285\,\alpha &= [(N-1)\,p] &&= R_2 \end{aligned}$$

d'où l'on tirerait:

$$\begin{aligned} P &= 0{,}34545\,R_1 - 0{,}05454\,R_2 \\ \alpha &= -0{,}05454\,R_1 + 0{,}01212\,R_2. \end{aligned}$$

Le calcul cependant devient plus simple lorsqu'on ramène les lectures à une lecture d'ordre moyen Q, qui dans la série occuperait le rang $5^1/_2$. En posant $\alpha = 2\,\alpha'$, les équations auxquelles donnent lieu les pointés, sont alors:

$$\begin{aligned} p_1 &= Q - 9\,\alpha' \\ p_2 &= Q - 7\,\alpha' \\ p_3 &= Q - 5\,\alpha' \\ p_4 &= Q - 3\,\alpha' \\ p_5 &= Q - \alpha' \\ p_6 &= Q + \alpha' \text{ etc.} \end{aligned}$$

Digitized by Google

TABLEAU II.

Pointés sur un trait en platine iridié.

9 en 10 Septembre 1876.

I. Série de M. Bosscha.

$p' = p - 86$.

N.	p'	np'	q'	$\pm\varepsilon$	ε^2
1	1,6	— 14,4	1,23	0,37	0,137
2	0,9	— 6,3	1,10	0,20	0,040
3	1,2	— 6,0	0,98	0,22	0,048
4	0,9	— 2,7	0,86	0,04	0,002
5	0,1	— 0,1	0,74	0,64	0,410
6	0,2	+ 0,2	0,62	0,42	0,176
7	0,8	+ 2,4	0,50	0,30	0,090
8	0,6	+ 3,0	0,38	0,22	0,048
9	0,3	+ 2,1	0,26	0,04	0,002
10	0,2	+ 1,8	0,14	0,06	0,004
	6,8	— 20,0			0,957

$10\,Q = 6.8$ $\quad Q = 0,68$
$330\,\alpha' = -20,0$ $\quad 2\,\alpha' = -0,1212$
$8\,m^2 = 0,957$ $\quad m = 0,346$

II. Série de M. Bosscha.

$p' = p - 85$.

N.	p'	np'	q'	$\pm\varepsilon$	ε^2
1	1,8	— 16,2	1,54	0,26	0,068
2	1,3	— 9.1	1,38	0,08	0,008
3	1,2	— 6,0	1,23	0,03	0,001
4	0,8	— 2.4	1 07	0,27	0,073
5	1,2	— 1,2	0,91	0,29	0,084
6	0,8	+ 0,8	0,75	0,05	0,002
7	0,2	+ 0,6	0,59	0,39	0,152
8	0,2	+ 1,0	0,43	0,23	0,053
9	0,4	+ 2,8	0 28	0,12	0,014
10	0,4	+ 3,6	0,12	0,28	0,078
	8,3	— 26,1			0,533

$10\,Q = 8,3$ $\quad Q = 0,83$
$330\,\alpha' = -26,1$ $\quad 2\,\alpha' = -0,1582$
$8\,m^2 = 0,533$ $\quad m = 0,258$

III. Série de M. Stamkart.

$p' = p - 86$.

N.	p'	np'	q'	$\pm\varepsilon$	ε^2
1	2,0	— 18,0	2,27	0,27	0,073
2	2,5	— 17.5	2,12	0,38	0,144
3	2,0	— 10.0	1,96	0,04	0,002
4	1,8	— 5,4	1,81	0,01	0,000
5	1,5	— 1.5	1,66	0,16	0,026
6	1,6	+ 1,6	1,50	0,10	0,010
7	1,3	+ 3,9	1,35	0,05	0,003
8	1,0	+ 5,0	1,19	0,09	0,008
9	1,2	+ 8,4	1,04	0,16	0,026
10	0,9	+ 8.1	0,89	0,01	0,000
	15,8	— 25,4			0,292

$10\,Q = 15\,8$ $\quad Q = 0.158$
$330\,\alpha' = -25,4$ $\quad 2\,\alpha' = -0,1541$
$8\,m^2 = 0,292$ $\quad m = 0.191.$

IV. Série de M. Oudemans.

$p' = p - 43$.

N.	p'	np'	q'	$\pm\varepsilon$	ε^2
1	0,9	— 8,1	0,86	0,04	0,001
2	1,3	— 9,1	0,88	0,42	0,176
3	0,7	— 3,5	0,91	0,21	0,044
4	0,7	— 2,1	0,94	0,24	0,058
5	0,9	— 0,9	0,97	0,07	0,005
6	0,7	+ 0,7	1,00	0,30	0,090
7	1,2	+ 3,6	1,03	0,17	0,029
8	1,2	+ 6,0	1,06	0,14	0,020
9	1,2	+ 8,4	1,09	0,11	0,012
10	1,1	+ 9,9	1,12	0,01	0,000
	9,9	+ 4,9			0,435

$10\,Q = 9,9$ $\quad Q = 0,99$
$330\,\alpha' = +4,9$ $\quad 2\,\alpha' = +0,0297$
$8\,m^2 = 0,435$ $\quad m = 0,238$

V. Série de M. Oudemans.

$p' = p - 43$.

N.	p'	np'	q'	$\pm\varepsilon$	ε^2
1	0,7	— 6,3	1,08	0,38	0,144
2	1,1	— 7,7	1,01	0,09	0,008
3	1,7	— 8,5	0,94	0,76	0,578
4	0,8	— 2,4	0,87	0,07	0,005
5	0,7	— 0,7	0,80	0,10	0,010
6	0,3	+ 0,3	0,73	0,43	0,185
7	0,4	+ 1,2	0,66	0,26	0,068
8	0,8	+ 4,0	0,58	0,22	0,048
9	0,7	+ 4,9	0,51	0,19	0,036
10	0,4	+ 3,6	0,44	0,04	0,002
	7,6	— 11,6			1,084

$10\,Q = 7,6$ $\quad Q = 0,76$
$330\,\alpha' = -11,6$ $\quad 2\,\alpha' = -0,0703$
$8\,m^2 = 1,084$ $\quad m = 0,369$

VI. Série de M. Oudemans.

$p' = p - 83$.

N.	p'	np'	q'	$\pm\varepsilon$	ε^2
1	2,3	— 20,7	2.41	0,11	0,021
2	1,8	— 12,6	2,25	0,45	0,202
3	2,7	— 13,5	2,10	0,60	0,360
4	1.8	— 5,4	1,95	0,15	0,023
5	2,2	— 2,2	1,80	0,40	0.160
6	0,9	+ 0,9	1,64	0,74	0,548
7	1,8	+ 5,4	1,49	0,31	0,096
8	2,2	+ 11,0	1,34	0,86	0,740
9	0,8	+ 5,6	1,18	0,38	0,144
10	0,7	+ 6.3	1,03	0,33	0.109
	17,2	— 25,2			2,403

$10\,Q = 17,2$ $\quad Q = 1,72$
$330\,\alpha' = -25,2$ $\quad 2\,\alpha' = -0,1528$
$8\,m^2 = 2,403$ $\quad m = 0,546$

Digitized by Google

d'où il suit:

$$[p] = 10\,Q$$
$$[n\,p] = 330\,\alpha'$$

en désignant par n le coefficient de α' dans chaque équation. Ce mode de calcul a été suivi dans le tableau II qui renferme, avec les lectures obtenues, le calcul des constantes et celui de l'erreur moyenne. Pour simplifier le calcul on a retranché des lectures p de chaque série un certain nombre d'unités de manière à réduire à deux chiffres chaque lecture p'. Avec les valeurs de Q et de α' résultant des équations ci-dessus on a calculé les pointés successifs q'. En désignant par s la différence $p' - q'$, on a pour l'erreur moyenne d'un pointé:

$$m = \sqrt{\frac{[s^2]}{8}}$$

exprimée en divisions du tambour. Pour la ramener au micron comme unité, il faut, d'après les déterminations de M. Tresca, multiplier par 0,24.

32. Les erreurs moyennes d'un pointé seraient, d'après ces expériences:

d		μ	
0,346	ou	0,083	Bosscha
0,258	»	0,062	»
0,191	»	0,046	Stamkart
0,233	»	0,056	Oudemans
0,369	»	0,088	»
0,546	»	0,132	»

Les différences d'une série à l'autre dans les valeurs obtenues par le même observateur sont trop grandes et le nombre des séries est trop restreint pour permettre d'établir avec quelque certitude une différence entre les trois observateurs. La moyenne déduite du carré moyen $0{,}1188\,d^2$, savoir:

$$m_p = 0{,}083\,\mu$$

peut être attribuée aux trois observateurs indistinctement.

M. Chisholm, délégué de l'Angleterre à la Commission internationale du mètre, se trouvant à Paris en même temps que les commissaires néerlandais, a pris de son côté quatre séries de dix pointés sur le même trait. Ces pointés calculés de la même manière donnent pour l'erreur moyenne les valeurs:

d		μ
0,114	ou	0,027
0,357	»	0,086
0,411	»	0,099
0,452	»	0,108

Digitized by Google

La moyenne, déduite du carré moyen, savoir 0,086 μ, coïncide à très peu près avec celle des commissaires néerlandais.

La réalité du déplacement continu de l'axe du microscope est attestée par les valeurs mêmes trouvées dans les différentes séries, savoir:

$$\begin{aligned} \alpha = &-0{,}1212 \\ &-0{,}1582 \\ &-0{,}1541 \\ &+0{,}0297 \\ &-0{,}0703 \\ &-0{,}1528. \end{aligned}$$

A l'exception de la quatrième, ces valeurs sont de même signe et, sinon égales, du moins du même ordre de grandeur. Or, dans la quatrième et la cinquième série, — les deux premières de M. Oudemans, — la partie supérieure du microscope avait été couverte par une tapisserie, dans le but d'atténuer l'effet de la chaleur rayonnante sur la tête du microscope.

Les quatre séries de M. Chisholm, qui donnent:

$$\begin{aligned} \alpha = &-0{,}169 \\ &-0{,}130 \\ &-0{,}172 \\ &-0{,}196, \end{aligned}$$

confirment de leur côté l'hypothèse admise dans le calcul.

On peut donc regarder comme suffisamment établi que, avec le microscope employé, les pointés, débarrassés autant que possible de l'influence des variations de température auxquelles l'absence d'un écran exposait l'instrument, admettent un degré de précision dont la mesure est donnée par l'erreur moyenne:

$$m_p = 0{,}083\,\mu$$

ou par l'erreur probable:

$$E = 0{,}056\,\mu.$$

33. Dans l'„Exposé de la situation des travaux de la Section française au 1er Octobre 1876" on trouve quelques données relatives au microscope qui a servi aux pointés que nous venons de rapporter. Il en résulte que l'objectif est composé de deux lentilles achromatiques distantes l'une de l'autre de 19,40 mm. Le grossissement de l'instrument a été estimé pour l'objectif seul à 38 fois, pour l'oculaire à 7 fois, au total 266 fois. Le trait, pour être distinct, doit être placé à 14 millimètres de la face extérieure de l'objectif, l'image focale se forme à 880 millimètres de cette lentille, c'est-à-dire à 860,6 mm. de la seconde lentille du système de l'objectif.

Pour déterminer plus complètement le système optique du microscope,

Digitized by Google

M. Bosscha a pris, avec le concours de M. G. Tresca, la mesure de l'anneau oculaire, c'est-à-dire de l'image de l'ouverture circulaire de l'objectif, qui dans cet instrument se forme à une distance de 13,75 mm. de la dernière surface réfringente du système. Cette image s'est trouvée avoir un diamètre de 0,360 mm., celui de l'ouverture de l'objectif étant de 6,75 mm.

Avec ces dernières données on calcule facilement les quatre constantes c, p, r, s [1]), qui déterminent complètement le système optique.

En effet, le rapport c du diamètre de l'objectif à celui de l'anneau oculaire est connu par l'équation:

$$c = -\frac{6{,}75}{0{,}36} = -18{,}75,$$

le signe négatif étant appliqué à cause du renversement de l'image.

L'objet visé se trouvant à très peu près au foyer du système, on peut admettre pour la distance q_1 du foyer antérieur à la première surface réfringente la valeur de 14 millimètres, d'où

$$q_1 = -\frac{c}{p} = 14 \text{ mm.}$$

ce qui, avec l'équation précédente, donne pour le pouvoir réfringent de l'instrument:

$$p = 1{,}339.$$

La valeur $-\frac{1}{p} = -0{,}747$ mm. est la distance des foyers aux points nodaux correspondants. En désignant par q_2 la distance du foyer postérieur, par o_2 celle de l'anneau oculaire à la dernière surface réfringente du système, on a:

$$q_2 - o_2 = -\frac{1}{pc} = +0{,}0398,$$

et comme on a mesuré $o_2 = 13{,}75$, on en déduit:

$$q_2 = -\frac{s}{p} = 13{,}79.$$

L'anneau oculaire, le second foyer et le second point nodal se trouvent donc très rapprochés l'un de l'autre à des distances respectives de 13,75, 13,79 et 14,54 mm. de l'oculaire. Dans le système renversé le rapport du diamètre de l'ouverture de la première surface réfringente au diamètre de son image serait:

$$s = -p\,q_2 = -18{,}47.$$

La quatrième constante r du système, qu'on peut désigner comme la distance apparente de l'image de l'oculaire, se déduit de la formule:

$$c\,s - p\,r = 1$$

---

[1]) Voir l'Annexe I de ce Rapport.

Digitized by Google

qui, avec les valeurs $c = -18{,}75$, $p = 1{,}339$ et $s = -18{,}47$ donne:

$$r = 257{,}8 \text{ mm.}$$

La relation qui existe entre la distance x de l'objet à la première surface réfringente et celle y de l'image à la dernière surface réfringente, est exprimée par l'équation:

$$r + s\,x + c\,y + p\,x\,y = 0.$$

En calculant au moyen de cette formule la distance à laquelle doit se trouver l'objet pour que son image se forme à la distance de vision distincte minima devant l'oeil de l'observateur, c'est-à-dire pour une valeur $y = -D = -200$ mm., on trouve:

$$x = 13{,}996 \text{ mm.},$$

d'où il suit, qu'en admettant, comme nous l'avons fait, que l'objet visé est placé au foyer antérieur de l'instrument, pour lequel $x = 14$ mm., on n'a pas commis une erreur appréciable.

Le rapport d'une dimension de l'image à la dimension homologue de l'objet, c'est-à-dire le grossissement linéaire G, est donné par l'équation:

$$G = s + y\,p = -\frac{r + c\,y}{x}.$$

Si l'on suppose que l'oeil est placé près de l'anneau oculaire, c'est-à-dire à la distance $o_2 = -\frac{r}{c}$ de l'oculaire, on a, pour la distance y de l'image:

$$-y = D - o_2 = D + \frac{r}{c}$$

d'où

$$G = D\,\frac{c}{x} = -D\,\frac{18{,}75}{14} = -1{,}339\,D,$$

la valeur négative indiquant que l'image est renversée.

Pour $D = 200$ mm. le grossissement serait donc:

$$G = -267{,}8$$

ce qui s'accorde bien avec le chiffre 266 donné dans l'„Exposé". D'après une information que M. Tresca a bien voulu nous transmettre, les deux verres de l'objectif auraient une distance focale de 22,5 mm. et de 55 mm., la première valeur se rapportant au verre extérieur. Lorsque l'objet est placé à une distance de 14 millimètres du premier verre et l'image à une distance de 860,4 mm. du second, le grossissement du système objectif se calcule à:

$$g = \frac{22{,}5}{55}\;\frac{860{,}4 - 55}{14 - 22{,}5} = -38{,}78$$

Digitized by Google

ce qui coïncide encore assez bien avec la valeur estimée de l'„Exposé", savoir: $g = -33$.

34. Pour décider maintenant jusqu'à quel point le grossissement considérable du microscope contribue à la précision des pointés, on peut se servir des données fournies par M. MILLER dans une des séances du Comité des recherches préparatoires de la Commission internationale du mètre [1]).

A l'occasion d'une discussion, ayant pour objet d'établir le degré de précision que la Commission du mètre pourrait atteindre dans ses mesures, M. MILLER rapporta que M. GRAHAM, premier astronome adjoint à l'observatoire de Cambridge, s'était récemment occupé de déterminer le degré d'exactitude qu'on pouvait obtenir avec les microscopes d'un nouveau cercle méridien de MM. TROUGHTON et SIMMS. Une série de 100 pointés, exécutés sur un des traits de division de l'instrument, avait donné comme erreur probable d'une simple lecture une valeur de $0'',1$, ce qui correspond à une erreur de $0{,}2215\ \mu$ en mesure linéaire. Le grossissement du microscope était de 60 fois. D'autre part M. le capitaine CLARKE avait obtenu dans ses comparaisons à l'Ordnance Survey Office, avec des microscopes tout-à-fait semblables, une erreur probable de 0,216 microns dans les pointés.

On peut encore calculer l'erreur moyenne d'un pointé simple, exécuté sur un trait fin au moyen d'un bon microscope micrométrique grossissant 68 fois, en se servant des expériences de M. HIRSCH, consignées dans une note annexée aux Procès-Verbaux des Séances de 1877 du Comité international des poids et mesures, page 255. M. HIRSCH a mesuré les deux intervalles de trois traits distants de 400 microns au moyen d'un des microscopes d'un altazimut de M. PLANTAMOUR, construit dans les ateliers de Genève. M. HIRSCH pointa cinq fois de suite sur chacun des traits. Il ne communique pas les chiffres de ces pointés mais il a inscrit, à côté de la longueur moyenne obtenue pour chaque intervalle, l'erreur moyenne du résultat, „conclue par l'accord des cinq pointés entre eux". La longueur de chaque intervalle étant obtenu en retranchant l'une de l'autre les moyennes de chaque côté, l'erreur moyenne m_i d'un intervalle a dû être calculée par M. HIRSCH au moyen de la formule:

$$m_i^2 = \frac{2}{5} m_p^2$$

dans laquelle m_p désigne l'erreur moyenne d'un pointé.

---

[1]) Procès-Verbaux des séances du Comité des recherches préparatoires, Avril 1872, page 8.

Digitized by Google

La somme de 78 valeurs de w_i^2 se trouve être, en microns: 5,2171, d'où l'on déduit:

$$m_p = 0{,}409.$$

Nous avons réuni les données que nous venons de recueillir dans le tableau suivant, en ajoutant dans la dernière colonne le produit de l'erreur moyenne d'un pointé avec le grossissement. Si la précision du pointé est proportionnelle au grossissement, ce produit doit avoir une valeur constante. Il doit croître avec le grossissement si l'avantage d'un plus fort grossissement est sensiblement amoindri par un défaut de netteté de l'image ou par d'autres causes d'erreur.

OBSERVATEURS.	Erreur moyenne.	Grossissement.	Produit.
GRAHAM	0,328	60	19,68
CLARKE	0,320	60	19,20
HIRSCH	0,409	68	27,81
Commission néerlandaise.	0,083	268	22,24
		Moyenne:	22,23

Le chiffre obtenu pour le plus fort grossissement est encore égal à la moyenne des quatre valeurs. Il parait donc, que les microscopes de la Section française, malgré les conditions désavantageuses qui leur étaient imposées par la forme des règles en X, sont assez bien construits pour réaliser pratiquement tout le profit qui, d'après des considérations élémentaires, doit résulter de l'agrandissement de l'image.

Remarquons que la valeur du produit, savoir 22,23 μ, représente l'erreur moyenne d'un pointé avec le grossissement = 1. Dans le tome XLIV des „Comptes Rendus", page 843, on trouve indiqué cette donnée d'après des expériences directes. M. LAUGIER, en déterminant l'erreur moyenne de divers genres de pointés en usage dans les observations astronomiques, a obtenu, pour l'erreur d'un pointé, fait à l'oeil nu, d'un fil entre deux autres fils parallèles, en moyenne la valeur angulaire de 24 secondes. Pour une distance de vision distincte de 200 millimètres cette valeur équivaut à 23,27 microns, très peu différente de celle que vous venons de déduire des mesures avec le microscope. Notons encore que d'après les recherches de M. J. A. BROUN, insérées dans les „Proceedings of the Royal

Digitized by Google

Society of London", Vol. XXIII, p. 522, un angle de 20 secondes est le minimum sous lequel doit se présenter une bande éclairée entre deux fils noirs (deux cheveux) pour pouvoir être aperçue.

35 L'erreur moyenne de 0,083 μ d'un pointé donne bien la mesure de la perfection des moyens optiques et de la stabilité de l'appareil micrométrique dans les conditions spéciales d'un simple pointé, plusieurs fois répété, mais il ne permet pas d'évaluer d'une manière assez sûre l'exactitude qu'on peut obtenir dans la détermination d'une petite longueur. En supposant que cette longueur s'obtienne par la différence de deux pointés, on ne peut pas déduire de l'erreur moyenne d'un pointé, en la multipliant d'après la règle du calcul des probabilités par le facteur $\sqrt{2}$, l'erreur moyenne d'une mesure de longueur, à moins d'être assuré que de nouvelles causes d'erreur soient absolument exclues dans cette dernière opération plus compliquée.

Une première cause d'erreur y est introduite par l'incertitude qui existe dans la valeur d'une division du micromètre. Cette valeur est variable avec la distance a de l'objet visé à l'objectif et l'on démontre facilement que, lorsque tous les points de la surface de l'objectif seraient également éclairés par un point lumineux qui se trouverait à la place du point visé, l'erreur Δb, qui, dans la distance b, mesurée de ce point à l'axe du microscope, résulterait d'une variation Δa de a, est donnée par la formule:

$$\Delta b = -\frac{b \Delta a}{a}$$ [1]).

---

[1]) Voir l'Annexe I de ce Rapport. Dans une note de M. FÖRSTER »Sur l'influence de la mise au foyer et de l'inclinaison des microscopes sur les mesures micrométriques", insérée comme Annexe dans les »Procès-Verbaux des Séances de 1877 du Comité international des poids et mesures" on trouve (page 274) la formule analogue:

$$\Delta s = -\frac{s \Delta f}{f}.$$

Dans cette dernière formule cependant f désigne la distance de l'objet au »centre angulaire" (c'est-à-dire le premier point nodal) de l'objectif. La différence des deux expressions provient d'une inexactitude admise dans la théorie élémentaire, par laquelle M. FÖRSTER établit sa formule. Il admet que le rayon dirigé vers le premier point nodal est celui dont l'intersection avec le plan focal de l'oculaire détermine le lieu apparent de l'image. Lorsque l'objectif est uniformément éclairé par le point visé, ce lieu est au contraire déterminé par le rayon dirigé vers le centre de l'ouverture de l'objectif, en d'autres termes par l'axe du cône lumineux, qui entre dans l'appareil optique. Avec des objectifs à deux lentilles et à court foyer l'erreur qui résulte de l'inexactitude indiquée peut dépasser considérablement la valeur de la quantité qu'il s'agit de déterminer. En appliquant sa formule aux observations de la Commission néerlandaise, exécutées avec un objectif à deux lentilles mais à long foyer, M. FÖRSTER a ainsi commis une erreur de plus de 50 pour cent. Remarquons encore que f désigne proprement la distance à l'objectif du sommet du cône de rayons incidents

Digitized by Google

Signalons à cette occasion un avantage que présentent, par rapport à cette cause d'erreur, les microscopes à fort grossissement. Le degré d'astigmatisme de l'image, résultant d'un défaut Δa dans la mise au point est exprimé par:

$$G \frac{\Delta a}{a} R,$$

G étant le grossissement linéaire, R le rayon de l'ouverture de l'objectif. Il en résulte qu'une mise au point exacte sera d'autant plus facile à obtenir que le grossissement est plus considérable et que l'angle soustendu au point visé par l 'ouverture de l'objectif est plus grand.

Mais, en admettant même que la cause d'erreur que nous venons de mentionner n'existe pas, on ne peut pas identifier les pointés aux deux extrémités d'une certaine longueur avec ceux qui se font toujours sur le même trait dans le but de déterminer l'exactitude d'un simple pointé. En effet, dans ces dernières opérations on ne déplace les fils du micromètre que sur une petite distance suffisante seulement pour déranger sensiblement le pointé précédent. Dans les mesures de longueur le déplacement beaucoup plus considérable des fils peut faire intervenir un défaut de stabilité de l'instrument ou une irrégularité dans le mouvement du micromètre, qui introduisent des nouvelles causes d'erreur.

36. Pour étudier l'exactitude de l'évaluation d'une certaine longueur, M. Oudemans a mesuré la distance de deux traits parallèles écartés l'un de l'autre d'environ 100 microns. Dans une première série de mesures, effectuées le 11 Septembre, M. Oudemans a pris successivement deux lectures sur le trait de gauche suivies de deux lectures sur celui de droite, et enfin de nouveau deux lectures sur le premier trait. Ces six pointés constituent une mesure. Une deuxième mesure fut obtenue ensuite après qu'on eut déréglé le microscope et ajusté de nouveau la mise au point. Les détails de dix mesures faites dans ces conditions sont consignés dans le tableau suivant.

---

et ne peut être égalé à la distance de l'objet visé que dans le cas où les rayons émanés de ce dernier n'éprouvent aucune réfraction avant d'entrer dans l'objectif. Lorsque, par exemple, l'objet visé se trouve placé sous une couche liquide d'épaisseur d, l'objet doit se trouver à une distance qui est de $\frac{n-1}{n} d$ plus grande que lorsque l'objet est placé dans l'air, n étant l'indice de réfraction du liquide. Mais il ne faut pas, — comme l'a fait M. Förster dans le calcul des expériences de M. Hirsch, — remplacer dans la formule par cette distance réelle plus grande, la distance constante du sommet du cône lumineux.

Digitized by Google

TABLEAU III.

Mesure d'une longueur de 100 microns.

Observateur : M. OUDEMANS. 11 Septembre 1876.

N.	Lectures.	Longueurs.	N.	Lectures.	Longueurs.
I.	11,3 11,0 414,3 413,8 7,8 8,2	414,05 9,575 L = 404,475	VI.	0,3 — 0,3 403,8 403,7 — 1,6 — 2,0	403,75 — 0,90 L = 404,65
II.	10,3 9,6 413,3 412,4 8,6 7,5	412,85 9,00 L = 403,85	VII.	9,4 9,6 413,6 413,3 8,3 8,6	413,45 8,975 L = 404,475
III.	0,8 0,7 404,3 404,4 — 1,5 — 1,1	404,35 — 0,275 L = 404,625	VIII.	20,2 18,8 422,5 422,4 17,4 17,4	422,45 18,45 L = 404,00
IV.	14,8 15,2 420,5 420,0 14,3 15,0	420,25 14,825 L = 405,425	IX.	30,0 29,4 432,8 433,6 28,1 27,8	433,20 28,825 L = 404,375
V.	47,9 47,9 451,5 451,5 48,2 46,6	451,50 47,65 L = 403,85	X.	12,7 13,5 416,7 417,3 11,8 11,8	417,00 12,45 L = 404,55

La moyenne des longueurs est :

$$L = 404{,}427\, d.$$

La somme des carrés des écarts est $1{,}956\, d^2$, d'où se déduit l'erreur moyenne.

$$m_L = \sqrt{\frac{1{,}956\, d^2}{9}} = 0{,}466\, d = 0{,}1018\, \mu.$$

Digitized by Google

Chaque mesure a été obtenue par quatre pointés d'un côté et deux pointés de l'autre. En désignant par m_p l'erreur moyenne d'un pointé, par m_x l'erreur moyenne provenant d'autres causes, on a donc:

$$m_L^2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) m_p^2 + m_x^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

L'erreur m_p peut être déduite des pointés mêmes en observant que la valeur moyenne du carré de la différence de deux pointés consécutifs sur le même trait est le double du carré de l'erreur moyenne des deux pointés. Les 30 pointés doubles donnent ainsi:

$$60\, m_p^2 = 11{,}46\, d^2$$
$$m_p^2 = 0{,}191\, d^2.$$

L'erreur moyenne $m_p = 0{,}437\, d$ ou $0{,}105\, \mu$ qui en résulte est un peu plus forte que celle qui a été calculée d'après les simples pointés du tableau II. La différence peut résulter des conditions différentes dans lesquelles les pointés ont été faits. On trouve presque toujours un accord plus satisfaisant entre une suite non interrompue de cinq ou dix pointés que dans deux pointés chaque fois interrompus par des pointés différents. Substituée dans l'équation (a), la valeur de m_p donne:

$$m_x = 0{,}0653\, \mu.$$

L'erreur m_x peut être due à d'autres causes encore qu'à l'incertitude résultant de la mise au point et à l'instabilité que le mouvement considérable du micromètre (8 tours) peut avoir produit. En effet, le détail des lectures fait voir que la longueur n'a pas été mesurée exactement sur la même partie de la vis, de sorte que les inégalités de celle-ci peuvent avoir contribué aux écarts des mesures.

37. Des expériences plus étendues et plus complètes ont été faites par M. Oudemans le jour suivant. La même distance à été évaluée en pointant alternativement deux fois de suite sur le trait de gauche et sur le trait de droite, six lectures doubles à droite étant ainsi comprises entre sept lectures doubles à gauche. Après une série obtenue de cette manière le microscope fut déréglé. Une nouvelle série fut prise ensuite avec une nouvelle mise au point. Les six séries consécutives sont consignées dans le tableau IV.

Dans la première colonne du tableau de chaque série sont inscrites les deux lectures de gauche P G, dans la seconde la moyenne g de ces deux lectures diminuée d'un certain nombre d'unités. Les colonnes troisième et quatrième renferment les mêmes données P D et d, relatives aux lectures de droite. Les moyennes diminuées g et d ont servi au calcul, qui a fourni pour chaque lecture une valeur P, inscrite dans la sixième colonne, et l'erreur et le carré de l'erreur, inscrits dans les deux dernières colonnes.

Dans ce calcul on a jusqu'à un certain point tenu compte d'un déplacement

Digitized by Google

TABLEAU IV.

Mesure d'une longueur de 100 microns.

Observateur: M. OUDEMANS. 12 Septembre 1876.

N.	I. g=PG−10; d=PD−415; L=l+405.								II. g=PG−32, d=PD−437; L=l+405.								III. g=PG−42; d=PD−446; L=l+404.							
	PG	g	PD	d	np	P	$\pm\varepsilon$	ε_1	PG	g	PD	d	np	P	$\pm\varepsilon$	ε^2	PG	g	PD	d	np	P	$\pm\varepsilon$	ε^2
1	12,2								34,9								46,2							
	12,2	2,20			−18,20	1,84	0,36	0,1296	35,4	3,15			−18,90	3,10	0,05	0,0025	44,6	3,40			−20,40	2,67	0,78	0,5329
2			415,2								439,8								449,0					
			415,6	0,40	− 2,00	1,21	0,81	0,6561			440,2	3,00	−15,00	2,88	0,12	0,0144			449,5	3,25	−16,25	2,88	0,37	0,1369
3	12,2								34,3								44,4							
	11,2	1,70			− 6,80	1,76	0,06	0,0036	34,3	2,30			− 9,20	2,70	0,40	0,1600	44,2	2,30			− 9,20	2,22	0,08	0,0064
4			416,4								439,6								448,3					
			416,6	1,50	− 4,50	1,14	0,36	0,1296			439,7	2,65	− 7,95	2,48	0,17	0,0289			447,8	2,05	− 6,15	2,48	0,38	0,1444
5	11,8								34,2								43,2							
	11,8	1,80			− 3,60	1,69	0,11	0,0121	34,2	2,20			− 4,40	2,30	0,10	0,0100	43,2	1,20			− 2,40	1,77	0,57	0,3249
6			416,4								438,7								447,7					
			416,6	1,50	− 1,50	1,06	0,44	0,1936			439,2	1,95	− 1,95	2,08	0,13	0,0169			447,6	1,65	− 1,65	1,98	0,33	0,1089
7	11,3								33,7								43,0							
	11,7	1,50			0,00	1,61	0,11	0,0121	34,2	1,95			0,00	1,91	0,04	0,0016	42,7	0,85			0,00	1,32	0,47	0,2209
8			415,8								438,7								447,4					
			415,8	0,80	+ 0,80	0,99	0,19	0,0361			438,9	1,80	+ 1,80	1,68	0,12	0,0144			447,2	1,30	+ 1,30	1,53	0,23	0,0529
9	11,2								34,3								42,4							
	11,0	1,10			+ 2,20	1,54	0,44	0,1936	33,4	1,85			+ 3,70	1,51	0,34	0,1156	42,6	0,50			+ 1,00	0,87	0,27	0,0729
10			416,3								438,4								447,6					
			416,2	1,25	+ 3,75	0,91	0,34	0,1156			438,5	1,45	+ 4,35	1,29	0,16	0,0256			447,3	1,45	+ 4,35	1,08	0,37	0,1369
11	11,7								32,9								43,3							
	11,8	1,75			+ 7,00	1,46	0,29	0,0841	33,4	1,15			+ 4,60	1,11	0,04	0,0016	42,5	0,90			+ 3,60	0,42	0,48	0,2304
12			415,7								437,4								446,6					
			415,7	0,70	+ 3,50	0,84	0,14	0,0196			437,5	0,45	+ 2,25	0,89	0,44	0,1936			447,1	0,85	+ 4,25	0,63	0,22	0,0484
13	11,3								32,0								42,1							
	11,2	1,25			+ 7,50	1,39	0,14	0,019 6	33,5	0,75			+ 4,50	0,71	0,04	0,0016	42,1	0,10			+ 0,60	-0,03	0,13	0,0169
		11,30		6,15	+ 6,85			1,6053		13,35		11,30	−36,20			0,5867		9,25		10,55	−40,95			2,0337
	$7b$= 11,30		b= 1,614		$10m_q^2$= 1,6053				$7b$= 13,35		b= 1,907		$10m_q^2$= 0,5867				$7b$= 9,25		b= 1,321		$10m_q^2$= 2,0337			
	$6c$= 6,15		c= 1,025		m_q^2= 0,1605				$6c$= 11,30		c= 1,883		m_q^2= 0,0587				$6c$= 10,55		c= 1,758		m_q^2= 0,2034			
	l= $c-b$		l=−0,589		L=404,411				l= $c-b$		l=−0,024		L= 404,976				l= $c-b$		l=+0,437		L= 404,437			
	182α= +6,85		α=−0,0376		m_l^2= 0,0497				182α=−36,20		α=−0,1989		m_l^2= 0,0182				182α=−40,95		α=−0,2250		m_l^2= 0,0630			

Digitized by Google

TABLEAU IV (*Suite*).

Mesure d'une longueur de 100 microns.

Observateur: M. OUDEMANS. 12 Septembre 1876.

N.	IV. g=PG — 3; d=PD — 408: L=l + 405.								V. g=PG — 19; d=PD — 424; L=l + 405.								VI. g=PG—25; d=PD—431; L=l + 406.							
	PG	g	PD	d	np	P	$\pm\varepsilon$	ε^2	PG	g	PD	d	np	P	$\pm\varepsilon$	ε^2	PG	g	PD	d	np	P	$\pm\varepsilon$	ε^2
1	6,2								20,0								25,8							
	6,2	3,20			— 19,20	3,66	0,46	0,2116	19,6	0,80			— 4,80	0,51	0,39	0,0841	25,7	0,75			— 4,50	0,91	0,16	0,0256
2			411,5								423,9								431,2					
			411,8	3,65	— 18,25	3,77	0,12	0,0144			424,5	0,20	— 1,00	0,36	0,16	0,0256			431,3	0,25	— 1,25	0,25	0,00	0,0000
3	6,6								19,2								26,3							
	6,2	3,40			— 13,60	3,20	0,20	0,0400	20,2	0,70			— 2,80	0,85	0,15	0,0225	25,9	1,10			— 4,40	1,04	0,06	0,0036
4			411,2								424,6								431,5					
			411,7	3,45	— 10,35	3,31	0,14	0,0196			424,7	0,65	— 1,95	0,71	0,06	0,0036			431,5	0,50	— 1,50	0,38	0,12	0,0144
5	5,7								20,1								26,4							
	5,8	2,75			— 5,50	2,74	0,01	0,0001	20,2	1,15			— 2,30	1,20	0,05	0,0025	26,7	1,55			— 3,10	1,16	0,39	0,1521
6			410,2								425,4								431,2					
			411,4	2,80	— 2,80	2,85	0,05	0,0025			425,4	1,40	— 1,40	1,05	0,35	0,1225			431,6	0,40	— 0,40	0,51	0,11	0,0121
7	5,7								20,0								26,6							
	6,2	2,95			0,00	2,28	0 67	0,4489	20,2	1,10			0,00	1,54	0,44	0,1936	25,6	1,10			0,00	1,29	0,19	0,0361
8			410,6								425,1								431,4					
			410,5	2,55	+ 2,55	2,39	0,16	0,0256			425,5	1,30	+ 1,30	1,40	0,10	0,0100			431,8	0,60	+ 0,60	0,64	0,04	0,0016
9	4,3								21,4								26,6							
	5,2	1,75			+ 3,50	1,82	0,07	0,0049	20,7	2,05			+ 4,10	1,89	0,16	0,0256	26,5	1,55			+ 3,10	1,42	0,13	0,0169
10			409,9								425,6								431,6					
			410,4	2,15	+ 6,45	1,92	0,23	0,0529			426,0	1,80	+ 5,40	1,74	0,06	0,0036			431,5	0,55	+ 1,65	0,77	0,22	0,0484
11	4,2								21,4								25,8							
	3,5	0,85			+ 3,40	1,35	0,50	0,2500	21,6	2,50			+ 10,00	2,23	0,27	0,0729	26,5	1,15			+ 4,60	1,55	0,40	0,1600
12			408,7								426,3								432,3					
			409,5	1,10	+ 5,50	1,46	0,36	0,1296			425,7	2,00	+ 10,00	2,09	0,09	0,0081			432,0	1,15	+ 5,75	0,89	0,26	0,0676
13	4,1								21,8								26,6							
	4,0	1,05			+ 6,30	0,89	0,16	0,0256	21,7	2,50			+ 15,00	2,58	0,08	0,0064	27,1	1,85			+ 11,10	1,68	0,17	0,0289
		15,95		15,70	— 42,00			1,2257		10,80		7,35	+ 31,55			0,5800		9,05		3,45	+ 11,65			0,5673
	$7\,b$= 15,95			b= 2,279		$10\,m_q^2$= 1,2257			$7\,b$= 10,80			b= 1,543		$10\,m_q^2$= 0,5800			$7\,b$= 9,05			b= 1,293		$10\,m_q^2$= 0,5673		
	$6\,c$= 15,70			c= 2,617		m_q^2= 0,1226			$6\,c$= 7,35			c= 1,225		m_q^2= 0,0580			$6\,c$= 3,45			c= 0,575		m_q^2= 0,0567		
	l= $c-b$			l=+ 0,338		L= 405,338			l= $c-b$			l=— 0,318		L=404,682			l= $c-b$			l=— 0,718		L= 405,282		
	182 α=— 42,00			α=— 0,2308		m_l^2= 0,0379			182 α=+ 31,55			α=+ 0,1728		m_l^2= 0,0180			182 α=+ 11,65			α=+ 0,0640		m_l^2= 0,175		

Digitized by Google

continu de l'axe du microscope en déterminant la valeur la plus probable de la partie de ce déplacement qui est proportionnelle au temps. En désignant par g_1, d_1, g_2, d_2 etc. les lectures successives, par a la valeur la plus probable de la première lecture, déduite de l'ensemble des observations, par α le déplacement survenu dans l'intervalle d'une observation à l'autre, par l la longueur mesurée diminuée d'une certaine quantité constante dans chaque série, on aura:

$$\begin{aligned} g_1 &= a \\ d_1 &= a + l + \alpha \\ g_2 &= a + 2\alpha \\ d_2 &= a + l + 3\alpha \\ g_3 &= a + 4\alpha \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Pour simplifier les équations normales il est préférable de ramener toutes les lectures à celle qui occupe le milieu de la série. En la désignant par b on aura:

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= b - 6\alpha \\ d_1 &= b + l - 5\alpha \\ g_2 &= b - 4\alpha \\ d_2 &= b + l - 3\alpha \\ g_3 &= b - 2\alpha \\ d_3 &= b + l - \alpha \\ g_4 &= b \\ g_4 &= b + l + \alpha \\ g_5 &= b + 2\alpha \\ d_5 &= b + l + 3\alpha \\ g_6 &= b + 4\alpha \\ d_6 &= b + l + 5\alpha \\ g_7 &= b + 6\alpha \end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

d'où l'on déduit trois équations normales, dans lesquelles 4 coëfficients sont réduits à zéro, savoir:

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= [g] + [d] = 13\,b + 6\,l \\ R_2 &= [d] = 6\,b + 6\,l \\ R_3 &= [ng] + [nd] = 182\,\alpha \end{aligned}\right\} \text{(B)}$$

lorsqu'on désigne par n le coëfficient de α dans les équations successives (A).

La résolution des équations (B) fournit pour les trois inconnues les valeurs:

$$b = \frac{1}{7}[g] = +\frac{1}{7}R_1 - \frac{1}{7}R_2$$

$$l = \frac{1}{6}[d] - b = -\frac{1}{7}R_1 + \frac{13}{42}R_2 = \frac{1}{6}R_2 - b$$

$$\alpha = \frac{1}{182}\left\{[ng] + [nd]\right\} = +\frac{1}{182}R_3$$

Digitized by Google

La quantité $\frac{1}{6} R_2$ a été désignée dans le tableau par c.

La longueur L de l'intervalle mesuré s'obtiendra en ajoutant à l la différence des quantités qu'on a retranchées des lectures de droite et de gauche.

L'erreur moyenne d'un pointé double m_q s'obtient par l'équation:

$$m_q = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{13-3}}$$

celle de la longueur mesurée sera:

$$m_l = m_q \sqrt{\frac{13}{42}} = m_q \sqrt{0{,}3095}.$$

D'après les calculs du tableau on a:

I.	$m_q^2 = 0{,}1605\, d^2$	$m_l^2 = 0{,}0497\, d^2$
II.	0,0587	0,0182
III.	0,2034	0,0630
IV.	0,1226	0,0379
V.	0,0580	0,0180
VI.	0,0567	0,0175
Moyenne:	$0{,}1100\, d^2$	$0{,}0340\, d^2$

D'autre part les six séries donnent pour l'intervalle mesuré les valeurs:

	L	ε	ε^2
I.	404,411 d	$-0{,}444\, d$	$0{,}1971\, d^2$
II.	404,979	$+0{,}124$	0,0154
III.	404,437	$-0{,}418$	0,1747
IV.	405,338	$+0{,}483$	0,2333
V.	404,682	$-0{,}173$	0,0299
VI.	405,282	$+0{,}427$	0,1823
Moyenne:	404,855		$[\varepsilon^2] = 0{,}8327\, d^2$

d'où se déduit le carré de l'erreur moyenne dans la mesure de L:

$$m_L^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{5} = 0{,}1665\, d^2.$$

Cette dernière valeur diffère de m_l^2, parce que le déréglage du microscope et l'ajustement renouvelé ont introduit une nouvelle cause d'incertitude. En désignant par m_x l'erreur moyenne qui en résulte, on aura:

$$m_L^2 = m_l^2 + m_x^2$$

d'où

$$m_x^2 = 0{,}1325\, d^2$$
$$m_x = 0{,}3640\, d = 0{,}0874\, \mu.$$

Digitized by Google

38. On voit que l'erreur due à la mise au point est extrêmement faible, elle n'atteint pas le dixième du micron et coïncide à peu près avec l'erreur moyenne d'un simple pointé.

Il est essentiel de remarquer que la valeur que nous avons trouvée pour m_x, ne représente pas seulement l'erreur résultant de ce qu'une nouvelle mise au point peut avoir changé la valeur d'une division du micromètre. Elle renferme en outre l'influence qu'un résidu d'élasticité, après l'ajustement du microscope, peut avoir eue sur la stabilité de l'instrument, ainsi que celle des inégalités dans le pas de la vis micrométrique. Cette dernière influence peut avoir été plus considérable dans ces séries que dans celles du tableau III. En effet, on voit que les mesures ont été distribuées dans les six séries sur des parties du tambour plus distantes l'une de l'autre. Les 4 à 5 cinquantièmes d'un tour de la vis, qu'il fallait ajouter à 8 tours entiers pour compléter le mouvement de la vis, ont été prises sur les parties:

I.	12—16	IV.	5—11
II.	36—39	V.	21—25
III.	43—48	VI.	26—32,

c'est-à-dire qu'ils ont été distribués de manière à devoir éprouver le plus sensiblement l'influence des irrégularités périodiques de la vis.

Pour les mesures du tableau IV, le carré de l'erreur moyenne du résultat d'un pointé double est $0{,}1100\, d^2$, ce qui donne pour l'erreur moyenne d'un pointé simple en microns, la valeur:

$$M_p = 0{,}0796\ \mu.$$

L'erreur moyenne d'un pointé simple peut aussi se calculer d'après les écarts de deux pointés successifs, comme nous l'avons fait pour les pointés doubles du tableau III. Les 78 pointés doubles du tableau IV donnent ainsi:

$$156\, m_p^2 = 18{,}01\, d^2$$

d'où l'on tire

$$m_p = 0{,}0815\ \mu.$$

Les valeurs M_p et m_p quoique désignées, toutes les deux, comme erreurs moyennes d'un simple pointé n'ont cependant pas la même signification. La dernière, $m_p = 0{,}0815\ \mu$ donne la mesure de la précision d'un pointé et d'une lecture, faites dans des conditions un peu moins favorables que celles du tableau II et dans les mêmes conditions que celles du tableau III. L'erreur M_p se compose non seulement de l'erreur d'un pointé et d'une lecture mais aussi de l'effet de toutes les perturbations intervenues dans l'intervalle des pointés successifs d'une série entière. On voit que cet effet a été insensible.

Digitized by Google

39. Si l'on suppose que l'erreur moyenne de 0,065 μ à 0,087 μ, soit en moyenne 0,076, due à toutes les causes d'incertitude introduites par le déréglage du microscope, provient uniquement des variations de la mise au point, on en déduit une variation moyenne de

$$m_a = \frac{0{,}076 \times 14000}{100} = 10{,}6\,\mu$$

dans la distance a de l'objectif du microscope à l'objet visé [1]).

Une erreur moyenne m_x due à la mise au point, qui certainement reste au dessous de 0,076 μ sur une longueur de 100 microns, nous a paru représenter un degré de précision plus que suffisant pour le but que nous nous proposions. En effet, ce n'est que rarement et dans des cas exceptionnels qu'on aura besoin dans les expériences métrologiques fondamentales de mesurer une longueur de cette valeur. La petitesse des longueurs à mesurer est une condition tellement essentielle dans les comparaisons de haute précision, qu'il faut nécessairement employer tous les soins à bien ajuster les règles à comparer. Or, on peut toujours, dans un bon comparateur, repartir également sur les deux bouts des règles une différence de longueur qu'elles présenteraient. Une différence quelque peu considérable entre des étalons bien construits ne peut se produire que dans les expériences de dilatation. Un excès de température de 20 degrés dans l'un des mètres ne causerait encore sur chacun des deux bouts qu'un excès de longueur de 90 microns. L'erreur moyenne de la mesure de cette longueur, pour autant

---

[1]) L'erreur moyenne dans la mise au point obtenue en mesurant directement les différences de position d'un microscope grossissant 68 fois peut être calculée d'après les expériences de M. HIRSCH citées dans le n° 34. On trouve la valeur 20,45 μ. Pour les raisons indiquées dans le texte on ne peut pas comparer cette donnée avec celle que nous venons de calculer d'après les expériences des Tableaux III et IV, savoir $m_a = 10{,}6\,\mu$ cette dernière valeur étant nécessairement exagérée. Cependant M. FÖRSTER dans sa note, citée au n° 35, remarque que l'incertitude de la mise au point de M. OUDEMANS est encore sensiblement plus forte que celle de M. HIRSCH. De plus, dans cette note, l'erreur moyenne des mises au point de M. HIRSCH a été évaluée à 15 microns, celle de M. OUDEMANS à 21,8 microns. La différence de ces chiffres avec ceux que nous venons de calculer, savoir 20,45 μ pour M. HIRSCH, 10,6 μ pour M. OUDEMANS, différence par laquelle M. FÖRSTER parvient à attribuer aux mises au point de M. OUDEMANS une précision moindre qu'à celles de M. HIRSCH, tandis qu'en réalité la précision serait au minimum presque deux fois plus grande, provient d'abord de ce que M. FÖRSTER a identifié l'écart moyen, 15 μ, des mesures de M. HIRSCH avec l'erreur moyenne, qui se trouve être 20,45 μ, et en second lieu de ce que M. FÖRSTER, en partant d'un calcul moins rigoureux, rapporté dans l'»Exposé de la situation des travaux de la Section française", y applique la formule incorrecte que nous avons mentionnée dans la note du n° 35 de ce Rapport. Il est très probable, que la précision plus grande obtenue par M. OUDEMANS est encore principalement l'effet du plus fort grossissement employé.

Il résulte d'expériences directes, dont il sera rendu compte dans la suite de ce Rapport, que l'erreur moyenne dans l'ajustement en hauteur du microscope mesurée directement par M. OUDEMANS n'atteint en réalité que 5,5 μ, de sorte que la valeur $m_x = 0{,}076\,\mu$ paraît sensiblement affectée par d'autres causes d'incertitude.

Digitized by Google

qu'elle résulterait d'une mise au point défectueuse, n'atteindrait sur chacun des deux bouts que $0{,}076 \times 0{,}9\,\mu$, soit $0{,}07\,\mu$ au maximum, et sur l'équation des deux mètres une valeur de $0{,}07\,\mu\sqrt{2} = 0{,}10\,\mu$, correspondant à une différence de température de $^1/_{90}$ du degré centigrade sur 20 degrés. Il semble tout-à-fait illusoire de rechercher une plus grande précision. Nous avons en conséquence pensé que la valeur des divisions du micromètre pouvait être obtenue avec une entière securité en mesurant, une fois pour toutes, une longueur connue au moyen du micromètre et en admettant que le microscope, restant invariable, reproduirait la même mesure chaque fois qu'il devrait servir à évaluer des longueurs limitées par des traits dont l'image paraîtrait suffisamment définie.

Ajoutons qu'il nous paraît douteux, sinon improbable, que par d'autres moyens on puisse arriver à une plus grande exactitude. En effet, celui qu'on a proposé, savoir l'adjonction d'un trait auxiliaire placé à une distance de un ou deux dixièmes de millimètre du trait délimitatif du mètre, suppose qu'on puisse mesurer avec une exactitude d'un dixième de micron la distance des deux traits sans recourir à une mesure micrométrique dépendant de la mise au point. On n'a pas indiqué la méthode qui pourrait satisfaire à ces conditions.

III. EXAMEN DES QUALITÉS CHIMIQUES DES RÈGLES.

40. Dans le premier Rapport de la Section française concernant la situation de ses travaux, il a été fait mention de perfectionnements apportés par MM. Deville et Debray dans les méthodes d'analyse des métaux platiniques. Soit que M. Deville ne fût pas en complète possession de ces méthodes lors de la préparation de l'iridium, qui devait servir à la composition de l'alliage des mètres, soit qu'on eût négligé de les appliquer avec assez de soins, il apparut bientôt que l'alliage ne possédait pas la densité qu'on devait présumer dans un mélange de métaux purs.

L'application des nouvelles méthodes d'analyse fit reconnaître, dans le métal du bloc coulé le 13 Mai 1874, la présence de 0,013 à 0,014 de ruthénium, correspondant à une teneur de plus d'un huitième de ce métal dans l'iridium qui avait été livré par M. Deville pour la composition de l'alliage. Les détails des analyses de M. Deville sont restés longtemps inconnus. A l'époque où les premiers doutes au sujet de la composition de l'alliage commencèrent à se manifester, on ignorait même par quels procédés nouveaux MM. Deville et Debray parvenaient à séparer le ruthénium des autres métaux platiniques. Dans le but

Digitized by Google

de reconnaître jusqu'à quel point l'alliage devait être considéré comme s'éloignant sensiblement de celui que la Commission internationale du mètre avait eu en vue dans ses résolutions de 1872, nous avions, suivant les désirs de la Commission française, prié M. A. C. Oudemans, professeur de chimie à l'Ecole Polytechnique de Delft, de bien vouloir faire l'analyse de deux bouts coupés sur la barre qui devrait fournir les mètres. Ces deux échantillons nous avaient été envoyés par M. Tresca. M. A. C. Oudemans a pris tous les soins possibles pour appliquer dans les meilleures conditions la méthode que M. Claus avait publiée dans les „Annalen für praktische Chemie", Tome LXXX, page 282 et suivantes, et qui devait être regardée comme étant la plus sûre et la plus exacte. Il résultait de cette analyse [1]) que la méthode de Claus ne faisait reconnaître dans l'alliage qu'une très faible quantité de ruthénium ne dépassant pas les 3 millièmes. D'après cette analyse le métal se composerait de:

Platine	89,86	parties
Iridium	9,37	„
Ruthénium.	0,27	„
Fer	0,50	„ .

M. A. C. Oudemans ayant déterminé la densité des deux échantillons, avant de les faire servir à son analyse, avait obtenu les nombres suivants:

Bout n°. 1	21,20
Bout n°. 2	21,14
Les deux bouts conjointement . .	21,16.

La Commission internationale du mètre avait prescrit, dans sa réunion de 1872, l'emploi d'un alliage de 90 parties de platine et 10 parties d'iridium avec une tolérance de 2% en plus ou en moins. Cette résolution a été prise à la suite d'un rapport dans lequel il est constaté que les deux métaux ainsi que leur alliage ont la densité 21,15 et que ces métaux s'obtenaient avec la plus grande facilité à l'état de pureté. Le métal analysé par M. Oudemans en employant les meilleurs procédés connus en 1872, parut donc répondre exactement, tant au point de vue de sa composition chimique que par rapport à sa densité, à la définition de la Commission.

41. Nous n'avons donc pas hésité à accepter les mètres, qui nous avaient

---

[1]) Les détails de l'analyse de M. Oudemans ont été communiqués à la Section française dans une note rédigée par ce chimiste. Cette note se trouve insérée comme Annexe II à la suite de ce Rapport.

Digitized by Google

été présentés par la Section française, même après que les détails des méthodes d'analyse publiées par MM. Ste Claire Deville et Stas eurent rendu problable que réellement la quantité de ruthénium contenu dans l'alliage atteignait le chiffre de 13 à 14 millièmes. En effet, la composition de l'alliage avait été fixée par la Commission du mètre non pas pour poser un problème de synthèse ou d'analyse chimique, mais dans l'unique but de définir un corps qui offrirait certaines propriétés physiques jugées indispensables ou utiles. Ces propriétés ont été expressément indiquées dans le rapport de la deuxième Sous-commission de la Commission internationale du mètre [1]). Elles se résument dans les remarques suivantes présentées pour motiver le choix de l'alliage: 1° L'identité de la densité du platine et de l'iridium et la propriété de ces métaux de cristalliser dans le même système, le système régulier, garantit l'homogénéité de l'alliage; 2° les deux métaux se dilatent le moins par la chaleur, leur coëfficient de dilatation est le même que celui des règles de Borda, dont le métal doit être considéré comme identique avec celui du mètre des Archives; 3° la valeur de ce coëfficient est la mieux connue par suite des expériences de M. Fizeau et elle s'est trouvée invariable avec le temps; 4° le coëfficient d'élasticité est considérable et en même temps la ductilité est telle qu'on peut transformer les plus gros lingots en autant de lames, verges ou règles de forme quelconque qu'on voudra. Or, l'alliage de la Section française satisfaisait pleinement à toutes ces conditions.

Remarquons que, nulle part dans le Rapport de la Sous-commission, il n'est fait la moindre allusion à la condition qu'on a fait valoir dans la suite, savoir, que l'alliage, une fois fabriqué, devrait pouvoir être reproduit dans une composition absolument identique. Comme la Commission du mètre n'avait en vue que la construction de mètres offrant les mêmes propriétés et en nombre suffisant pour faire droit aux demandes de tous les États intéressés, elle n'avait pas à s'occuper de conditions d'une utilité au moins douteuse et dont l'application ne pourrait se présenter que dans l'éventualité fort improbable que la totalité ou la plus grande partie des mètres aurait disparu. D'après les souvenirs personnels de l'un des Commissaires néerlandais cette question n'a pas même été soulevée, ni dans les délibérations de la Sous-commission, ni dans celles de la Commission générale. Dans le cas où elle eût été posée, elle n'eût certes pas manqué de susciter des objections de la part des physiciens qui estiment que les propriétés physiques d'un corps fixe ne dépendent pas seulement de sa constitution chimique, que jamais la démonstration la plus rigoureuse de l'identité

---

[1]) Cette Sous-commission était composée comme il suit: M. le baron Wrede, président, M. Jacobi, vice-président, MM. Broch, Stas, Péligot, Bosscha, Fizeau, et M. Ste Claire Deville rapporteur.

Digitized by Google

chimique la plus parfaite de deux étalons ne pourra dispenser du soin de vérifier jusqu'à quel point il y a concordance de leurs coëfficients de dilatation, de leurs coëfficients d'élasticité et de leurs densités, et que cette vérification, dans la précision qu'elle pourra comporter, n'est nullement affectée par la valeur plus au moins grande de la différence qu'on aura à constater.

Quoiqu'il fût manifeste que le métal des règles répondait à toutes les conditions énoncées en 1872, le nouveau Comité international des poids et mesures avait cru devoir refuser les mètres qu'après de longs et laborieux efforts la Section française était parvenue à construire.

42. Parmi les défauts attribués par le Comité à l'alliage des mètres, il n'y en avait qu'un seul qui pût nous préoccuper, parce que, s'il existait en effet, il était à craindre qu'il ne pût porter atteinte à une qualité essentielle des prototypes. Dans le but de rechercher, par une expérience faite sur les mètres mêmes, jusqu'à quel point cette crainte pourrait paraître fondée, deux Commissaires néerlandais se sont rendus à Paris. Les circonstances et le résultat de cette deuxième visite ont été indiqués avec des détails suffisants dans le Rapport suivant présenté par les deux Commissaires à Son Excellence le Ministre des Travaux publics, du Commerce et de l'Industrie des Pays-Bas [1]).

„Les soussignés, membres de la Commission chargée de recevoir et de transporter dans les Pays-Bas les nouveaux prototypes du mètre et du kilogramme, se sont rendus à Paris le 18 Février dernier, afin d'examiner les qualités du métal qui a servi à la construction des mètres; ils ont l'honneur de présenter dans ce Rapport le résultat de leurs recherches.

„Pour bien faire comprendre la nature de leur tâche et de leurs expériences il sera nécessaire de mentionner brièvement les circonstances qui les leur ont imposées.

„Rappelons en premier lieu que la construction des mètres et des kilogrammes a été confiée à la Section française de la Commission internationale du mètre, que le Comité international institué par la Convention du mètre en 1875 a pour tâche de comparer entre eux les mètres construits et que, parmi les États qui n'ont pas pris part à cette Convention, trois, savoir: les Pays-Bas, l'Angleterre et le Brésil ont résolu de recevoir directement de la Section française, sans intervention du Comité international, leurs prototypes des poids et mesures et ont confié à des Commissions nationales le contrôle sur l'authenticité de ces étalons.

„D'après les Procès-verbaux des Séances de la Section française (séance du 5

[1]) Le rapport rédigé en hollandais a été publié dans le »Nederlandsche Staatscourant" du 14 Juin 1878.

Digitized by Google

Octobre 1877, p. 29) le Comité international s'est adressé au Ministre des affaires étrangères de France pour lui communiquer qu'il ne pourrait recevoir des règles et des cylindres, destinés à devenir des mètres et des kilogrammes prototypes, qui auraient été confectionnés avec l'alliage remis au Comité. En même temps le Comité a adressé au Ministre la demande de faire suspendre la fabrication des mètres commencés par la Section française et de faire préparer des prototypes répondant aux conditions sanctionnées par la Convention du mètre. Comme motifs de cette déclaration et de cette demande le Comité a indiqué les considérations suivantes:

1° que l'alliage n'est pas homogène et contient de 2,80 à 2,95% de métaux étrangers, notamment du fer et du cuivre, et du ruthénium;

2° que l'alliage se détruit partiellement lorsqu'on le fond dans une atmosphère oxydante et que cette destruction partielle rend impossible sa réproduction par voie de synthèse;

3° que plusieurs échantillons contiennent le fer métallique, à la fois allié et à l'état libre, mécaniquement interposé dans la masse, ou tout au moins interposé dans les couches superficielles de l'alliage, et que l'existence de ce fer enlève à la matière la garantie absolue de conservation des traits délimitatifs de la longueur du mètre, ou du poids pour les kilogrammes;

4° que la décision de la Commission, prescrivant que la matière du kilogramme international sera la même que celle du mètre international, c'est-à-dire le platine iridié contenant 10% d'iridium avec 2% de tolérance en plus ou en moins, exclut tous les autres métaux;

5° qu'il résulte des échantillons présentés par des délégués du Comité, que l'alliage de platine iridié, dans la composition prescrite par la Commission internationale du mètre, peut être industriellement réalisé et que le poids spécifique de ce platine iridié est au minimum de 2,23% supérieur au poids de l'alliage des deux règles remises au Comité;

6° que l'article 1er des dispositions transitoires de la Convention du mètre du 20 Mai 1875 assure, aux États représentés par la Commission internationale de 1872, la livraison des prototypes qu'ils auront commandés, dans toutes les conditions de garantie déterminées par la dite Commission internationale, et que l'article 3 des mêmes dispositions transitoires charge le Comité international de comparer entre eux les nouveaux prototypes, d'après les décisions scientifiques de la Commission internationale et de son Comité permanent, sous réserve des modifications que l'expérience pourrait suggérer dans l'avenir;

7° que la composition de l'alliage n'est pas conforme aux prescriptions de la Commission internationale.

Digitized by Google

„La Commission néerlandaise avait à considérer si les raisons pour lesquelles les produits du long travail de la Section française étaient rejetés par le Comité international, présentaient dans l'intérêt des prototypes néerlandais une telle valeur que la Commission devrait déconseiller son Gouvernement d'accepter les mètres confectionnés par la Section française.

„Comme les Pays-Bas comptent parmi les États qui, par suite de la Convention du 20 Mai 1875, ne prennent plus part à la coopération internationale, la Commission pouvait, en fixant son opinion, laisser de côté les quatre considérations présentées en dernier lieu par le Comité.

„Elle pouvait se borner au côté pratique de la question, c'est-à-dire à la question de savoir si l'alliage préparé peut satisfaire aux conditions scientifiques de règles métriques d'une inaltérabilité et invariabilité suffisantes.

„Sous ce rapport il ne lui a semblé nullement prouvé que la présence de métaux étrangers, indiquée par le Comité dans la première de ses considérations, doive avoir un effet nuisible sur la qualité des mètres. Il est vrai que, dans le Rapport de MM. Broch, Ste Claire Deville et J. S. Stas, il est prétendu que le métal exposé à la température de fusion de l'argent prend une teinte légèrement brunâtre, qu'il perd son aspect brillant et devient plus ou moins rugueux à la surface, mais la Commission est d'avis que ce qui a lieu à une température de 1000° ne peut pas servir à faire juger des qualités de règles métriques, qui doivent être conservés à la température ordinaire et auxquelles certainement, fussent elles chimiquement aussi parfaites que possible, on refuserait d'accorder aucune confiance, si elles avaient seulement été exposées à la température rouge. Ce qui doit être considéré en premier lieu c'est l'invariabilité dans les circonstances ordinaires, une faible dilatation par la chaleur et une élasticité élevée.

„Nous n'avons pu voir non plus un motif suffisant de rejeter l'alliage dans le fait relaté en second lieu, qu'on ne pourra pas, avec une exactitude absolue, reproduire le métal dans une composition identique. En effet, cette remarque s'applique évidemment à tout alliage, même à celui de platine et d'iridium purs, non seulement parce que très probablement ces deux métaux à l'état de fusion se volatilisent dans des proportions inégales, mais aussi parce qu'une exactitude absolue n'est jamais réalisée ni dans la composition d'un alliage, ni dans aucune expérience. Il ne s'agit pas de rechercher une exactitude impossible, il s'agit de savoir si les différences inévitables, que peut présenter avec le métal actuel un alliage composé à nouveau, peuvent être d'un intérêt pratique quelconque. On ne l'a pas prouvé jusqu'ici et nous n'hésitons pas à dire que cela nous paraît très improbable.

„Ce n'était donc que la considération présentée en troisième lieu par le Co-

Digitized by Google

mité qu'il nous restait à examiner, c'est-à-dire la question de savoir si l'alliage contenait du fer en telle quantité et dans un tel état qu'il ferait perdre la garantie de l'invariabilité des traits délimitatifs.

„L'expérience sur laquelle s'appuyait l'assertion du Comité a été décrite dans le rapport cité de MM. Broch, Ste Claire Deville et Stas en ces termes:

„Enfin, la présence du fer libre, plus ou moins superficiel, incorporé mécani-„quement dans la masse, communique à certaines parties de l'alliage la propriété „de se couvrir de rouille de fer, lorsqu'on le tient pendant une heure et demie „dans l'eau bouillante et qu'on abandonne ensuite le tout à lui-même jusqu'au „lendemain. Ainsi la règle n° 1, provenant directement du grand lingot, après „avoir été décapée à l'acide chlorhydrique et lavée à l'eau pure, s'est couverte „d'une couche très légère, mais bien sensible de rouille, après un séjour d'une „heure et demie dans l'eau en ébullition et abandonnée ensuite pendant dix-huit „heures à elle même au sein de l'eau. Cette couche de rouille était à peine „adhérente et repartie très uniformément; nous conservons comme pièce à l'appui „le linge qui a servi à enlever sa rouille et qui en est resté teint par place".

„La conclusion tirée de ces expériences et d'autres pareilles, qui démontrent que les échantillons ne présentent pas tous ces taches de rouille, est la suivante:

„L'existence incontestable du fer libre dans certaines parties de l'alliage, et „notamment dans celles qui ont été serrées directement contre l'acier lors de „l'étirage, lui enlève une garantie absolue de conservation contre l'oxydation. „En effet, le doute est permis par le motif qu'en supposant enlevé le fer super-„ficiel libre ou allié, par l'action d'une haute température ou d'un décapage „parfait, il faut, pour pouvoir tracer les traits, polir la surface par enlèvement „de substance. Or rien ne garantit que dans ce cas on ne rencontre pas une „partie renfermant du fer mécaniquement interposé et sur laquelle le tracé ne „soit exposé à se détériorer".

„Ces remarques nous firent un devoir de constater par l'expérience dans quelle mesure les mètres destinés aux Pays-Bas feraient craindre que la présence du fer ne pût perdre ou détériorer les traits. Dans ce but nous avons répeté au Conservatoire des Arts et Métiers à Paris sur les mètres néerlandais l'expérience de M. Stas.

„Auparavant nous avions eu déjà, par l'obligeance de M. Péligot, l'occasion d'observer au laboratoire de chimie de l'Hôtel des Monnaies le résultat d'une expérience servant à constater la pureté du métal des mètres. Depuis plus de deux mois M. Péligot conservait deux bouts de règle sous une cloche dans laquelle, par la présence d'une capsule contenant de l'acide chlorhydrique, on avait communiqué artificiellement à l'air la propriété d'attaquer énergiquement les

Digitized by Google

métaux oxydables. Quoique les bouts de platine eussent séjourné ainsi pendant un temps considérable dans une atmosphère saturée d'humidité et de vapeurs chlorhydriques, ils n'avaient rien perdu de leur aspect brillant. M. PÉLIGOT nous assura que des pesées exactes n'avaient accusé aucune variation du poids des barres. Une tige de fer et une tige de cuivre, exposées en même temps à l'air de la cloche, avaient été couvertes d'une épaisse couche de rouille et de chlorures de ces métaux.

„Dans notre première conférence avec MM. MORIN et TRESCA au Conservatoire des Arts et Métiers, nous avons assisté au polissage des mouches qui, aux deux bouts des mètres, sont destinées à recevoir les traits. Parmi quatre mètres pour lesquels cette opération était terminée nous en avons choisi un, portant le numéro 27, qui, avec le mètre déjà désigné n°. 19, constituera la paire de prototypes destinée aux Pays-Bas et aux Indes orientales néerlandaises. C'est ainsi qu'il a été satisfait à la demande adressée par notre Commission à la Section française et dont nous faisions mention dans la missive de notre Commission au Ministre des Travaux Publics le 7 Février 1878.

„Les deux mètres n°. 19 et n°. 27 furent ensuite placés l'un à côté de l'autre dans une auge en cuivre remplie d'eau distillée, mise en ébullition au moyen d'une rampe de becs à gaz. Après avoir fait continuer l'ébullition pendant une heure on éteignit le gaz et abandonna le tout à lui-même.

„Le jour suivant on sortit les mètres de l'eau pour les examiner. Le résultat de cet examen fut le suivant. Le mètre n°. 27 avait gardé sur toute sa surface son aspect brillant et son éclat métallique, à l'exception de sept petits points noirs disséminés sur différentes parties de sa superficie. Parmi ces points qui ne mesuraient que quelques, tout au plus trois, dixièmes de millimètres, quelques-uns étaient entourés d'une auréole brunâtre se perdant insensiblement à l'extérieur et d'un diamètre de un à trois millimètres. Une très légère friction faisait disparaître les points en même temps que les petites taches de rouille qui les environnaient.

„Le mètre n°. 19 montra sur une de ses faces latérales un petit point noir et sur une des faces intérieures une tache plus grande; par contre un des angles rentrants du profil extérieur était fortement couvert de rouille. La bande de rouille était interrompue ça et là, de sorte que sa longueur totale était d'environ la moitié de celle du mètre.

„De même que celles du mètre n°. 27 ces taches de rouille s'enlevaient facilement.

„On essaya alors de débarrasser les mètres par des moyens chimiques du fer qui avait produit ces taches. Le mètre n°. 19 fut porté au laboratoire de M. BOUSSINGAULT où il fut traité à chaud avec un mélange d'une solution de jodure

Digitized by Google

de potassium et d'acide chlorhydrique. Après avoir été lavé à l'eau pure, le mètre n°. 19 fut de nouveau placé dans l'auge en cuivre avec de l'eau distillée, maintenue en ébullition pendant une heure, et ensuite abandonné à lui-même jusqu'au lendemain.

„Il apparut alors que les taches s'étaient formées de nouveau, quoiqu'à un moindre degré.

„On résolut alors de nettoyer d'une manière efficace le mètre n°. 19, qui contenait évidemment du fer dans l'un des angles rentrants de son profil extérieur. On prit soin de bien faire entrer le rodoir dans cet angle. Après que le mètre n°. 19 eut subi cette opération et eut été lavé, il fut soumis pour la troisième fois à l'ébullition. Le jour suivant on ne pouvait découvrir aucune trace de taches de rouille. Tous les angles rentrants montraient avec une égale clarté la ligne brillante formée par la réflexion de la lumière du jour.

„Nous conclûmes de ces expériences:

1° que, ainsi qu'il est observé dans le rapport de MM. Broch, Ste Claire Deville et Stas à l'égard de certains échantillons de platine iridié, de même les règles destinées aux Pays-Bas, avant qu'elles furent soumises à nos expériences, étaient sujettes à se rouiller sur quelques parties de leur surface;

2° que les taches de rouille observées proviennent, non pas de fer qui serait allié au platine iridié, mais exclusivement de fer ou de matières ferrugineuses qui se trouvent accidentellement dans quelques parties de la surface;

3° que ces matières ferrugineuses ne peuvent pas être enlevées par un procédé chimique qui ne serait continué très longtemps;

4° que les matières ferrugineuses peuvent être enlevées, et que *les mètres susceptibles de se couvrir de rouille* peuvent être transformés en *mètres qui ne se rouillent pas* par un rodage ou un nettoyage énergique.

„Il ne nous reste aucun doute sur l'origine de ces parties ferrugineuses. En effet, lorsqu'après l'étirage les barres sortent de la filière, elles présentent ordinairement un gauchissement plus ou moins fort. Pour les redresser on les serre avec force entre des plaques de fer, après que les parties rentrantes des règles ont été remplies par des réglettes en acier. Dans cette position les barres sont soumises à une température élevée. Après avoir subi cette opération les barres sont redevenues droites, mais elles ont perdu entièrement leur aspect métallique. Elles sont tout-à-fait couvertes d'une couche de rouille, qu'on enlève par le rodage. Il est évident que de légères imperfections dans cette dernière opération peuvent facilement se présenter et doivent se manifester, après l'expérience de l'ébullition de l'eau, par des taches de rouille locales.

„Il est donc désirable que tous les mètres soient soumis à cette expérience et

Digitized by Google

soient polis jusqu'à ce qu'ils ne présentent plus aucune trace de rouille [1]). A l'égard des règles que nous avons examinées, il nous reste à ajouter qu'après la première épreuve le mètre n°. 27 avait gardé tout-à-fait intact l'aspect spéculaire des mouches polies destinées à recevoir les traits. Après la dernière expérience le mètre n°. 19 fut muni par M. G. TRESCA de faces polies et mis de nouveau dans l'eau bouillante. Après refroidissement de l'eau le poli était resté aussi satisfaisant qu'auparavant.

„En se fondant sur ces expériences les soussignés sont d'avis qu'il n'y a aucune raison pour ne pas recevoir avec entière confiance les mètres n°. 19 et n°. 27 comme futurs étalons néerlandais. Les conférences fréquentes que nous eûmes avec quelques Membres de la Section française nous ont donné l'espoir que dans peu de mois on pourra procéder au tracé de ces mètres".

Les Membres de la Commission:

J. BOSSCHA.

J. A. C. OUDEMANS.

43. Le résultat satisfaisant de l'examen des règles confectionnées par la Section française a été confirmé plus tard par le Comité international lui-même. Deux années après la résolution par laquelle le Comité déclara ne pas pouvoir recevoir les mètres fabriqués avec l'alliage coulé le 13 Mai 1874, et par laquelle il demanda au Gouvernement français d'en faire suspendre la fabrication, le Comité, dans sa séance du 13 Octobre 1879 [2]), se décida à confier à une Commission, composée de Membres du Comité, l'examen comparatif des qualités métrologiques de deux règles, dont l'une serait fabriquée avec l'alliage de 1874, l'autre avec l'alliage purifié d'après les nouvelles méthodes et qui serait fourni par M. MATTHEY de Londres.

Les qualités métrologiques dont il était question se rapportent particulièrement à „la faculté que doivent posséder les étalons d'être à l'abri des altérations „que des causes mécaniques, des actions thermiques, ou l'influence de quelques „agents naturels peuvent occasionner soit aux dimensions des règles, soit à la

---

[1]) C'est ce qui a été fait dans la suite. Dans une note présentée par M. TRESCA à la Section française et dans laquelle il rend compte de la visite des Commissaires néerlandais (Séance du 11 Mars 1878), il est dit: »après leur départ vingt-et-une autres règles ont été successivement soumises au même traite»ment; la plupart n'ont donné lieu à aucune trace ferrugineuse; deux d'entre elles cependant ont permis »de voir deux ou trois taches microscopiques sur lesquelles on a, à nouveau, passé du papier éméri".

Dans la note citée, telle qu'elle est imprimée dans les Procès-Verbaux de 1877, p. 139, il y a une erreur de transposition entre les deux mètres n°. 19 et n°. 27.

[2]) Procès-Verbaux des Séances de 1879, p. 81 et suiv.

Digitized by Google

„stabilité et à la pureté des traits qui limitent la longueur du mètre". Cette Commission, composée de MM. Broch, Förster et Stas, a présenté son rapport dans la séance du Comité du 28 Septembre 1880 [1]). Les deux règles ayant été comparées à une troisième règle qui restait constamment immobile sur les mêmes supports à la température ambiante, voisine de 16°, elles ont d'abord été soumises à une série de variations de température. comprises entre 48°,5 et 1°,5, puis, pendant vingt-quatre heures environ, à des vibrations continues et énergiques, enfin elles ont été de nouveau comparées avec la troisième règle. Les comparaisons faites dans une limite d'exactitude d'à peu près 2 dixièmes de micron, n'ont accusé ni pour le mètre de M. Matthey, ni pour le mètre de la Section française, aucune variation de longueur appréciable. Le rapport constate de plus que la surface de ces règles dans leur état actuel est tellement purifiée de *fer libre* que la rouille n'est pas à craindre pour leurs traits. Les épreuves „spéciales et très énergiques", qui ont conduit à cette affirmation, consistaient à enfermer pendant six jours consécutifs les règles dans un tube chauffé à 49°,6 et dans lequel l'air était saturé d'humidité. De temps en temps on provoquait par des refroidissements des condensations d'eau dans l'intérieur du tube. Les règles soumises à ce traitement n'ont pas paru avoir subi trace d'altération. Elles ont été frottées après avoir été retirées de l'appareil, avec un linge propre et sec, sur lequel on n'a pas aperçu d'apparence de rouille. Les traits examinés avec les microscopes des comparateurs n'avaient souffert en aucune façon.

Le rapport conclut que les étalons fabriqués avec l'alliage de 1874, malgré ses défauts chimiques, peuvent être admis comme *étalons nationaux.*

44. Cette dernière conclusion est d'autant plus significative que le rapport, présenté dans la Séance du 13 Octobre 1879 et qui servait de programme pour les expériences de cette Commission, établit une distinction entre les conditions auxquelles devront satisfaire les étalons nationaux d'une part et le prototype international de l'autre.

En effet il y est dit:

„L'*étalon prototype international*, conservé toujours dans le même établissement, „dans un état d'immobilité presque absolue, mis à l'abri des variations brus„ques ou trop grandes de la température, déposé constamment sur les mêmes „supports, protégé contre les chocs, les frottements et les actions des agents „atmosphériques, manié d'ailleurs par des personnes habituées aux opérations „délicates de la Métrologie, n'a pas absolument besoin de présenter toutes les „mêmes garanties de résistance que les *étalons nationaux.* La pureté chimique

[1]) Procès-Verbaux des Séances de 1880, p. 15 et suiv.

Digitized by Google

„et l'inaltérabilité de l'alliage de platine et d'iridium préparé par M. MATTHEY „et dont se composent les types du Bureau, leur parfaite conservation, quant à „la longueur et quant au tracé, après les épreuves thermiques auxquelles on les „a déjà soumis (entre — 2 et + 40°), ont suffi pour nous démontrer qu'il rem- „plit pleinement les conditions métrologiques requises pour le *prototype international.*

„Mais les *prototypes nationaux* doivent voyager et par conséquent subir des „actions mécaniques assez violentes; leurs supports peuvent varier sensiblement „pendant leurs déplacements; transportés dans les climats les plus divers, ils y „seront exposés à des variations considérables et quelquefois très rapides de la „température; ils auront donc à courir certainement plus de chances d'altération „que l'*étalon international*, et doivent, par conséquent, pouvoir résister mieux „que lui à toutes les actions qui les peuvent atteindre".

45. C'est à la suite de ces expériences, en tous points favorables quant aux qualités des règles confectionnées par la Section française, que le Comité a décidé de laisser aux États qui participent à la Convention du mètre le choix, s'ils voulaient des étalons du mètre soit en alliage pur, soit en alliage fabriqué en 1874, soit des deux espèces.

Aux termes dans lesquelles cette question a été posée aux divers Gouvernements, tous, à l'exception du Danemark, ont répondu qu'ils désiraient des étalons en métal pur. Les États Unis d'Amérique et la Belgique ont demandé des étalons des deux espèces.

Il en est résulté que, en dehors des prototypes des Pays-Bas, du Brésil et de l'Angleterre, trois mètres seulement de ceux, qui ont été construits par la Section française serviront comme prototypes nationaux, et que, laissant de côté une grande partie du travail considérable déjà accompli, on devra recommencer la construction d'un grand nombre de règles, dans des conditions qui rendent le succès incertain et qui en tout cas entraînent un délai regrettable dans l'achèvement du travail.

IV. RECHERCHE D'UNE CAUSE D'ERREUR DANS LA MESURE DE LA LONGUEUR D'UN MÈTRE À BOUTS.

46. Dans la nuit du 31 Décembre 1878 au premier Janvier 1879 le premier mètre à profil en X, confectionné avec l'alliage coulé le 13 Mai 1874, a été tracé d'après le mètre des Archives au Conservatoire des Arts et métiers. L'opération

Digitized by Google

a été faite sur le comparateur longitudinal, installé à cet effet dans un des cabinets attenant à la salle des poids et mesures. Aussitôt après le tracé M. TRESCA s'est occupé à vérifier la longueur du nouveau mètre, qui avait été désigné, dans la collection des règles terminées, par le numéro 23. D'après les prescriptions de la Commission internationale du mètre, la longueur du mètre des Archives devait être indiquée, tant dans le tracé que dans les comparaisons, au moyen du procédé de M. FIZEAU. Ce procédé consiste à viser la surface même des parties centrales des bouts du mètre, en pointant sur le milieu de la distance qui sépare de son image réfléchie une pointe placée devant cette surface.

De même que dans presque toutes les opérations que la Section française avait à exécuter dans des conditions de précision qu'on n'avait pas encore réalisées auparavant, des difficultés, qui déjouèrent tous les calculs, ne tardèrent pas à se présenter. M. TRESCA, avec qui les Commissaires néerlandais étaient en relation continuelle au sujet de leur mission, leur fit part des retards qu'éprouvaient les vérifications et leur communiqua dans les termes suivants plusieurs détails essentiels de ses expériences [1]):

47. „Depuis le premier Janvier nous nous occupons de vérifier notre premier tracé sur le comparateur à mouvement longitudinal, le seul que nous ayons encore à notre disposition, et nous nous préparons à continuer cette vérification sur le comparateur à mouvement transversal que nous installons dans une nouvelle chambre froide formée par le cabinet dans lequel se réunissait la Commission. La machine frigorifique sera disposée pour faire couler à volonté dans les deux chambres ou dans une seule le chlorure de calcium froid et nous avons pris les dispositions nécessaires pour chauffer ce chlorure à 40° ou 50° et ainsi employer la même installation pour des comparaisons à différentes températures entre 0° et 40°.

„Cette installation est assez avancée: la pierre de fondation est posée — le comparateur est en état d'être transporté, — la cloche de cuivre sera terminée dans un petit nombre de jours — le matelassage est en cours d'exécution et dans le courant du mois prochain tout sera en place, et nous aurons ainsi à notre disposition des moyens de vérification plus rapides, qui nous permettront, avec deux instruments susceptibles de se contrôler, de marcher plus vite.

„Voilà pour l'avenir, mais je dois entrer dans plus de détails pour le présent et vous expliquer les difficultés que nous avons rencontrées jusqu'ici dans nos vérifications.

„Le refroidissement est complètement à notre disposition et le maintien de

---

[1]) Lettre de M. TRESCA à M. J. BOSSCHA, du 23 Mars 1879.

Digitized by Google

la température est satisfaisant — il nous est très facile d'opérer dans le voisinage de 0° et j'ajoute qu'il ne se produit sur les instruments aucune buée ni pendant la période de refroidissement ni pendant la période de rechauffement.

„Nos éclairages sont bons et nous nous sommes assurés qu'en changeant de 2 ou 3 centimètres les sources de lumière nous n'obtenons aucune différence dans nos mesures.

„Dans les dernières dispositions prises on a pu faire des lectures 8 jours durant sans avoir à toucher aux microscopes et sans introduire par conséquent aucune cause d'erreur de ce chef.

„Nos lectures se font le soir, avec la condition de ne pas entrer dans la chambre pendant la journée dans la crainte de troubler l'équilibre de température.

„Nos séries se prolongent en général pendant toute la durée du retour à la température ambiante, et voici maintenant les anomalies que nous rencontrons.

„Après plusieurs jours de lectures concordantes nous avons dans presque toutes les séries passé brusquement à une autre valeur, qui s'est maintenue ensuite jusqu'à la fin. Le saut brusque qui peut aller jusqu'à 2 microns a été presque toujours produit dans le sens d'un retard de dilatation qu'aurait subi le mètre en X et dont il se serait affranchi tout d'un coup, mais dans la dernière série, qui est nécessairement la plus soignée et la seule dans laquelle on n'ait eu à agir ni sur les pointes, ni sur les microscopes, cet à-coup s'est produit en sens contraire. Je ne puis admettre d'ailleurs qu'il puisse se présenter dans les mètres en X aucun effet de résidu d'élasticité puisque tout a été combiné contre ce danger.

„Quelles sont donc les causes de ces anomalies et quels sont les moyens à l'aide desquels nous les avons pourchassés? C'est là toute une histoire dont je ne puis vous indiquer que les traits principaux.

1° Sur l'un des bouts du mètre des Archives l'image de la pointe placée au centre de la face réfléchissante est déformée d'une manière notable.

2° Les lectures peuvent varier si la pointe n'est pas très exactement maintenue dans l'axe du mètre.

3° L'influence de la distance entre la pointe et sa surface réfléchissante n'est pas à négliger.

4° La pointe peut se déplacer si elle touche le mètre, particulièrement en ce qu'elle prend une forme courbe, qui peut-être n'est pas absolument rectifiée quand la pointe est délivrée.

5° La distance entre la pointe et le mètre ne doit pas dépasser de beaucoup, dans le microscope, la distance entre les 2 fils parallèles du micromètre. Tout cela est difficile à obtenir et surtout à maintenir et voici maintenant les résultats observés.

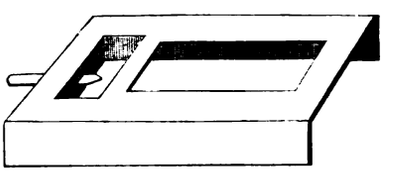
Digitized by Google

„Dans notre première disposition la pointe était portée par le bâti en fonte et on l'ajustait en position au moyen de trois vis. Le déplacement était considérable et il fallait chaque jour agir sur les vis, ce que l'on ne pouvait faire qu'en entrant dans la chambre de cuivre.

„De plus, l'ajustement de la pointe en hauteur n'était obtenu que d'une manière approximative: on mettait au point sur la surface supérieure du mètre, — on déplaçait le chariot de manière à amener la pointe sous le microscope, — on descendait ce microscope de la demi-épaisseur du mètre et enfin on relevait ou abaissait la pointe de manière qu'elle vînt se mettre au point.

„Tout cela était insuffisant pour le degré de précision dont nous avions besoin.

Fig. 2.



„À ce moment nous avons disposé des transmissions à air pour faire les manoeuvres du dehors de la chambre de cuivre, mais nos appréciations ayant changé de direction, ce mode de transmission, bien qu'exécuté complètement, n'a pas été installé.

„Nous avons cru qu'il était préférable de rendre la pointe solidaire avec le mètre. Pour cela nous avons fait construire deux petits couvercles (fig. 2) portant les pointes, pour être posés sur le mètre avec possibilité de régler d'une manière absolue la pointe suivant les trois dimensions en largeur, hauteur et distance.

„Cette disposition a donné lieu à une amélioration et c'est elle qui nous a permis de faire des observations suivies sans toucher ni aux microscopes, ni aux pointes. Cependant la pointe se déplace encore parce que ces abouts étaient faits en laiton et l'on exécute en ce moment de nouveaux abouts en platine, qui seront essayés à la fin de la semaine".

48. Sur l'invitation de M. Tresca et désirant connaître l'exactitude que nous pourrions obtenir dans les difficiles comparaisons d'un mètre à traits avec un mètre à bouts, nous nous rendîmes pour la troisième fois à Paris, le 12 Avril 1879. M. Stamkart était empêché de faire le voyage avec nous.

Le comparateur longitudinal se trouvait installé dans un cabinet de 4,38 mètres de longueur, 2,50 mètres de largeur et 3 mètres de hauteur. Il était enfermé dans une cloche rectangulaire de cuivre, dont les dimensions, énumérées dans le même ordre, étaient de 2,60, 1,18 et 2,0 mètres. Autour de cette cloche étaient disposés quatre réservoirs de zinc à section rectangulaire, hauts de 2,50 mètres et ayant ensemble une capacité de 1825 litres. Ces réservoirs communiquaient entre eux par des tubes métalliques. Ils étaient destinés à recevoir du dehors une solution de chlorure de calcium chauffée ou refroidie pour amener à un degré voulu la température de l'air de la chambre et celle de la cloche

Digitized by Google

de cuivre. Un thermomètre à mercure appliqué contre la paroi de cuivre pouvait être observé du dehors de la chambre au moyen d'une lunette, dont le tube traversait la paroi de bois de cette chambre.

Pour contrôler les variations de la température de l'air dans l'intérieur de la cloche de cuivre, on y avait installé un thermomètre enregistreur de Redier, dont les indications étaient transmises au dehors du cabinet, de sorte que dans la grande salle des poids et mesures on pouvait à chaque instant se rendre compte de la marche de la température de l'air dans lequel se trouvaient placés les mètres à comparer. Sur la courbe enregistrée des températures chaque degré centigrade était représenté par une ordonnée de 5 millimètres.

Les courbes tracées par cet instrument permirent de constater qu'à la température ordinaire l'effet du séjour d'un observateur pendant un quart d'heure, qui suffit pour une comparaison, est à peine sensible. Lorsque la température du cabinet a été abaissée à zéro ou que le séjour de l'observateur est notablement plus prolongé, le thermomètre enregistreur indique très clairement une élévation de température de quelques dixièmes de degré.

L'adjonction du thermométrographe de Redier aux appareils thermométriques ordinaires présentait un avantage précieux pour la recherche de la cause des anomalies qui s'étaient présentées dans les comparaisons. La parfaite concordance que ses indications avaient présentée dans des conditions identiques, notamment dans les refroidissements répétés qui avaient eu lieu depuis le commencement de Janvier, et la régularité des courbes dans les périodes de réchauffement lent nous assurèrent que ce n'était pas dans des troubles accidentels survenus dans l'équilibre de température des mètres, qu'on avait à chercher une cause d'incertitude quelque peu considérable.

Les deux mètres, celui des Archives et le nouveau mètre en X, portaient chacun, couché sur la surface supérieure des règles, un thermomètre de Baudin divisé en dixièmes de degré. Deux microscopes, dont les tubes traversaient la paroi supérieure de la cloche de cuivre, permettaient de lire facilement du dehors le centième de degré. L'éclairage des échelles thermométriques, fourni par une lampe placée à l'extérieur de la chambre froide et dont la lumière était transmise par un système de lentilles et de miroirs, ne laissait rien à désirer.

49. Le comparateur longitudinal et son fonctionnement ont été décrits dans les „Exposés de la situation des travaux" publiés par la Section française [1]). Le comparateur, construit par MM. Brunner se compose d'un fort bâti en fonte

---

[1]) Voir le premier Exposé, annexé aux »Procès-Verbaux du Comité Permanent", 1873, p. 33 et celui du 1er Octobre 1876, publié avec les »Procès-Verbaux de la Section française", page 16.

Digitized by Google

d'une seule pièce, creuse à l'intérieur, du poids de 700 kilogrammes. Il est porté par trois points sur des semelles en fonte. Deux des points d'appui sont fixes, le troisième est muni d'une forte vis à pas serré, disposée de manière que sa pointe puisse glisser dans une rainure longitudinale en forme de V, taillée dans la semelle. Le plan supérieur de ce banc, élevé à 600 mm. au dessus du plan de la base, porte sur l'un des bords longitudinaux une glissière saillante en forme de V renversé, sur l'autre bord un plan bien dressé; la glissière et le plan servent à guider le mouvement du chariot.

Le chariot est composé de deux plaques de fonte, la plaque inférieure repose avec l'un de ses bords sur la glissière par deux coulisses en V renversé d'une longueur de 15 centimètres à chaque extrémité, et avec l'autre bord par un plan bien dressé sur la portée plane du banc. La plaque supérieure est mobile autour d'un axe placé à l'une de ses extrémités, ce mouvement est effectué dans les deux sens au moyen d'une vis. Le poids du chariot atteint 70 kilogrammes; pour diminuer le frottement on a soulagé le chariot par deux pièces à ressort portant chacune deux galets roulant sur des rebords. Le mouvement du chariot s'obtient au moyen d'une chaîne, dont les deux bouts sont attachés aux deux extrémités du chariot. La chaîne fait un tour complet sur une double poulie et est entrainée par un arbre à pignon denté. Une transmission verticale terminée par une manivelle qui se trouve en dehors de la cloche de cuivre permet à l'observateur d'opérer le mouvement rapide, dont la course totale correspond à neuf tours de la manivelle. On peut de même, du dehors de la cloche, fixer le chariot sur le banc avec une vis de pression au moyen de deux fils de tirage. Le mouvement lent du chariot s'effectue au moyen d'engrenages hélicoïdes dont le mouvement est commandé par une poignée à volant qui se trouve également en dehors de la cloche de cuivre sous la main de l'observateur.

Sur la plaque supérieure du banc sont installés les supports à rouleaux des deux mètres qu'on veut comparer. L'ajustement des mètres dans les directions longitudinale et verticale ainsi qu'en hauteur s'obtient au moyen de mouvements micrométriques. Pour opérer ces réglages il est nécessaire d'entrer dans la cloche de cuivre.

Le chariot porte sur l'un de ses côtés, serré dans deux forts anneaux de bronze munis chacun de trois vis de pression, le collimateur qui avec la lunette installée en dehors de la cloche doit servir, d'après la methode proposée par M. Fizeau, à vérifier le parallélisme du mouvement du chariot. Le collimateur et la lunette ont une longueur de 120 centimètres. Les objectifs de ces deux instruments portent des miroirs annulaires en verre argenté d'un diamètre ex-

Digitized by Google

térieur de 10 centimètres; ces miroirs sont destinés à augmenter par des réflexions multiples la sensibilité de la collimation.

Le support des microscopes est en fonte; il se compose de deux flasques évidées placées symmétriquement des deux côtés longitudinaux du banc et reliées entre elles, à la partie inférieure par une semelle en fonte reposant sur trois vis calantes, à la partie supérieure par une sorte de boîte de même métal. Les microscopes sont établis sur le fond supérieur de cette boîte comme plaque de fondation, leurs axes se trouvent dans un plan perpendiculaire à celui du mouvement du chariot et distants l'un de l'autre d'environ 4,5 centimètres. Les tubes des microscopes traversent la paroi supérieure de la cloche de cuivre, de sorte que les oculaires et les micromètres sont accessibles à l'observateur.

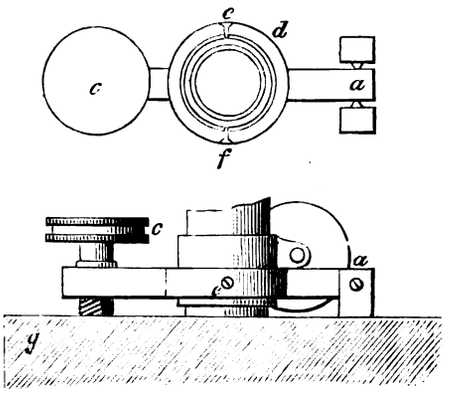
Pour effectuer une comparaison on fait coïncider le bout droit de l'un des mètres avec l'axe optique de son microscope (I) en faisant mouvoir le chariot. Si la position des mètres sur leurs support est bien réglée dans le sens longitudinal il faut alors que le bout du second mètre se montre très près du milieu du champ de son microscope (II). Le pointé exact se fait ensuite en déplaçant le fil micrométrique. Après la lecture du micromètre, le chariot qui supporte les deux mètres est transporté à droite jusqu'à ce que l'extrémité gauche du premier mètre vienne prendre sous le microscope I la place de l'extrémité droite dans la première position. Le déplacement du fil micrométrique du microscope II, nécessaire pour pointer maintenant sur le bout gauche du second mètre, donne la mesure de la différence de longueur des deux mètres. Un défaut possible dans le parallélisme parfait du mouvement du chariot est contrôlé et au besoin corrigé au moyen du collimateur de M. Fizeau, dont les indications sont observées du dehors de la chambre.

Dans le déplacement du chariot l'observateur est averti par des sonneries électriques, lorsque les bouts des mètres sont assez approchés des axes des microscopes pour qu'il faille enrayer le mouvement rapide. Un autre signal électrique est donné lorsque, le mouvement longitudinal étant continué, le chariot approche de l'extrémité de sa course et risquerait de buter, ce qui pourrait déranger l'appareil. L'horizontalité des rails sur lesquels glisse le chariot est vérifiée au moyen de niveaux très sensibles. La position verticale des microscopes est assurée au moyen d'un appareil simple, sorte d'équerre portant un niveau d'une sensibilité telle, qu'il accuse une inclinaison d'une seconde. Pour régler la mise au point, les microscopes peuvent glisser à frottement dur dans des tubes verticaux fixés au support. Les microscopes sont maintenus à la hauteur voulue au moyen de deux pivots s'engageant dans des cavités e, f (fig. 3) d'un anneau d, formant un levier dont l'axe se trouve à l'une des extrémités en a. L'autre extrémité

Digitized by Google

porte une vis s'engageant dans le corps g du support. En tournant la vis c à droite, on fait descendre, en la tournant à gauche, on fait monter le corps du microscope. Le pas de la vis étant de $^1/_2$ millimètre et la ligne $e\,f$ partageant en deux parties égales le levier $a\,c$, une révolution entière de la vis fait monter ou descendre de 0,25 mm. le corps du microscope.

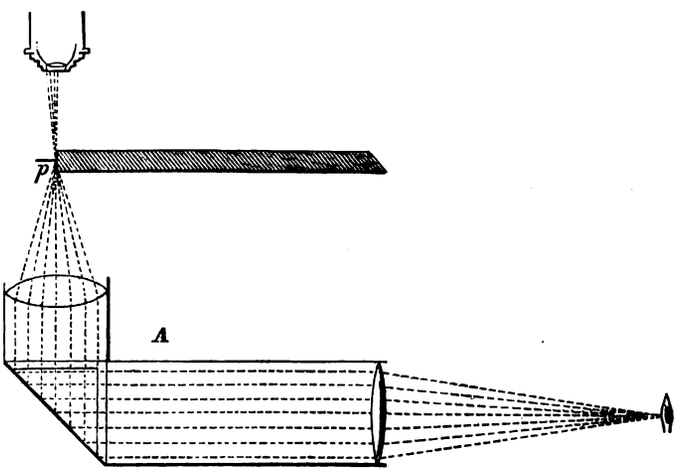
Fig. 3.



Des essais préparatoires du procédé Fizeau avaient fait voir que, pour bien distinguer la pointe et son image, il faut faire arriver la lumière en dessous de la pointe, de sorte que les deux images et les fils du micromètre se montrent en noir sur un fond éclairé.

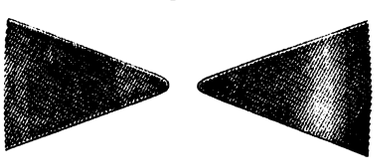
Dans l'appareil du Conservatoire un éclairage très satisfaisant était obtenu au moyen d'un tube Desjardins A (fig. 4), qui recevait la lumière d'une lampe de Drummond placée en dehors de la chambre. La disposition des diverses parties de cette installation est indiquée dans la figure 4. La pointe p était formée en coupant avec des ciseaux une feuille mince de platine. Dans le microscope la pointe et son image se présentent comme le montre la figure 5.

Fig. 4



Les extrémités du mètre en X sont accusées par des traits ayant une largeur de 3 à 5 microns. Des deux côtés des traits se trouvent des traits auxiliaires à une distance d'environ 10 microns. Vus avec le fort grossissement des microscopes, les traits délimitatifs accusent de faibles échancrures, qui rendent nécessaire de pointer en plaçant le trait au milieu de deux fils parallèles, ainsi qu'il est indiqué dans la figure 6. Ces fils étant sensiblement perpendiculaires à l'axe de la vis du micromètre, celui-ci se trouve en même temps orienté et comme le micromètre du microscope I du mètre des Archives se trouve

Fig. 5.



Digitized by Google

placé devant celui du microscope II (fig. 7), on peut facilement l'ajuster dans la direction convenable en rendant bien parallèles les faces longitudinales des boîtes des deux appareils.

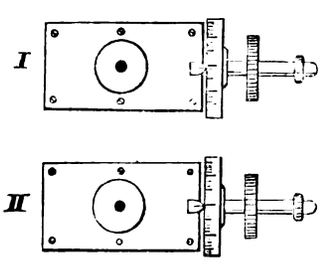
Fig. 6.



Les micromètres avaient été construits par MM. Brunner; leur pas de vis était d'un demi-millimètre, le tambour était divisé en cinquante parties. Une division du tambour représentait un peu plus d'un quart de micron.

50. Pour nous permettre d'étudier la méthode de vérification, MM. Morin et Tresca eurent l'obligeance de mettre à notre disposition non seulement le comparateur longitudinal et ses accessoires, mais aussi le résumé des 47 comparaisons exécutées depuis le 1er Janvier, ainsi que les feuilles contenant les courbes du thermomètre enregistreur de Redier. La recherche de la cause des anomalies qui s'étaient présentées se trouvait ainsi considérablement simplifiée par les résultats des expériences déjà accomplies. En effet, la marche régulière que montraient les courbes du thermomètre excluait toute influence d'un défaut d'équilibre de température. La stabilité qu'on était parvenu à donner au réglage des divers organes du comparateur, et la régularité de son mouvement ne permettaient pas d'attribuer les écarts observés à un défaut accidentel d'ajustement du comparateur. Malgré la grande sensibilité que le grossissement considérable des microscopes devait donner à la mise au point, on réussissait parfaitement à la maintenir sensiblement la même sur les deux bouts de chaque mètre qui venaient se présenter alternativement sous le même microscope, et même en continuant assez longtemps une série de comparaisons aucun dérangement ne se présentait. Enfin une cause d'incertitude qui avait dans les premiers essais contribué beaucoup à jeter le trouble dans les appréciations, avait disparu: on venait de recevoir les sabots de platine qui permettaient de régler d'une manière absolument fixe et en tous points satisfaisante la position des pointes placées devant les faces terminales du mètre des Archives. Ce fut dans ces conditions particulièrement favorables que dès nos premiers essais la véritable cause des écarts observés se manifesta.

Fig. 7.



M. Gustave Tresca termina l'installation sur le comparateur du mètre des Archives muni de ses nouveaux appendices et du mètre n°. 23 le 16 Avril à 5 heures du soir. Depuis lors jusqu'au lendemain rien ne vint plus troubler l'équilibre de température des divers appareils enfermés dans la cloche de cuivre. Le 17 Avril à $10^h.10^m$. M. Bosscha procéda à une comparaison faite d'après

Digitized by Google

la même méthode qui avait été suivie jusqu'ici. Après la lecture des deux thermomètres couchés sur les mètres, les bouts des mètres qui se trouvaient à la droite de l'observateur furent amenés sous le microscope au moyen du mouvement rapide. M. GUSTAVE TRESCA, qui avait acquis une grande expérience du maniement du comparateur, voulut bien se charger de cette manipulation, ce qui délivra les observateurs de la préoccupation de faire un faux mouvement, qui pourrait troubler la marche régulière d'une comparaison. Le tambour du microscope I, celui du mètre des Archives, qui se trouvait dans la position éloignée de l'observateur, fut mis à zéro. En tournant la poignée à volant, l'observateur déplaça les deux images de la pointe jusqu'à ce qu'elles lui parurent à égale distance des deux côtés des fils du micromètre. On pointa ensuite les fils du microscope II sur le trait de milieu du mètre en X placé dans la position rapprochée de l'observateur. Après la lecture du tambour de ce micromètre, l'observateur fit rétrograder le chariot pour répéter après ce déréglage les mêmes pointés. Lorsqu'on eut obtenu ainsi cinq lectures du tambour du microscope (II), M. GUSTAVE TRESCA fit mouvoir le chariot à droite, et les mêmes opérations furent exécutées sur les bouts des mètres situés au côté gauche de l'observateur. Enfin une troisième série de cinq lectures fut prise après que les bouts droits des mètres avaient été ramenés sous les microscopes. Une seconde lecture des deux thermomètres termina la comparaison.

Voici les chiffres obtenus de cette manière:

TABLEAU V.

$10^h.10^m$. Thermomètres: I 15°,99; II 15°,98.		
1. Droite.	2. Gauche.	3. Droite.
22,8	16,2	24,2
25,2	18,3	25,1
28,0	17,1	27,5
26,9	20,4	25,8
23,2	22,0	26,1
Moyennes: 25,22	18,80	25,74
Thermomètres: I 15°,99; II 15°,98.		

Digitized by Google

On voit que les thermomètres n'accusent aucune variation de température.

On déduit des lectures micrométriques la différence X — A du nouveau mètre à traits avec le mètre des Archives, en observant qu'en tournant les têtes de vis du micromètre dans le sens des lectures croissantes, les fils du micromètre se déplacent à droite. Les microscopes donnant des images renversées il en résulte que les lectures croissantes sur le tambour indiquent que le pointé sur l'objet visé se déplace à gauche de l'observateur. Si donc la lecture G sur le bout gauche du mètre en X est plus élevée que celle D sur le bout droit, ce mètre se trouve dépasser la longueur du mouvement longitudinal, qui est égal à la longueur du mètre des Archives. On a ainsi:

$$X - A = G - D = 18{,}80\,d - 25{,}48\,d = -6{,}68\,d = -1{,}67\,\mu$$

en admettant pour la réduction en microns la valeur approximative:

$$d = 0{,}25\,\mu.$$

Immédiatement après, M. Oudemans exécuta une nouvelle comparaison après avoir accommodé à ses yeux la mise au point de l'oculaire et du microscope entier; seulement, après avoir ajusté le mètre des Archives, il prit chaque fois sur le mètre en X un pointé double.

Il obtint les lectures suivantes:

TABLEAU VI.

	1.	2.	3.	4.	5.	Moyennes
Droite.	16,3 15,5	12,2 13,6	13,1 12,7	14,1 13,0	12,5 12,5	13,55
Gauche.	17,3 17,4	17,6 18,4	19,0 19,3	16,8 18,5	18,9 17,8	18,10
Droite.	13,7 14,8	12,8 15,5	15,8 15,6	12,4 12,5	13,5 13,8	14,04

Thermomètres: I 16,015; II 16,02.

$$X - A = 18{,}10\,d - 13{,}79\,d = +4{,}31\,d = +1{,}08\,\mu$$

51. Évidemment on ne peut pas attribuer la différence de 2,75 μ entre ce résultat et le précédent à l'élèvement de température survenu entre le commencement de la première série et la fin de la dernière. Même en supposant que l'un des mètres fût resté en retard de tout l'intervalle de température parcouru

Digitized by Google

par les thermomètres, la différence ne pourrait être que de 0,2 μ. Pour décider si la différence devait être attribuée à une équation personnelle entre les deux observateurs ou bien à la différence dans la mise au point, M. OUDEMANS exécuta, aussitôt après que l'écart eut été constaté, les quatre séries abrégées suivantes en déréglant et en rétablissant après chaque série la mise au point. Il obtint ainsi les résultats suivants:

TABLEAU VII.

I.			II.		
1. Gauche.	2. Droite.	3. Gauche.	1. Droite.	2. Gauche.	3. Droite.
18,5 18,5	12,2 12,2	19,9 20,1	32,3 32,7	30,0 29,4	34,9 35,6
18,50	12,20	20,00	32,50	29,85	35,25
$X - A = 19,25\,d - 12,20\,d = +7,05\,d = +1,76\,\mu$			$X - A = 29,85\,d - 33,875\,d = -4,025\,d = -1,01\,\mu$		
III.			IV.		
1. Gauche.	2. Droite.	3. Gauche.	1. Droite.	2. Gauche.	3. Droite.
31,1 30,9	33,5 33,2	30,3 31,5	37,8 38,0	44,5 42,2	42,9 43,5
31,00	33,35	30,90	37,90	43,35	43,20
$X - A = 30,95\,d - 33,35\,d = -2,40\,d = -0,60\,\mu$			$X - A = 43,35\,d - 40,55\,d = +2,80\,d = +0,70\,\mu$		
$11^h.40^m$. Thermomètres: I 16°,085; II 16°,080.					

Ces observations mirent en évidence que les écarts dans l'évaluation de la différence X — A doivent être attribués au déréglage et à l'ajustement nouveau de la mise au point.

52. L'image des pointes était loin d'être achromatique, celle de la pointe ayant des bords bleus, et sa réflexion présentant des bords rouges. Une mise au point différente pouvait faire varier l'aspect des bandes colorées, d'où devait résulter une différence dans la longueur mesurée.

Digitized by Google

Comme la lampe DRUMMOND donnait un éclairage du champ plutôt excessif, nous étions en mesure d'écarter cette cause d'erreur en dépouillant l'image, au moyen d'un verre jaune, des rayons appartenant aux parties extrêmes du spectre. Malgré l'amélioration notable des images, l'effet d'une variation de la mise au point persistait. Une meilleure méthode d'arranger les pointés ne fit que rendre plus probante cette influence. Cette méthode consiste à remplacer le pointé sur le mètre des Archives, exécuté jusqu'ici au moyen du mouvement lent du chariot, par un pointé fait en déplaçant les fils du micromètre. On obtient ainsi deux lectures à chacune des deux extrémités des mètres, à droite: les lectures d_1 du microscope I et d_2 du microscope II, à gauche: les deux lectures correspondantes g_1 et g_2, d'où l'on déduit l'équation:

$$X - A = (g_2 - g_1) - (d_2 - d_1) = (d_1 - g_1) - (d_2 - g_2)$$

Les observations sont alors arrangées comme le montre le tableau suivant:

TABLEAU VIII.

18 Avril 1879. $10^h.40^m$. Thermomètres: I 16°,015; II 16°,015. Observateur: M. BOSSCHA.

	I				II.			
N.	d_1	g_1	d_2	g_2	d_1	g_1	d_2	g_2
1	12,7		0,2			56,8		41,7
	15,8		1,1			55,1		40,2
2		6,5		— 2,2	53,2		44,9	
		6,8		— 2,1	56,2		44,7	
3	7,2		— 5,8			53,1		37,8
	5,6		— 4,1			53,2		37,8
4		9,4		4,1	48,7		38,0	
		10,9		4,9	47,9		37,0	
5	7,9		— 0,9			47,6		34,2
	7,1		— 0,8			47,3		34,4
	9,38	8,40	— 1,72	1,17	51,50	52,17	41,15	37,68

$11^h.18^m$. Thermomètres: I 16°,12; II 16°,12.

I. $X - A = + 3,87\, d = + 0,97\, \mu$. II. $X - A = - 4,14\, d = - 1,04\, \mu$.

Dans l'intervalle des deux séries on a renouvelé la mise au point. On voit que les résultats des deux séries présentent un écart de deux microns.

Plusieurs séries de comparaisons obtenues de cette manière montrèrent avec toute évidence que chaque nouvelle mise au point, soit de deux observateurs différents, soit du même observateur, comportait une équation différente et qu'en

Digitized by Google

ne touchant pas à la mise au point, des observateurs différents obtenaient des résultats à peu près identiques. Ceci étant établi, on résolut de poursuivre systématiquement l'étude de l'effet de l'abaissement et du relèvement des microscopes. M. Bosscha ayant dû retourner en Hollande, M. Oudemans exécuta avec M. Gustave Tresca les expériences suivantes.

53. On détermina d'abord le degré de tolérance de la mise au point, c'est-à-dire les limites dans lesquelles on pouvait faire monter ou descendre les microscopes sans troubler sensiblement la netteté des images. Cette détermination se fit de deux manières: premièrement en tâchant d'obtenir à plusieurs reprises une mise au point exacte et en évaluant, d'après l'ensemble des indications de la tête de vis qui servait à mouvoir le microscope et qu'on avait muni d'un cercle divisé, l'erreur moyenne de l'ajustement, ensuite en mesurant l'écart des positions extrêmes qui laissaient à l'image une netteté suffisante pour permettre un pointé.

En distinguant dans la première de ces déterminations les mises au point obtenues en faisant monter et en faisant descendre les microscopes, l'ensemble des expériences de M. Oudemans et de M. Gustave Tresca fournit les données suivantes:

Mises au point sur le mètre des Archives:

Mouvement	ascendant:	erreur moyenne . .	0,21 p
„	descendant:	„ „ . .	0,25 „

Mises au point sur le mètre à traits:

Mouvement	ascendant:	erreur moyenne . .	0,26 p
„	descendant:	„ „ . .	0,15 „

L'unité désignée par p est la dixième partie de la circonférence de la tête de vis et correspond par conséquent à 0,025 mm. L'erreur moyenne de la mise au point est donc de 5,5 μ [1]).

La différence des mises au point moyennes obtenues, soit en faisant monter, soit en faisant descendre les microscopes, donnait la valeur du temps perdu des vis. Elle se trouvait être en moyenne de 4,42 p, ou environ 110 μ, pour le microscope I et de 1,03 p, ou environ 25 μ, pour le microscope II.

La comparaison des mises au point sur les bouts de droite avec celles sur les bouts de gauche donnait la mesure du défaut d'horizontalité des deux mètres, qui atteignait la valeur de 10 microns pour le mètre des Archives et de 4 microns pour le mètre à traits. Ces valeurs résultent des chiffres suivants:

---

[1]) Voir la note du n°. 36.

Digitized by Google

TABLEAU IX.

Mises au point moyennes sur le mètre des Archives.

	Mouvement ascendant.		Mouvement descendant.	
	OUDEMANS.	G. TRESCA.	OUDEMANS.	G. TRESCA.
	p	p	p	p
Gauche . .	1,15	1,42	0,07	0,13
Droite . .	0,51	0,92	— 0,03	— 0,24
Différences	0,64	0,50	0,10	0,40
Différence moyenne: $0{,}41 = 10\,\mu$.				

Mises au point moyennes sur le mètre à traits.

	p	p	p	p
Gauche . .	12,09	12,40	7,95	7,78
Droite . .	12,33	12,77	7,99	7,75
Différences	— 0,24	— 0,37	— 0,04	+ 0,03
Différence moyenne: $-0{,}155 = 4\,\mu$.				

Après avoir corrigé autant que possible le défaut d'horizontalité du mètre des Archives, celui du mètre à traits étant estimé douteux, on procéda à la détermination des limites extrêmes des mises au point admissibles. La tolérance déterminée de cette manière se trouvait être de $1\,p = 25\,\mu$ pour les images des pointes du mètre à bouts et de $0{,}8\,p = 20\,\mu$ pour celles des traits. La meilleure mise au point se trouva indiquée en moyenne par les lectures suivantes des cadrans des têtes de vis:

pour le mètre des Archives . . 0,00
pour le mètre à traits 7,87

54. Avec ces données préliminaires on entreprit une série de comparaisons ayant pour but de déterminer les valeurs X — A correspondant à des mises au point déterminées. A cet effet l'index de la tête de vis du microscope II fut mis à 7,87; le microscope I fut porté successivement à 0,50, 0,25, 0,00, — 0,25 et

Digitized by Google

— 0,50. Les 5 comparaisons faites dans ces circonstances furent exécutées alternativement par MM. Oudemans et Gustave Tresca. Nous nous bornons à inscrire les résultats obtenus, qui furent les suivants :

TABLEAU X.

20 Avril 10h,30m. Thermomètres : I 16°,36 II 16°,35.			
Microscope I.	Microscope II.	X — A.	Observateur.
		d μ	
0,50	7,87	— 1,68 = — 0,42	Oudemans.
0,25	7,87	— 5,38 = — 1,35	Tresca.
0,00	7,87	+ 3,93 = + 0,98	Oudemans.
— 0,25	7,87	+ 3,05 = + 0,76	Tresca.
— 0,50	7,87	+ 6,62 = + 1,46	Oudemans.
11h,55m.			

Une deuxième série exécutée le jour suivant dans les mêmes circonstances donna les résultats du tableau XI.

TABLEAU XI.

21 Avril. 9h,45m. Thermomètres I 16°,39 ; II 16°,38.			
Microscope I.	Microscope II.	X — A.	Observateur.
		d μ	
0,50	7,87	— 7,11 = — 1,78	Oudemans.
0,25	7,87	— 8,16 = — 2,04	Tresca.
0,00	7,87	— 4,26 = — 1,06	Oudemans.
— 0,25	7,87	— 2,31 = — 0,58	Tresca.
— 0,50	7,87	+ 0,80 = + 0,20	Oudemans.
10h,52m. Thermomètres I 16°,50 ; II 16°,49.			

Les observateurs en s'entre-changeant ne touchaient pas à l'oculaire du microscope quoique leurs yeux n'eussent pas la même distance de vision distincte. Pour obtenir avec le même réglage du microscope une vision suffisamment distincte, M. Oudemans, qui est affecté d'hypermétropie, se servait d'un verre positif de 300 mm. de distance focale. Cependant au commencement de la seconde série, celle du 21 Avril, on a ajusté l'oculaire d'une manière différente de celle du jour précédent.

Les deux séries indiquent une marche assez régulière dans la variation de la

Digitized by Google

différence X — A avec l'abaissement du microscope. Ces variations paraissent même à peu près proportionnelles au déplacement du microscope, lorsqu'on sépare les résultats obtenus par les deux observateurs. En effet, en désignant par α la variation de X — A, correspondant à une variation de $0{,}50\,p = 12{,}5\,\mu$ dans la mise au point, les résultats de M. Oudemans réduits en microns donnent les équations suivantes:

20 Avril.	$X - A = -0{,}42 + \alpha$	21 Avril.	$X - A = -1{,}78 + \alpha$
	$X - A = +0{,}98$		$X - A = -1{,}06$
	$X - A = +1{,}46 - \alpha$		$X - A = +0{,}20 - \alpha$

d'où se déduisent les valeurs les plus probables:

20 Avril.	$X - A = 0{,}67\,\mu$	$\alpha = 0{,}94\,\mu$
21 Avril.	$X - A = -0{,}88$ »	$\alpha = 0{,}99$ »

Les observations de M. G. Tresca donnent:

20 Avril.	$X - A = -1{,}35 + \frac{1}{2}\alpha$	21 Avril.	$X - A = -2{,}04 + \frac{1}{2}\alpha$
	$X - A = +0{,}73 - \frac{1}{2}\alpha$		$X - A = -0{,}58 - \frac{1}{2}\alpha$

d'où il suivrait:

20 Avril.	$X - A = -0{,}31\,\mu$	$\alpha = +2{,}07\,\mu$
21 Avril.	$X - A = -1{,}31$ »	$\alpha = +1{,}46$ »

Les valeurs de α, sensiblement concordantes pour le même observateur, diffèrent d'un observateur à l'autre. Par contre les valeurs de X — A, en moyenne — 0,10 μ pour M. Oudemans, — 0,81 μ pour M. Tresca, ont baissé, du 20 Avril au 21, de 1,55 μ et de 1,00 μ. Ce sont surtout les comparaisons de M. Oudemans qui démontrent d'une manière probante que les différences X — A varient à peu près proportionnellement avec la distance des pointes à l'objectif. Les erreurs moyennes 0,95 μ et 1,08 μ, calculées en supposant que les valeurs X — A fussent invariables, sont abaissées à 0,38 μ et 0,22 μ par l'introduction dans le calcul d'une variation proportionnelle à l'abaissement du microscope. Les observations de M. Tresca, quoique trop peu nombreuses pour permettre de calculer les erreurs moyennes dans cette dernière supposition, ne laissent cependant aucun doute au sujet de l'influence systématique de la mise au point.

La variation dans la valeur moyenne de X — A survenue entre le 20 et le 21 Avril, n'a rien qui doive surprendre. Il est très probable que la position moyenne de la tête de vis du microscope I, savoir 0,00, n'a pas répondu, aux deux époques de l'observation, à la même distance de l'objectif. L'effet d'un déplacement survenu dans l'intervalle et qui aurait éloigné l'objectif de 20 à 25 microns,

Digitized by Google

suffirait pour expliquer la différence. Que ce déplacement a réellement eu lieu est rendu probable par le fait que, avant de commencer la seconde série, on a dû améliorer l'image en touchant à l'oculaire.

55. Une troisième série de comparaisons devait servir à rechercher jusqu'à quel point cette même influence se faisait sentir sur le mètre à traits. A cet effet le microscope I resta invariable, le microscope II fut abaissé successivement. Pendant ces comparaisons on remarqua que les images des traits s'amélioraient de série en série, de sorte que dans la cinquième série on semblait avoir atteint la mise au point correcte. Pour cette raison on continua les observations en abaissant encore deux fois de $0{,}2\,p$ le microscope II. Cette série donna les résultats suivants:

TABLEAU XII.

21 Avril $11^h{,}0^m$.			
Microscope I.	Microscope II.	X — A	Observateur.
		d $\quad$ μ	
0,0	8,3	$-1{,}18 = -0{,}30$	Tresca.
0,0	8,1	$+1{,}29 = +0{,}32$	Oudemans.
0,0	7,9	$+0{,}85 = +0{,}21$	Tresca.
0,0	7,7	$+4{,}94 = +1{,}24$	Oudemans.
0,0	7,5	$+1{,}83 = +0{,}46$	Tresca.
0,0	7,3	$+3{,}24 = +0{,}81$	Oudemans.
0,0	7,1	$+2{,}70 = +0{,}68$	Tresca.

En calculant séparément les comparaisons des deux observateurs, on trouve pour la valeur de X — A, correspondant à la mise au point moyenne, et pour la valeur β de la variation de X — A, correspondant à un abaissement du microscope de $0{,}4\,p = 10\,\mu$, les nombres suivants:

	X — A	β	$\alpha = \frac{5}{4}\beta$
G. Tresca. . .	$+0{,}26\,\mu$	$0{,}32\,\mu$	$0{,}40\,\mu$
Oudemans. . .	$+0{,}79$ »	$0{,}24$ »	$0{,}30$ »

Ici les résultats des deux observateurs offrent une coïncidence plus exacte. Mais la variation α de X — A, résultant d'un déplacement de $12{,}5\,\mu$ en hauteur du microscope, est beaucoup moins sensible que dans les deux séries précédentes, qui se rapportent au mètre à bouts. Pour le mètre à traits elle serait en moyenne $0{,}35\,\mu$, tandisque sur le mètre des Archives cette valeur atteint $1{,}36\,\mu$. La réalité de l'influence de la mise au point sur le mètre à traits paraît même assez douteuse si l'on considère qu'en tenant compte de cette influence, l'erreur

Digitized by Google

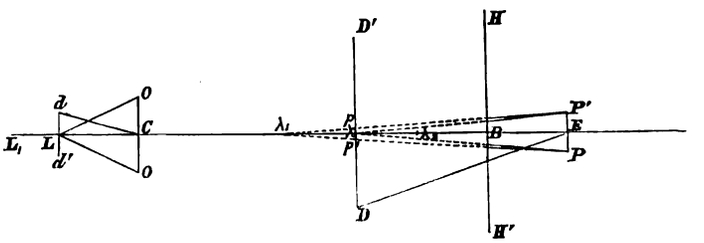
moyenne de chaque comparaison ne se trouve guère amoindrie d'une quantité quelque peu considérable.

56. On considéra donc comme suffisamment établi que la longueur apparente du mètre à bouts des Archives variait avec la mise au point du microscope et que cette variation était sensiblement proportionnelle au déplacement en hauteur du microscope. Il restait à désigner la cause de cette influence de la mise au point. Ce fut M. Fizeau, qui dans une conférence avec M. Oudemans, à laquelle prirent part MM. Morin, Tresca et Cornu, donna l'explication des variations observées. Il fit remarquer que, par l'effet d'une mise au point défectueuse, un point lumineux placé devant l'objectif, et dont l'image dans le cas d'une mise au point exacte se présente comme un point situé dans le plan de vision pour lequel l'oeil se trouve accommodé, formera dans ce plan une figure de diffusion, qui sera un cercle lorsque le cône des rayons, qui entrent dans le microscope, aura lui-même une section circulaire. Lorsque le cercle de diffusion est uniformément éclairé, l'observateur, qui estime que la mise au point est exacte et qui par conséquent n'aperçoit pas les dimensions linéaires de l'aire lumineuse, jugera que l'image du point visé se trouve au centre de ce cercle. Mais si la moitié de l'objectif est couverte, de sorte que la section du cône lumineux qui entre dans le microscope est un demi-cercle, l'image du point lumineux dans le plan de vision sera également un demi-cercle, qui se présentera à l'observateur comme un simple point, dont le lieu ne coïncidera plus avec le centre du cercle complet. Le pointé sur l'image du point lumineux sera transporté à une certaine distance du centre dans la direction de la partie éclairée. Si l'on suppose que cette distance soit proportionnelle au rayon du cercle de diffusion, qui est lui-même proportionnel à l'écart de la mise au point, il est évident qu'une variation dans l'évaluation du lieu de l'image, proportionnelle au déplacement en hauteur du microscope, doit se présenter lorsque la moitié de l'objectif est couverte. Or c'est précisément le cas dans les comparaisons de mètres à bouts d'après la méthode de réflexion. En effet le prolongement de l'axe du microscope coïncide à 4 ou 3 microns près avec la face terminale du mètre, de sorte que dans l'objectif ce ne sont que les moitiés extérieures par rapport aux deux bouts du mètre qui reçoivent les rayons de la pointe et de son image. Les points lumineux qui forment la limite de l'image des pointes dans le plan de vision, paraîtront donc tous transportés dans le même sens par l'effet d'une variation de la mise au point, et si cette variation est la même aux deux bouts de la règle, le déplacement se fera dans les deux cas soit dans la direction de l'extérieur de la règle, soit dans la direction contraire. Il en résultera une variation dans la longueur apparente du mètre à bouts.

Digitized by Google

57. Pour nous rendre compte de la manière dont le déplacement apparent, signalé par M. Fizeau, se fait sentir en grandeur et en direction, considérons un point lumineux L (fig. 8), situé sur le prolongement de l'axe optique C B du microscope à une distance $L C = a$ de l'objectif O O'. Soient H H' la dernière surface réfringente, P P' l'anneau oculaire du système, D D' le plan de vision distincte de l'oeil placé en E. Lorsque la mise au point est exacte, le cône lumineux incident L O O' sera transformé par son passage à travers le système en un cône émergent dont le sommet se trouve en λ, qui sera l'image de L. La directrice de ce cône sera la circonférence du cercle P P'. Si le point lumineux est transporté en L_1, la distance $L L_1 = \Delta a$ étant supposée petite, l'image sera transportée en λ_1, de manière qu'on a rigoureusement:

Fig. 8.



$$\lambda_1 \lambda = - G G_1 \Delta a$$

lorsque G désigne le grossissement de l'image qui se forme, dans le plan D D' passant par λ, d'un objet placé en L, et G_1 le grossissement dans le plan passant par λ_1. Le signe négatif indique que l'image se déplace dans la direction de l'extérieur à la dernière surface réfringente, lorsque le point lumineux est transporté dans la direction de la première surface réfringente vers l'extérieur. Le cône lumineux émergent λ_1 P P' coupe le plan de vision distincte suivant un cercle $\varrho\,\varrho'$, lorsque la surface entière de l'objectif O O' est éclairée par L. Si, au contraire, la moitié supérieure O C, dont l'image se forme en E P, est couverte, le cône semi-circulaire émergent λ_1 P' E coupera le plan de vision distincte suivant le demi-cercle $\lambda\,\varrho$. Soit ϱ le rayon de ce cercle, r celui de l'anneau oculaire, on aura:

$$\varrho = r \frac{\lambda \lambda_1}{E \lambda_1} = r \frac{\delta}{D + \delta}$$

en posant $E \lambda = D$, $\lambda \lambda_1 = \delta$.

Le pointé se fera sur un point situé entre λ et ϱ à une distance $\theta\,\varrho$ de λ, la valeur de θ étant comprise entre 0 et 1. L'erreur e qui en résulte dans l'évaluation de la position de L dans un plan perpendiculaire à l'axe, sera $\frac{\theta \varrho}{G}$ et l'on voit que dans le cas considéré le déplacement du pointé correspond à un écart du point visé dans la direction de la partie éclairée de l'objectif. Si, Δa étant

Digitized by Google

négatif, l'image fût transportée en λ_2, le demi-cône émergent $\lambda_1 P' L$ couperait le plan de vision suivant le demi-cercle $\lambda \varrho'$, et le déplacement apparent se ferait dans la direction de la partie non éclairée de l'objectif. Il en résulte que le relèvement du microscope doit transporter le pointé sur les bouts du mètre des Archives vers l'extérieur et agrandir la longueur apparente du mètre, tandis que l'abaissement du microscope doit donner lieu à une évaluation trop petite. C'est effectivement ce qui a eu lieu dans les comparaisons de MM. Oudemans et Tresca, rapportées dans les tableaux X et XI, les différences X — A devenant de plus en plus grandes dans le sens positif à mesure qu'on fait descendre le microscope.

En substituant dans la valeur trouvée pour e, savoir:

$$e = \theta \frac{\varrho}{G}$$

celle de ϱ, on obtient, en ayant égard à la relation $\delta = \lambda \lambda_1 = - G G_1 \Delta a$:

$$e = - \theta r G_1 \frac{\Delta a}{D + \delta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Mais nous avons déjà remarqué au n°. 33 que le grossissement G est donné par l'équation:

$$G = D \frac{c}{x}$$

dans laquelle D signifie la distance de l'image à l'anneau oculaire, $-c$ le rapport entre le rayon de l'ouverture de l'objectif R et celui de l'anneau oculaire r, et x la distance de l'objet à l'objectif, distance que nous venons de désigner par a. Dans nos notations actuelles on peut donc écrire:

$$G = - \frac{D}{a} \frac{R}{r}; \quad G_1 = - \frac{D + \delta}{a + \Delta a} \frac{R}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

ce qui, substitué dans la formule (1), fournit la relation:

$$e = \theta R \frac{\Delta a}{a + \Delta a} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

ou bien en négligeant par rapport à a la petite différence de mise au point Δa:

$$e = \theta R \frac{\Delta a}{a} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Le microscope qui a servi aux comparaisons des séries des tableaux X et XI était le même que celui qui a servi aux pointés, rapportés au n°. 32 et pour lequel $R = 3{,}75$ mm., $a = 14$ mm. On a donc:

$$\theta = \frac{e}{\Delta a} 3{,}73 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Digitized by Google

Comme l'erreur agit aux deux bouts du mètre dans le même sens sur la valeur X — A, la variation Δ (X — A) sera le double de e, donc:

$$\theta = \frac{\Delta (X - A)}{\Delta a} 1{,}87 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Pour un déplacement $\Delta a = 12{,}5\ \mu$, nous avons obtenu en moyenne $0{,}97\ \mu$ d'après M. Oudemans, $1{,}76\ \mu$ d'après M. G. Tresca. On aurait donc:

$$\theta = 0{,}152 \text{ Oudemans.}$$
$$= 0{,}263 \text{ G. Tresca.}$$

58. Une série d'expériences plus directes a été exécutée quelques mois plus tard par MM. Oudemans et Bosscha sur la proposition de ce dernier, dans le but de vérifier plus exactement la proportionalité de l'erreur e avec la variation Δa. On disposait alors du comparateur transversal dans lequel les microscopes étaient respectivement dirigés sur les deux bouts du même mètre. De plus on pouvait faire monter ou descendre l'un des bouts du mètre au moyen d'une vis dont la tige traversait la paroi supérieure de la chambre de cuivre, ce qui permettait de régler à l'un des bouts la distance des pointes à l'objectif, sans toucher au microscope et sans qu'on eût besoin d'entrer dans la chambre de cuivre.

L'expérience consistait à mesurer la longueur du mètre par rapport à la distance des axes des microscopes et de répéter cette mesure après avoir fait monter ou descendre le bout mobile du mètre d'une certaine quantité indiquée par le cadran gradué de la tête de vis. Ce mouvement en hauteur, qui s'exécutait seulement sur le bout gauche, eut toujours pour effet de déplacer un peu le mètre dans le sens longitudinal. Ce déplacement fut contrôlé par la lecture du microscope au côté droit.

Dans le tableau suivant sont inscrits, dans la première colonne les lectures du cadran, dans la seconde les lectures du micromètre de droite, dans la troisième les lectures de celui de gauche. Dans ces micromètres, les lectures croissantes du tambour indiquent que les fils se transportent à gauche, de sorte qu'il faut retrancher les lectures du micromètre de gauche de celles du micromètre de droite pour obtenir la différence A — M de la longueur A du mètre et de la distance M des points, correspondant, dans le plan de visée, avec la lecture zéro des micromètres. Les valeurs d'une division avaient été trouvées de $0{,}3081\ \mu$ pour le microscope de droite, de $0{,}3161\ \mu$ pour celui de gauche. Avec ces données on a calculé les différences A — M inscrites dans la quatrième colonne.

Digitized by Google

TABLEAU XIII.

Influence de la mise au point sur la longueur apparente du mètre des Archives.

8 Octobre 1879. 10h. soir. Observateurs: OUDEMANS et BOSSCHA.

Cadran.	Droite.	Gauche.	A — M.	Calcul.	ε.	ε^2.
22,2	73,5	91,5	— 6,29 μ	— 6,56 μ	+ 0,27	0,0729
23,6	80,0	107,5	— 9,35	— 9,20	+ 0,15	0,0225
25,1	96,8	133,8	— 12,50	— 12,03	— 0,47	0,2209
26,2	111,0	152,2	— 13,97	— 14,11	+ 0,18	0,0324
27,2	128,3	175,0	— 15,82	— 15,99	+ 0,17	0,0289

$$5\,x - 1{,}2\,\alpha = 57{,}90$$
$$-1{,}2\,x + 16{,}28\,\alpha = 16{,}28$$

$$x = -12{,}03\,\mu \qquad \alpha = 1{,}89\,\text{»}$$

$$[\varepsilon^2] = 0{,}3776$$
$$m^2 = 0{,}1259$$
$$m = 0{,}35\ \mu$$
$$m_x = 0{,}16\ \text{»}$$
$$m_\alpha = 0{,}087\ \text{»}$$

La position du cadran pour laquelle les pointes se montraient avec le plus de netteté était la position moyenne 25,1. En supposant que la valeur A — M varie d'une quantité α lorsque le cadran est tourné d'une division, on déduit de ces observations, pour calculer la valeur la plus probable x de A — M, correspondant à l'indication 25,1 du cadran, et celle de α, les équations normales inscrites dans le tableau. Elles fournissent les valeurs:

$$x = -12{,}03\,\mu \qquad \alpha = 1{,}89\,\mu.$$

Avec ces données le calcul des valeurs de A — M pour les différentes positions du cadran fournit les nombres inscrits dans la cinquième colonne.

L'effet de la mise au point se montre ici avec entière évidence. Les valeurs A — M accusent une marche descendante régulière à mesure que les indications du cadran montent, c'est-à-dire à mesure que la distance des pointes à l'objectif du microscope diminue. Les écarts des différences observées avec celles qui résultent du calcul basé sur la proportionalité des variations de A — M avec celles de la distance du microscope, sont faibles, surtout si l'on remarque que le déplacement répété du mètre est une circonstance peu favorable à la stabilité des mesures. Le calcul abaisse l'erreur moyenne de chaque mesure à 0,35 μ. Cette erreur serait plus de dix fois plus grande, si l'on admettait que les valeurs A — M devraient être constantes. Enfin l'erreur moyenne de la mesure de α n'atteint que 4,6 pour cent.

Une division du cadran correspond à un déplacement de 19 microns. On a donc:

$$\frac{\alpha}{\Delta\alpha} = \frac{1{,}89}{19} = 0{,}10.$$

Digitized by Google

59. Une même série d'expériences a été exécutée, immédiatement après, sur le mètre à traits n°. 19. On a pu donner au cadran de la tête de vis neuf positions différentes sans trop gêner les pointés. Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau suivant.

TABLEAU XIV.

Influence de la mise au point sur la longueur apparente du mètre à traits n°. 19.

8 Octobre 1879. $10^h.20^m$ soir. Observateurs: OUDEMANS et BOSSCHA.

Cadran.	Droite.	Gauche.	N° 19 — M.	Calcul.	ε.	ε^2.
32,1	87,7	117,5	— 10,14	— 9,38	— 0,76	0,5776
33,1	72,3	98,0	— 8,73	— 9,11	+ 0,38	0,1444
34,1	53,4	79,7	— 8,75	— 8,84	+ 0,09	0,0081
35,05	39,0	63,4	— 8,04	— 8,58	+ 0,54	0,2916
36,05	26,4	52,0	— 8,31	— 8,31	+ 0,00	0,0000
37,0	16,0	40,8	— 7,98	— 8,05	+ 0,07	0,0049
38,0	9,2	34,0	— 7,92	— 7,78	— 0,14	0,0196
39,05	3,0	25,5	— 7,16	— 7,60	— 0,44	0,1936
40,0	98,0	22,5	— 7,74	— 7,24	— 0,50	0,2500

$9 \quad x = -74{,}77$
$58{,}42 \quad \alpha = -15{,}83$

$x = -8{,}308\,\mu$
$\alpha = -0{,}271\,\mu$

$[\varepsilon^2] = 1{,}4898$
$m^2 = 0{,}2128$
$m = 0{,}46\ \mu$
$m_x = 0{,}15\ \mu$
$m_\alpha = 0{,}060\ \mu$

Les observations indiquent ici une variation en sens contraire de celui de la série précédente et qui donnerait:

$$\frac{\alpha}{\Delta a} = -0{,}014.$$

Cette variation exclut l'influence que nous venons de discuter. Elle peut provenir d'un déplacement continu de l'image du trait dans le champ du microscope, qui serait dû à un mouvement des microscopes. L'effet de la variation de la valeur d'une division du micromètre n'a pu être que tout-à-fait insensible. On pourrait encore attribuer la variation, dans une faible proportion, à ce que la moitié de l'objectif située du côté du milieu du mètre eût été plus fortement éclairée que l'autre moitié. La réalité de la variation est, du reste, moins bien établie que dans le cas du mètre à bouts. En effet, en tenant compte de cette variation, l'erreur moyenne d'une observation est seulement réduite de 0,84 μ à 0,46 μ. L'erreur moyenne de la mesure de α atteint 21 pour cent.

Il est probable que les causes qui ont déterminé une diminution de la lon-

Digitized by Google

gueur apparente du mètre à traits par rapport à la distance des axes des microscopes, ont agi également dans les mesures du tableau XIII. La valeur $\alpha = 1{,}89\,\mu$ de ce dernier exprimerait donc l'effet combiné du phénomène optique analysé au n°. 57 et des actions qui ont fait varier dans un sens contraire la valeur de la différence n°. 19 — M. Le premier effet aurait ainsi pour mesure:

$$\frac{\alpha}{\Delta a} = 0{,}10 - (-0{,}01) = 0{,}11.$$

Les objectifs adaptés aux microscopes qui ont servi dans ces expériences diffèrent de ceux qui ont été employés dans les expériences des tableaux II, III et IV. On avait remplacé ces verres, dont l'achromatisme avait été reconnu insuffisant, par des systèmes combinés par M. Prazmowski et exécutés par M. Hartnäck. Les distances focales et les épaisseurs des lentilles constituant ces systèmes ont été mesurées avec beaucoup de soin par M. Oudemans à Utrecht, sur un des objectifs que M. Tresca avait bien voulu envoyer dans ce but. On déduit de ces mesures que, avec les microscopes munis de ces objectifs, la distance a de l'objet visé à la première surface réfringente a dû être de 15 mm., le rayon R de l'ouverture étant de 3,5 mm. Comme la mise au point n'a varié que sur l'un des bouts du mètre, la formule (4) du n°. 57 donnerait:

$$\theta = \frac{15}{3{,}5} \times 0{,}11 = 0{,}47.$$

Si le centre d'intensité de l'image sur lequel l'observateur a pointé eût coïncidé avec le centre de gravité du demi-cercle de diffusion, on aurait dû trouver:

$$\theta = 0{,}42.$$

Dans la note I, annexée à ce Rapport, l'influence de la mise au point a été discutée d'une manière plus complète. Il en résulte, ce qui est important à remarquer, que l'effet signalé par M. Fizeau ne se produit pas seulement sur l'image de l'objet visé, mais également sur celle des fils du micromètre, lorsque les bords de ces fils sont éclairés par la lumière venant de l'objectif, c'est-à-dire qu'ils se dessinent en noir dans le champ éclairé par la même source de lumière qui éclaire les bords de l'objet visé. Ce qui dans ce cas détermine l'erreur de la lecture du micromètre, c'est la différence de la mise au point de l'objet visé et de celle des fils, ou, plus exactement, la distance entre l'objet visé et l'image de la réticule que l'objectif formerait, en avant du microscope, si les fils fussent lumineux par eux-mêmes. On en conclut qu'en laissant le microscope à sa place, mais en variant l'ajustement de l'oculaire, on ne produit une variation dans la lecture du micromètre que pour autant qu'un même degré d'astigmatisme peut

Digitized by Google

causer un effet différent dans l'appréciation de l'observateur, selon qu'il s'agit de l'image des pointes ou de celle des fils. Par contre, l'ajustement de l'image des pointes jusqu'à ce qu'elle présente la plus grande netteté, n'est pas suffisant par lui-même pour éviter les erreurs que nous venons de discuter, si l'on n'a pas auparavant, avec le plus grand soin, arrangé l'oculaire du microscope de manière que les fils se présentent avec des bords parfaitement définis.

60. Le caractère essentiel des erreurs résultant de l'incertitude de la mise au point consiste en ce qu'elles sont des erreurs accidentelles; il y a autant de chance qu'elles se présentent dans un sens que dans le sens contraire. On peut donc atténuer leur effet en répétant les mesures après un nouvel ajustement des microscopes.

L'erreur correspondant à un même écart de la mise au point correcte est indépendante du grossissement du microscope. Mais le degré d'astigmatisme résultant d'un même écart augmente avec le grossissement, de sorte que pour le même observateur l'effet du même abaissement ou relèvement du microscope sur la netteté de l'image sera d'autant plus sensible que le grossissement est plus considérable. Sous ce rapport les puissants microscopes de la Section française présentent un avantage de très grande valeur dans l'application du procédé Fizeau. Nous avons vu que l'erreur moyenne de l'ajustement en hauteur du microscope n'atteint pour MM. Oudemans et Tresca que 5,5 microns. Avec la valeur de α trouvée dans la série du 8 Octobre 1879, cette incertitude correspondrait à une erreur dans un sens ou dans l'autre de 0,55 μ sur chacun des bouts, ou de 0,78 μ dans la longueur mesurée. Elle resterait donc encore au dessous du micron. Si l'on compare l'erreur moyenne de l'ajustement obtenu par MM. Oudemans et Tresca en employant un grossissement de 268 fois, savoir 5,5 μ, avec celle que nous avons calculée dans la note du n°. 39 d'après les expériences de M. Hirsch, faites avec un grossissement de 68 fois, savoir 20,45 μ, on trouve une proportionalité presque exacte de la précision de la mise au point avec le grossissement, ce qui doit arriver lorsque, les observateurs ayant la même sensibilité de vision, les angles soustendus au point visé par l'ouverture de l'objectif ont été les mêmes dans les deux cas. Il en résulte qu'avec un grossissement de 68 fois un observateur, opérant dans les mêmes conditions, ne pourrait obtenir, dans l'application du procédé Fizeau, qu'une précision limitée par l'erreur moyenne de 3 μ, dans les mesures obtenues en variant chaque fois la mise au point.

Lorsque l'objectif n'est éclairé que par la moitié extérieure par rapport au mètre, l'erreur est proportionnelle au rayon de l'ouverture. On ne peut pas cependant diminuer l'erreur résultant de la mise au point en diminuant ce rayon au moyen d'un diaphragme fixe placé devant l'objectif. En effet, on affaiblirait

Digitized by Google

de cette manière en même temps le degré d'astigmatisme produit par un écart déterminé de la mise au point, ce qui ferait accroître dans la même proportion l'erreur moyenne dans la position du microscope. Ainsi, dans la valeur $\theta R \frac{\Delta a}{a}$ de l'erreur dans la longueur du mètre à bouts, le produit $R \Delta a$ resterait le même. On parviendrait au contraire à écarter autant que possible la cause d'erreur inhérente à l'emploi de la méthode Fizeau, si l'on adaptait devant le microscope un diaphragme mobile. On règlerait la mise au point avec l'objectif entièrement découvert, et on ne procéderait aux comparaisons qu'après avoir appliqué le diaphragme pour limiter la surface libre de l'objectif aux parties centrales du verre. Ce moyen a été proposé en effet [1]), mais il n'a pas été employé parce qu'on jugeait que l'installation de l'appareil nécessaire serait trop compliquée.

Dans les comparaisons définitives, dont nous avons à rendre compte maintenant, on a tâché d'amoindrir autant que possible l'effet des erreurs sur le résultat final, en employant tous les soins pour obtenir une mise au point exacte, en multipliant les séries, et enfin en introduisant dans le calcul des équations du mètre des Archives avec les nouveaux étalons non seulement les séries des mesures faites avec le mètre des Archives par les divers observateurs, mais aussi les séries de comparaisons des mètres à traits entre eux, qui peuvent servir à contrôler les comparaisons plus difficiles d'un mètre à traits avec un mètre à bouts.

---

[1]) Lettre de M. Bosscha à M. Tresca du 31 Août 1879. »On adapterait devant l'objectif, mais séparé »du corps du microscope, un diaphragme dont l'ouverture laisse passer juste assez de lumière pour per»mettre encore un pointé exact. On règle la mise au point avec l'objectif entièrement découvert, on fait »les comparaisons lorsque l'objectif est muni de son diaphragme. Comme la sensibilité de la mise au point »ainsi que les erreurs causées par une mise au point inexacte sont proportionnelles à l'ouverture libre de »l'objectif, on se placerait ainsi dans les conditions les plus avantageuses pour les deux opérations. Pour »constater de temps en temps si la mise au point n'a pas changée, il faudrait que le diaphragme pût s'en»lever et se replacer du dehors de la cloche de cuivre selon le gré de l'observateur".

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

J. BOSSCHA. Relation des expériences qui ont servi à la construction de deux mètres étalons en platine iridié, comparés directement avec le Mètre des Archives. Première Partie.

I. Introduction.

Pages.

§ 1. Origine de la Commission internationale du mètre. . . . . 65.

§ 2. Travaux et résolutions de la Commission internationale du mètre . . . . . 68.

§ 3. Travaux de la Section française et concours du Comité Permanent . . . . . 71.

§ 4. Conférence diplomatique du mètre . . . . . 81.

II. Élasticité d'une des règles. Degré de précision des mesures micrométriques . . . . . 84.

III. Examen des qualités chimiques des règles . . . . . 107.

IV. Recherche d'une cause d'erreur dans la mesure de la longueur d'un mètre à bouts . . . . . 118.

Digitized by Google

Geology

05
EL
1
3 & 4

ANNALES

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

DE

DELFT.

3me et 4me LIVRAISON.

JUL 26 1973

THE LIBRARY OF THE
JUL 23 1973
UNIVERSITY OF ILLINOIS
AT URBANA-CHAMPAIGN

LEIDE. — E. J. BRILL.
1885.

GEOLOGY

Digitized by Google

Digitized by Google

Le déplacement de M. Bosscha, élu secrétaire perpétuel de la Société hollandaise des Sciences à Harlem, devant nécessairement causer des retards dans la correction des épreuves, la publication de la suite de son Rapport a dû être remise à une prochaine livraison des Annales de l'École Polytechnique de Delft. La deuxième partie de la „Relation des expériences qui ont servi à la construction de deux mètres étalons en platine iridié, comparés directement avec le mètre des Archives" et les Annexes formeront la première et la deuxième livraison du Tome II de ce Recueil.

Digitized by Google

Digitized by Google

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE SUR L'EFFET THERMO-ÉLECTRIQUE, DÉCOUVERT PAR THOMSON.

PAR H. HAGA.

L'application de la théorie mécanique de la chaleur aux phénomènes thermo-électriques a jeté un jour nouveau sur la relation qui existe entre les actions découvertes par SEEBECK et par PELTIER, c'est-à-dire, entre la force électromotrice, produite par une différence de température dans les deux soudures d'un circuit de deux métaux, et l'effet thermique différent, produit par le courant dans une soudure selon la direction du mouvement électrique.

CLAUSIUS et THOMSON, qui ont transformé et étendu le principe de CARNOT pour en déduire la seconde loi de la théorie mécanique de la chaleur et ses corollaires importants, ont aussi les premiers appliqué la nouvelle loi aux phénomènes thermo-électriques.

Le rapport que cette loi établit entre le maximum du coëfficient économique d'un cycle d'actions thermodynamiques et les températures des corps entre lesquels s'opère le transport de chaleur, ne peut fournir une relation définie entre les propriétés physiques qui entrent en jeu, que dans le cas où ce cycle est réversible, parce que dans ce cas seulement le coëfficient économique a une valeur unique. Cette condition cependant n'est pas remplie dans un circuit thermo-électrique.

En effet, considérons, pour fixer les idées, un circuit composé de fer et de cuivre, soient T_2 et T_1 les températures absolues des soudures, T_2 étant $> T_1$. Tant que la somme des températures T_1 et T_2 n'excède pas la valeur 2 (273 + 275,8) le courant passera, dans la soudure plus chaude, du cuivre au fer. D'autre part, PELTIER a démontré qu'un courant produit aux points de contact de ces métaux un abaissement de température lorsqu'il passe du cuivre au fer, un

Digitized by Google

échauffement lorsqu'il a la direction opposée. Le courant thermo-électrique dû à la différence de température a donc pour effet d'enlever de la chaleur à la soudure qui se trouve à la température la plus élevée et de produire de la chaleur dans la soudure à basse température. Par l'effet du courant il se produira de plus, dans tous les points du circuit, le dégagement de chaleur que M. THOMSON a désigné sous le nom de *frictional generation of heat.* Cette *chaleur de friction* sera déterminée en quantité par la loi de JOULE, c'est-à-dire, la chaleur totale dégagée dans le circuit entier sera, pour le même circuit, proportionnelle au carré de l'intensité ou au carré de la somme des forces électromotrices du circuit. Lorsque le courant ne produit aucun travail mécanique, la somme de la chaleur de friction et de la chaleur dégagée à la soudure de température T_1 sera, d'après la première loi de la théorie mécanique de la chaleur, égale à celle qui a été enlevée à la soudure de température T_2.

Le courant thermo-électrique peut faire marcher une machine magnéto-électrique placée dans le circuit et qui ainsi transforme une partie de l'énergie électrique du courant en travail mécanique. Cette machine fait naître une force électromotrice contraire à celle du courant thermo-électrique et qui croît avec la vitesse. Il en résulte que, à mesure que la vitesse de la machine augmente, l'intensité du courant et en même temps la quantité de chaleur enlevée à la soudure de température T_2 et celle qui est transmise à la soudure de température T_1 diminuent.

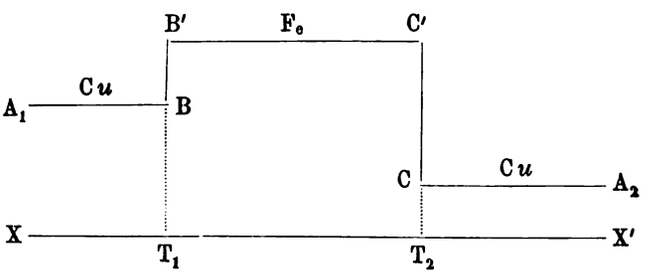
Dans cette disposition, qui réalise les deux actions principales qui ont lieu dans un appareil thermodynamique, savoir, transport de la chaleur et transformation partielle de la chaleur en travail mécanique, il se passe nécessairement deux autres transformations qui ne présentent pas le caractère de réversibilité exigé pour pouvoir appliquer la seconde loi de la théorie mécanique de la chaleur. L'existence du courant même implique une dépense d'énergie pour produire la chaleur de friction, et la circulation de l'électricité suppose des conducteurs reliant deux corps de température différente et donnant lieu à une transmission de chaleur par conductibilité. Mais M. THOMSON a déjà fait observer [1]) que, lorsque la force électromotrice E de la pile thermo-électrique et celle M de la machine électromagnétique tendent à l'égalité, la chaleur de friction tend à devenir infiniment petite par rapport à la chaleur qui est transformée en travail mécanique. En effet, la chaleur de friction est proportionnelle à $(E - M)^2$, le travail de la machine est proportionnel à $M(E - M)$. La difficulté qui résulte de l'irréversibilité de la chaleur de friction n'existe donc pas théorétiquement, quoique dans

[1]) Mathematical and Physical Papers. Vol. I. p. 289.

Digitized by Google

la réalisation pratique de l'appareil imaginé on sera toujours très éloigné des conditions théoriques. Il n'en est pas tout-à-fait ainsi pour la transmission de la chaleur par conductibilité, parceque nous ne connaissons aucune substance pouvant servir comme conducteur électrique qui ne serait pas en même temps un conducteur de la chaleur. M. Thomson a donc seulement présenté comme une hypothèse extrêmement probable que la relation entre l'action thermique et l'effet mécanique produit, indiquée par la théorie dynamique de la chaleur dans le cas d'un procédé réversible, doit se trouver vérifié dans l'appareil imaginé pour la partie de l'action thermique qui est réversible avec le courant. Dans cette supposition, le rapport de la quantité de chaleur transformée en travail mécanique à celle qui est enlevée à la soudure la plus chaude, doit être égal au rapport de la différence des températures des deux soudures à la température absolue de la première soudure.

Fig. 1.



Ce théorème conduit à une relation très simple entre l'intensité du courant et les températures des soudures.

M. Clausius a attribué le courant thermo-électrique au mouvement moléculaire que nous appelons chaleur et qui, dans chacune des deux soudures d'un couple, pousserait l'électricité positive de l'un des deux corps dans l'autre, de manière à donner lieu à une différence constante de potentiel électrique des deux côtés de la surface de contact. Lorsque le circuit est ouvert, les valeurs du potentiel électrique dans les différents points des conducteurs peuvent être représentées par une ligne brisée comme dans la figure 1, dans laquelle les ordonnées indiquent les valeurs du potentiel par rapport à un certain niveau fixe et les abscisses les résistances à partir d'un certain point du circuit. Le point A_1 étant maintenu à un potentiel plus élevé que A_2, la jonction de ces deux points déterminera le passage de l'électricité de A_1 vers A_2, et par l'effet des forces électromotrices un courant dans la direction $A_2\,C\,C'\,B'\,B\,A_1$. Lorsque ce courant est devenu constant, la quantité d'électricité i, qui dans l'unité du temps passe par une section du conducteur en C, devra être portée à un potentiel plus élevé. Si E_{T_2} est la différence de potentiel que le mouvement thermique des molécules maintient en C, le travail absorbé par l'électricité et emprunté à la soudure de température T_2 sera $i\,E_{T_2}$. La différence de potentiel B B', produite par le mouvement moléculaire moins fort de la température T_1, aura pour effet que l'électricité, en

Digitized by Google

passant du fer au cuivre subira une chute de potentiel E_{T_1} qui donnera lieu à la production d'une quantité de chaleur équivalente au travail $i E_{T_1}$. A ces deux effets thermiques se joint la chaleur de friction qui, lorsque r désigne la résistance du circuit, aura pour mesure le produit $i^2 r$. D'après la première loi de la théorie mécanique de la chaleur on aura l'équation:

$$i E_{T_2} - i E_{T_1} - i^2 r = 0 \quad \text{(I)}$$

La seconde loi fournit la relation:

$$\frac{i E_{T_2} - i E_{T_1}}{i E_{T_2}} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} \quad \text{(II)}$$

Pour une différence infiniment petite des deux températures on pourra écrire:

$$\frac{\frac{\delta E_T}{\delta T} \delta T}{E_T} = \frac{\delta T}{T}$$

ou

$$\frac{\delta E_T}{\delta T} = \frac{E_T}{T}$$

d'où l'on déduit:

$$E_T = \varepsilon T \quad \text{(III)}$$

en désignant par ε une constante dont la valeur indique l'accroissement de la différence de potentiel produit par une élévation de température de 1 degré centigrade.

L'équation (I) peut ainsi prendre la forme:

$$i = \frac{\varepsilon (T_2 - T_1)}{r} \quad \text{(IV)}$$

2. Cette dernière équation cependant ne se vérifie expérimentalement que pour de petites variations de température. Pour des différences plus grandes il n'y a plus de proportionnalité entre i et $T_2 - T_1$; dans plusieurs cas le courant diminue lorsqu'on augmente la différence de température, il peut même devenir nul et changer de signe.

C'est ainsi que les expériences ont démontré que, dans le couple fer-cuivre, le courant est nul lorsque la température de l'une des soudures est autant en dessous de 275°,8 C. que celle de l'autre soudure est en dessus, et que, dans la soudure chaude, le courant passe du cuivre au fer lorsque la température de cette soudure est plus près de 275°,8 que celle de la soudure froide et dans le sens contraire lorsque la température de la soudure chaude est la plus éloignée. Si donc l'une des soudures a est à la température de 275°,8, l'autre b à la température $275°,8 + \delta$, le courant passera dans cette dernière du fer au cuivre, de

Digitized by Google

sorte que le cuivre sera dans l'échelle thermo-électrique positif par rapport au fer. Mais si la température de b descend à $275°,8 - \delta$, le courant aura encore la même direction, de sorte qu'il passe maintenant du fer au cuivre dans la soudure moins chaude et que par conséquent le cuivre est électro-négatif par rapport au fer. Donc à 275°,8 les deux métaux seront neutres l'un par rapport à l'autre, le mouvement thermique des molécules ne provoquera aucune différence de potentiel et le phénomène de PELTIER ne pourra se manifester.

De ce dernier fait M. THOMSON a tiré une conséquence importante. Considérons le circuit fer-cuivre, dans lequel l'une des soudures est exactement à 275°,8, l'autre à une température plus basse. Comme dans cette dernière soudure le courant passe du fer au cuivre, il y aura dégagement de chaleur. Cette production de chaleur, de même que celle qui résulte de la friction qui a lieu dans tous les points du circuit selon la loi de JOULE, n'est pas équilibrée par une perte de chaleur dans la soudure chaude qui se trouve au point neutre. Il faut donc nécessairement qu'on puisse désigner dans le circuit des points où il y a absorption de chaleur. En n'ayant égard qu'aux actions réversibles, on ne peut désigner comme tels que les points contigus d'un même conducteur qui se trouvent à des températures différentes. Il faut donc qu'il y ait absorption de chaleur, soit lorsque dans le fer le courant passe des parties chaudes au parties moins chaudes, soit lorsque dans le cuivre le courant marche dans le sens des températures ascendantes, soit enfin dans les deux cas à la fois.

Désignons par σ_1 et σ_2 les quantités de chaleur dégagées dans le fer et dans le cuivre pendant l'unité de temps lorsqu'un courant de l'unité d'intensité passe dans le sens des températures descendantes et que dans ces conducteurs la différence de température est d'un degré centigrade. Les quantités de chaleur dégagées dans l'intervalle de deux points dont les températures diffèrent de δT, seront $\sigma_1 \delta T$ et $\sigma_2 \delta T$. Au lieu de l'équation (I) on devra poser:

$$i E_{T_2} - i E_{T_1} - i \int_{T_1}^{T_2} \sigma_1 \delta T - i \int_{T_2}^{T_1} \sigma_2 \delta T - i^2 r = 0$$

ou

$$i E_{T_2} - i E_{T_1} - i \int_{T_1}^{T_2} (\sigma_1 - \sigma_2) \delta T - i^2 r = 0$$

Lorsque T_2 coïncide avec le point neutre, on aura $E_{T_2} = 0$; il faudra donc que l'intégrale du troisième terme soit négative.

M. THOMSON a comparé le transport de chaleur opéré par l'électricité dans un conducteur homogène, dont les différentes parties ont des températures inégales, à celui qui est l'effet d'un fluide coulant dans un tube chauffé à l'un

Digitized by Google

de ses bouts. En raison de cette analogie il a proposé de désigner les quantités σ_1 et σ_2 comme „chaleurs spécifiques de l'électricité dans les différents métaux", cette chaleur spécifique étant supposée négative lorsque le courant produit de la chaleur en passant des parties froides aux parties chaudes.

M. THOMSON a vérifié sa conclusion par l'expérience et montré que dans le fer il y a absorption de chaleur lorsque le courant marche dans le sens des températures descendantes, de sorte que, dans le couple fer-cuivre, σ_1 est négatif, que dans le cuivre il y a absorption de chaleur lorsque le courant suit la marche inverse, de sorte que σ_2 est positif, mais que, la valeur absolue de σ_1 étant plus grande que celle de σ_2, la quantité $\sigma_1 - \sigma_2$ est négative, ainsi que l'exige la théorie thermodynamique. Les mêmes phénomènes ont été constatés par M. THOMSON dans le platine et le laiton, tandisque pour d'autres métaux l'existence d'un point neutre dans les couples formés de diverses combinaisons démontre qu'ils se comportent de la même manière.

Des expériences très étendues ont été publiées à ce sujet par M. LE ROUX en 1867 [1]). La méthode qu'il a employée dans ces recherches revient à placer l'une à côté de l'autre et dans des directions parallèles, deux lames du métal qu'on voulait étudier. En joignant les deux bouts d'un côté par un bon conducteur et en mettant les deux autres bouts en communication avec les deux pôles d'une pile, on pouvait faire circuler un courant qui traversait les deux lames dans des directions opposées. Les deux bouts d'un côté furent chauffés, ceux de l'autre côté refroidis, de sorte que le courant traversait l'un des conducteurs dans le sens des températures croissantes et l'autre dans le sens des températures descendantes. Pour étudier la différence de température qui, dans des points symétriques des deux conducteurs, devait résulter de l'effet THOMSON, une pile thermo-électrique plate fut installée entre les deux lames, de manière que les soudures de rang pair fussent en contact avec l'une des lames, et les soudures de rang impair avec l'autre. La pile thermo-électrique communiquait avec un galvanomètre sensible. En renversant le sens du courant dans les deux lames et en prenant la différence des déviations du galvanomètre, on éliminait l'effet de différences de température accidentelles, tout en doublant l'effet observé.

M. LE ROUX a trouvé que l'effet THOMSON était sensiblement proportionnel à l'intensité du courant passant par les lames. Pour les différents métaux il obtint les valeurs relatives suivantes, réduites à une même intensité de ce courant.

---

[1]) Recherches sur les courants thermo-électriques. Annales de Chimie et de Physique. 4me Série. Tome X. p. 201—291.

Digitized by Google

Bismuth de M. E. Becquerel (10 Bi, 1 Sb).	+ 73
Bismuth pur	— 31
Maillechort	— 25
Platine	— 18
Aluminium	— 0,1
Étain	— 0,1
Plomb.	sensiblement nul.
Laiton.	+ 0,3
Argent	+ 6
Cuivre	+ 2
Bronze d'aluminium (au $\frac{1}{10}$)	+ 6
Zinc	+ 11
Cadmium.	+ 31
Fer.	— 31
Antimoine du commerce	+ 64
Antimoine de M. E. Becquerel ($\frac{1}{5}$ Bi).	— 24

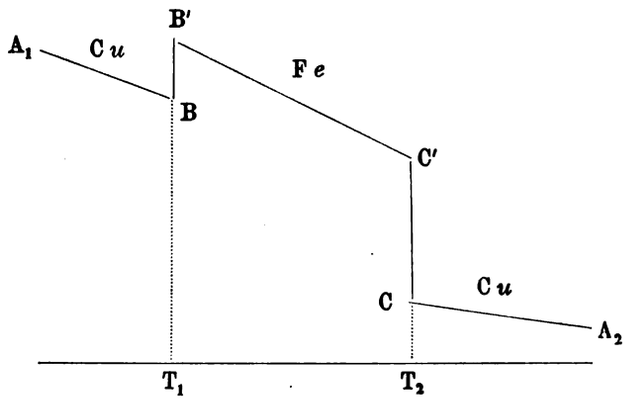
M. Le Roux est même parvenu à obtenir une évaluation de la valeur absolue de l'effet Thomson, en admettant que, dans certaines limites, les variations de température sont proportionnelles à la chaleur dégagée. Il observa que dans le bismuth de M. E. Becquerel la variation de température due à l'effet Thomson était, pour l'intensité du courant qu'il employa, $\frac{1}{50}$ de la chaleur produite par la chaleur de friction. Il en déduit que dans ce métal l'effet Thomson dégage une calorie (1 gramme, 1° C.) par minute, lorsque le courant unité passe d'une section de température 100° à une section de température 0°. Le courant employé par M. Le Roux comme unité dépose par minute 1,314 grammes de cuivre et équivaut par conséquent à 68 ampères.

3. Quoique l'application de la théorie mécanique de la chaleur aux propriétés électrothermiques du couple fer-cuivre conduise directement à admettre l'existence d'actions thermiques réversibles dans les conducteurs, l'effet Thomson ne peut pas cependant expliquer l'existence du point neutre si l'on regarde, ainsi que l'a fait M. Clausius, l'effet Thomson comme étant de même nature que le phénomène Peltier et par conséquent comme un indice que les points contigus d'un même conducteur sont le siége d'une force électromotrice, aussitôt qu'ils présentent une différence de température. La remarque a déjà été faite par M. Le Roux. Pour le faire voir nous préférons nous servir d'un raisonnement différent de celui de M. Le Roux. Examinons ce que devient la figure 1 si l'on tient compte des forces électromotrices qui, dans la supposition de M. Clausius, résulteraient de l'effet Thomson. Nous supposons que les deux points A_1 et A_2 du conducteur en cuivre sont à la même température, intermédiaire entre T_1 et T_2. Comme dans le cuivre le transport électrique de la chaleur est positif, l'élec-

Digitized by Google

tricité, en passant dans ce métal du froid au chaud, absorbera de la chaleur et devra être portée à un potentiel plus élevé. On en conclut que les forces électromotrices qui, d'après M. CLAUSIUS, existeraient dans les parties contiguës inégalement chauffées du cuivre, tendraient à mouvoir l'électricité dans le sens des températures croissantes. Donc, dans le circuit ouvert (fig. 2), le point A_1, doit se trouver à un potentiel plus élevé que B, et en C à un potentiel plus élevé que A_2. De même dans le fer, où l'effet THOMSON est négatif, le bout B', qui est à la température T_1, doit se trouver à un potentiel plus élevé que le bout C', dont la température est T_2. Il est clair que les inclinaisons que doivent ainsi présenter les lignes BA_1, $C'B'$ et A_2C, ne peuvent que faire accroître la différence de potentiel des points A_1 et A_2, au lieu de la rendre nulle ou même négative. L'annulation ou l'inversion du courant dans le circuit d'un couple thermo-électrique ne peut donc provenir que d'une variation de la force électromotrice avec la température dans les soudures. Ce sont ces variations que nous devrons connaître si nous voulons compléter la théorie des courants thermo-électriques. Comme les différences de potentiel dans les soudures sont proportionnelles aux quantités de chaleur dégagées ou absorbées par unité de courant, il faudra donc mesurer ces quantités pour des températures différentes des soudures. Déjà M. BUDDE a montré [1]) que, dans le couple cuivre-fer, le phénomène PELTIER est plus prononcé à mesure que la température descend, et qu'il ne se montre plus à la température neutre; et M. LE ROUX a tout récemment reconnu l'inversion de cette action aux températures élevées. Cependant on ne connaît pas exactement la loi de ces variations. Je me propose d'en faire un sujet d'étude lorsque j'aurai terminé mes recherches sur l'effet THOMSON.

Fig. 2.



4. Pour expliquer l'effet THOMSON, M. CLAUSIUS admet que l'échauffement d'un corps peut causer des variations de structure, de sorte que des parties inégalement chauffées se comportent par rapport l'une à l'autre comme des corps de nature différente; l'effet THOMSON ne serait que le phénomène PELTIER, résultant

[1]) Thermo-electrische Studien, Annales de Poggendorff. Tome 153, p. 343 (1874). Zur Theorie der thermo-electrischen Kräfte. Annales de Wiedemann. Tome 21, p. 277 (1884).

Digitized by Google

de ce que l'électricité passe d'un conducteur à un autre de nature différente.

On peut vérifier cette explication en recherchant si réellement il est nécessaire, pour produire l'effet THOMSON, qu'une différence de température exerce quelque influence sur la structure du conducteur. Évidemment cette influence n'existe pas dans les conducteurs liquides. J'ai donc voulu examiner si le transport électrique de la chaleur se manifeste dans un liquide. Pour cette recherche le mercure se recommanda par plusieurs raisons. Avec cette substance j'ai fait les expériences suivantes dans le laboratoire de physique de l'École Polytechnique de Delft.

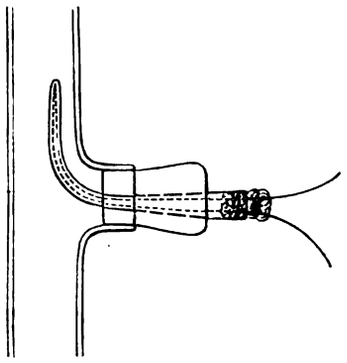
5. Comme M. LE ROUX s'est servi d'un galvanomètre ordinaire et que j'avais à ma disposition un galvanomètre à miroir de THOMSON j'ai cru pouvoir employer, au lieu d'une pile, une simple aiguille thermo-électrique. Elle se compose de deux fils fins, fer et maillechort, de 0,2 millimètre de diamètre et enroulés l'un sur l'autre sur une longueur de 15 millimètres, puis soudés et étirés à la filière. Avec deux de ces aiguilles, appliquées sur les deux conducteurs dans la disposition de M. LE ROUX, j'ai pu constater l'effet THOMSON dans le maillechort et j'ai pu même reconnaître qu'il existe dans le plomb, où il est positif. L'appareil à mercure était disposé comme le montre la figure de la planche.

Un tube de verre en forme d'un U renversé, d'un diamètre intérieur de 7 millimètres, est placé dans l'espace intérieur d'un cylindre annulaire en cuivre fermé en haut par un bouchon de liége. A la courbure supérieure du tube on a soudé un petit tube servant à introduire du mercure épuré dans les deux branches. Le bouchon soutient la tige d'un thermomètre dont le réservoir est placé dans une position symétrique par rapport aux deux branches dans l'intérieur du cylindre. Ces deux branches traversent un bouchon qui ferme l'espace cylindrique par le bas, ainsi que deux bouchons de caoutchouc fixés dans le couvercle d'un vase cylindrique en verre (le réservoir de verre d'un élément de BUNSEN) placé au dessous du vase annulaire de cuivre. Les bouts inférieurs des branches ont été fermés à la lampe, on y a soudé des fils de platine servant comme électrodes. Deux tubes latéraux soudés à l'anneau de cuivre permettent d'y faire circuler les vapeurs d'un liquide bouillant. L'espace cylindrique avec les parties supérieures du tube en U peuvent ainsi être portés, sur une longueur d'environ dix centimètres, à une température constante accusée par le thermomètre. Aux parties *a* et *b* des branches comprises entre les cylindres de cuivre et de verre se trouvent soudés des tubes latéraux ayant à peu près le même diamètre que le tube en U. Ces tubes sont fermés par des bouchons en caoutchouc traversés chacun par un petit tube en verre recourbé dans lesquels on a introduit les aiguilles thermo-électriques comme le montre la figure 3, qui représente cette disposition à peu près en grandeur naturelle. Le bout intérieur

Digitized by Google

du tube recourbé est fermé à la lampe, le bout extérieur est bouché par du coton. Les fils du couple thermo-électrique ont été enduits d'une solution d'asphalte dans le sulphure de carbone, laquelle, après sa dessiccation, constitue un vernis isolant résistant à toutes les températures pour lesquelles l'appareil doit servir. La soudure des fils n'a qu'une longueur de 2 millimètres. Le couvercle du vase en verre est traversé par deux tubes permettant d'y établir une circulation d'eau froide. Dans la paroi latérale de ce vase ont été rodées deux ouvertures circulaires laissant passer, fixés dans des bouchons, deux tubes en verre doublement recourbés et contenant du mercure. Les extrémités de ces tubes constituent ainsi des godets dans lesquels plongent d'un côté les électrodes en platine du tube, de l'autre côté les fils conducteurs d'une pile de 8 éléments de Daniell, accouplés de manière à former 2 éléments de surface quadruple. Le courant de cette pile peut ainsi traverser dans toute sa longueur le mercure du tube en U, il parcourra l'une des branches dans le sens des températures croissantes, l'autre dans le sens des températures descendantes. Dans le circuit de la pile on a introduit un commutateur en mercure et une boussole des tangentes remplacée plus tard par un ampèremètre Deprez-Carpentier.

Fig. 3.



L'anneau en cuivre a été recouvert de papier d'asbeste très-épais puis enveloppé de coton. Le vase en verre est également protégé par du coton contre les influences thermiques extérieures. Mais c'est surtout la partie du tube en U comprise entre les deux réservoirs et longue d'environ 8 centimètres, qui a été soigneusement isolée au moyen d'une épaisse couverture de coton. Pendant le fonctionnement de l'appareil on n'a jamais pu sentir à la main la moindre chaleur dans ces couvertures.

Lorsque les vapeurs et l'eau avaient circulé pendant quelque temps, — au moins une heure et demie, — la température aux points *a* et *b* était devenue sensiblement constante, mais des trépidations même très faibles suffisaient pour troubler cet équilibre. Comme le laboratoire de physique n'est pas assez éloigné du chemin de fer et d'autres voies de communication pour se trouver à l'abri des trépidations causées par les trains et les voitures, il était nécessaire de n'expérimenter que pendant la nuit. De plus, pour assurer la stabilité des appareils on s'est installé dans une des caves du laboratoire. Malgré ces précautions il se manifestait de temps en temps des perturbations; cependant, en général l'installation se montra suffisante pour permettre des expériences quantitatives.

Digitized by Google

Dans ces mesures on a fait communiquer entre eux les deux fils de maillechort des deux couples thermo-électriques, les fils de fer étant reliés aux deux bouts du conducteur d'un galvanomètre de THOMSON. La déviation de l'aiguille de ce galvanomètre fut observée au moyen de l'image d'une fente éclairée, projetée sur une échelle par le miroir de l'aiguille.

6. Lorsque tout est bien arrangé, l'aiguille du galvanomètre ne peut être déviée que par suite d'une différence de température dans les points *a* et *b*. Lorsque le courant de la pile de DANIELL traverse le mercure, une différence de température peut résulter d'une inégalité dans les dimensions transversales des deux colonnes de mercure. Mais si, — cette différence étant devenue stationnaire, — on renverse le courant, le mouvement de l'aiguille sera sensiblement proportionnel à l'effet THOMSON. Dans toutes les expériences on a observé, après le renversement du courant, un déplacement de l'image de la fente sur l'échelle, atteignant son maximum après l'espace de 4 ou 5 minutes, quelquefois, — surtout lorsqu'on employait comme source de chaleur les vapeurs d'aniline, — après un temps plus long. Comme exemple d'une expérience je citerai la suivante, faite dans des conditions ordinaires.

22 Octobre 1884.
Source de chaleur: Vapeur d'eau.

Heure.	Lecture. Courant ascendant en I.	Lecture. Courant ascendant en II.	Déplacement produit par l'inversion du courant.
h. m. 1,18		+ 92	
23	+ 70		17,5
29		+ 82	
34	+ 65		17,0
38		+ 81	
42	+ 65		16,0
47		+ 81	
Moyennes	+ 66,7	+ 84,2	

L'effet THOMSON est nettement accusé par ces lectures. Un déplacement de l'image dans le sens positif indique un échauffement en *b*. Donc il résulte des expériences consignées dans le tableau que, lorsque le courant de la pile de DA-

Digitized by Google

NIELL traverse le tube II de bas en haut, c'est à dire dans le sens des températures croissantes, il y a dégagement de chaleur. On en conclut que:

Dans le mercure le transport électrique de la chaleur est négatif. —

On peut se convaincre facilement que le déplacement de l'image résultant de l'inversion du courant est bien réellement dû à l'effet THOMSON. D'abord on remarque que l'aiguille se transporte lentement vers sa nouvelle position d'équilibre, ce qui ne pourrait être le cas, si sa déflection fût due à des courants d'induction ou à des courants dérivés qui seraient l'effet d'une isolation insuffisante du circuit thermo-électrique et du circuit de la pile de DANIELL. Mais, de plus, lorsqu'on intervertit les pôles du couple thermo-électrique en faisant communiquer entre eux les fils de fer et en joignant les fils de maillechort aux bouts du fil du galvanomètre, on observe que la déviation de l'aiguille a lieu dans un sens contraire.

7. Pour examiner si le transport électrique de la chaleur est proportionnel à l'intensité du courant, on a mesuré les déviations de l'aiguille produites par deux courants d'intensité très différente. On a ainsi obtenu les nombres suivants:

	Intensité du courant.	Déplacement de l'image.	Déplacement par unité de courant.
15 Octobre 1884	0,93	44	47,3
» » »	0,52	25	48,1
16 » »	0,93	43	46,2
» » »	0,47	23	48,8

Les intensités ont été exprimées par les tangentes des déviations de la boussole, les déplacements correspondent au renversement du courant. On voit que la proportionnalité se trouve suffisamment vérifiée.

8. La question qui se présente maintenant dans cette étude est la suivante: Comment le transport de la chaleur dépend-il de la température.

M. TAIT [1]) a supposé que l'effet THOMSON est proportionnel à la température absolue. M. THOMSON [2]) essaya de mesurer la différence de ces effets dans deux métaux, c'est-à-dire la valeur $\sigma_1 - \sigma_2$, à différentes températures en déterminant la température neutre de ces métaux au moyen des températures des soudures pour lesquelles le courant devient nul. M. THOMSON ne pouvait constater aucune variation assez considérable pour ne pas pouvoir être attribuée aux erreurs que les thermomètres à mercure non comparés au thermomètre à air peuvent présenter aux températures élevées.

---

[1]) Transactions of the Royal Edinburgh Society, Session 1870—1871 p. 308 et 1871—1872 p. 597.

[2]) Mathematical and Physical Papers. Vol. II, pg. 261.

Digitized by Google

Pour obtenir quelques données par rapport à la question que nous venons de poser, il était nécessaire d'opérer à des températures plus élevées et de recourir à l'emploi d'autres vapeurs que celle de l'eau. Il fallait de plus pouvoir déterminer dans chaque expérience faite avec une source de chaleur différente la variation de température par unité de longueur du conducteur. Il était même désirable de connaître ces variations dans plusieurs points du conducteur, pour pouvoir calculer en valeur absolue le transport électrique de la chaleur, en appliquant la formule [1]) par laquelle M. VERDET a exprimé l'équation de condition de l'état stationnaire qui sera réalisé, lorsque la quantité de chaleur que chaque élément reçoit par conductibilité, par la friction électrique et par l'effet THOMSON, est égale à celle qu'elle perd dans le même temps par conductibilité et rayonnement.

Pour déterminer les températures ainsi que leurs variations par unité de longueur à différentes hauteurs des colonnes mercurielles, les tubes I en II furent abaissés ou soulevés sans changer la distance des deux réservoirs à température constante. J'ai d'abord essayé de déterminer la température dans la partie *a* du tube I en retirant l'aiguille en *b* et en la plaçant dans un vase en verre contenant de l'eau ou de l'huile, que l'on échauffait jusqu'à ce que l'aiguille du galvanomètre restât à zéro. La température en *a* était ainsi connue par la lecture du thermomètre placé dans le liquide du vase. Mais le transport répété de l'aiguille thermo-électrique exposait celle-ci à se casser, et l'installation du vase présentait des difficultés, à cause des dimensions nécessairement limitées de l'appareil thermo-électrique. J'ai donc dû me résoudre à étudier la distribution des températures séparément, après la détermination de l'effet THOMSON et au moyen d'un couple spécial dont les fils étaient pris sur les mêmes échantillons de maillechort et de fer que ceux du couple servant à la mesure de l'effet THOMSON. Les deux aiguilles dont les soudures mesuraient également deux millimètres avaient une longueur suffisante pour permettre d'introduire l'une d'elles dans le tube I en *a* et d'attacher l'autre au réservoir d'un thermomètre plongé dans un matras à eau ou dans un bain d'huile. Les mêmes aiguilles thermo-électriques furent employées pour mesurer la déviation du galvanomètre produite par une différence de température d'un degré centigrade. À cet effet l'une des aiguilles fut placée dans la glace fondante, l'autre dans un espace dans lequel circulaient les vapeurs de l'eau bouillante sous la pression de l'atmosphère. Dans le circuit du galvanomètre on intercalait une résistance d'un nombre connu d'unités SIEMENS, on notait ensuite la déviation du galvanomètre. Comme les résistances

[1]) Verdet, Théorie mécanique de la Chaleur, Tome II p. 198—208.

Digitized by Google

du couple thermo-électrique et du galvanomètre avaient été mesurées au moyen du pont de WHEATSTONE, ainsi que la résistance du couple qui servait dans les mesures de l'effet THOMSON, on possédait les données nécessaires pour déterminer les températures en a, ainsi que les différences de température entre a et b.

Cependant, pour pouvoir comparer les observations faites en des jours différents, il fallait déterminer chaque fois la sensibilité du galvanomètre. Dans ce but on mesurait avant ou après une série d'observations la déviation dans un „circuit comparateur". Ce circuit se composait d'un couple fer-maillechort dont la soudure des métaux entre eux était placée dans un réservoir à vapeur d'eau bouillante, les soudures avec les fils conducteurs étant plongés dans un bain d'eau dont on déterminait la température. Comme mesure de la sensibilité on adoptait la différence des deux lectures du galvanomètre obtenues en faisant passer dans les deux sens le courant thermo-électrique produit par une différence de température donnée, et affaibli par une résistance de 500 unités de SIEMENS intercalée dans le circuit.

La partie supérieure du tube en U renversé s'étant rompue, on a, dans les expériences, établi la communication électrique des deux tubes I et II au moyen d'un gros fil de platine doublement recourbé. Cette modification de l'appareil n'avait aucune influence sur la grandeur de l'effet observé, ainsi qu'on pouvait le présumer parceque le fil de platine se trouvait dans toute sa longueur placé dans un milieu à température constante.

9. Dans les tableaux suivants se trouvent consignées toutes les observations qui ont été faites avec la même paire d'aiguilles thermo-électriques. En tête du tableau de chaque série on a indiqué par A en millimètres la distance verticale de la paroi supérieure du tube latéral a jusqu'au bouchon de liège qui fermait l'espace cylindrique intérieur du réservoir annulaire. Les données servant à déterminer la sensibilité du galvanomètre obtenues au moyen du circuit comparateur ont été désignées sous forme d'une équation exprimant le nombre d de divisions de l'échelle parcourues par l'image-index du galvanomètre lorsqu'on renverse le courant du couple thermo-électrique dont les soudures ont une différence de température d'un nombre de degrés c. Dans les tableaux on a inscrit dans la première colonne l'heure H de l'observation, dans les colonnes deuxième et troisième les lectures L_1 et L_2 obtenues sur l'échelle du galvanomètre dans les deux cas d'un courant ascendant, soit dans le tube I, soit dans le tube II, dans la quatrième, l'intensité J du courant dans ces deux tubes en ampères, dans la cinquième, le déplacement δ de l'image résultant de l'inversion de l'effet THOMSON produit par le renversement du courant J. La valeur δ a été obtenue en retranchant de la lecture L_2 la moyenne de deux lectures voisines L_1.

Digitized by Google

A. Source de chaleur: Vapeur d'alcool méthylique.

I. 19 Février 1885. A = 20,5; 146 d = 91,6 c.					II. 20 Février 1885. A = 15,5; 149 d = 92,8 c.					III. 23 Février 1885. A = 9,5; 147 d = 91,1 c.				
H	L_1	L_2	J	δ	H	L_1	L_2	J	δ	H	L_1	L_2	J	δ
12h 8m	286		3,9		11h43m	83		3,85		12h21m		157		
» 15		314	3,95	28,5	» 49		117		30,5	28	127			34
» 20	285				» 55	90				35		165	3,9	
» 26		311		28,5	12 1		124	3,9	30	42	134			31,5
» 31	280				» 7	98				49		166		
» 37		309	4,0	29,5	» 13		132	3,9	30	56	130		3,9	34
» 42	279				» 18	106								
» 47		304		27,5										
» 53	274													
	280,8	309,5	3,95			94,2	124,3	3,9			130,3	162,7	3,9	
δ = 28,7; J = 3,95.					δ = 30,1: J = 3,9.					δ = 32,4; J = 3,9.				

B. Source de chaleur: Vapeur d'aniline.

IV. 3 Mars 1885. A = 15,25; 69,5 d = 92,6 c.					V. 4 Mars 1885. A = 11,0; 67 δ = 90,5 c.					VI. 5 Mars 1885. A = 19,5; 67 d = 90,2 c.				
H	L_1	L_2	J	δ	H	L_1	L_2	J	δ	H	L_1	L_2	J	δ
12h 0m	24		4,5		11h58m	78		4,25		11h40m		103		
» 8		84		57	12 10		127		53,5	» 50	53		4,25	60,5
» 16	30		4,7		» 20	69				12 0		124		
» 25		92		63	» 31		133	4,35	58	» 10	72			61,5
» 40	28		4,7		» 41	81								
» 48		91		62	» 53		138		61,5					
1 0	30				1 3	72		4,35						
	28,0	89,0	4,7			75,0	132,7	4,35			62,5	113,5	4,25	
δ = 61,0; J = 4,7.					δ = 57,7; J = 4,35.					δ = 61,0; J = 4,25.				

Digitized by Google

C. Source de chaleur: Vapeur d'eau.

VII. 12 Mars 1885. A = 11; 68,25 d = 93,0 c.					VIII. 13 Mars 1885. A = 16; 68,5 d = 92,9 c.					IX. 18 Mars 1885. A = 20,5; 68 d = 90,5 c.				
H	L_1	L_2	J	δ	H	L_1	L_2	J	δ	H	L_1	L_2	J	δ
12h10m	195		4,7		12h 4m		115	4,9		12h32m		195	5,15	
» 18		221	4,8	30,5	» 12	84			32	» 40	159			35
» 28	186				» 20		117	5,1		» 50		193		
» 38		211		29	» 28	86			31,5	» 59	153			38
» 46	178				» 37		118	5,0		1 9		189	5,15	
» 55		203		28,5	» 45	87		4,9	31,5	18	152			36,5
1 4	171		4,8		» 53		119	4,95		27		188	5,15	
» 14		200		30										
» 23	169													
	179,8	208,7	4,8			5,7	117,2	5,95			154,7	191,2	5,15	
δ = 28,9; J = 4,8.					δ = 31,5; J = 4,95.					δ = 36,5; J = 5,15.				

Après chacune des séries A, B, C on a déterminé par des mesures spéciales, et en employant la méthode de compensation, la température d'une aiguille thermo-électrique placée en a, lorsque ce point se trouvait à différentes hauteurs de la colonne mercurielle comprise entre les deux sources de chaleur. Cette hauteur

Alcool méthylique, 24 et 25 Février.							Aniline, 9 et 10 Mars.						Eau, 19 et 20 Mars.						
A	t_0 Obs.	t_0 Calc.	t_c Obs.	J	$t_{3\cdot9}$ Obs.	$t_{3\cdot9}$ Calc.	A	t_0 Obs.	t_0 Calc.	t_c Obs.	t_c Calc.	J	A	t_0 Obs.	t_0 Calc.	t_c Obs.	J	$t_{5\cdot0}$ Obs.	$t_{5\cdot0}$ Calc.
9,5	47,5	47,4	48,5	3,9	48,5	48,3	11,0	126,0	125,9	128,0	128,1	4,3	10,5	69,8	69,9	71,8	4,35	72,5	72,5
15,0	44,3	44,15	45,2	4,3	45,05	45,0	15,0	119,8	119,9	122,0	121,8	4,3	15,5	65,8	65,7	68,0	5,1	68,0	68,1
16,0	43,0	43,55	43,9	4,75	43,6	44,4	19,0	114,0	113,9	115,5	115,6	4,3	20,25	61,5	61,6	63,9	5,05	63,9	63,8
20,5	41,2	40,9	42,7	4,8	42,2	41,8													
x=47,4; y=0,592; x'=48,26; y' 0.595.							x=125,93; y=1,500; x'=128,08; y'=1,562.						x=69,9; y=0,847; x'=72,47; y'=0,887.						

Digitized by Google

est indiquée par la distance A de la partie supérieure du tube latéral jusqu'au bouchon inférieur du réservoir à vapeur. Cette détermination a été faite dans les deux cas où le courant dans le conducteur de mercure était interrompu et où un courant d'une intensité J, exprimée en ampères, passait par ce conducteur. Dans le premier cas la température de a est indiquée par t_0, dans le second par t_c. Ces mesures sont inscrites dans le deuxième tableau de la page précédente.

Lorsque le courant est interrompu et que l'équilibre de température s'est établi entre la colonne de mercure et l'épaisse couche de coton qui l'enveloppe et qui peut être considérée comme empêchant toute perte de chaleur à l'extérieur, la température d'un point, situé à la distance a au dessous d'un point fixe P dont la température serait x, peut s'exprimer par l'équation linéaire:

$$t_0 = x - a\,y$$

si l'on désigne par y la variation de température par unité de longueur. Au moyen des données t_0 et A des diverses séries on a calculé x et y en prenant pour le point P celui où se trouvait l'aiguille thermo-électrique dans sa position la plus rapprochée du réservoir supérieur.

Dans le cas où le courant produit en chaque point du conducteur une quantité de chaleur proportionnelle au carré de l'intensité, la loi de distribution de la température le long du conducteur sera plus compliquée. On ne peut plus admettre alors que le conducteur ne cède pas de chaleur à l'extérieur. Le calcul d'un cas pareil, discuté par M. Verdet dans sa „Théorie Mécanique de la chaleur" Tome II p. 197 et suiv., fait voir que la relation entre les températures et les distances au point où la température est constante s'exprime par l'équation d'une chaînette. Mais en comparant les températures t_0 et t_c, obtenues dans les deux cas d'un courant zéro et d'un courant J, on reconnaît que l'influence du courant sur la température observée dans les points de même distance A n'est que faible, de sorte que les parties de la courbe auxquelles se rapportent les observations ne peuvent pas différer beaucoup d'une ligne droite. Nous avons donc calculé les données obtenues avec le courant J au moyen d'une formule linéaire. Dans les cas où les intensités du courant n'étaient pas égales pour les expériences d'une même série, — ce qui est arrivé dans les mesures avec les vapeurs d'alcool méthylique et d'eau — on a corrigé les données t_c de cette inégalité, en les réduisant, au moyen d'un calcul à parties proportionnelles, aux mêmes intensités. Ces données corrigées sont indiquées par $t_{3,9}$ observé et $t_{5,0}$ observé. Dans le tableau on a désigné par x et y les valeurs les plus probables calculées d'après les températures t_0, et par x et y' celles qui se déduisent des températures t_c

Digitized by Google

Si, avec les valeurs obtenues x et y, x' et y' on calcule les températures correspondant aux valeurs de A de la première colonne de chaque série, on obtient les nombres inscrits dans les colonnes troisième et septième ou cinquième. On reconnaît que la formule linéaire satisfait presque aussi bien aux mesures faites avec le courant J qu'à celles dans lesquelles le courant était nul. On peut d'ailleurs se rendre compte de l'exactitude des mesures d'une autre manière. Si l'on admet, ce qui doit se vérifier approximativement, que la partie du tube qui est serrée dans le bouchon du réservoir supérieur, se trouve dans les mêmes conditions que les tubes enveloppés de coton, c'est-à-dire qu'elle ne perd pas de chaleur au dehors, la relation linéaire entre x et t_0 doit exister jusqu'à un point du tube dont la température ne diffère pas beaucoup de celle de la vapeur du réservoir supérieur. On peut alors calculer par extrapolation la hauteur de ce point au dessus de la face inférieure du bouchon. En posant pour la température de la vapeur d'alcool méthylique 65° C., de la vapeur d'aniline 182° et de celle de l'eau 100°, on trouve pour cette distance:

	Courant = 0	Courant = J
Alcool méthylique . . .	20,5 mm.	18,5 mm.
Aniline	26	24
Eau	25	20,5

La différence des moyennes n'atteint pas 3 millimètres.

Pour réduire les observations des tableaux A, B et C en mesure absolue, il faut connaître la différence de température en degrés centigrades des soudures a et b, correspondant à une déviation donnée du galvanomètre lorsque celui-ci a une sensibilité déterminée. Les données nécessaires pour cette réduction ont été obtenues par des expériences faites le 25 Février, le 10 et le 20 Mars. Le résultat moyen de ces expériences est le suivant. Lorsque la sensibilité du galvanomètre est telle que, dans le circuit comparateur, une différence de température des soudures de 100 degrés produit une déviation de 100 divisions de l'échelle, une différence de 1 degré, dans les soudures du circuit employé pour étudier l'effet Thomson, et dont la résistance est de 2,34 unités Siemens, produit une déviation de 262 divisions.

10. Nous avons réuni, dans le tableau de la page suivante, les résultats de nos expériences sur le transport électrique de la chaleur dans le mercure, et les données d'un calcul tendant à établir la relation qui existe entre cet effet et la température du conducteur dans lequel il se produit. A cet effet les données des séries I—IX des tableaux A, B et C ont été rangées d'après l'ordre des températures de la soudure a. Ces températures t ont été calculées d'après les données des expériences rapportées dans le deuxième tableau de la page 160.

Digitized by Google

Le tableau indique dans la première colonne le numéro de la série, dans la deuxième le déplacement δ de l'image-index du galvanomètre, produit par l'inversion de l'effet Thomson aux points a et b, dans la troisième l'intensité J du courant qui traversait le conducteur, dans la quatrième la sensibilité S du galvanomètre déterminée au moyen du circuit comparateur. L'unité de sensibilité est celle qui correspond à l'équation: $100\,d = 100\,c$. En divisant δ par le produit $S \times 262$, on obtient en degrés centigrades la différence de température correspondant à la déviation. Cette différence est le quadruple de l'élévation de température produite par le transport électrique de la chaleur en a ou en b. En effet, dans chacune des deux positions de l'image-index la déviation est causée par la différence des températures en a et en b, c'est-à-dire par une différence correspondant à un effet double, et les deux positions de l'image qui déterminent le déplacement δ ont été obtenues en renversant le sens de cet effet double.

Résumé et Calcul des Observations.

SÉRIE	δ	J	S	$\frac{dT}{dA}$	t	E observé	E calculé	ε
I.	28,7	3,95	1,59	0,594	42°	0,0292	0,0322	— 0,0030
II.	30,0	3,9	1,61	0,594	44	308	325	— 0,0017
III.	32,4	3,9	1,61	0,594	48	331	332	— 0,0001
IX.	36,5	5,15	0,752	0,867	64	415	360	+ 0,0055
VIII.	31,6	4,95	0,737	0,867	68	381	367	+ 0,0014
VII.	28,9	4,8	0,734	0,867	72	368	374	— 0,0008
VI.	61,0	4,25	0,743	1,531	115	482	448	+ 0,0034
IV.	61,0	4,7	0,751	1,531	122	431	460	— 0,0029
V.	57,7	4,35	0,741	1,531	128	447	470	— 0,0023

$E_t = E_{78} + a\,(t - 78)$; $E_{78} = 0{,}0384$; $a = 0{,}000173$; $m = 0{,}00316$; $m_{E_{78}} = 0{,}00105$.

La cinquième colonne contient la variation $\frac{dT}{dA}$ de température par unité de longueur. En divisant δ par le produit $262\,S\,J\,\frac{dT}{dA}$, on obtient en degrés centigrades le quadruple effet Thomson par unité de courant et par unité de variation de température le long du conducteur. Cette valeur est indiquée par E ob-

Digitized by Google

servé dans la septième colonne. Dans le calcul de la huitième colonne on a supposé que la relation entre la temperature t et l'intensité de l'effet THOMSON peut s'exprimer par une équation linéaire. Pour simplifier le calcul [1]) on a choisi l'équation:

$$E_t = E_{78} + a\,(t - 78) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

la température 78° étant la moyenne des températures t de la sixième colonne. La calcul fournit les valeurs $E_{78} = 0{,}0384$, $a = 0{,}000173$. L'erreur moyenne m d'une détermination de δ se calcule à 0,00316, celle de la valeur de E_{78} à 0,00105.

On voit que les observations satisfont assez bien à l'équation (A). Il importe, en effet, de remarquer que les expériences faites avec la même source de chaleur mais en plaçant l'aiguille thermoélectrique à différentes distances du réservoir supérieur, ont rendu nécessaire, pour pouvoir abaisser ou soulever les tubes de mercure, de défaire et de reconstruire l'emmaillotage de coton qui enveloppait les tubes. Même en y employant tous les soins il est impossible de garantir une parfaite identité de conditions après chacune de ces opérations. L'erreur moyenne de la déviation δ, quoique atteignant $^1/_{11}$ de δ, est à peu près la limite de la précision des observations des tableaux A, B et C.

11. Remarquons qu'on satisfait presque aussi bien aux observations en posant d'après M. TAIT

$$E_T = a'\,T \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

T étant la température absolue $273° + t$. En effet, le calcul de cette formule donnerait $E_{78} = 0{,}0316$ $a' = 0{,}00010$ avec une erreur moyenne $m = 0{,}00345$ sensiblement égale à celle qui se déduit de la formule A.

Il convient donc de reconnaître que nos observations, quoique démontrant que l'effet THOMSON dans le mercure croît avec la température, sont renfermées dans des limites de température trop étroites pour permettre d'en déduire avec une exactitude suffisante la véritable loi de variabilité. On peut même supposer que l'accroissement de l'effet THOMSON à mesure que la température du conducteur s'élève, est dû à l'influence que la chaleur exerce sur la conductibilité thermique du mercure. En effet, d'après les expériences de M. H. F. WEBER [2]), la conductibilité thermique, en fonction de la température, s'exprimerait par l'équation:

$$K_t = K_o\,(1 + 0{,}0056\,t)$$

tandis que la formule que nous avons calculée dans le tableau précédent fournirait pour l'effet THOMSON la formule analogue:

$$E_t = E_o\,(1 + 0{,}0069\,t).$$

---

[1]) Voir Annales de l'Ecole Polytechnique, 2me Livraison p. 89.

[2]) Annales de Wiedemann, Tome X p. 493. 1880.

Digitized by Google

L'accord des mesures individuelles avec cette supposition est montré par le tableau suivant où l'on a posé d'après M. Weber: $K_t = 0{,}8872\ (1 + 0{,}0056\ t)$. Pour autant que les expériences de M. Weber, faites à des températures de 4°,5 et de 17°,0, permettent de conclure à l'accroissement de la conductibilité aux températures comprises entre 42° et 128°, on pourrait donc déduire de nos expériences que,

Vérification de $E_t : K_t =$ constante.			
E_t observé.	K_t	$\frac{E_t}{K_t}$	Δ
0,0292	1,096	0,0267	— 0,0033
308	1,106	279	— 21
331	1,126	294	— 06
415	1,205	344	+ 44
381	1,225	311	+ 11
368	1,245	296	— 04
482	1,459	330	+ 30
431	1,493	289	— 11
447	1,523	294	— 06
		0,0300	

entre ces dernières limites de température, l'effet Thomson est proportionnel au flux de chaleur, c'est-à-dire au produit $K_t \frac{d\,t}{d\,A}$ dans l'intérieur du conducteur.

12. Si l'on examine les chiffres du tableau de la page 163, qui se rapportent à la même source de chaleur, savoir I, II et III, IX, VIII et VII, VI, IV et V, on voit que dans chacun de ces groupes l'influence de la température sur l'intensité du phénomène étudié ne s'accuse pas d'une manière suffisamment régulière pour permettre d'appliquer la formule donnée par M. Verdet dans sa „Théorie mécanique de la chaleur" pour calculer la température en chaque point d'un conducteur dans lequel se produit l'effet Thomson. Pour calculer en mesure absolue la quantité de chaleur transportée par l'électricité, il ne reste donc qu'à appliquer le mode d'évaluation employé par M. Le Roux.

Nous supposerons donc que, toutes choses étant égales d'ailleurs, les variations de température sont proportionnelles aux quantités de chaleur dégagées.

La quantité de chaleur dégagée suivant la loi de Joule par un courant d'intensité J par millimètre de longueur d'une colonne de mercure dont la section est de 35,5 millimètres carrés, équivaut à un travail H dont la valeur est

Digitized by Google

$$H = \frac{1}{35{,}5 \times 1060} J^2 (1 + 0{,}000989\, t) \text{ (C. G. S.)}$$

si l'on admet pour la valeur de l'ohm 1060 millimètres de mercure et pour le coefficient de variation moyenne de la résistance du mercure entre 0° et 100° la valeur trouvée par M. Rink. Pour $J = 1$, ce travail équivaut à

$$0{,}00000639\ (1 + 0{,}000989\, t) \text{ calories } (1^{gr} \text{ d'eau } 1° \text{ C.})$$

Si, au moyen des données du tableau de la page 160, on calcule l'élévation de température produite dans la colonne de mercure par un courant d'intensité = 1, on obtient des résultats sensiblement différents pour les expériences faites avec la vapeur d'alcool méthylique d'un côté et celles des séries eau et aniline de l'autre. Les premières sont aussi celles qui, dans les colonnes 2 et 3 ainsi que 6 et 7, présentent des écarts un peu forts entre les températures observées et calculées, de sorte que l'erreur moyenne d'une détermination de température est deux fois plus grande dans la première série que dans les deux suivantes. Ces deux dernières ont été effectuées avec plus de soin et plus de tranquillité que la première, laquelle, en faisant connaître les précautions qu'exigent ces mesures, offrait en quelque sorte un caractère provisoire. Pour cette raison nous emploierons seulement les données des deux dernières séries pour calculer le nombre de calories qui doivent être développées par millimètre de longueur pour élever d'un degré centigrade la température du mercure. Les six observations de ces deux séries donnent respectivement:

	0,0000665
	0,0000601
	0,0000878
	0,0000647
	0,0000806
	0,0000721
Moyenne . . .	0,0000720.

Pour le quadruple de l'effet Thomson, lorsque $J = 1$ et que la variation de température le long du conducteur est de 1° par millimètre, nous avons trouvé à 78° la valeur 0,0384. L'effet simple correspondrait donc dans les mêmes circonstances à un dégagement ou à une absorption de chaleur de

0,00000069 calories.

Ainsi, *lorsque dans un conducteur de mercure un courant d'unité d'intensité* (1 *ampère*) *passe d'une section de température* 77° *à une autre de température* 78° *il se produira dans le conducteur intermédiaire, en dehors de la chaleur dégagée en vertu de de la loi de Joule, une quantité de chaleur de* 0,00000069 *calories par seconde.*

Digitized by Google

Si l'on calcule de même, d'après les expériences de M. Le Roux, l'effet Thomson dans le bismuth de M. E. Becquerel, dans lequel, de tous les métaux examinés, l'effet Thomson est le plus prononcé mais de sens contraire, on trouve:

0,00000245 calories.

En regard de ces chiffres, on peut difficilement admettre que l'effet Thomson serait dû à ce que la différence de température de deux parties contiguës d'un même conducteur causerait des différences de structure moléculaire qui feraient naître une force électromotrice de la même nature que celle de deux métaux différents. Il n'y a évidemment aucune proportion entre l'intensité de l'effet Thomson dans le mercure comparé à celui du bismuth et les variations relatives que la température peut causer dans ces deux métaux, l'un fluide, l'autre cristallin. Il est vrai que dans le mercure la densité et la viscosité doivent varier avec la force vive du mouvement de translation des molécules, mais il est clair qu'il serait dénué de sens de discuter la question s'il existe une différence de potentiel au contact de deux conducteurs ne différant que par leurs températures, tant qu'on n'attribue pas avec M. Kohlrausch une force électromotrice au flux de chaleur lui-même. L'explication proposée par M. Clausius conduit nécessairement à la conclusion que l'effet Thomson dans le mercure doit être insensible par rapport à celui du bismuth; l'expérience démontre que leur rapport est de 1 : 3,5.

Si donc l'on admet avec M. Clausius, que l'effet Thomson démontre l'existence d'une différence de potentiel on ne peut considérer ce phénomène comme un effet secondaire; on doit alors conclure que le mouvement moléculaire que nous appelons chaleur cause par lui-même une différence de potentiel entre les parties contiguës mais inégalement chaudes d'un même conducteur.

La rédaction de ce mémoire était terminée lorsque j'eus connaissance d'un mémoire de M. Braun intitulé: „*Ueber die Thermoelectricität geschmolzener Metalle*" qui a paru dans les „Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin" du 9 Avril 1885. M. Braun s'est proposé d'étudier la relation qui existe entre les forces électromotrices et les températures des soudures dans des circuits composés de métaux à l'état liquide. Il s'attendait à pouvoir constater une relation linéaire, mais les expériences donnèrent des résultats tout-à-fait opposés. C'est ainsi que les expériences faites avec le circuit plomb-mercure, combinées avec le résultat obtenu par M. Le Roux, d'après lequel le plomb ne montrerait pas de convection électrique de la chaleur, conduisirent à la conclusion que l'effet Thomson devait se manifester dans le mercure, conclusion

Digitized by Google

qui fut corroborée par des déductions pareilles se rapportant à d'autres métaux.

Le raisonnement de M. BRAUN est le même que celui par lequel, déjà en 1856, M. THOMSON, dans son mémoire cité page 156, concluait que la convection électrique de la chaleur est négative dans le mercure, positive dans le plomb, conclusions qui se trouvent l'une et l'autre confirmées par mes expériences. Je dois ajouter que ce n'est que dans le cours de mes expériences que ces remarquables prévisions de M. THOMSON ont attiré mon attention.

Delft, Juin 1885.

Digitized by Google

REMARQUES SUR LES INCLUSIONS DE CERTAINS QUARTZ DES PORPHYRES.

PAR J. BOSSCHA, FILS.

Lorsque, pendant mon séjour aux mines de Tharsis, dans la province de Huelba en Espagne, je fis une étude microscopique des différentes roches plutoniques qui accompagnent si souvent les gîtes métallifères de cette province, j'eus l'occasion de remarquer que presque la totalité des quartz du grand nombre de porphyres que j'examinais contenaient des inclusions de forme dihexaédrique. Cette observation m'induisit à examiner au même point de vue des porphyres d'autre origine, qui, comme il est connu, présentent assez souvent cette particularité. M. le professeur BEHRENS eut la bienveillance de mettre à ma disposition la collection de préparations microscopiques de l'École Polytechnique de Delft, parmi lesquelles se trouvaient celles qui avaient appartenu à M. VOGELSANG.

En passant en revue les spécimens du musée de Delft ainsi que ceux provenant de ma propre collection je reconnus que la présence de ces inclusions dihexaédriques dans les quartz des porphyres est très commune. Je pus les observer dans près de la moitié des plus de 200 préparations examinées.

Il serait de peu d'intérêt de faire l'énumération de tous les porphyres qui n'avaient pas d'inclusions dihexaédriques, vu que seulement une étude approfondie de plusieurs préparations d'une même localité peut donner la certitude de leur absence. Souvent il m'est arrivé que dans deux préparations d'un même fragment de roche, l'une en contenait, pendant que dans l'autre elles manquaient. Du reste, c'est un fait souvent observé que les quartz des porphyres se présen-

Digitized by Google

tent sous des formes très variées. Il paraît que leur nature dépend en grande partie du moment où ils ont commencé à se former [1]).

Quelle peut être la cause qui a produit la forme polyédrique de ces inclusions? Pour obtenir une réponse à cette question examinons les circonstances dans lesquelles les quartz se sont formés.

Il paraît encore incertain quel est l'ordre dans lequel les différents minéraux qu'on rencontre dans les porphyres ont pris naissance et a priori il est bien probable que cet ordre n'a pas toujours été le même. Il doit dépendre, en effet, de la composition du mélange fondu qui les a fournis, parce qu'un minéral ne commencera à se séparer de la masse qu'après que le liquide a atteint, à son égard, son point de saturation. La cristallisation une fois commencée peut ensuite durer jusqu'à la fin de la solidification, ce qui est démontré par la base cryptocristalline de certains porphyres granitiques dans laquelle on retrouve tous les minéraux essentiels du porphyre même.

Il n'est pas encore prouvé que tous les quartz des porphyres sont originaux de la masse porphyrique même et l'hypothèse que, du moins dans certains cas, ils sont introduits comme tels du dehors se trouve appuyée par ce fait que surtout les grands quartz ont souvent une physionomie bien différente l'un de l'autre.

Il est évident que la solubilité du silice aura varié avec la température dans des limites assez étendues, mais en dehors de la température l'élimination, par voie de cristallisation, de différents minéraux en changeant la composition de la partie fluide, doit avoir exercé une grande influence sur la quantité de quartz dissoute dans la masse.

Une preuve que les circonstances ont varié souvent pendant la solidification de la roche est fournie par les inclusions rangées en zones concentriques et parallèles au contour dans différents minéraux. Je les ai une fois observées dans un quartz d'un porphyre que je trouvais près du moulin à eau, au Malagon à peu de distance du chemin qui mène de Tharsis à Cabezas Rubias. On y apercevait trois zones bien-distinctes.

Chez plusieurs porphyres le fait se présente que les coupes des quartz n'ont pas un contour polygonal mais qu'ils sont arrondis, état dans lequel certaine-

---

[1]) M. Rosenbusch dans ses »Microscopische Physiographie der massigen Gesteine, Stuttgart 1877" p. 54, remarque à ce sujet: »Dass die Ausscheidung der kristallinen Einsprenglinge in einem Porphyrgesteine ein Act ist, der nicht nur zeitlich von der schliesslichen Erstarrung der Gesammtmasse unabhängig ist, sondern auch in vielen Fällen unter wesentlich anderen Bedingungen sich vollzog, findet, abgesehen von vielen anderen Momenten, auch darin eine Bestätigung, dass die Structur der grösseren Quarzeinsprenglinge, wie sie eben geschildert wurde, nicht auch die der kleinere Quarzindividuen in der Porphyrgrundmassa ist. Nirgends fand ich in diesen Glaseinschlüsse, während Flüssigkeits- und Glasinterpositionen oft darin angetroffen wurden".

Digitized by Google

ment ils ne se sont pas trouvés dès leur origine. Ce fait s'explique de la manière la plus simple en admettant que la partie de la roche dans laquelle ils se trouvaient a été réchauffée plus tard. En effet, il n'est pas bien probable que l'élimination par voie de cristallisation des autres minéraux aura augmenté la solubilité du quartz. Dans ce dernier cas de plus, le phénomène devrait être général, ce qui ne se trouve pas d'accord avec les faits.

Il me semble que cette même cause, c'est-à-dire une suite de variations alternatives de température, peut donner une explication de la formation des inclusions dihexaédriques des quartz.

Supposons que dans un quartz se trouve une inclusion, de forme indéfinie, vitreuse ou d'une matière qui, en fondant, peut dissoudre le quartz. Par l'effet d'une élévation de température, une partie du quartz sera dissoute mais en même temps la forme de la matière incluse aura changée, parce que la solubilité n'est pas la même dans de différentes directions. Les expériences sur les figures de corrosion [1]) ont fait voir que même la manière dont la solubilité varie avec la direction n'est pas la même pour différentes matières dissolvantes. Si le minimum de solubilité se trouve dans la direction normale aux faces des rhomboèdres, la matière incluse aura acquise une forme qui s'approche du dihexaèdre. Par l'effet du refroidissement le quartz commencera à récristalliser d'une manière régulière en complètant le cristal environnant. Mais il importe de remarquer que, très probablement, dans ce procès le cristal négatif continuera à prendre une forme régulière, vu que justement dans les coins nouvellement formés le minimum de matière sera déposé. En effet dans ces derniers points se trouve le minimum de la quantité de solution par unité de surface.

Si cette supposition est exacte la formation d'inclusions dihexaédriques dépendra des circonstances suivantes:

1. Le nombre de fois qu'un changement de température a eu lieu;
2. Les limites de température;
3. La rapport entre la masse dissolvante et la surface dissoute;
4. Le pouvoir dissolvant de la solution.

Il sera très difficile de vérifier l'hypothèse par la recherche de l'influence des deux premiers effets, parce que la manière dont ils se sont présentés dans la nature échappe à tout contrôle. Je n'ai pas réussi à les reproduire artificiellement en chauffant des plaques minces de porphyres. Après le refroidissement les inclusions étaient généralement invisibles à cause de la multitude de fissures que le quartz avait acquise.

---

[1]) H. Baumhauer. Aetzversuche an Quarz. Zeitschrift für Krystallographie, II p. 120.

Digitized by Google

L'influence que le rapport entre la masse dissolvante et la surface dissoute doit avoir eue sur la fréquence du phénomène paraît confirmer notre hypothèse. Ce rapport augmente avec la grandeur et par suite la forme dihexaédrique devra se montrer plus souvent chez les grandes que chez les petites inclusions. Or, la totalité des inclusions dihexaédriques qu'on observe peut être aperçue avec un grossissement de cent fois, tandis que celles qui sont plus petites présentent des formes arrondies quelconques. Si les inclusions avaient eu leur forme dihexaédrique dès leur origine, on devrait présumer au contraire que les petites plutôt que les grandes devraient être régulières.

L'effet que doit avoir eu l'influence signalée en quatrième lieu est le plus propre pour vérifier notre hypothèse. Une modification de la solubilité peut être causée par la séparation dans la forme solide de différents minéraux. Si ce sont des silicates, qui ne sont pas rédissoutes sensiblement à une température plus élevée, le pouvoir dissolvant doit être affaibli parce que la masse dissolvante diminue. Dans le cas où ce sont d'autres minéraux, le reste contiendra plus de silice et par conséquent aura plutôt atteint son point de saturation. Chez les porphyres ce ne seront probablement que le fer magnétique et l'apatite qui pourront jouer ce rôle, du moins si l'on peut envisager comme apatite les aiguilles transparentes qu'on observe si souvent dans les quartz. Le fait qu'elles se trouvent dans presque tous les minéraux qui constituent le porphyre, paraît prouver qu'ils ont été parmi les premiers minéraux qui ont commencé à se cristalliser, et ce sont elles qui me paraissent fournir la preuve la plus évidente en faveur de l'hypothèse en question. Supposons qu'une aiguille d'apatite traverse une inclusion vitreuse encore fluide, alors sa surface relativement très grande attirera les substances qui ensemble peuvent former l'apatite et bientôt la solution sera épuisée autant que la solubilité de l'apatite le permet. La solution restante se comportera d'une autre manière envers le quartz que la masse des inclusions qui n'ont pas de microlithe.

Pour rechercher si cette manière de voir s'accorde avec les faits, j'ai pris au hasard quarante sept des préparations microscopiques qui montraient des inclusions dihexaédriques et j'ai compté et examiné toutes les inclusions de matière vitreuse, tant dihexaédriques que celles de forme arrondie, qu'on distinguait en employant un grossissement de cent fois. La liste suivante donne les résultats de cet examen.

Digitized by Google

LIEU DE PROVENANCE.	Nombre des inclusions.	Dihexaédriques.				Arrondies.		
		total	avec microlithe.	sans microlithe.	limpide	total	avec microlithe.	sans microlithe.
Sierra Blanca 278 (Province de Huelba.)	4	2	1	1		2	2	0
dito 279	1	1		1		0	0	0
dito 280	4	1		1		3	0	3
El Cerro *a*	15	9		9		6	2	4
dito *b*	27	16		16		11	5	6
Cabezas Rubias	13	13		13		0	0	0
dito 110	13	5		5		8	3	5
Mine la Duquesa 340	15	14	2	12		1	0	1
Walkenried, Brunsvic	146	132		132	31	14	8	6
Leichtersberg, Schriesheim	17	12		12	6	5	0	5
Kreuznach	6	4		4	3	2	0	2
Ilmenau (Göthehaüschen)	6	6		6	4	0	0	0
Spittergrund, Thuringue	2	2		2	0	0	0	0
Galway, Irlande	16	2	1	1	0	14	2	12
Ilmenau, Thuringue	2	1		1	1	1	0	1
Pranal près de Pontgibaud	2	1		1	0	1	0	1
Dürrenberg, Thuringue	16	5		5	5	11	2	9
Wolfsschlucht, Thuringue	18	8		8	1	10	3	7
Cabergal, Galway	8	4		4	0	4	0	4
Auerberg, Harz	12	8	1	7	0	4	2	2
Würtzen	8	2		2	0	6	0	6
Dossenheim, Bade	11	8		8	7	3	1	2
Schriesheim, Bade	18	13		13	0	5	3	2
Flöha, Saxe	25	17		17	7	8	0	8
Mühlenthal, Elbingerode (Harz)	6	1		1	0	5	0	5
Auerberg, Harz	72	21	1	20	21	51	26	25
Ilmenau, Thuringue	3	1		1	0	2	0	2
Floha, Saxe	17	8		8	0	9	0	9
Breitenstein	91	87		87	0	4	0	4
Gewitterklippe, Treseburg (Harz)	2	2		2	2	0	0	0
Neudorflerhöhe, Zwickau	25	10		10	6	15	0	15
Manebach, Thuringue	11	8		8	8	3	0	3
Planitz, Zwickau	18	15		15	14	3	0	3
Lautersberg, Harz	104	85		85	59	19	4	15
Münster am Stein	84	63	1	62	41	21	0	21
Augustusburg près de Flöha	17	8		8	8	9	0	9
St Egidien, Saxe	8	3		3	3	5	0	5
Münster am Stein	6	2		2	0	4	0	4
Dossenheim, Bade	17	10		10	10	7	0	7
Inselsberg, Thuringue	3	3		3	0	0	0	0
Heidenrand, Regenberg, Thuringue	15	11		11	11	4	0	4
dito	3	1		1	0	2	0	2
dito	6	5		5	3	1	0	1
Dobritz, Saxe	2	1		1	0	1	0	1
Rothenfels, Kreuznach	5	3		3	3	2	0	2
Würtzen, Saxe	5	2		2	0	3	0	3
Bade	11	10		10	0	1	0	1
	936	646	7	639	254	290	63	227

Digitized by Google

Parmi les 936 inclusions observées 646 avaient une forme dihexaédrique et seulement sept d'entre elles paraissaient perforées par un microlithe. Or par rapà ces dernières, il faut remarquer que souvent il est très difficile de distinguer si un microlithe se trouve au dessus, au dessous, ou dans l'inclusion. Au contraire parmi les 290 inclusions arrondies pas moins de 63 étaient traversées par une aiguille bien visible.

D'autre part j'observai 254 inclusions dihexaédriques tout-à-fait limpides et translucides, souvent ces inclusions étaient incolores, mais généralement elles présentent une teinte légèrement jaunâtre, rarement brunâtre ou même brune foncée. Le même fait se présentait avec les inclusions arrondies, traversées par un microlithe d'apatite. J'ai souvent observé qu'une même aiguille traversait plusieurs inclusions rondes qui étaient comme enfilées. Une fois le tout était environné d'une multitude d'inclusions dihexaédriques, ce qui montrait de la manière la plus évidente l'influence des aiguilles cristallines sur leur forme. Chez les autres inclusions arrondies le cas qu'elles sont limpides est tellement rare que je ne l'ai noté que six fois. Presque toujours elles étaient opaques, probablement à cause des matières cristallines qui s'étaient séparées.

Ces faits semblent corroborer d'une manière suffisante l'explication que nous avons proposée.

Cependant il m'a paru nécessaire de donner une preuve plus directe que, réellement, des variations de température peuvent modifier des inclusions irrégulières et leur donner une forme polyédrique. Les expériences tentées pour reproduire cette transformation dans le quartz n'ayant pas eu le résultat voulu, j'ai recouru à d'autres substances cristallisées. M. le professeur Behrens a eu l'obligeance de m'envoyer à cet effet quelques fragments de différents cristaux qui contenaient des inclusions liquides.

Un beau cristal de chlorate de soude contenait plusieurs inclusions de gaz, de forme irrégulière ainsi que beaucoup d'autres qui paraissaient liquides, mais ces dernieres avaient déjà toutes une forme cubique dont les arrêtes étaient un peu arrondies; quelquefois je croyais observer les faces de $\infty 0$. À la forme extérieure du cristal on observait les faces $\infty 0 \infty$, $\infty 0, \frac{\infty 0 2}{2}$ et $\frac{0}{2}$.

L'alun de potasse m'a donné de bons résultats. En examinant plusieurs fragments au microscope j'en découvris deux qui contenaient chacun une inclusion liquide avec une bulle de gaz. L'une avait une forme triangulaire aux angles très arrondis. En l'exposant alternativement au soleil et à l'ombre, la forme changeait et à la fin je pus reconnaître des faces assez nettes de la combinaison de l'octaèdre et du cube. Le cube qui généralement se trouve peu développé chez

Digitized by Google

les cristaux mêmes d'alun, était assez grand chez le cristal négatif en question, quoique l'octaèdre prédominait. Les arêtes des faces de l'octaèdre étaient peu distinctes mais celles qui forment la limite de l'octaèdre et du cube étaient très nettes.

Dans l'autre fragment l'inclusion avait une forme tout-à-fait irrégulière et arrondie, aussi la bulle de gaz était relativement plus grande. Je l'ai exposé à différentes températures en le portant, bien enveloppé dans un morceau de papier, alternativement durant quelques heures dans des parties différentes de mes vêtements, après avoir eu le soin de bien marquer, par un petit anneau de papier collé, l'endroit où se trouvait l'inclusion. Celle-ci ne se changeait que lentement, ce que j'attribue principalement à la grandeur de la bulle d'air, mais enfin elle avait acquise une forme régulière, du moins d'un côté. La même combinaison, environ dans la même proportion que dans l'autre fragment, s'observait ici, surtout la face du cube était parfaite, ce qu'on remarqua le mieux en l'éclairant de manière qu'on put observer la lumière réfléchie sur ce plan.

Comme ces expériences donnent une méthode assez facile d'étudier la solubilité de différentes matières cristallisées dans les différentes directions cristallographiques je me propose de les poursuivre. Celles que j'ai faites sur l'alun prouvent qu'on peut réellement transformer des inclusions arrondies en celles de forme régulière et rendent probable que les inclusions dihexaédriques du quartz ont été produites d'une manière semblable.

Bréda, Juillet 1885.

Digitized by Google

SUR L'ANALYSE MICROCHIMIQUE DES MINÉRAUX.

PAR TH. H. BEHRENS.

§ 1. INTRODUCTION.

1. On ne saurait nier que le nombre des réactifs microchimiques, dont on se sert dans les études pétrographiques pour reconnaître certaines substances minérales, est de beaucoup inférieur à celui des réactions qui servent à déterminer les substances élémentaires des tissus végétaux et animaux; et que l'application de ces dernières est beaucoup plus étendue que celle des actions chimiques employées pour déceler la nature ou la composition d'une espèce minérale quelconque.

Évidemment on ne pourrait chercher la cause de cette différence dans le fait que l'avantage de l'analyse microchimique serait moindre dans l'étude d'une substance minérale que dans la recherche de la nature d'un tissu végétal ou animal. En effet, ceux qui s'occupent de l'étude microscopique des minéraux conviendront que, s'il serait possible de démontrer, par une réaction microchimique, la présence du potassium et du sodium et d'évaluer approximativement la proportion des parties intégrantes dans le feldspath avec la même facilité et la même précision qu'on peut atteindre lorsqu'il s'agit de signaler et d'évaluer l'amidon par l'iode, la cellulose par l'iode et l'acide sulfurique, la pétrographie pourrait en tirer un profit considérable.

2. Il y a déjà longtemps qu'on s'est efforcé d'étendre et d'élargir les moyens d'analyse microscopique dans la détermination des minéraux intégrants des roches. M. ZIRKEL exécuta ses premières recherches à la lumière ordinaire; une année après il se servit de la lumière polarisée et quelques années plus tard, dans

Digitized by Google

les recherches classiques sur les roches basaltiques il recourut souvent à l'emploi de l'acide chlorhydrique, afin de distinguer par son action décomposante et dissolvante le labrador de l'oligoklase et la magnésite du fer titané. Depuis, l'acide chlorhydrique est devenu le réactif de prédilection des microscopistes. Cependant dans ces derniers temps il a perdu un peu de son prestige, parce qu'on était trop exigeant à son égard sans se soucier beaucoup des conditions de température et de concentration, sans tenir compte de la durée de la réaction et sans faire des expériences de contrôle.

En général, on s'est borné à se servir de son action décomposante et dissolvante; quelquefois seulement on a daigné faire attention à quelques produits de décomposition, par exemple à l'acide carbonique, signe de la présence du calcite, — au chlorure de sodium, produit de la décomposition de la népheline, — à l'acide silicique gélatineux propre à absorber des matières colorantes pour déceler des silicates facilement décomposables comme l'olivine, la chlorite etc.

Parmi les réactifs microchimiques, qui ont fait leur apparition dans ces derniers temps, on peut citer le réactif de M. Frésénius (molybdate ammonique dissous dans l'acide azotique) employé par M. Streng pour la recherche de l'apatite dans les roches de diverse provenance, la coloration par la vapeur de soufre des diverses espèces minérales appartenant au groupe de la haüyne et ses congénères suivant la méthode de M. Knop et la coloration des diverses variétés d'opale par la solution de fuchsine.

3. En même temps que l'application des réactions chimiques ne faisait que des progrès médiocres, on était occupé à améliorer sérieusement les méthodes optiques qui pouvaient servir à l'étude des minéraux. On empruntait à la microscopie zoologique et botanique l'emploi des lames de gypse et de quartz pour augmenter l'effet de la double réfraction, pour l'orientation des axes optiques et pour distinguer entre la double réfraction positive et négative. Bientôt les recherches de M. Tschermak (1869) donnèrent l'essor à l'étude microscopique du dichroisme dans les minéraux, d'abord au moyen de la loupe dichroscopique de M. Haidinger, puis au moyen des deux nicols (surtout par l'emploi du nicol inférieur) et enfin on dut aux recherches de M. Descloizeaux [1]) sur les constantes optiques du feldspath l'application du stauroscope de M. Kobell à l'examen microscopique. Enfin M. Rosenbusch rendit un service essentiel à la science en donnant une forme plus commode à l'appareil servant aux observations de ce genre (1876) et en publiant son manuel micrographique, qui contribuait beaucoup à répandre l'étude microscopique des minéraux.

[1]) Plusieurs mémoires dans les Comptes Rendus et dans les Annales de Chimie et de Physique (1875 et 1876).

Digitized by Google

Les mécaniciens et les opticiens venaient au devant de ces tentatives par la construction de machines perfectionnées servant à tailler et à roder les minéraux, de sorte que la préparation de lames minces et transparentes des substances minérales devint beaucoup moins laborieuse et qu'on parvint à faire sans aucun embarras des sections minces selon des directions voulues. En même temps on améliorait les microscopes et les appareils auxiliaires qui en sont le complément. Il n'est que juste de citer à ce sujet les ateliers de M. R. Fuess à Berlin, qui ont donné l'impulsion dans cette direction et puis encore ceux des frères Seibert à Wetzlar.

4. Dans la recherche de la nature des minéraux suivant les méthodes optiques on peut se servir des objets préparés, dès qu'ils ont été débarrassés du baume de Canada adhérent et ces objets peuvent servir pendant un temps indéfini. Toute modification dans la manière d'examiner la matière revient naturellement à un changement facilement réalisable de l'appareil optique; si l'on suppose que celui-ci répond aux conditions requises, l'objet n'a qu'à subir d'autre manipulation que le déplacement sur le porte-objet du microscope. Si, du reste, on prend en considération, que l'examen microscopique, comme il s'est développé par les efforts de M.M. Sorby, Zirkel et Vogelsang, permettait d'arriver dans l'espace de quelques minutes à une solution définitive de plusieurs questions qui ne pouvaient pas être illucidées par l'inspection seule de l'échantillon, et que les images microscopiques des roches préparées en lames minces ne le cédaient en rien, quant à la netteté des formes et quant à la beauté des couleurs, aux objets microscopiques tirés du règne végétal et animal, on s'expliquera facilement le penchant des naturalistes pour les méthodes optiques. La recherche de la nature des minéraux selon ces méthodes était une manipulation propre, exécutée à l'aide d'un appareil compendieux et qui permettait d'assujettir la matière en question à un examen approfondi et de déterminer sa nature, sans la gâter. En outre l'application de cette méthode ne coûtait que peu de temps et ne causait que peu d'embarras.

5. La détermination des minéraux suivant leur forme et leurs propriétés physiques, perfectionnée par les travaux de Werner et Mohs jusqu'à former un système complet a dû céder la place à une méthode de recherche reposant sur l'application des réactions chimiques. Cependant dans la microminéralogie et la micropétrographie modernes elle a de nouveau acquis une valeur prépondérante tout en présentant quelques propriétés particulières tant favorables que défavorables, qui résultent des conditions sous lesquelles des lames minces de minéraux, taillées suivant des directions accidentelles, s'offrent à la vue.

Parmi les minéraux taillés en lames minces le microscopiste rencontre rare-

Digitized by Google

ment des substances tout à fait opaques; ce sont surtout le fer magnétique, le fer titané et la pyrite, qui se montrent sous cet aspect. L'influence de l'inégalité des plans et de l'intransparence de la matière, qui si souvent entrave l'emploi du goniomètre et du stauroscope de M. Kobell, est diminuée ou anéantie par l'emploi des lames très-ténues et quant aux plans de clivage, qu'on ne trouve ordinairement que par l'emploi du marteau et du ciseau, ils sont indiqués presque toujours par des fentes parallèles. Les matières interposées n'ont éveillé l'attention des minéralogistes qu'après la vulgarisation de l'emploi du microscope. Ces matières forment un caractère si constant de certains minéraux, que leur présence a donné lieu à distinguer plus nettement certaines espèces comme la haüyne, la noseane, la leucite, le quartz, le grenat etc.

Là où les moyens optiques sont en défaut le microscopiste a un désavantage décisif à côté des partisans de la méthode ancienne; en effet comment pourrait-il arriver à déterminer la dureté ou la densité des minéraux, à juger exactement de leur éclat et de leur couleur, à déterminer leur forme cristalline et à savoir comment ils se comportent envers les réactifs chimiques? Aussi a-t-on taché de subvenir à ces désavantages en développant et en raffinant autant que possible les méthodes d'examen optiques.

Quiconque voudra se faire une idée des résultats obtenus par l'application de la méthode décrite dans les mains d'observateurs exercés et ingénieux, n'aura qu'à passer en revue les travaux pétrographiques des quinze années dernièrement passées. En effet ces travaux ont amené une révolution totale sur le terrain de la pétrographie. De l'autre côté quiconque se sera occupé de l'étude microscopique des minéraux en lames minces saura par expérience combien il faut d'exercice et de pratique pour arriver à des résultats méritant confiance et combien de fois, malgré les soins les plus scrupuleux, il reste encore des incertitudes et des doutes, surtout quand on a affaire à une matière ancienne et fortement effleurie.

6. L'emploi des appareils de polarisation dans la détermination du système de cristallisation n'est praticable que dans le cas où les directions de clivages ou les contours nettement accusés des cristaux permettent l'orientation de l'axe principal. Parfois il faut beaucoup de temps pour arriver à ce résultat et quant aux matières amorphes ou cristallisant dans le système régulier le moyen susdit reste totalement en défaut. En effet dans ce dernier cas on est forcé de se laisser guider par des différences de structure, de transparence et de couleur et dans les cas les plus favorables par des matières incluses caractéristiques. Comme exemple de ces objets indéchiffrables je cite la masse fondamentale des divers roches de structure porphyrique, les produits de l'efflorescence des feldspaths et

Digitized by Google

et augites anciens, qu'on a nommés saussurite et viridite, enfin ces masses opaques et indéfinies quant à leur forme cristalline auxquelles on a donné le nom d'„*opacite*" quand leur couleur était noire et „*ferrite*" quand elle tirait au brun, deux noms qui n'offrent d'autre avantage que celui d'exprimer en un seul mot qu'on ignore la vraie nature des objets désignés.

§ 2. MÉTHODES MICROCHIMIQUES.

7. Maintes fois on a senti le besoin d'aller chercher du secours auprès de la chimie, qui dans les mains de KLAPROTH, BERZELIUS, RAMMELSBERG et d'autres a rendu des services éminents dans la détermination et la classification des minéraux, et sans aucun doute nous posséderions aujourd'hui un système complet de procédés microchimiques pour la détermination des minéraux les plus communs, si ceux-ci fussent aussi aisément attaquables par les réactifs chimiques que les tissus organiques les plus réfractaires. Des réactifs morphologiques (l'acide acétique pour les noyaux des cellules, la potasse pour la substance cuticulaire) ne peuvent servir dans l'examen des minéraux à cause du manque de pouvoir d'imbibition.

L'application des méthodes, reposant sur la coloration ne peut être que très limitée, vu qu'il n'y a que peu de minéraux qui ont la faculté d'absorber des matières colorantes et surtout de les fixer. La macération avec les acides et avec les solutions salines paraît promettre un meilleur succès; mais jusqu'à ce moment on a fait un emploi si restreint de cette manière d'agir, qu'on ne pourrait baser là-dessus un système rationnel d'analyse. L'attaque des minéraux par l'acide chlorhydrique, dont nous avons fait mention ci-dessus (1), peut être considéré comme ressortant de cette méthode générale. Ordinairement on se sert à cet effet du minéral pulvérisé; procédé ne donnant que des résultats difficiles à déchiffrer. Il suffit en effet de rappeler les cas nombreux où ce procédé à cause de la confusion des images microscopiques, a mené à des énoncés contradictoires quant à la nature de la substance et a élevé des doutes sérieux sur la valeur de la méthode elle-même. Remarquons en outre que l'acide chlorhydrique, appliqué selon la méthode ordinairement en usage, c'est-à-dire en solution aqueuse plus ou moins concentrée sur des lames très minces amène souvent la destruction totale de la matière en question.

De ce qui précède on tire cette conclusion qu'on ne saurait arriver par cette méthode à un résultat positif à moins qu'on ne détruise totalement une certaine portion des silicates, soit en agissant sur une partie restreinte de la surface polie soit en attaquant par le réactif un fragment choisi du minéral et en appliquant les règles générales de l'analyse qualitative.

Digitized by Google

8. M. H. Rosenbusch qui plus d'une fois s'est servi des réactifs chimiques comme auxiliaires, conseille dans sa „Physiographie microscopique" (T. I, p. 108) d'appliquer en même temps la méthode chimique et la méthode optique et donne même (p. 107—111) quelques indications concernant les manipulations microchimiques dont on peut se servir avec succès pour déceler la nature des minéraux. Le principe de sa méthode appliquée soit sur le minéral en poudre soit sur des lames minces de la substance peut se résumer comme il suit:

1°. Dissolution partielle par les acides ou les alcalis des matières intégrantes et analyse qualitative des substances dissoutes selon les méthodes en usage en ayant recours en cas de besoin à l'emploi du microscope.

2°. Inspection microscopique du résidu, immergé dans le baume de Canada.

La méthode de Mr. Rosenbusch nécessite l'emploi des filtres. L'appareil à filtrer, décrit par lui pourra servir sans aucun doute à réduire autant que possible la perte de temps dans ce genre de recherches ainsi que la perte encore plus déplorable de matière, mais on conviendra qu'il serait à désirer qu'on pût y substituer une autre méthode permettant de faire une analyse qualitative des substances minérales sans avoir recours à la filtration.

§ 3. la méthode de M. Boricky.

9. M. E. Boricky a le mérite d'être le premier, qui a publié un système rationnel de réactions microchimiques. Il cherche à éviter partout la filtration et n'emploie qu'un seul réactif principal. C'est ce qui donne à sa méthode un avantage réel et une élégance qui lui sert de recommandation.

M. Boricky a basé sa *„méthode universelle"* sur la propriété de l'acide hydrofluosilicique de se décomposer par l'évaporation sous formation d'acide hydrofluorique et de donner avec les alcalis des sels cristallins peu solubles d'une forme nettement accusée. Il soumet à l'évaporation de l'acide hydrofluosilicique à 3½ p. C. en contact avec des fragments de minéraux ou avec la surface polie d'une matière pierreuse [1]) et il distingue les fluosilicates formés d'après leur aspect cristallin [2]). Le sel potassique constitue des cristaux cubiques, le sel sodique des prismes hexagonaux couronnés d'une pyramide à angles obtus. Le sel calcique se présente sous la forme de fuseaux et le sel magnésique sous celle de rhomboèdres. La combinaison strontique ressemble à celle du calcium, tandis que celle du baryum donne de petites aiguilles pointues et celle du lithium des pyramides

---

[1]) E. Boricky. Elemente einer neuen chemisch-mikroskopischen Mineral- und Gesteinsanalyse. p. 15 et suiv. dans l'Archiv der naturwissenschaftlichen Landesdurchforschung von Böhmen. Bd. 3 Abth. 5.

[2]) loc. cit. p. 17—22.

Digitized by Google

exiguës à six plans. L'observation se fait sous un grossissement linéaire de 200 à 400 fois.

Pour distinguer le calcium du strontium M. Boricky se sert de l'acide sulfurique dilué de son volume d'eau [1]). Par ce réactif les cristaux du fluosilicate de calcium se changent en des aggrégats formés de gypse en aiguilles, tandis que le fluosilicate strontique se transforme en une masse grenue à peine reconnaissable. Le fluosilicate de sodium n'est pas attaqué par l'acide sulfurique.

Pour distinguer entre eux les fluosilicates de magnesium, de fer et de manganèse on les traite soit par le chlore soit par le sulfure d'ammonium; sous l'influence de l'halogène le sel ferreux prend une couleur jaune-citron et le sel manganeux une teinte rougeâtre tandis que le sulfure nommé colore le sel ferreux en noir et précipite de la solution du sel manganeux une substance gris-verdâtre ayant un aspect grenu. Il va sans dire que le sel magnésique est indifférent aux deux réactifs nommés [2]).

Quant à l'application des autres réactions indiquées par l'auteur (des expériences au feu et la corrosion des lames polies) je dois renvoyer le lecteur à l'original; seulement je me permettrai de remarquer ici que plusieurs des phénomènes, attribués par l'auteur à l'action du chlore, pourraient bien provenir de l'influence des vapeurs d'acide chlorhydrique.

10. M. Boricky a prouvé par plusieurs expériences de contrôle qu'on peut obtenir de très bons résultats en employant sa méthode et quant à moi, mes propres essais m'ont donné la même conviction. Si malgré ce succès, j'ai cru devoir quitter sa manière d'agir, c'est qu'elle a quelques défauts assez graves qui ne se font sentir que dans la pratique, et qu'elle est parfois assez difficile à appliquer.

C'est ce qui m'a donné lieu à examiner la méthode de plus près, de la compléter et de la modifier successivement.

11. L'expérience servant à déceler la présence des alcalis laisse à peine à désirer sous le rapport de la netteté mais beaucoup au contraire sous le rapport du maniement facile.

La manière d'agir la plus simple, c'est de laisser sécher une goutte d'acide hydrofluosilicique sur la lame mince polie du minéral. Dans cette expérience il se forme cependant des croûtes blanches [3]) peu transparentes, qui ne permettent

---

[1]) loc. cit. p. 22.

[2]) loc. cit p. 23.

[3]) Boricky. loc. cit. p. 15, 16. L'auteur prétend que de l'acide silicique se sépare en quantité considérable dans une solution concentrée d'acide hydrofluosilicique. Dans ce cas il se voit obligé d'avoir recours

Digitized by Google

souvent pas de distinguer bien nettement les petits cristaux surjacents blancs, notamment ceux du fluosilicate de potassium transparent. On obtient de meilleurs résultats en noyant des parcelles du minéral dans une goutte d'acide (p. 15) parce qu'alors une partie des fluosilicates formés se dessine distinctement sur un fond incolore, totalement transparent. J'ai toujours obtenu les cristaux les plus beaux en bouillant les fluosilicates avec de l'eau et en transportant quelques gouttes de la solution sur une plaque de verre; cette méthode est employée par M. Boricky dans ses expériences avec l'acide fluorhydrique (p. 31).

12. M. Boricky emploie l'acide fluorhydrique pour attaquer les silicates qui résistent à l'action de l'acide hydrofluosilicique, réactif qu'il préfère d'ailleurs au premier, parce que, appliqué sur la surface polie d'un minéral, il lui donne, à cause de son action moins violente et plus lente, des cristaux plus distincts et parce qu'il permet d'évaluer la proportion des parties intégrantes, dans le cas où les combinaisons formées sont solubles au même degré (p. 14).

Une remarque à faire à ce sujet, c'est que, si l'on se résout à chauffer la substance avec de l'acide hydrofluorique dans une capsule de platine, on obtient de même de très belles cristallisations; quant à l'évaluation quantitative, l'auteur lui-même (p. 15) ne l'applique que dans quelques cas restreints parce que la solubilité des fluosilicates [1]) varie entre des limites assez étendues et que les diverses espèces minérales ne résistent pas au même degré à l'action de l'acide.

Cette circonstance, que les minéraux sont moins attaquables à mesure qu'ils contiennent moins de silicium, peut servir à séparer et à isoler les espèces minérales dans un mélange. Ainsi, si l'on attaque une roche, composée de feldspath et d'augite, mais dans laquelle le premier abonde, on ne dissout d'abord que le feldspath mais la séparation n'est pas rigoureuse, parce qu'à la longue l'augite ne résiste pas à l'action du réactif. Un traitement réitéré par l'acide hydrofluosilicique est nécessaire pour transformer la masse totale en un mélange de fluosilicates. En tout cas on pourra se servir avec avantage de cette méthode quand on n'est pas pressé.

Un espace de quatre heures suffit pour obtenir une corrosion assez forte du feldspath par l'acide hydrofluosilicique à 3 p. C.; il faut au moins 6—7 heures

---

à la potasse pour dissoudre la gelée, ce qui ne réussit qu'en partie, tandis qu'au contraire l'addition de l'acide sulfurique concentré donne un résultat satisfaisant. Il ressort de là que la matière qui se sépare n'est pas de l'acide silicique mais qu'on a affaire à la formation rapide de fluosilicates et dans la plupart des cas de la formation de fluoaluminates difficiles à décomposer.

[1]) Le fluosilicate potassique se dissout dans 833 parties d'eau à 17°,5 C.; le sel sodique exige 153 p. et le sel lithique 1,9 parties d'eau pour se dissoudre sous les mêmes circonstances. Les sels de calcium et de magnésium sont de même extrêmement solubles.

Digitized by Google

pour obtenir le même résultat avec l'augite et l'amphibole; quand au mica il vaut mieux l'attaquer par un mélange du réactif nommé avec un peu d'acide hydrofluorique.

Si l'on n'a pas précisément en vue d'opérer sur des surfaces polies, on peut se servir avec avantage de l'acide fluorhydrique. Le minéral pulvérisé se décompose dans l'espace de quelques minutes par la digestion avec ce réactif dans une capsule en platine. Si après avoir ajouté, pour toute sécurité, un peu d'acide hydrofluosilicique on évapore à sec et si l'on extrait le résidu par l'eau bouillante, si enfin on transporte une goutte de la liqueur sur une plaque de verre, on voit bientôt se séparer des cristaux distincts.

Il est clair que dans ce genre d'essais on peut se borner à employer des parcelles du minéral beaucoup plus petites qu'en opérant selon M. Boricky; en effet ce savant est contraint d'employer des grains ayant la grosseur d'une tête d'épingle puisqu'il doit se contenter d'une décomposition partielle.

13. Les plaques en verre, dont on se servira dans les expériences avec l'acide fluorhydrique, l'acide hydrofluosilicique ou des solutions de fluorures doivent être couvertes d'une couche d'une matière protectrice. A cet effet M. Boricky emploie le baume de Canada. En effet si l'on a soin d'évaporer lentement elle forme une croûte polie plane et incolore qui résiste à l'action de l'acide hydrofluosilicique et même de l'acide fluorhydrique faible. Elle ne laisserait rien à désirer, si les petits cristaux n'y adhéraient pas si fortement qu'un rincement à l'eau ne suffit pas à les éloigner. Le lavage n'est pas plus efficace, puisqu'il donne lieu à la formation de raies et de gerçures. Ainsi on est obligé de se servir d'une plaque nouvelle dans chaque expérience; voilà à mon avis un désavantage réel de la méthode de M. Boricky.

14. Si maintenant nous laissons de côté l'examen des feldspaths, dont le but principal est la recherche des alcalis et si nous nous arrêtons pour le moment à l'analyse des augites et des amphiboles, nous trouverons des défauts principiels dans la méthode de M. Boricky. Dans ce genre de recherches on a pour but principal de signaler et d'évaluer le calcium, le magnésium et le fer et en second lieu de déceler la présence de l'aluminium.

15. Le fluosilicate de calcium est un sel très soluble. M. Boricky dit, qu'on peut transformer les cristaux de ce sel par l'acide sulfurique en un amas d'aiguilles formées de sulfate de calcium et M. E. Fleischer (Titrirmethode p. 34 et 35) emploie ce sel comme réactif au lieu de l'acide hydrofluosilicique pour la précipitation de la potasse et de la soude. On comprend donc aisément que le fluosilicate de calcium ne se présente sous la forme de cristaux que beaucoup de temps après les sels analogues de potassium et de sodium; aussi j'ai pu dé-

Digitized by Google

celer plus d'une fois dans l'espace de deux minutes la présence du calcium au moyen de l'acide sulfurique après que l'acide hydrofluosilicique n'avait donné aucun résultat. D'après M. Boricky (p. 23) le fluosilicate de sodium peut contenir du calcium. Cette observation est juste; mais il en est de même du fluosilicate de potassium, qui, quand il s'est séparé d'un mélange riche en calcium, forme des cristaux de gypse par l'addition de l'acide sulfurique, quoiqu'en quantité plus faible que le sel sodique. La cause du phénomène est évidemment la présence de l'eau-mère concentrée contenant du fluosilicate de calcium; le sel de sodium à cause de sa structure microlithique est beaucoup plus apte à absorber cette eau-mère que le sel correspondant de potassium.

Le fluosilicate de magnésium a la même forme cristalline que celui du fer et du manganèse; on s'attendrait donc, comme dans le cas des carbonates, à voir se former dans la solution des sels mélangés des cristaux contenant les trois composés en combinaison isomorphe. Ceci cependant ne semble pas toujours être le cas. En effet, j'ai vu se séparer d'une solution contenant autant de fer que de magnésium, le fluosilicate de ce dernier métal, qui ne se colorait que faiblement par le sulfure d'ammonium. Un désavantage beaucoup plus grave de ce sel, c'est sa solubilité extrême dans l'eau. Il ne forme des cristaux que difficilement et assez tard, et ceux-ci sont très déliquescents, propriété qu'ils ont en commun avec le sel ferreux. Le manque d'une bonne méthode pour la recherche du magnésium est la cause principale qui m'a porté à chercher une nouvelle méthode microchimique.

16. Au sujet de l'alumine, M. Boricky (p. 15) prétend qu'elle ne forme pas de combinaison cristalline avec l'acide hydrofluosilicique. Le fluosilicate d'aluminium se refuse à cristalliser; sa solution ne laisse qu'une masse gommeuse après l'évaporation. Cependant il est à remarquer que d'après les expériences de M. Deville [1]) le sel ne se forme pas toujours. En effet, l'acide hydrofluosilicique forme, avec un excès de kaoline, du fluorure d'aluminium et cette réaction est encore favorisée par la présence des fluorures alcalins qui, en se combinant avec le sel précédent, produisent des composés chimiques assez stables et presque insolubles. Si l'on emploie un mélange d'acide hydrofluosilicique et d'acide fluorhydrique pour attaquer le minéral, et si celui-ci contient une quantité suffisante d'alcali, on peut s'attendre a obtenir l'aluminium sous la forme de ces sels doubles.

Probablement M. Boricky n'a pas fait attention à ces derniers, parce qu'ils ont précisément la même forme cristalline que les fluosilicates correspondants. Le fluoaluminate de potassium ressemble au fluosilicate de potassium; le fluo-

[1]) Würtz, Dictionnaire de Chimie, Art. Aluminium et Fluorures.

Digitized by Google

aluminate de sodium forme les mêmes cristaux hexagonaux (∞ P. P) que le fluosilicate correspondant. Je me suis assuré que les prismes couronnés d'une pyramide sont biréfringents, tandisque l'hexagone s'éteint entre deux nicols croisés, et j'ai répété plusieurs fois ces expériences sur divers échantillons préparés, en regard de la forme cristalline de la kryolithe, qui, d'après M. Descloizeaux, appartiendrait au système tricline. Quant à ce dernier minéral, qui a trois directions de clivage perpendiculaires l'une sur l'autre, je n'ai pas réussi à observer les lemniscates connues; sous le microscope polarisant, les plaques montraient les phénomènes de polarisation propres aux aggrégats cristallins.

17. J'ai pensé qu'on pourrait peut-être tirer parti de la réaction exercée par les fluorures alcalins sur le fluorure d'aluminium, pour déceler, après l'élimination complète du silicium sous forme de fluorure, la présence de l'aluminium, opération qui cause beaucoup d'embarras si l'on applique les méthodes usitées et qui ne s'adapte pas à l'emploi du microscope. De ce point de vue, il me parut nécessaire d'étudier la manière dont se comportent les autres métaux trivalents; or je trouvai que le fluoaluminate de sodium est isomorphe avec les combinaisons du fluorure sodique d'une part et les fluorures ferrique, manganique, chromique et uranique d'autre part. Dans la réaction on peut substituer le chlorure de sodium au fluorure de ce métal; si on emploie un excès de sel marin en substance, on voit se former, au lieu des tables hexagonales, des figures imitant une fleur à six feuilles qui rappellent vivement quelques formes des cristaux de neige.

Du reste, la ressemblance de la forme cristalline va encore beaucoup plus loin chez les fluosels, sans que pour cela je me croirais autorisé à admettre l'isomorphisme de ces composés.

Les sels doubles nommés ci-dessus sont analogues, quant à leur forme, aux fluostannates, fluotungstates, fluomolybdates, fluotantalates et fluoniobates correspondants; les fluoborates, les fluotitanates et les fluozirconates au contraire s'en éloignent sensiblement.

Le fluoborate sodique ressemble au fluosilicate du même métal; il en est de même du fluotitanate, mais les cristaux de ce sel n'ont pas de contours bien accusés. Il se sépare lentement sous forme de petites masses arrondies qui, après un espace de 10 minutes, montrent peu à peu la forme d'un hexagone. Le fluozirconate sodique apparaît beaucoup plus vite; ses cristaux sont des pyramides quadratiques (en forme d'enveloppes de lettres).

Le fluoborate potassique a la même forme que le fluotitanate correspondant; tous les deux se cristallisent sous la forme de rhombes ayant souvent les angles tronqués (des tablettes à 6 ou 8 pans). Les cristaux rhombiques du titanate sont très enclins à former des raphides par suite d'un développement extraordinaire

Digitized by Google

d'une paire des plans tronquants. Le fluozirconate se comporte tout autrement. Ce sel semble être très peu soluble; il ne pouvait être obtenu que sous la forme de petits grains très tenus; le même phénomène s'observe chez le fluozirconate de calcium, tandis qu'au contraire le fluotitanate de ce métal est très soluble dans l'eau.

J'ai traîté amplement de ces réactions, puisqu'elles semblaient pouvoir me fournir un moyen de décider si certains cristaux jaune-rougeâtre enclavés dans les gabbros et les eklogites, étaient du rutile ou du zircone.

M. MARIGNAC [1]) a attribué une autre forme cristalline que moi à quelques-uns des fluosels décrits. C'est pourquoi j'ai répété mes expériences, mais toujours avec le même résultat. Je crois devoir attribuer cette discordance à une différence quant au développement des pans. J'ai renoncé à approfondir cette question, puisque l'étude des fluosels n'avait pour moi qu'un intérêt secondaire et ne pourrait manquer de me détourner du but principal que je m'étais proposé.

18. Après avoir obtenu la conviction que la méthode de M. BORICKY ne permettait pas de déceler la présence du calcium et du magnésium avec la précision désirée, et qu'elle pourrait mener à confondre le silicium avec l'aluminium, et ce dernier élément avec le bore et le fer et jusqu'à un certain degré avec le manganèse et le chrome, je me vis obligé de l'abandonner et de tâcher d'en trouver une autre, qui, quoique moins simple et moins élégante, permît d'obtenir des résultats plus sûrs et plus décisifs dans un temps plus court et avec une facilité plus grande.

§ 4. MÉTHODE MICROCHIMIQUE NOUVELLE.

19. Un système complet de méthodes microchimiques dans l'étude de la pétrographie doit fournir des moyens suffisants:

1°. à l'analyse qualitative de petits fragments des minéraux d'occurence fréquente. Le poids minimum de ces fragments pourrait être évalué à 0,1 milligramme, ce qui correspond à un diamètre d'environ 0,3 millimètres;

2°. à la recherche qualitative des matières intégrantes sur divers points de la surface polie d'une substance minérale;

3°. à la séparation de fragments des minéraux les plus communs, afin de compléter l'analyse qualitative par l'analyse quantitative.

Les réactions qui sont comprises sous la première rubrique doivent en outre satisfaire aux conditions suivantes:

a). que la filtration soit entièrement exclue et que par là on évite autant

---

[1]) MARIGNAC. Ann. de Chim. et de Phys. LX. 301.

Digitized by Google

que possible la perte de temps et la souillure de la matière à examiner (minime en elle-même) par des substances étrangères;

b). qu'elles donnent lieu à la naissance de composés chimiques reconnaissables, soit par la forme caractéristique de leurs cristaux sous le microscope, soit par la formation de précipités d'une couleur intense;

c). que l'espace de temps, nécessaire à la formation de cristaux distincts pendant une évaporation lente, soit aussi court que possible; un espace de deux heures tout au plus doit suffire à cette sorte d'expériences;

d). que tous les phénomènes observés soient d'une clarté, d'une simplicité et d'une netteté telle que des personnes peu exercées puissent s'en servir avec succès.

Ainsi il faudra en général chercher à appliquer des réactifs ayant un poids moléculaire élevé; de même on fera bien de donner la préférence aux réactifs qui provoquent la formation des sels doubles comparativement à ceux qui ne mènent qu'à la naissance des sels simples également solubles; enfin on comprendra que la formation des sels contenant de l'eau de cristallisation aura toujours quelque avantage sur celle des sels anhydres.

§ 5. PRÉPARATION DE LA MATIÈRE MINÉRALE À EXAMINER.

20. 1°. Lorsqu'on a à sa disposition des quantités assez grandes de la matière pierreuse, des échantillons pétrographiques ou plusieurs tessons d'une matière de même provenance, il est souvent avantageux d'en séparer par le marteau des éclats très-minces et d'isoler de ces fragments au moyen d'une pince des particules d'une espèce minérale homogène. Je me plais ordinairement à appliquer cette méthode, quand les cristaux intégrants ont une dimension linéaire de 1,5 millimètre. On se convainc par l'inspection à la loupe qu'on a affaire à des parcelles d'une structure, d'une couleur et d'un éclat identiques, et en cas de besoin on débarrasse la matière d'une trace adhérente de fer par un traitement à l'eau régale.

2°. Les roches microcristallines doivent être broyées tant bien que mal dans un mortier d'Abich ou, en défaut de ce dernier, sur une petite enclume, étant enveloppé d'un morceau de papier. Après avoir éloigné la poussière en la passant par un tamis très fin ou en soufflant sur le minéral broyé, on cherche à isoler sous la loupe ou sous un microscope à faible grossissement, au moyen d'une aiguille à préparer ou d'une pincette, une parcelle homogène de la substance à étudier. Afin de faciliter l'adhérence de celle-ci à l'aiguille, on humecte cette dernière de temps en temps avec un peu de glycérine. Enfin on plonge la pointe de l'aiguille dans une goutte d'eau, et on détache ainsi la parcelle du minéral.

3°. En cas qu'on ne puisse pas distinguer nettement les parties intégrantes

Digitized by Google

d'une roche dans la poudre grossière, on a recours à une lame mince taillée d'une telle épaisseur qu'elle a encore une transparence suffisante à un grossissement de 100 fois du microscope. Comme on ne peut pas se servir d'un couvre-objet, on donne un faible poli à la lame. A cet effet on n'a d'autre chose à faire en rodant la lame, que de cesser d'ajouter de l'éméri et au contraire d'arroser abondamment d'eau la plaque à user dans des intervalles très courts, tout en faisant décrire au minéral des cercles d'un rayon très petit, de sorte qu'à la fin il n'est plus en contact qu'avec l'eau et le fer poli. En cas de besoin on arrive à donner aux lames polies la transparence nécessaire pour pouvoir se servir des objectifs d'une force moyenne, en les enduisant de glycérine ou d'huile d'olive.

Dans les recherches microscopiques il faut en outre que le baume de Canada qui se trouve entre la matière minérale et l'objectif, ait une certaine mollesse; en cas de besoin, on peut y subvenir par le chauffage.

Maintenant on peut détacher sous le microscope (en faisant usage d'un objectif à faible grossissement et d'un oculaire à fort grossissement) des parcelles de la substance minérale à l'aide d'un petit couteau à lame mince, ou à l'aide d'une forte aiguille à préparer taillée en forme de couteau, sans que les fissures s'étendent beaucoup au delà de l'endroit qu'on a en vue d'examiner. On opère en avançant de la marge jusqu'au milieu et on éloigne de temps en temps, en chauffant un peu fortement et en grattant contre la surface les gros morceaux qui s'amoncellent. Puis on détache de la même manière le segment du minéral propre à l'expérience et on le chauffe fortement afin de chasser des matières organiques; enfin on éloigne des parcelles adhérentes de la manière que nous avons décrite au paragraphe 20, 2°.

Afin de faciliter l'attaque du minéral par les agents chimiques, on le réduit en poudre très tenue, et pour éviter des pertes on couvre les parcelles d'un petit morceau de papier avant de les broyer dans un mortier d'acier. On éloigne le papier au moyen d'un couteau à lame de corne ou d'acier; mais jamais on ne se sert à cet effet d'un couteau ou d'une spatule en verre, en porcelaine ou en os. Le couteau en acier peut aussi servir à rassembler la poudre fine adhérente au mortier et au pilon.

§ 6. DISSOLUTION ET ATTAQUE DES MINÉRAUX.

21. Pour dissoudre la poudre du minéral, on se sert de l'acide fluorhydrique fumant (2—3 centigrammes d'acide sur 0,5 milligr. de matière) ou du fluorure ammonique combiné à l'acide chlorhydrique. Il est nécessaire de s'assurer de l'absence du sodium, du calcium et de l'aluminium dans l'acide fluorhydrique,

Digitized by Google

en évaporant à sec 1 C. C. de l'acide du commerce avec quelques centigrammes d'acide sulfurique, et en faisant l'analyse qualitative du résidu. Si l'acide est impur, il peut cependant très-bien servir à la préparation du fluorure ammonique. L'acide fluorhydrique du commerce laisse toujours un résidu à l'évaporation, même s'il ne contient aucun sel dissous; ce résidu, coloré en brun, se charbonne par l'action de l'acide sulfurique; il provient des flacons en gutta-percha, dans lesquels l'acide est conservé et transporté.

Si l'on est trop gêné par ce résidu, qui sous le microscope se manifeste par la présence de flocons brun-noirâtre, on peut se servir du fluorure ammonique additionné d'acide chlorhydrique. Ce mélange n'a pas l'action énergique de l'acide fluorhydrique fumant et on doit avoir soin, dans la recherche du potassium, de porter la température au rouge après l'évaporation.

Du reste on éprouve les mêmes désagréments quand il s'agit de conserver les deux réactifs. On ne peut se servir à cet effet que de vases en platine ou en gutta-percha. Les flacons en gutta-percha d'un volume assez considérable qui servent à transporter l'acide sont très incommodes quand il s'agit de l'emploi de quelques centigrammes de matière; les flacons, qui satisfont au but proposé ont un volume ne dépassant pas les 30 C. C.; dans le bouchon en gutta-percha on a soudé une petite cuiller, un fil en gutta-percha ou un fil de platine dont le bout libre est tourné en tire-bouchon; celui-ci a un diamètre d'environ 3 mM. et sert en guise de pipette. Il n'est pas facile de se procurer de tels flacons et encore moins de se les fabriquer au laboratoire. On peut se procurer sans peine des vases en gutta-percha coniques pour la conservation du fluorure ammonique, en pressant des rondelles de la matière entre deux creusets en porcelaine de même forme. A cet effet on amollit les rondelles dans l'eau chaude et on enduit d'huile les surfaces des creusets qui viennent en contact avec la matière.

On forme le couvercle de la même manière entre deux couvercles de creusets en porcelaine, dont l'un est privé de son anse. L'attaque par l'acide fluorhydrique se fait dans des capsules hémisphériques en platine ayant 1 cM. de diamètre [1]), comme elles s'emploient dans les expériences au chalumeau. Afin de pouvoir exécuter le nettoyage de ces petits instruments, on fait creuser au tour dans un morceau de bois dur (par exemple dans une boîte) des cavités qui s'adaptent à la forme des capsules; on arrive également au but en faisant de petits moules en plâtre et en imprégnant ceux-ci d'une solution alcoolique de laque en écailles.

---

[1]) Ces capsules d'une qualité supérieure sont fabriquées par la »*Deutsche Gold- und Silberscheide-Anstalt*" à Francfort (ci-devant H. Rössler).

Digitized by Google

Ces moules, tout en servant de supports aux capsules, permettent de les nettoyer dûment sans les endommager. Quant aux couvercles concaves pour la sublimation on peut se les procurer en donnant par le battage la forme requise à des lames minces de platine auparavant chauffées au rouge. A cet effet on se sert d'un morceau de plomb comme support ou étau, et d'un pilon comme on en emploie dans la confection des cupelles de Plattner.

Quand on veut procéder à l'attaque d'un silicate, on commence par transporter dans la capsule quelques gouttes d'acide fluorhydrique ou de fluorure ammonique et d'acide chlorhydrique, puis on y ajoute la poudre du minéral. On évapore à une chaleur modérée, on ajoute au besoin encore un peu du réactif et on évapore de nouveau. Dans cette opération et dans celle qui sera décrite plus loin, on devra se garder soigneusement des vapeurs de l'acide fluorhydrique, puisque cette substance, même en très petite quantité peut causer des accidents très graves quand elle vient en contact avec des plaies.

On ajoute au résidu sec, consistant en fluorides, de l'acide sulfurique dilué en telle quantité que des vapeurs abondantes d'acide concentré se développent pendant l'évaporation prolongée. Cette opération surtout doit être faite avec soin pour qu'il ne reste pas de fluosilicate et de fluoaluminate inattaqué.

On fera bien de ne pas chasser totalement l'acide sulfurique; un petit excès de cette substance favorise beaucoup la dissolution des sels dans l'eau et en quelques cas spéciaux la formation de cristaux; il prévient en même temps la dessiccation incommode des gouttes étendues pendant l'examen à l'aide du microscope [1]).

Ainsi, en cas de besoin, il faudra ajouter encore un petit peu d'acide sulfurique et chauffer de nouveau, jusqu'à développement de vapeurs épaisses, avant de procéder au traitement par l'eau bouillante.

Enfin on remplit la capsule à moitié d'eau et on évapore le contenu en faisant bouillir doucement jusqu'à ce qu'il ne reste que 1 centigramme de solution pour 0,1 milligramme de minéral.

§ 7. RECHERCHE DU CALCIUM.

22. On fait monter la solution des sulfates dans un tube capillaire de 0,2 mM. de diamètre intérieur, qui sert de pipette. En soufflant avec précaution par le

---

[1]) Si l'on veut conserver pendant quelque temps des objets préparés, on peut empêcher l'évaporation en ajoutant un peu de glycérine et en couvrant la masse d'un couvre-objet, qu'on adapte au moyen d'un vernis asphaltique assez épais. Si l'évaporation à été poussée trop loin, on y remédie en passant la haleine sur la masse desséchée on en ajoutant une goutte minime d'eau, qu'on suspend à un petit crochet en platine, comme nous le décrirons au paragraphe 28.

Digitized by Google

bout du tube, on peut transporter sur une plaque en verre propre des gouttelettes ayant un diamètre de 2—3 millimètres. Le tube capillaire permet de diviser en plusieurs portions la matière servant à l'examen, même si elle ne pèse pas plus de 0,1 milligramme. On peut aussi y conserver pendant un temps indéfini les solutions préparées [1]).

La plaque de verre portant la goutte est placée sans couvre-objet sous le microscope à grossissement de 150—200 fois. Je préfère opérer sans couvre-objet, et je protège l'objectif par une lame mince de mica, fixée au moyen d'un peu de glycérine, parce que l'évaporation de la goutte m'a quelquefois rendu de véritables services et que l'action des réactifs est beaucoup plus rapide et plus égale que quand on se sert d'un couvre-objet.

Si le minéral attaqué contient du calcium en quantité sensible, on voit immédiatement ou dans l'espace d'une ou de deux minutes des cristaux de gypse de la forme assez connue ∞ P. P. ∞ P. ∞, gisant d'ordinaire sur la face du clinopinacoïde (Fig. 3). Si la quantité du calcium est considérable, on voit le champ du microscope se remplir de prismes rudimentaires courts, caractéristiques pour le gypse; entre ces cristaux se forment peu à peu des aiguilles tenues se groupant souvent en rosettes irrégulières. La dimension transversale de ces cristaux est encore plus petite quand les solutions contiennent beaucoup d'acide chlorhydrique.

Plus tard on voit apparaître des cristaux plus grands sur la marge de la goutte, dont on peut mesurer les angles et parmi lesquels on trouve parfois des jumeaux en fer de lance. Les cristaux de gypse ont d'ordinaire une longueur de 60 microns sur une largeur de 6 microns.

Rarement on se trouvera dans la nécessité de hâter la formation de cristaux par l'alcool. En cas de besoin, on laisse séjourner pendant quelque minutes la plaque dans une boîte en carton dont on a humecté le fond avec quelques gouttes d'alcool. Les cristaux qu'on obtient de cette manière ressemblent à ceux qui se forment dans une solution chlorhydrique après l'addition de l'acide sulfurique.

Dans la plupart des cas on arrive au but par l'évaporation; une fois j'obtins après quelque temps d'attente sans l'aide de l'alcool des cristaux d'une solution ne contenant que 0,3 p. pour mille de chaux.

La sensibilité de la réaction est assez satisfaisante; en effet, on peut encore déceler la présence de 0,0005 mgr. de chaux. Cette sensibilité est portée au quadruple à l'aide de l'alcool; mais comme je l'ai déjà remarqué, aux dépens de la

---

[1]) Si on laisse un tube capillaire pendant quelques heures dans une position verticale la solution s'éclaircit totalement. A cet effet on le fixe sur un support au moyen d'un peu de cire.

Digitized by Google

grosseur et de la netteté de forme des cristaux. Des expériences avec les réactifs usités, comme l'oxalate ammonique, l'acide oxalique et le carbonate ammonique n'aboutirent pas. Les cristaux de l'oxalate et du carbonate sont trop exigus et trop confus, à moins qu'on ne puisse vouer à l'expérience un temps démesurément long.

§ 8. RECHERCHE DU POTASSIUM.

23. Pour la recherche du potassium on ajoute un peu d'acide chloroplatinique à la goutte dans laquelle on a cherché des cristaux de gypse. A cet effet on se sert d'un petit crochet en fil de platine soudé dans une baguette en verre (des oeillets ne se prêtent pas si bien au but proposé, parcequ'il est difficile de les nettoyer entièrement); on suspend une goutte du réactif à son extrémité et on la fait couler au milieu de la liqueur à éprouver. Les cristaux de chloroplatinate potassique se forment alors dans l'espace de quelques minutes, par préférence à la marge de la goutte; on emploie cet intervalle pour préparer la recherche du sodium et de l'aluminium. Dans le cas où les cristaux tardraient à apparaître, on pourrait y subvenir en employant l'alcool, comme nous l'avons décrit sous le paragraphe 22.

Le chloroplatinate potassique forme des octaèdres jaune-pâle, très accentués quant à la forme crystalline et ayant un pouvoir réfringent assez considérable. Leur dimension varie de 10 à 30 microns. Les solutions concentrées fournissent ordinairement un amas de petits cristaux qui souvent se réunissent pour former des aggrégats tri- ou quadri-jumeaux, imitant les feuilles de trèfle (Fig. 4). Dans les solutions de chlorures, les cristaux se forment plus facilement et prennent des dimensions plus petites que dans les solutions de sulfates. Un grand excès d'acide sulfurique entrave leur formation.

L'acide chloroplatinique nous fournit un réactif microchimique pour la recherche du potassium, qui ne laisse rien à désirer. La réaction est sûre, facile à observer, et comme la présence du césium et du rubidium est très rare, elle est très caractéristique et très sensible. Elle permet de déceler 0,0006 mgr. d'oxyde de potassium. L'acide hydrofluosilicique agit moins rapidement et le fluosilicate potassique est beaucoup plus difficile à reconnaître que le chloroplatinate nommé.

L'action de l'acide phosphomolybdique et du phosphomolybdate sodique est encore plus lente que celle de l'acide hydrofluosilicique; la séparation du sel potassique d'une solution contenant 2 p. c. de sulfate potassique ne commence que lorsque la marge de la goutte tend à devenir sèche. Du reste les cristaux ressemblent au chloroplatinate potassique tant pour la grosseur que pour la couleur; les cristaux octaédriques des deux combinaisons sont semblables à s'y mé-

Digitized by Google

prendre; on observe les mêmes cristaux en forme de feuille de trèfle chez les deux espèces; cependant la forme ordinaire du phosphomolybdate potassique est le dodecaèdre rhomboïdal.

Le sulfate céreux ajouté aux solutions de sulfate potassique forme un sel double aussi promptement que l'acide chloroplatinique, mais ni si bien caractérisé par sa forme ni par sa couleur. Je reviendrai sur ce sel double au paragraphe suivant.

§ 9. RECHERCHE DU SODIUM.

24. La recherche du sodium surtout offre de grandes difficultés. J'ai longtemps cherché à trouver un réactif propre à révéler la présence de ce métal; à la fin j'ai fixé mon choix sur le sulfate céreux. Ce sel indique, comme l'acide hydrofluosilicique, la potasse aussi bien que la soude. Mais tandis que le réactif de M. Boricky est plus propre à indiquer la présence du potassium que celle du sodium, il en est tout autrement avec le sulfate céreux. En effet, le sel double sodique apparaît longtemps avant le composé potassique. Les sels doubles d'ammonium et de lithium sont beaucoup plus solubles; cette propriété appartient encore à un plus haut degré aux sels doubles calcique et magnésique, qui d'ailleurs forment des cristaux d'une forme totalement différente. Le sulfate cérique jaune ne donna aucun résultat satisfaisant.

On emploie le sulfate céreux en solution concentrée et on place une goutte de ce réactif à une distance d'environ 5 mM. de la goutte à éprouver. On fait communiquer entre elles les deux solutions en les réunissant au moyen d'un fil en verre; peu à peu on voit se former dans la solution du sulfate céreux des faisceaux de cristaux imitant la desmine, qui ne sont autre chose que le sulfate céreux, sur la marge au contraire, surtout si la quantité de sel sodique est un peu considérable, une zone trouble et confuse colorée en brun formée du sel double sodique. En cas de présence de potassium on voit apparaître au milieu de la zone décrite une autre de couleur grisâtre, grenue, formée de sel double potassique.

On s'assure facilement, en portant le grossissement du microscope jusqu'à 600 fois et davantage, que ces parties troubles consistent en des grumeaux blanchâtres transparents très petits, ayant à peine un diamètre de 2 microns (le sel sodique) et en des sphéroïdes plus grands, ayant un diamètre de 5—8 microns (le sel potassique). Ces derniers ont quelque ressemblance avec les grains d'amidon de pommes de terre.

Dans les solutions neutres qui contiennent moins de 1 p. C. de sulfate alcalin, ainsi que dans les solutions acides, ces phénomènes ne se montrent pas si

Digitized by Google

distinctement. En mettant le réactif immédiatement à côté de la goutte à éprouver, on voit apparaître, au bout de quelques minutes, des cristaux sphériques ou, dans des conditions favorables, des rhombes tronqués à six ou à huit pans. Ces deux formes appartiennent au sulfate céroso-potassique. Quant au sel sodique correspondant, il se présente sous la forme de prismes courts taillés en biseau (longueur 3—5 microns), qui ont beaucoup de ressemblance avec de petites navicelles (Fig. 5 et 6).

Les cristaux isolés du sulfate céreux ont le même habitus que le sel céroso-sodique, mais des dimensions 5 à 6 fois plus grandes.

Dans les solutions qui ne contiennent que peu de potassium et de sodium, un grand excès d'acide sulfurique peut empêcher entièrement la formation des sels doubles nommés; dans ce cas, on voit apparaître des cristaux sphériques radiés qui sont probablement formés d'un sulfate céreux acide [1]). L'addition de l'acétate magnésique ou cuivrique provoque alors la réaction; mais il vaut mieux avoir soin, quand on attaque le minéral, que l'acide sulfurique soit chassé presque totalement. On peut se servir du sulfate céreux comme réactif préalable pour la recherche des deux alcalis; dans les cas douteux on fait réagir ensuite sur la même goutte d'abord l'acide chloroplatinique et puis l'acide hydrofluosilicique.

J'aime beaucoup à faire l'expérience de contrôle avec l'acide chloroplatinique; l'emploi de l'acide hydrofluosilicique dans la recherche du sodium au contraire n'est pour moi qu'un pis aller parceque je ne puis être sûr de ce que l'alcali n'a pas son origine du verre, que dans les cas où j'ai opéré sur des plaques de verre vernies, et où la formation du précipité se fait promptement et en abondance; remarquons en outre que la réaction n'est pas très sensible. Dans une solution qui contenait $^1/_2$ p. C. de sulfate sodique, le sulfate céreux provoqua la formation du sel double après deux minutes; dans une solution à 0,15 p. C. de sulfate sodique, le réactif prouva son effet après cinq minutes, tandis que l'acide hydrofluosilicique ne donna que de faibles indices d'un précipité de sel sodique dans une goutte de la même liqueur après un espace de 20 minutes. En opérant avec une solution contenant 0,05 p. C. de sel de Glauber, je pouvais encore observer la formation du sulfate double après 10 minutes; l'acide hydrofluosilicique n'y produisait aucun effet, même après une demi-heure d'attente. Dans les solutions extrêmement diluées on peut accélérer la réaction avec le sulfate céreux par un chauffage modéré. On peut souvent contrôler le résultat par la coloration de la

[1]) Un excès d'acide nuit moins dans la recherche du potassium que dans celle du sodium; on peut donc, dans les solutions acides, trouver la potasse avant la soude, ou bien la première base exclusivement, même quand la liqueur contient beaucoup de soude.

Digitized by Google

flamme ou même se passer tout-à-fait de la recherche du sodium par la voie humide.

Les sulfates lanthanique et didymique donnent avec les sels alcalins les mêmes réactions que le sulfate céreux; mais celles-ci sont moins sensibles. On comprend donc qu'on peut très-bien, au lieu du sulfate céreux pur, se servir du *mélange connu sous le nom de sulfate céritique* [1]).

Des expériences avec l'acide oxalique, l'oxalate ammonique et le stibiate potassique ne donnèrent pas de résultat satisfaisant. Les deux premiers réactifs sont trop insensibles, le troisième donne avec les sels calciques et magnésiques des précipités épais pulvérulents, qui troublent la goutte entière et cachent ainsi l'effet du réactif sur le sel sodique, qui s'accomplit plus tard. Le réactif de M. Streng (l'acétate d'uranyle) donne des tétraèdres magnifiques, d'un jaune de soufre. Malheureusement la réaction manque de sensibilité. Elle est moins sensible que celle de l'acide hydrofluosilicique; en outre elle est entravée par la moindre quantité d'acide sulfurique libre.

§ 10. RECHERCHE DU LITHIUM.

25. Le lithium est facile à trouver dans les solutions de son sulfate, pourvu qu'on ait éliminé aussi complétement que possible le gypse selon la méthode indiquée dans la note au paragraphe 22. On précipite le lithium sous la forme de carbonate; les cristaux très nets de ce sel, à section rectangulaire et apparemment monoclines ont une longueur d'environ 50—75 microns (Fig. 7).

On serait tenté de les confondre avec le gypse et avec les sels doubles formés par la combinaison du carbonate magnésique avec les carbonates alcalins; mais le sel lithique se distingue du sel calcique nommé, par l'occurence presque constante de formes rectangulaires et par la solubilité dans l'acide sulfurique dilué; quant aux sels doubles du magnésium, ils ne se forment qu'en présence d'un excès de carbonate alcalin, tandis que la proportion relative du sulfate lithique et du carbonate potassique n'a aucune influence sur la formation du carbonate lithique.

Dans les solutions magnésiques, pourvu qu'on n'ait pas exagéré la dose du carbonate alcalin, on ne voit paraître les cristaux prismatiques du sel double que dans le voisinage immédiat du réactif, et ceux-ci n'ont qu'une existence passagère,

---

[1]) On prépare ce mélange en évaporant la cérite avec parties égales d'acide sulfurique et d'eau et en chauffant au rouge-faible. On divise la masse dans 4 parties d'eau froide, on filtre et on fait bouillir la liqueur; il se précipite du sulfate céritique, privé d'une partie de son eau de cristallisation; on chauffe cette matière jusqu'à ce qu'elle soit anhydre et on la dissout sous la forme de poudre fine dans l'eau chaude.

Digitized by Google

puisqu'ils se décomposent bientôt en formant de petits grains de carbonate magnésique. La présence de l'acide phosphorique entrave la recherche du lithium sous forme de carbonate; en effet l'addition d'une solution de phosphate mène à la destruction du carbonate lithique déjà formé.

§ 11. RECHERCHE DU BARYUM ET DU STRONTIUM.

26. Le baryum et le strontium se trouvent sous forme de sulfates dans le sédiment qu'on a laissé dans la capsule en platine après avoir soutiré la solution aqueuse des sulfates; ce sédiment contient encore du gypse quand la proportion de calcium dans le minéral est assez forte; chauffé avec de l'acide sulfurique concentré il se dissout et la liqueur acide abandonne bientôt, par le refroidissement et par l'absorption de vapeur d'eau, du sel barytique sous forme de petits cristaux croisés lentilliformes ayant une longueur de 5—12 microns (Fig. 8). Le sulfate strontique apparaît plus tard. Au début il se forme des faisceaux confus d'aiguilles fines analogues à ceux qu'on observe chez le gypse quand il se sépare rapidement dans une solution acide; peu à peu on voit apparaître des cristaux croisés dont les plus petits pourraient être confondus avec ceux que donne le sulfate barytique, tandis que les individus les plus nets sont assez faciles à reconnaître, puisqu'ils ont des dimensions beaucoup plus grandes (20—30 microns de largeur sur 30—45 microns de longueur) et une structure assez compliquée (Fig. 9). A la fin il se forme des rhombes, ordinairement un peu troubles et effilés aux angles (ils naissent par le remblayage des cristaux croisés); parfois ces derniers se réunissent pour former des jumeaux et des quadri-jumeaux en forme de croix [1]) (Fig. 9).

Le gypse qui se dissout, se sépare encore plus tard, d'abord sous la forme d'aiguilles réunies en faisceaux ou en rosettes, et ensuite avec sa figure ordinaire.

§ 12. RECHERCHE DU MAGNÉSIUM.

27. Pour la recherche du magnésium, le phosphate sodique en solution ammoniacale nous offre un réactif précieux. Les cristaux de phosphate ammonico-magnésique ont une forme si nettement accusée et si caractéristique par leur hémimorphisme, et les produits cristallins rudimentaires ont une structure si particulière par suite de cette hémimorphie, que le choix de ce sel comme réactif dans les recherches microscopiques n'étonnera personne.

---

[1]) Le sulfate de plomb se sépare de même d'une solution dans l'acide sulfurique en jumeaux croisés. Ils ont la même grosseur que le sulfate barytique (5—12 microns) mais l'habitus des cristaux de sulfate strontique décrits en dernier lieu (croix de Malthe à centre clair).

Digitized by Google

Des expériences nombreuses m'ont appris que l'hydrophosphate sodico-ammonique (sel de phosphore) solide donne les résultats les plus saillants. La goutte à éprouver, qui a déjà servi à la recherche des alcalis ou de l'alumine, est sursaturée par l'ammoniaque; à une distance d'environ 1 cM. on dépose une gouttelette d'eau et on y noie un grain de sel de phosphore; ensuite on fait la communication entre les deux liquides au moyen d'un fil de verre. Dans cette expérience, la distance entre les deux flaques a une influence prépondérante sur la formation de cristaux bien définis; si la solution contient 1 p. c. de magnésium ou au delà, il ne se formera longtemps après que les liquides se sont mélangés que des rudiments cristallins fourchus, ayant une longueur d'environ 60 microns au maximum (Fig. 10*a*); ce sont des jumeaux hémimorphes mal définis. On ne voit apparaître des cristaux hémimorphes bien définis (Fig. 10*b*), longs de 10—20 microns, que dans les solutions très étendues; ces cristaux cependant se font longtemps attendre si le canal de communication est très étroit et très long. Dans ce cas on peut accélérer le courant des masses liquides en mettant un second fil de verre à côté du premier. Si l'on sait d'avance que la solution à examiner ne peut contenir qu'environ $^1/_2$ p. c. au plus de magnésium, on peut simplifier la manière d'agir en portant sur la marge de la goutte une parcelle de sel de phosphore d'environ $^1/_3$ milligramme.

Le fer et le manganèse qui donnent des composés analogues à celui du magnésium, ne peuvent donner lieu à aucune méprise, si, après avoir ajouté l'ammoniaque, on laisse écouler quelques minutes — intervalle nécessaire pour l'oxydation des sels ferreux et manganeux — avant d'opérer avec le phosphate ammonico-sodique.

Parfois on ne voit pas apparaître le phosphate magnésico-ammonique ou on n'en aperçoit que de vagues indices; la cause en est dans le manque de sels ammoniques dans la solution; c'est pourquoi je recommande d'ajouter toujours un peu d'acide chlorhydrique ou de chlorure ammonique à la liqueur avant de sursaturer par l'ammoniaque [1]). La sensibilité de la réaction est très satisfaisante. Une solution contenant 0,15 p. C. de magnésie, fournit une cristallisation abondante dans l'espace de huit minutes. La recherche de 0,001 milligramme de cette base se fait encore sans peine.

---

[1]) Réciproquement cette réaction peut servir à déceler la présence de l'ammoniaque dans un liquide quelconque. On ajoute du phosphate sodique et de la potasse ou de la soude jusqu'à ce que la réaction soit alcaline; puis on ajoute une parcelle de kieserite. On voit se former des flocons d'hydrate magnésique et, en cas de présence d'ammoniaque, les cristaux hémimorphes décrits. Le réactif de Nessler ne donne que des flocons jaunes.

Digitized by Google

§ 13. RECHERCHE DE L'ALUMINIUM.

28. Il m'a coûté autant de peine à trouver un réactif propre à indiquer la présence de l'aluminium qu'à arriver à une méthode pour la recherche du sodium. Mais cette fois mes tentatives ont été couronnées d'un succès plus complet et d'autant plus important, que la seule réaction au chalumeau pour la recherche de l'aluminium, celle avec le nitrate cobalteux, ne permet en général qu'une application très restreinte et perd encore beaucoup plus de son utilité quand il faut avoir recours au microscope.

Un réactif propre à déceler l'aluminium, mais qui se prête mieux à l'examen des surfaces polies qu'à celui des liquides préparés, c'est une solution alcoolique d'alizarine. On laisse agir ce liquide sur une solution d'alumine dans les alcalis et on sature l'excès d'alcali par la vapeur d'acide acétique. Dans cette expérience il vaut mieux se servir comme support d'une bande de papier à filtrer que d'une plaque en verre.

Pour l'examen des solutions préparées j'ai trouvé un excellent réactif dans le chlorure de césium, dont on porte une parcelle ou une gouttelette sur la marge de la goutte à éprouver. Il suffit de toucher la surface du liquide avec le bout d'un fil de platine portant une petite quantité du sel liquéfié, pour voir apparaître aussitôt à l'alentour de l'endroit touché de gros cristaux limpides d'alun de césium, ayant un diamètre de 35—90 microns et présentant la forme ordinaire: l'octaèdre ou plus rarement la combinaison de l'octaèdre et du cube (Fig. 1*a*). Dans les solutions tant soit peu concentrées, la formation de dendrites, au lieu de cristaux isolés, est prépondérante (Fig. 1*b*); quand on les voit paraître, il faut ajouter une gouttelette d'eau du côté diamétralement opposé à celui où l'on a déposé le réactif. Je ne puis pas recommander de dissoudre les dendrites par le chauffage; en effet, on obtient alors par le refroidissement, des cristaux beaucoup plus petits et beaucoup moins nombreux que par la précipitation locale à la température ordinaire. Il faut aussi éviter un grand excès d'acide sulfurique. Dans les solutions faiblement acides, les cristaux d'alun se forment plus vite et prennent des contours plus nets que dans une liqueur neutre. Un faible excès d'acide sulfurique favorise en outre la dissolution du sulfate aluminique, qui n'est que lentement attaqué par l'eau pure; un grand excès d'acide sulfurique au contraire entrave et retarde la formation d'alun. Si l'on a lieu de croire qu'on a fait quelque faute à ce sujet, on peut y remédier en ajoutant un acétate, comme celui du sodium ou du cuivre.

La présence du fer, même en quantité abondante, ne cause point de difficulté, puisque l'alun ferrique cristallise difficilement. Dans quelques cas, où je croyais

Digitized by Google

la formation de ce composé possible, j'ai répété des expériences de contrôle avec une goutte de la même liqueur, mais dans laquelle le sel ferrique avait été d'avance réduit par le zinc, sans cependant arriver à des résultats discordants.

La sensibilité de la réaction repose sur la faible solubilité de l'alun de césium, dont la masse consiste en grande partie d'eau; en effet, pour dissoudre 1 partie d'alun, il faut 200 parties d'eau. Un centième de milligramme d'alumine est plus que suffisant pour une réaction très distincte, pourvu qu'on ait atteint une concentration convenable de la solution.

§ 14. RECHERCHE DU FER ET DU MANGANÈSE.

29. Je ne crois pas qu'on se résoudra à chercher le fer sous le microscope; du reste la couleur du précipité fin, se coagulant en flocons, et causé par le ferrocyanure potassique dans la solution des sels ferriques, est aussi intense à un grossissement de 200 fois qu'à l'oeil nu.

La recherche du manganèse, reposant sur la formation de manganate par la fusion avec le carbonate sodique au contact de l'air, offre un moyen si sûr et si caractéristique pour déceler des traces du métal nommé, que la recherche sous le microscope me semble superflue.

§ 15. RECHERCHE DES MÉTALLOÏDES.

30. La recherche de quelques métalloïdes peut se faire par inversion des réactions que j'ai déjà décrites plus haut. (Soufre suivant (28); phosphore suivant (27).) Pour pouvoir indiquer le chlore, le fluor, le bore et le silicium, je me vis forcé de chercher des réactions spéciales.

§ 16. RECHERCHE DU SOUFRE.

31. Dans la recherche du soufre il s'agit en premier lieu de le transformer en sulfate alcalin soluble. Dans le cas où l'on a affaire à des sulfures et à des sulfarséniates, on oxyde ceux-ci par la fusion avec un mélange de parties égales de carbonate de soude et de nitre; les sulfates insolubles sont fondus avec le carbonate alcalin pur.

Le produit obtenu est réduit en poudre grossière; on noie celle-ci dans une goutte d'eau et on ajoute une goutte d'un mélange de chlorure aluminique et d'acide chlorhydrique, auquel on a ajouté un peu de chlorure césique. On opère ensuite comme je l'ai indiqué ci-dessus (28), et on trouve les premiers cristaux d'alun césique dans le voisinage du fil en verre.

Digitized by Google

§ 17. RECHERCHE DU PHOSPHORE (ET DE L'ARSÉNIC).

32. Les phosphates insolubles sont préparés de la même manière que les sulfates. On emploie comme réactifs une solution concentrée de chlorure ammonique et un grain de sulfate magnésique cristallisé (ou plutôt de kieserite, qui se dissout plus lentement), et on suit pour le reste la méthode décrite ci-dessus (27).

La méthode de préparation est la même pour les arsénides que pour les sulfures; celle qui sert à transformer les sulfates insolubles en sulfates alcalins s'applique de même aux arséniates insolubles. Les cristaux microscopiques et les rudiments cristallins de l'arséniate ammonico-magnésique ressemblent, à s'y méprendre, à ceux du phosphate correspondant. Des expériences entreprises dans le but de produire une coloration caractéristique à la surface des cristaux d'arséniate au moyen de l'hydrogène sulfuré et du nitrate argentique, ne donnèrent pas de résultat satisfaisant.

Quand il s'agit de chercher l'arsénic à côté du phosphore, on pourra exécuter la sublimation en chauffant un mélange de la substance avec la soude et le cyanure potassique. On peut donner une sensibilité plus grande à cette opération en suivant les indications que nous donnerons au n°. 36 lorsque nous traiterons de la recherche de l'eau.

La réaction avec le molybdate ammonique et l'acide azotique a le défaut capital de s'appliquer également à l'acide phosphorique et à l'acide arsénique. Elle n'a rien qui puisse la faire préférer à la réaction décrite ci-dessus et elle est d'une extrême lenteur; on est obligé, dans les solutions assez étendues, d'attendre jusqu'à ce que la marge de la goutte soit desséchée. C'est pourquoi j'opère plutôt avec le chlorure ammonique et le sulfate magnésique. Du reste on peut appliquer à l'habitus du phosphomolybdate ammonique tout ce qui a été dit au n°. 23 au sujet du phosphomolybdate potassique.

§ 18. RECHERCHE DU CHLORE.

33. La recherche du chlore sous le microscope ne pourrait se faire au moyen du nitrate argentique, puisque le chlorure argentique forme des grumeaux et des flocons intransparents, qui n'offrent rien de caractéristique et qui pourraient rester inaperçus dans des liqueurs troubles.

L'azotate mercureux donne lieu sous les mêmes circonstances à la formation d'un précipité cristallin composé d'aiguilles fines caractéristiques qui sans doute pourraient être distinguées des aiguilles de gypse; malheureusement ces cristaux se transforment spontanément après quelques minutes et se délitent en produisant des particules si exigues qu'un grossissement de 600 fois suffit à peine pour faire voir que leur section transversale est quadratique.

Digitized by Google

Les sels de plomb donnent avec l'acide chlorhydrique et avec les chlorures solubles des aiguilles cristallines nettes et fortement réfringentes; mais on ne peut pas s'en servir comme réactif dans les cas où les chlorides sont accompagnés de sulfates. Quand on effectue la décomposition des minéraux par la fusion avec la soude, on peut, dans la plupart des cas, se servir très-bien de l'azotate plombique dissous dans l'acide azotique faible comme réactif propre à déceler la présence du chlore. Les cristaux de chlorure plombique, séparés d'une solution froide, sont représentés dans la figure 11.

Les rhombes de chlorure plombique ont une longueur de 10—15 microns; les dendrites sont d'une longueur très-inégale. La méthode de recherche à suivre est celle qui a été décrite au n°. 31.

En présence de l'acide sulfurique ou des sulfates, l'azotate plombique doit être remplacé par le sulfate thalleux, réactif que je préfère aux sels plombiques à cause de la sensibilité plus grande de la réaction envers les chlorures et à cause de l'immutabilité des cristaux de chlorure thalleux.

En cas qu'on ait attaqué le minéral par la fusion avec la soude, on emploie le sulfate thalleux, dissous dans l'acide sulfurique dilué, en suivant la méthode décrite ci-dessus (31). Dans la plupart des cas cependant on préférera opérer avec l'acide sulfurique concentré et on suivra une des deux méthodes que je vais décrire. Selon l'une on décompose le minéral en le chauffant à une température modérée avec une quantité d'acide concentré aussi petite que possible; on ajoute un volume égal d'eau et puis on dépose un petit grain de sulfate thalleux dans une gouttelette d'eau mise en contact avec le liquide à examiner, et par préférence sur la limite des deux liquides. Les cristaux de chlorure thalleux se forment alors dans le voisinage du sulfate thalleux [1]).

Toutes ces opérations s'exécutent sur une lame de verre. Suivant la seconde méthode on chauffe dans la capsule en platine avec une quantité d'acide sulfurique un peu plus forte, et on dissout dans l'eau l'acide chlorhydrique qui se développe. A cet effet on met sur la capsule un couvre-objet portant une gouttelette d'eau à sa surface inférieure. On refroidit la lame par une goutte d'eau plus grande déposée sur sa surface supérieure. Après qu'on a terminé cette distillation microchimique, on enlève la goutte réfrigérante par un tube capillaire, on tourne le couvre-objet et on le met sur la lame de verre; enfin on dépose

---

[1]) On obtient aussi de très bons résultats par l'inversion de la réaction pour le potassium. Un mélange de sulfate platinique et de sulfate potassique rend de très bons services; mais il est préférable de se servir du mélange des acétates. Cette réaction n'est pas plus sensible que celle qui repose sur l'emploi du sulfate thalleux, mais elle est beaucoup plus facile à observer.

Digitized by Google

un petit grain de sulfate thalleux dans le reste de la gouttelette. Les cristaux du chlorure thalleux ne tardent pas à apparaître; ce sont des octaèdres et des combinaisons de l'octaèdre avec le dodécaèdre, ayant un diamètre de 10–15 microns. A un grossissement faible et à la lumière transmise, ces cristaux, à cause de leur pouvoir réfringent énorme, paraissent presque noirs, tandis qu'ils semblent être blancs à la lumière incidente. Cette propriété et plus encore la tendance à former des tri-jumeaux imitant le trèfle, ou des quadri-jumeaux rappelant une croix, leur donne un caractère special et permet de trouver des cristaux très petits et très clair-semés.

La longueur des cristaux cruciformes est en moyenne de 50 microns et celle des plus grands individus va jusqu'à 100 microns; ceux-ci sont ramifiés très régulièrement et ressemblent beaucoup aux rosettes cruciformes de la magnétite qu'on trouve dans les scories des hauts-fourneaux (Fig. 12). La sensibilité de la réaction dépend de la quantité d'acide contenue dans la liqueur. C'est pourquoi la séparation des cristaux se fait ordinairement beaucoup plus vite et en plus grande quantité quand on se sert de la seconde méthode qu'en suivant la première. Si l'acide est en trop grand excès, on peut neutraliser son influence nuisible en ajoutant un acétate, comme je viens de l'exposer au n°. 28.

Nonobstant les pertes, inévitables dans l'attaque du minéral (la sodalithe) et pendant la distillation de l'acide chlorhydrique, je pus obtenir une réaction suffisante avec une quantité de cet acide correspondant à 0,004 mgr. de chlorure sodique.

Le bromure thalleux se distingue à peine sous le microscope du chlorure thalleux; la forme des cristaux est précisement la même pour les deux sels; il en est de même de la couleur; les dendrites du bromure cependant n'ont pas une ramification si prononcée et n'ont qu'une longueur d'environ 15—25 microns.

L'iodure et le fluorure thalleux au contraire se distinguent nettement des sels précédents. Les cristaux et les rosettes de l'iodure, quoique ayant la même forme cristalline que le chlorure, sont beaucoup plus petits (les rosettes les plus grandes n'ont qu'une longueur de 20 microns) et si fortement colorés en jaune qu'à la lumière incidente, on peut encore distinguer à leur teinte des cristaux longs de 3 microns. A la lumière transmise, ces grains cristallins paraissent presque noirs. Le fluorure est plus soluble que les autres sels haloïdes du thallium; il se cristallise en octaèdres très aplatis, et présente souvent des combinaisons de l'octaèdre avec le cube et le dodécaèdre, qui de même prennent l'apparence de tablettes et qui sont très pâles et très transparentes en comparaison du chlorure thalleux.

Digitized by Google

§ 19. RECHERCHE DU FLUORIUM.

34. Dans la recherche du fluorium il faut toujours transformer cet élément en acide hydrofluosilicique; à cet effet on le sépare sous la forme de fluorure silicique par la distillation avec l'acide sulfurique concentré; en cas de besoin on y ajoute de l'acide silicique en poudre ou du verre pulvérisé. Certains silicates fluorifères, comme la topaze, la tourmaline et la pyknite doivent être attaqués auparavant par la fusion avec le carbonate sodique (un volume double de celui du minéral). La fusion avec l'hydrosulfate potassique ou avec le sel de phosphore pourrait de même servir à séparer le fluor du minéral, mais la température requise à cette décomposition est trop élevée.

Le fluorure silicique qui se développe est absorbé par de l'acide sulfurique dilué, qui s'évapore moins vite que l'eau pure; au lieu du couvre-objet, dont on se sert dans la distillation de l'acide chlorhydrique, on emploie un petit couvercle mince en platine tel que nous l'avons décrit ci-dessus (21), et dont la surface convexe est tournée en dessous. Les échantillons qu'on a fondus avec la soude, sont chauffés et évaporés à sec avec de l'acide acétique avant qu'on ajoute l'acide sulfurique. De cette manière on évite les pertes par suite de l'effervescence tandis que le fluorure reste intact; les vapeurs d'acide acétique, qui se développent plus tard lors de la distillation avec l'acide sulfurique, sont très favorables à la condensation complète du fluorure silicique. On chauffe pendant la moitié du temps nécessaire pour la transformation des fluorures en sulfates (21); on enlève la goutte d'eau qui a servi de réfrigérant et on transporte la goutte fluorifère sur une plaque en verre vernie ou sur une plaque polie en spath pesant, ce qui se fait le mieux en touchant la goutte avec la plaque.

On peut aisément se construire des plaques en spath pesant propres au but proposé en prenant des lames obtenues par le clivage, ayant une longueur de 1,5—2 cM. et une épaisseur de 2—3 mM., et en les collant sur une plaque de verre au moyen de baume du Canada, afin d'éviter la fissure suivant le second plan de clivage; on les rode sur une pierre à aiguiser fine, d'abord avec de l'eau, à la fin avec très peu d'huile et on leur donne le dernier poli en frottant avec un morceau de cuir très mou imprégné de cendres d'étain.

Je me sers du chlorure sodique comme réactif et j'introduis 1 à 2 milligrammes de la substance solide dans la goutte à éprouver. Si l'acide hydrofluosilicique n'est pas trop dilué, on voit d'abord se former des rosettes élégantes a six feuilles (Fig. 2) mesurant jusqu'à 100 microns; plus tard apparaissent des tables hexagonales et des prismes avec des pyramides, ayant une longueur de 25 microns. Ils sont un peu troubles et colorés en rose-tendre (peut-être est-ce

Digitized by Google

une couleur de contraste). Le fluosilicate potassique est beaucoup moins soluble, mais beaucoup plus difficile à reconnaître à cause de sa transparence extraordinaire. En suivant la méthode décrite, je réussis à obtenir une réaction satisfaisante avec 0,0036 milligr. de fluorium.

§ 20. RECHERCHE DU SILICIUM ET DU BORE.

35. La recherche du silicium et du bore s'exécute de la même manière que celle du fluor; la seule différence est que dans le premier cas on emploie de l'acide fluorhydrique conjointement avec l'acide sulfurique et qu'on ne peut se servir que de lames en verre vernies ou de plaques en spath pesant, tandis que dans la recherche du fluor on emploie en cas de besoin des plaques en verre ordinaires.

La manière de distiller est la même que dans le cas du fluorium (34). On se sert du chlorure de sodium comme réactif quand on n'a à chercher qu'un seul des deux éléments nommés; il donne avec l'acide hydrofluoborique précisément les mêmes hexagones et les mêmes rosettes qu'avec l'acide hydrofluosilicique. La réaction permet de trouver avec facilité 0,08 mgr. d'acide silicique et 0,04 mgr. d'acide borique.

Dans la plupart des cas il s'agit de trouver le bore à côté d'une quantité prepondérante de silicium (axinite, datolithe, tourmaline); alors le chlorure de sodium fait défaut. Après plusieurs essais infructueux j'ai réussi à trouver deux réactions distinctives, que je vais communiquer ici à défaut d'autres moyens plus propres.

La solution du fluosilicate calcique, évaporée jusqu'à une forte concentration, donne de petits corps en forme de lentille, ayant une longueur de 20 microns; le fluoborate apparaît dans ces circonstances sous la forme de prismes rhombiques courts, qui s'offrent ordinairement à la vue avec leur section transversale; les rhombes à angles assez aigus ont une longueur de 10—15 microns sur 8—12 microns de large. Cette réaction rend de très bons services quand on n'a pas affaire à l'acide sulfurique en même temps qu'à l'acide hydrofluoborique et l'acide hydrofluosilicique.

Le fluosilicate potassique donne des cristaux appartenant au système régulier. Ce sont des octaèdres et des cubo-octaèdres; le fluoborate potassique apparaît, quand l'acide est assez concentré, sous la forme de lames étroites pointues, plus tard sous celle de rhombes, dont les diagonales ont entre elles la proportion de 2 : 3. Leur longueur est de 30—50 microns. Souvent les deux angles obtus sont tronqués par des pans; quelquefois aussi les plus gros cristaux ont quelques indices d'une pyramide tronquée (Fig. 13). Le fluoborate potassique cristallise après le fluosilicate; il faut faire attention à ce fait quand il s'agit de chercher le bore à côté d'une grande quantité de silicium.

Digitized by Google

Si l'on ajoutait tout de suite du chlorure potassique au produit obtenu par la distillation avec l'acide sulfurique et l'acide fluorhydrique, il se pourrait qu'on n'aperçût pas le fluoborate; en tout cas on aurait de la peine à reconnaître les quelques cristaux de ce sel parmi le nombre considérable d'octaèdres de fluosilicate potassique. C'est pourquoi je conseille d'éliminer la plus grande partie du silicium.

A cet effet on chauffe le mélange du minéral avec l'acide sulfurique et l'acide fluorhydrique pendant un espace de temps suffisant à chasser la majeure partie du fluorure silicique, qu'on peut faire absorber par l'eau ou par l'acide sulfurique dilué afin de constater la présence de l'acide hydrofluosilicique suivant la méthode décrite ci-dessus (34). On réitère l'opération après l'addition d'une nouvelle quantité d'acide fluorhydrique, on élève peu à peu la température jusqu'à ce que les vapeurs d'acide sulfurique commencent à se développer, parce que le point d'ébullition de l'acide hydrofluoborique est presque aussi élevé que celui de l'acide sulfurique. On chauffe le produit de la seconde distillation jusqu'à 120° C., on ajoute après quelques minutes une goutte d'eau au résidu et puis du chlorure potassique. Si les cristaux rhombiques du fluoborate potassique ne se montrent pas tout de suite, ce n'est pas une preuve de l'absence du bore: on devra en tout cas attendre la dessiccation complète de la goutte.

§ 21. RECHERCHE DE L'EAU.

36. Dans quelques cas spéciaux il peut-être important de constater la présence de l'eau dans de petits échantillons d'un minéral. En opérant avec précaution, on pourra trouver encore un dixième de milligramme d'eau en suivant une méthode analogue à celle qu'on applique dans les essais au chalumeau. L'essentiel de cette méthode est de concentrer la petite quantité d'eau dans un espace aussi restreint que possible, et d'éviter en même temps la perte de l'eau cherchée et l'introduction de la vapeur d'eau de dehors.

Je me sers de tubes ayant un diamètre intérieur de 2 mM. et une longueur de 10 cM., effilés en pointe fine ayant un diamètre de 0,5 mM. et une longueur de 2 cM. Après avoir chauffé le tube par toute sa longueur et après y avoir fait passer de l'air en aspirant par un tube en caoutchouc attaché à l'autre bout, on ferme le tube effilé à la lampe. On introduit le fragment du minéral pendant que le tube est encore chaud, on ferme celui-ci à la lampe sur la moitié de sa longueur en ayant soin d'obtenir un étranglement très obtus et d'éviter par là l'introduction de vapeur d'eau provenant de la flamme. Ensuite on refroidit le bout capillaire par de l'alcool, et quand on n'y voit paraître aucun dépôt d'eau, on chauffe peu à peu jusqu'au rouge le bout obtus avec le minéral qu'il renferme.

Digitized by Google

Ordinairement l'eau se dépose au col de la partie effilée sans qu'on ait besoin de refroidir celle-ci. En faisant avancer la flamme on peut la concentrer dans le bout capillaire.

Pour constater la présence de petites quantités d'eau, on peut encore avoir recours à une réaction qui se base sur la coloration de la fuchsine sous l'influence de l'eau. Il va sans dire qu'à cet effet les tubes doivent être préparés d'avance.

Une solution alcoolique de fuchsine abandonne après l'évaporation sur le verre un léger enduit intransparent vert-jaunâtre d'un éclat métallique. Si l'on introduit une bande très mince ou quelques particules de cette matière dans la partie capillaire et si l'on chasse le dépôt d'eau vers l'endroit où se trouve la fuchsine, on observe que celle-ci perd son éclat métallique et prend une couleur rouge transparente.

37. Les lignes précédentes contiennent les résultats d'une recherche que j'ai entreprise pour satisfaire en quelque sorte aux besoins des pétrographes. Dans le cours de mon travail, mon attention à encore été fixée sur d'autres réactifs propres à déceler la présence d'éléments plus rares; je me propose de les communiquer plus tard, à moins que d'autres personnes ne m'aient devancé sur ce terrain. La méthode que je propose et qui se base sur la transformation des silicates en sulfates, a une analogie si grande avec les méthodes ordinaires usitées dans l'analyse qualitative, que sans doute on pourrait l'appliquer à la recherche d'un plus grand nombre d'éléments; la sûreté des résultats obtenus, l'exécution rapide des réactions et les dimensions modestes des appareils auraient pu me séduire à persister plus longtemps dans ce genre de recherches, si je ne m'étais pas vu contraint d'employer tout le temps disponible à faire des études concernant la seconde partie, la partie la plus difficile de mon travail, celle qui a pour but de trouver des réactions propres à déceler la présence de plusieurs composés chimiques sur les surfaces polies des minéraux.

Voilà pourquoi je me suis résolu à publier les résultats obtenus jusqu'ici, qui ne laissent rien à désirer sous le rapport de la certitude. Je n'ai pas hésité à introduire quelques-unes des réactions les plus importantes dans les exercices des étudiants de l'école polytechnique, comme celles qui servent à chercher le potassium, le calcium, le magnésium et l'aluminium. Le succès a été complet; je puis donc en pleine confiance recommander aux microscopistes commençants de se servir des méthodes que j'ai décrites dans les pages précédentes.

Une application poursuivie de ces méthodes mènera sans aucun doute à des améliorations et à des découvertes nouvelles; je suis sûr qu'elles trouveront un accueil favorable auprès des pétrographes et des microscopistes; quant à moi j'applaudirai avec chaleur à chaque succès qu'on aura atteint dans ce genre de recherches.

Digitized by Google

Afin de mettre en état de juger du degré d'accuratesse qu'on peut atteindre et afin de donner un exposé plus complet de la manière d'agir, je vais maintenant communiquer, en guise d'appendice, la marche et le résultat de quelques analyses faites par moi avec des échantillons pesés de minéraux.

§ 22. ANALYSES DE CONTRÔLE.

38. 1.) 0,2 mgr. de tourmaline noire furent chauffés avec l'acide fluorhydrique. L'action était très faible. Après que j'eus chauffé fortement le minéral en poudre, je pus en dissoudre environ la moitié. La masse desséchée fut chauffée avec l'acide sulfurique, jusqu'à ce que l'excès de ce réactif fût presque totalement chassé; le résidu fut bouilli avec de l'eau et enfin la solution, ayant un volume de 0,015 C. C., fut enlevée avec une pipette capillaire.

La moitié du liquide, en s'évaporant sur une lame de verre, donna des cristaux très distincts de gypse et avec le chlorure césique une quantité d'alun de césium telle que la cinquième partie du liquide aurait suffi à la réaction. L'autre moitié, sursaturée par l'ammoniaque, donna, après avoir reçu un peu de sel de phosphore, dans l'espace de deux minutes, un grand nombre de cristaux hémimorphes de phosphate ammonico-magnésique.

Comme on voit, je n'employai pour chaque essai, en tenant compte des pertes inévitables, que 0,05 mgr. de tourmaline tout au plus. Si l'on admet que ce minéral contient 3,3 p. c. d'alumine, 1 p. c. de chaux et 3,3 p. c. de magnésie, on aurait donc obtenu les résultats suivants:

Réaction abondante avec 0,017 mgr. de Al_2O_3
» suffisante » 0,0017 » » MgO
et » 0,0005 » » CaO

2.) 0,2 mgr. de sodalithe furent décomposés par l'acide sulfurique; le résidu, restant après l'évaporation, fut bouilli avec l'eau et la solution, soutirée avec la pipette capillaire, fut divisée en deux parties égales. L'une des deux moitiés fournit des cristaux nets de gypse, et avec le chlorure césique des cristaux très distincts, mais peu nombreux, d'alun.

La seconde moitié traitée par l'acide chloroplatinique déposa des octaèdres nombreux de chloroplatinate potassique. Ce résultat quelque peu surprenant fut confirmé par un autre essai en employant comme réactifs l'acide hydrofluoborique et l'acide hydrofluosilicique. La formation des sels sodiques correspondants n'eut lieu que très tard, lorsque la liqueur s'était presque totalement évaporée; la réaction n'était pas si distincte que je l'aurais désiré. Un dixième de mgr. de sodalithe correspond à:

Digitized by Google

0,03 mgr. de Al_2O_3
0,001 » » CaO
0,0006 » » MgO
0,0025 » » Na_2O.

3.) 0,1 mgr. de sodalithe furent distillés avec de l'acide sulfurique dans la capsule en platine couverte. Le distillat et le résidu dissous dans l'eau donnèrent tous les deux des indices très distincts de chlore par la réaction avec le chlorure thalleux. Si l'on admet que la moitié du chlore sera passée dans le distillat, on arrive au résultat qu'on a trouvé 0,0035 mgr. de chlore, ce qui correspond à 0,006 mgr. de NaCl et à 0,05 mgr. de sodalithe.

4.) 0,2 mgr. d'apophyllite d'Andreasberg, chauffés avec l'acide fluorhydrique et l'acide sulfurique dans la capsule en platine couverte, fournirent un distillat, qui déposa une quantité abondante de fluosilicate sodique par l'addition du chlorure sodique. La masse restée dans la capsule fut évaporée à sec, chauffée encore une fois avec un peu d'acide sulfurique dilué jusqu'à ce que des vapeurs sulfuriques commencèrent à se développer, puis dissoute dans l'eau. La moitié de la liqueur soutirée donna avec le chlorure césique une petite quantité d'alun et des cristaux abondants de gypse. Le phosphate ammonico-sodique et l'ammoniaque ne donnèrent point de réaction. La seconde moitié du liquide traitée par l'acide chloroplatinique fournit une cristallisation abondante de chloroplatinate potassique. Je ne réussis pas à déceler la présence du sodium ni avec le sulfate céreux ni avec l'acide hydrofluosilicique. 0,2 mgr. d'apophyllite correspondent à 0,100 mgr. d'acide silicique, dont on aurait pu trouver la moitié avec facilité; 0,1 mgr. d'apophyllite contiennent 0,026 mgr. de CaO et 0,005 mgr. de K_2O.

Quant à l'aluminium, ce métal n'est cité qu'une fois (pour 1,5 p. C.) par M. Rammelsberg [1]) comme partie intégrante de l'apophyllite; ainsi la réaction avec le chlorure césique a été exécutée avec succès sur 0,0015 mgr. d'alumine.

Comme l'acide fluorhydrique pouvait peut-être contenir des traces d'alumine, l'expérience fut répétée avec 0,3 mgr. d'apophyllite et de l'acide sulfurique concentré sans addition d'acide fluorhydrique.

Le distillat donna avec le chlorure sodique une cristallisation peu abondante de fluosilicate sodique, signe certain de la présence du fluorium; le résidu fournit beaucoup de cristaux d'alun de césium par l'addition du chlorure césique.

Si l'on admet pour la teneur en fluorium de l'apophyllite, qui varie suivant les données de 0,46 p. c. jusqu'à 1,71 p. c. (d'après M. Rammelsberg [2]) l'apophyllite d'Andreasberg contient 1,18 p. c. de fluorium) une quantité de 1 p. c., on

[1]) Mineralchemie 1860. p. 506.

[2]) Mineralchemie p. 505.

Digitized by Google

trouve pour la limite de la sensibilité de la réaction: 0,003 mgr. de fluorium.

5.) 0,4 mgr. de boracite furent distillés avec l'acide sulfurique; le distillat donna avec le sulfate thalleux une réaction très intense indiquant la présence du chlore. Après avoir ajouté de l'acide fluorhydrique au résidu, on distilla de nouveau à une température modérée; le produit volatil obtenu ne donna avec le chlorure potassique que des traces de fluoborate; il en fut de même avec un produit obtenu à une température plus élevée.

Dans une troisième expérience on éleva la température jusqu'au point où l'on vit se développer des vapeurs grises; le distillat obtenu donna avec le chlorure potassique après environ cinq minutes des rhombes et des hexagones allongés en abondance.

Le résidu fut dissous dans l'eau. La quatrième partie du liquide donna avec l'ammoniaque et le sel de phosphore des cristaux très abondants de phosphate magnésico-ammonique.

0,4 mgr. de boracite = 0,034 mgr. de chlore
» » » = 0,250 » d'acide borique
0,1 » » » = 0,031 » de magnésie.

6.) 0,2 mgr. d'axinite furent chauffés à une chaleur douce avec l'acide sulfurique et l'acide fluorhydrique; le produit volatil donna avec le chlorure sodique une cristallisation abondante de fluosilicate sodique. Le résidu fut de nouveau soumis à la distillation avec l'acide fluorhydrique à une température plus élevée et les vapeurs furent condensées dans l'acide sulfurique dilué. Ce distillat chauffé avec une goutte d'acide fluorhydrique jusqu'à ce qu'il commençait à prendre une couleur brunâtre, (suite de l'attaque des matières organiques provenant du gutta-percha) fut mélangé d'un peu d'eau, transporté sur une lame de verre vernie et traité par le chlorure potassique. Après trois minutes j'obtins des rhombes de fluoborate potassique avec quelques octaèdres du fluosilicate correspondant.

Le résidu resté dans la capsule fut épuisé par l'eau bouillante; la troisième partie de la liquéur fournit avec le chlorure césique de l'alun de césium; une autre portion égale à la première en donna autant après la réduction du fer par quelques copeaux de zinc. Dans la dernière portion je pus constater par les réactifs une quantité abondante de magnésium. Dans toutes ces expériences on rencontra des cristaux de gypse en profusion.

0,2 mgr. d'axinite = 0,1 mgr. de SiO_2 (réaction abondante)
» » » = 0,008 » » BO_3;
0,07 » » = 0,012 » » Al_2O_3
» » » = 0,0014 » » MgO
» » » = 0,013 » » CaO (réaction abondante).

Digitized by Google

7.) Avec 0,2 mgr. de datolithe traités de la même manière je pus obtenir des indices suffisants de la présence du bore et une quantité abondante de fluosilicate indiquant la présence du silicium.

Dans le résidu on put trouver quantité de cristaux de gypse; au contraire je n'obtins aucun résultat avec le chlorure césique et avec le sel de phosphore et l'ammoniaque.

0,2 mgr. de datolithe contiennent 0,076 gr. de SiO_2, 0,04 mgr. de B_2O_3 et 0,084 mgr. de CaO.

8.) 0,5 mgr. de pyknite d'Altenberg furent fondus avec le double de leur volume de soude. La moitié tout au plus de la masse fut dissoute dans l'acide acétique concentré. La liqueur évaporée à sec fut distillée avec l'acide sulfurique, opération qui s'accomplit sans perte de matière. Le produit de la distillation donna avec le chlorure sodique des cristaux assez abondants de fluosilicate sodique, signe certain de la présence du fluorium. 0,2 mgr. de pyknite contiennent 0,037 mgr. de cet halogène.

9.) On traita du feldspath provenant du porphyre gris d'Elfdalen (Suède) avec le fluorure ammonique et l'acide chlorhydrique; puis on évapora la masse avec l'acide sulfurique. On obtint beaucoup de gypse. L'acide chloroplatinique indiqua une quantité assez considérable de potassium; le sulfate céreux décela la présence des deux métaux alcalins; le sel sodique surpassa en quantité le sel potassique.

10.) L'examen d'un feldspath contenu dans une roche qu'on trouve à Nanzenbach, et auquel on a donné le nom de „porphyre labradorifère" (Labradorporphyr), prouva que le minéral contenait peu de calcium, plus de potassium que le minéral précédent et une quantité prépondérante de sodium.

11.) Feldspath tiré de la corsite de Ste Lucia (Corsica).

Les aiguilles feldspathiques des sphéroides ont la même composition que les grains cristallins informes appartenant à la masse pierreuse qui environne les sphéroides. Ces deux espèces sont très riches en calcium; cependant ce ne sont pas des feldspaths calciques purs; en effet ils contiennent la potasse et la soude en quantité appréciable.

12.) Bisilicate de la corsite de Ste Lucia.

La poudre blanche prend d'abord une teinte verdâtre au contact de l'acide fluorhydrique; puis elle pâlit et se dissout. Cette manière de se comporter fait soupçonner que le minéral contient de la substance feldspathique. L'examen montra qu'il contient, en dehors de beaucoup de calcium et de magnésium (ce qui confirme la supposition que le minéral est de l'hypersthène), une quantité assez considérable de potassium et d'aluminium, et, ce qui est important, ces

Digitized by Google

résultats furent obtenus avec 3 éclats apparemment homogènes provenant d'échantillons différents.

Les figures que nous produisons à la fin de ce mémoire sont dessinées pour la plupart d'après des objets obtenus dans les essais que nous avons décrits au N°. 38 (1—12).

Fig. 1. Alun de césium vu à un grossissement = 100 fois (38. 1).
» 2. Fluosilicate sodique précipité par un excès de chlorure sodique. (Gross. = 100 fois) (38. 6).
» 3. Gypse. Les cristaux les plus grands se trouvaient dans une solution qui contenait peu d acide sulfurique (38. 6); les aiguilles fines se déposèrent dans une solution qui contenait beaucoup d'acide chlorhydrique. (Gross. = 200 fois).
» 4. Chloroplatinate potassique. (Gross. = 120 fois) (38. 2).
» 5. Sulfate céroso-potassique, séparé d'une solution contenant 0,3 p. c. de potassium. (Gross. = 300 fois).
» 6. Sulfate céroso-sodique, séparé d'une solution de sulfate sodique à 0,5 p. c. (Gross. = 500 fois).
» 7. Carbonate lithique. (Gross. = 90 fois).
» 8. Sulfate barytique cristallisé dans l'acide sulfurique concentré. (Gross. = 300 fois).
» 9. Sulfate strontique, cristallisé dans l'acide sulfurique concentré. (Gross. = 200 fois).
» 10. Phosphate ammonico-magnésique. Les gros cristaux rudimentaires s'étaient séparés d'une solution contenant 2 p. c. de sulfate magnésique; les cristaux bien définis provenaient d'une solution assez diluée. (38. 1) (Gross. = 200 fois).
» 11. Chlorure plombique, formé à la température ordinaire dans une solution d'acide chlorhydrique très diluée après l'addition de nitrate plombique. (Gross. = 300 fois).
» 12. Chlorure thalleux. (Gross. = 200 fois).
» 13. Fluoborate potassique. (Gross. = 160 fois).

Digitized by Google

LA SÉRIE SEMI-CONVERGENTE POUR L'ÉVALUATION DE L'INTÉGRALE

$$\psi(Z) = e^{Z^2} \int_Z^\infty e^{-z^2}\, dz$$

PAR CH. M. SCHOLS.

---

§ 1. L'intégrale $\int_Z^\infty e^{-z^2}\, dz$ ne pouvant être trouvée sous forme finie, elle doit être développée en série pour pouvoir l'évaluer. On a donné plusieurs de ces séries dont quelques-unes se prêtent pour de petites, d'autres pous de grandes valeurs de Z. Parmi ces dernières se trouve la série semi-convergente, donnée déjà par LAPLACE:

$$e^{Z^2}\int_Z^\infty e^{-z^2}\,dz = \frac{1}{2Z} - \frac{1}{2^2 Z^3} + \frac{1.3}{2^3 Z^5} - \frac{1.3.5}{2^4 Z^7} + \ldots\ldots \pm \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^{n+1} Z^{2n+1}} \mp$$
$$\mp \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2^{n+1}} e^{Z^2} \int_Z^\infty z^{-2n-2} e^{-z^2}\, dz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

pour laquelle nous écrirons pour abréger:

$$\psi(Z) = P_0 - P_1 + P_2 - P_3 + \ldots\ldots \pm P_n \mp R_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Chaque terme de cette série peut-être calculé au moyen du précédent par la relation:

$$P_n = \frac{2n-1}{2Z^2} P_{n-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

d'où il suit que P_n deviendra de plus en plus petit, tant qu'on a:

$$2n - 1 < 2Z^2;$$

pour des valeurs plus grandes de n, les termes de la série deviennent de plus en plus grands, de sorte que la série est divergente. Pourtant elle peut servir pour le calcul de ψ (Z), parce que, en terminant la série après un terme quelconque P_n, le reste R_n est plus petit que le dernier terme P_n, comme on le voit facilement en remarquant que l'on a:

$$R_{n-1} = P_n - R_n$$

Digitized by Google

et que R_n et R_{n-1} sont positifs tous les deux. Il suit de là que, pour le cas où la valeur de P_n est assez petite pour être négligée, la série peut servir pour l'évaluation de ψ (Z).

Comme les termes de la série ont alternativement le signe + et —, cette série présente encore la particularité qu'elle donne alternativement des valeurs trop grandes et trop petites, de sorte qu'on obtient toujours deux limites entre lesquelles la valeur exacte de ψ (Z) est comprise.

Cependant la valeur du plus petit terme P_n, c'est-à-dire du terme pour lequel n satisfait à la relation:

$$2n-1<2Z^2<2n+1. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

ne sera assez petite pour être négligée, que pour des valeurs de Z relativement grandes. Pourtant on voit facilement que la série pourra aussi servir pour l'évaluation de ψ (Z) pour des valeurs plus petites de Z, lorsqu'on peut remplacer le reste R_n par une approximation.

Le reste R_n, qui est donné sous une forme assez simple à l'aide d'une intégrale définie, se prête très-bien à en trouver des valeurs approximatives. Dans ce qui suit nous développerons quelques formules qui donnent sous une forme simple une grande approximation.

§ 2. Afin de faciliter le développement, nous prendrons pour variable non pas la valeur de Z, mais son carré, que nous représenterons par X; nous poserons donc:

$$Z^2=X \qquad z^2=x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

et pour la même raison:

$$2n+1=2m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

En introduisant ces valeurs nous trouvons pour les expressions générales de P_n et R_n:

$$P_n=G_{m-1}X^{-m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$R_n=G_m e^X \int_X^\infty x^{-m-1} e^{-x} dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

dans lesquelles on a:

$$G_m=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2n+1}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots m \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

On trouve alors pour la relation entre P_{n-1} et P_n:

$$P_n=\frac{m-1}{X}P_{n-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

§ 3. Soit maintenant $P_n\varphi_n$, où φ_n est fonction de X, une valeur approchée de R_n, on peut poser:

Digitized by Google

$$R_n = P_n \varphi_n + R'_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

En prenant cette valeur approchée pour R_n on fait donc une erreur R'_n, et il s'agit seulement de trouver pour φ_n une expression telle que R'_n ait une valeur qui soit de beaucoup plus petite que la valeur de R_n.

Le reste R'_n peut-être écrit sous la forme:

$$R'_n = G_m e^X \int_X^\infty \omega_n x^{-m-1} e^{-x} dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

dans laquelle ω_n est une fonction de x qui dépend d'une manière assez simple de la fonction φ_n. En effet remplaçons dans (11) P_n, R_n et R'_n par leurs expressions (7), (8) et (12) et divisons par $G_{m-1} e^X$; nous trouvons:

$$m \int_X^\infty x^{-m-1} e^{-x} dx = \varphi_n X^{-m} e^{-X} + m \int_X^\infty \omega_n x^{-m-1} e^{-x} dx$$

d'où nous tirons en différentiant:

$$-m X^{-m-1} e^{-X} = \frac{d\varphi_n}{dX} X^{-m} e^{-X} - (X+m) \varphi_n X^{-m-1} e^{-X} - m \omega_n X^{-m-1} e^{-X}$$

et parsuite:

$$\omega_n = 1 - \frac{X+m}{m} \varphi_n + \frac{X}{m} \cdot \frac{d\varphi_n}{dX} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

§ 4. Comme R'_n a la même forme que R_n à l'exception du facteur ω_n, la valeur de R'_n sera de beaucoup plus petite que R_n, lorsque ω_n aura de petites valeurs pour des valeurs de x entre X et ∞; cela devra être le cas surtout pour des valeurs de x qui ne sont que très peu supérieures à X, parce que les autres facteurs qui entrent sous le signe intégral ont alors leurs plus grandes valeurs, tandis que pour des valeurs plus grandes de x, les valeurs de ces facteurs diminuent rapidement. Il s'agira donc de trouver pour φ_n une expression qui rende ω_n très petite ou même égale à zéro pour des valeurs de x différant très peu de X.

En outre il convient de choisir l'expression pour φ_n d'une façon que ω_n ne change pas de signe pour des valeurs de x entre X et ∞, parce qu'alors on connaît le signe de R'_n par lequel on peut voir si la valeur approchée de R_n est trop forte ou trop petite. En appliquant alors cette formule pour deux restes consécutifs, on trouvera deux limites entre lesquelles la valeur de $\psi(Z)$ sera comprise.

C'est pour cela que nous tâcherons de trouver pour ω_n une expression sous forme de carré.

On pourrait prendre pour ω_n une certaine expression et déterminer alors la fonction φ_n; mais cette manière d'agir n'est pas praticable parce que la fonction φ_n est donnée alors par l'intégrale:

Digitized by Google

$$\varphi_n = m\,X^m e^X \int_X^\infty (1-\omega_n)\,x^{-m-1} e^{-x}\,dx$$

qui est encore plus compliquée que le reste R_n lui-même.

Nous suiverons un autre chemin. Nous prendrons pour φ_n une expression simple avec des coefficients indéterminés et nous tâcherons alors de les déterminer de manière que ω_n satisfasse aux conditions décrites dans ce paragraphe.

§ 5. Tâchons d'abord de trouver pour φ_n une expression de la forme

$$\varphi_m = \frac{a}{X+p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

où a et p sont des coefficients indéterminés.

De (13) on tire alors l'expression:

$$\omega_n = 1 - \frac{a}{m}\cdot\frac{X+m}{X+p} - \frac{aX}{m(X+p)^2} = \frac{(m-a)X^2 - \{a(1+m+p) - 2mp\}X + mp(p-a)}{m(X+p)^2}$$

qu'on peut mettre sous la forme:

$$\omega_n = Q_n \frac{(X-p')^2}{m(X+p)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

En égalisant les coefficients des mêmes puissances de X dans les numérateurs de ces deux expressions, on trouve:

$$\left.\begin{aligned} Q &= m-a \\ 2p'Q &= a(1+m-p) - 2mp \\ p'^2 Q &= mp(p-a) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

On trouve donc trois équations pour déterminer les quatre inconnues a, p, p' et Q. Une de ces quatre inconnues peut donc être prise à volonté. En choisissant la valeur de p, nous trouvons:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{4mp}{1+2(m+p)+(m-p)^2} \\ Q &= \frac{m(1+m-p)^2}{1+2(m+p)+(m-p)^2} \\ p' &= p\,\frac{1-m+p}{1+m-p} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

De la dernière équation on voit que la valeur de p n'est pas tout-à-fait indéterminée. Comme il importe surtout que ω_n ait une petite valeur, il faut que p' soit positif, d'où il suit que la valeur de p doit être comprise entre $m-1$ et $m+1$.

Comme il s'agit surtout de trouver une expression pour le reste du plus petit terme, pour lequel:

$$m-1 < X < m$$

Digitized by Google

la valeur de p' ne peut différer beaucoup de m. Il suit donc des formules (17) que p ne doit pas différer beaucoup de m; lorsque nous remarquons en outre que pour $p = m$ ces formules se simplifient beaucoup, nous voyons qu'il sera le plus simple d'égaler p à m. Nous trouvons alors:

$$a = \frac{4m^2}{4m+1}$$

$$Q = \frac{m}{4m+1}$$

$$p' = m$$

et par suite:

$$R_n = P_n \frac{4m^2}{(4m+1)(X+m)} + R'_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

où:

$$R'_n = \frac{G_m}{4m+1} e^X \int_X^\infty \frac{(x-m)^2}{(x+m)^2} x^{-m-1} e^{-x} dx. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Comme R'_n est toujours positif, la valeur approchée pour R_n sera trop petite, de sorte que nous trouvons, en rétablissant les valeurs de Z et n au lieu de X et m:

$$R_n > P_n \frac{2(2n+1)^2}{(4n+3)(2Z^2+2n+1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

§ 6. Comme nous l'avons remarqué dans le paragraphe 4 on peut, en appliquant l'expression trouvée à deux restes consécutifs, arriver à deux limites pour ψ (Z); pourtant il vaut mieux appliquer la formule seulement pour le reste du plus petit terme, c'est-à-dire pour le terme qui satisfait à la relation:

$$m - 1 < X < m$$

parce qu'alors on trouve la valeur la plus approchée pour ψ (Z).

Mais de cette manière on ne trouve qu'une seule limite de ψ (Z); pour en trouver une seconde nous chercherons une limite supérieure pour R'_n.

Lorsqu'on remplace la variable x dans le dénominateur de (19) par la valeur plus petite X, on trouve pour le second membre une valeur trop forte, d'où il suit:

$$R'_n < \frac{G_m e^X}{(4m+1)(X+m)^2} \int_X^\infty (x-m)^2 x^{-m-1} e^{-x} dx$$

ou, en développant $(x-m)^2$ et en séparant les intégrales:

$$R'_n < \frac{G_m e^X}{(4m+1)(X+m)^2} \left\{ \int_X^\infty x^{-m+1} e^{-x} dx - 2m \int_X^\infty x^{-m} e^{-x} dx + m^2 \int_X^\infty x^{-m-1} e^{-x} dx \right\}.$$

Les trois intégrales qui entrent dans cette expression sont les mêmes qu'on

Digitized by Google

trouve d'après (8) dans R_{n-2}, R_{n-1} et R_n; elles peuvent donc être exprimées par ces quantités; ce qui donne:

$$R'_n < \frac{(m-1)\,m\,R_{n-2} - 2\,m^2\,R_{n-1} + m^2\,R_n}{(4m+1)(X+m)^2}.$$

De (2) et (10) on tire:

$$R_{n-1} = P_n - R_n$$

et

$$R_{n-2} = P_{n-1} - P_n + R_n = P_n\,\frac{X-m+1}{m-1} + R_n$$

d'où il suit:

$$R'_n < \frac{m}{4m+1} \cdot \frac{P_n(X-3m+1) + R_n(4m-1)}{(X+m)^2}$$

et en remplaçant R_n par la valeur (18), on trouve, en résolvant par rapport à R'_n:

$$R'_n < P_n \frac{m}{(4m+1)(X+m)} \cdot \frac{2m + (4m+1)(X-m)(X-m+1)}{(4m+1)(X+m)^2 - m(4m-1)} \quad \ldots \quad (21)$$

ou en rétablissant les valeurs de Z et n au lieu de X et m:

$$R'_n < P_n \frac{2n+1}{(4n+3)(2Z^2+2n+1)} \cdot \frac{4(2n+1) + (4n+3)(2Z^2-2n-1)(2Z^2-2n+1)}{(4n+3)(2Z^2+2n+1)^2 - 2(2n+1)(4n+1)} \quad (22)$$

§ 7. En examinant les formules (21) ou (22), on trouve que R'_n devient très petit et que (20) donne par conséquence une bonne approximation pour:

$$2n-1 < 2Z^2 < 2n+1$$

ou, ce qui est la même chose, pour:

$$m-1 < X < m$$

ce qui est précisément le cas lorsqu'on applique la formule au reste du plus petit terme.

En effet, le numérateur de (21) par exemple, se compose de deux parties, dont la première $2m$ est toujours positive; la seconde partie l'est aussi pour des valeurs de X qui ne sont pas comprises entre $m-1$ et m. Pour des valeurs situées entre ces limites cette seconde partie devient négative, d'où il résulte que R'_n devient alors très petit. La plus grande valeur de cette partie $(m+\frac{1}{4})$ reste pourtant plus petite que la première partie, de sorte que la limite trouvée pour R'_n reste toujours positive.

La circonstance que cette partie devient négative pour des valeurs de X entre ces limites nous permet de simplifier pour ce cas la limite de R'_n; en

Digitized by Google

supprimant la partie négative, le second membre de (21) devient plus grand et l'on a donc à plus forte raison:

$$R'_n < P_n \frac{2m^2}{(4m+1)(X+m)\{(4m+1)(X+m)^2 - m(4m-1)\}} \quad \ldots \quad (23)$$

De cette expression on peut déduire une autre qui est encore plus simple. Pour le cas particulier qu'on a $X = m$, cette expression devient:

$$R'_n < P_n \frac{1}{(4m+1)(16m^2+1)} = \frac{P_n}{(4X+1)(16X^2+1)}.$$

Pour des valeurs plus petites de X on peut démontrer facilement que le second membre de (23) est plus petit que cette valeur:

$$\frac{P_n}{(4X+1)(16X^2+1)},$$

de sorte que R'_n est à plus forte raison plus petit que cette expression.

Pour le cas donc, qu'on applique la formule (20) au reste du plus petit terme, on commettra une erreur qui est plus petite que:

$$\frac{P_n}{(4Z^2+1)(16Z^4+1)}. \quad \ldots \quad (24)$$

§ 8. Posons en second lieu:

$$\varphi_n = \frac{aX+b}{X^2+2pX+q}; \quad \ldots \quad (25)$$

nous tirons alors de (13) l'expression:

$$\omega_n = 1 - \frac{(x+m)(ax+b)}{m(x^2+2px+q)} + \frac{ax}{m(x^2+2px+q)} - \frac{x(ax+b)(2x+2p)}{m(x^2+2px+q)^2}$$

que nous tâcherons de mettre sous la forme:

$$\omega_n = Q \frac{(x^2-2p'x+q')^2}{m(x^2+2px+q)^2} \quad \ldots \quad (26)$$

A cet effet nous mettrons les deux expressions pour ω_n sous le même dénominateur et nous égaliserons les coefficients des mêmes puissances de X, ce qui nous donne:

$$\left.\begin{aligned} Q &= m - a \\ -4p'Q &= 4mp - a(m+2p+1) - b \\ (2q'+4p'^2)Q &= 2mq + 4mp^2 - a(2mp+q) - b(m+2p+2) \\ -4p'q'Q &= 4pq - a(mq-q) - b(2mp+q+2p) \\ q'^2 Q &= mq^2 - bmq \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (27)$$

c'est-à-dire cinq équations entre les sept inconnues: a, b, p, q, p', q' et Q.

Digitized by Google

Ces équations se simplifient beaucoup et deviennent résolubles rationnellement par rapport à p' lorsqu'on pose $q' = q$; de cette manière on trouve:

$$\left.\begin{aligned} a &= m\,\frac{2(m+p'+2)(m+p')}{2(m+p'+2)(m+p')+1} \\ b &= 2m(m+p')\,\frac{m^2+mp'+m-p'}{2(m+p'+2)(m+p')+1} \\ Q &= \frac{m}{2(m+p'+2)(m+p')+1} \\ p &= m \\ q &= q' = \frac{b}{a}m = m\,\frac{m^2+mp'+m-p'}{m+p'+2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Il ne nous reste plus que de faire un choix pour la valeur de p'. Pour cela il faut faire attention à ce que la valeur de ω_n, donnée par (26) devient petite pour des valeurs de x peu supérieures à X. Comme la valeur de p' a surtout de l'influence sur le numérateur de (26), nous égalons ce numérateur à zéro et nous résolvons par rapport à x, ce qui donne:

$$x = p' \pm \sqrt{p'^2 - q} = p' \pm \sqrt{\frac{m+p'}{m+p'+2}(p'^2 - m^2 + 2p' - m)}.$$

Pour ces deux valeurs de x la quantité ω_n devient égale à zéro. Maintenant il importe surtout que ces deux valeurs diffèrent très peu l'une de l'autre, parce qu'alors la valeur de ω_n sera très petite pour des valeurs de x qui ne s'éloignent pas beaucoup de ces valeurs. Il faudra donc choisir la valeur de p' de manière que le facteur $p'^2 - m^2 + 2p' - m$ soit petit. Pour $p = m$ ce facteur devient égal à m et les deux racines deviennent:

$$x = m \pm \frac{m}{\sqrt{m+1}}$$

Ces deux racines s'éloignent trop l'une de l'autre pour donner une petite valeur à ω_n pour une valeur déterminée de x. En prenant pour p' de plus petites valeurs, ces racines s'approchent l'une de l'autre; pour $p' = \sqrt{m^2+m+1} - 1$, c'est-à-dire pour une valeur de p' un peu supérieure à $m - \frac{1}{2} = n$, le facteur devient égal à zéro et les deux racines sont égales; pour des valeurs de p' encore plus petites le facteur devient négatif et les racines deviennent imaginaires. Il conviendra donc de donner à p' une valeur comprise entre:

$$\sqrt{m^2+m+1} - 1 \quad \text{et} \quad m$$

et se rapprochant autant que possible de la première valeur; mais cela n'est pas possible sans donner aux formules une forme compliquée. La valeur la plus

Digitized by Google

simple qu'on peut donner à p' sans s'éloigner trop de la valeur $\sqrt{m^2+m+1}-1$, c'est

$$p' = m - \tfrac{1}{2} = n.$$

Il est vrai que les deux racines deviennent alors imaginaires, mais l'expression $x^2 - 2p'x + q'$ aura un minimum pour $x = p' = n$, de sorte que la valeur de ω_n sera très petite pour des valeurs de x différant peu de $x = p' = n$ et que la formule (25) donnera une bonne approximation pour le cas que X est peu inférieur à n.

En posant $p' = n$ on trouve après une simple transformation:

$$\varphi_n = \frac{2(m+n)(m+n+2)}{2(m+n)(m+n+2)+1} \cdot \frac{mX + m^2 - \frac{m(m+n)}{m+n+2}}{X^2 + 2mX + m^2 - \frac{m(m+n)}{m+n+2}} \quad \ldots \quad (30)$$

$$\omega_n = \frac{1}{2(m+n)(n+n+2)+1} \left\{ \frac{x^2 - 2nx + m^2 - \frac{m(n+n)}{m+n+2}}{x^2 + 2mx + m^2 - \frac{m(m+n)}{m+n+2}} \right\}^2 \quad \ldots \quad (31)$$

§ 9. Comme ω_n et par suite R'_n sont positifs, l'approximation trouvée est trop petite. En rétablissant les valeurs de n et de Z au lieu de m et X on trouve donc après une simple transformation:

$$R_n > \frac{A}{A+2} \cdot \frac{bZ^2 + c}{aZ^4 + 2bZ^2 + c} P_n \quad \ldots \quad (32)$$

où:

$$\left.\begin{aligned} A &= (4n+1)(4n+5) \\ a &= 4(4n+5) \\ b &= 2(2n+1)(4n+5) \\ c &= (2n+1)(8n^2+6n+3) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (33)$$

Par la même méthode que nous avons employée au paragraphe 6 on pourrait à la rigueur trouver une limite supérieure pour R'_n dans le cas qui nous occupe; seulement il est à prévoir que les formules deviendront un peu compliquées. Comme il n'est pas nécessaire de chercher une telle limite, nous ne nous en occuperons pas; mais alors on devra toujours appliquer la formule (32) à deux restes consécutifs afin d'avoir deux limites entre lesquelles la valeur de ψ (Z) soit comprise.

Pour avoir les limites les plus resserrées il conviendra d'appliquer la formule au reste du plus petit terme et à celui du terme suivant. Seulement pour le cas que $2Z^2$ est peu inférieur à un nombre impair, il vaudra mieux l'appliquer aux restes des deux termes qui suivent le plus petit. Pour le cas particulier

Digitized by Google

que $2Z^2$ est exactement égal à un nombre impair, on trouve deux termes égaux et plus petits que tous les autres; dans ce cas on appliquera la formule au reste du second de ces deux termes et à celui qui le suit immédiatement, c'est-à-dire aux valeurs $n = Z^2 + \frac{1}{2}$ et $n = Z^2 + \frac{3}{2}$.

§ 10. Afin de faire voir l'approximation que donnent les formules trouvées, nous les appliquerons à quelques cas pour l'évaluation de la fonction:

$$\psi(Z) = e^{Z^2} \int_Z^\infty e^{-z^2} dz.$$

Prenons d'abord la valeur $Z = 4$. La formule (1) ou (2), comme on la donne ordinairement, donne les deux limites:

$$\psi(4) > 0{,}12141.25982.01129$$
$$\psi(4) < 0{,}12141.26180.42998,$$

par lesquelles la valeur de ψ (4) est donnée avec 7 décimales.

La formule (20) appliquée au reste R_{16} donne:

$$R_{16} > 0{,}00000.00099.23213$$

avec une erreur R'_{16} qui d'après (24) est plus petite que:

$$R'_{16} < 0{,}00000.00000.00074;$$

en retranchant la limite pour R_{16} de la dernière des limites données plus haut pour ψ (4) et en ajoutant la limite pour R'_{16}, on trouve:

$$\psi(4) < 0{,}12141.26081.19785$$
$$\psi(4) > 0{,}12141.26081.19711,$$

c'est-à-dire deux valeurs qui s'accordent jusque dans la 13me décimale.

Comme second exemple nous prenons $Z = 3$. Les formules (1) ou (2) nous donnent alors:

$$\psi(3) < 0{,}15865.01064.53884$$
$$\psi(3) > 0{,}15862.11527.43224;$$

ce sont deux valeurs qui ne s'accordent que jusque dans la 4me décimale.

Les formules (20) et (24) nous donnent ici:

$$R_9 > 0{,}00001.44868.87801$$
$$R'_9 < 0{,}00000.00006.03341,$$

d'où il suit:

$$\psi(3) > 0{,}15863.56396.31025$$
$$\psi(3) < 0{,}15863.56402.34366;$$

de sorte que $\psi(3)$ est trouvée ici avec neuf décimales.

Digitized by Google

En appliquant la formule (32) on trouve:

$$R_9 > 0{,}00001.44871.20449$$
$$R_{10} > 0{,}00001.60751.29190,$$

d'où il suit les deux limites:

$$\psi(3) > 0{,}15863.56398.63673$$
$$\psi(3) < 0{,}15863.56398.64175$$

qui déterminent douze décimales.

Prenons enfin $Z = 2$. Les formules (1) ou (2) donnent alors les limites:

$$\psi(2) > 0{,}22314.45312.5$$
$$\psi(2) < 0{,}22955.32226.5625$$

par lesquelles on n'a pas encore de certitude sur la seconde décimale.

Les formules (20) et (24) appliquées à R_4 et R'_4 donnent ici:

$$\psi(2) < 0{,}22633.89563.78193$$
$$\psi(2) > 0{,}22633.74895.22755,$$

ce qui détermine déjà cinq décimales, tandis que la formule (32) appliquée aux restes R_4 et R_5 donne les limites:

$$\psi(2) < 0{,}22633.85293.97548$$
$$\psi(2) > 0{,}22633.85223.18237$$

qui ne diffèrent plus que dans la neuvième décimale.

§ 11. Dans l'introduction de ses tables de l'intégrale $\psi(Z)$, M. R. RADAU [1]) dit que les séries qu'on trouve ordinairement ne peuvent être employées que pour de petites valeurs de Z jusqu'à $Z = 2$, la série semi-convergente qu'à partir de $Z = 4$. Pour des valeurs de Z entre 2 et 4 il a établi d'autres séries qui ne sont pas d'un usage commode. Comme on peut voir par les exemples du paragraphe précédent, cette série peut encore être employée pour le calcul de $\psi(Z)$ avec 7 ou 8 décimales jusqu'à $Z = 3$ en employant les formules (20) et (24) pour le reste, et jusqu'à $Z = 2$ avec la formule un peu plus compliquée (32).

M. RADAU ne donne pas les valeurs numériques de la fonction mais leurs logarithmes avec 7 décimales. Les formules que je viens de développer donnent encore ce nombre de décimales jusqu'à $Z = 2$, car en cherchant les logarithmes des deux valeurs qu'on vient de trouver, on a:

$$\log \psi(2) < 9.3547584.899$$
$$\log \psi(2) > 9{,}3547584.763$$

de sorte que la 7me décimale est encore exactement déterminée.

---

[1]) R. RADAU. Tables de l'intégrale ψ (Z). *Annales de l'Observatoire de Paris.* Mémoires. Tome XVIII. Paris 1884.

Digitized by Google

§ 12. Voici encore une forme pour le reste R_n qui est d'un usage commode pour le calcul par logarithmes. En rétablissant la valeur de Z dans la formule (13) on a:

$$\omega_n = 1 - \frac{Z^2 + m}{m}\varphi_n + \frac{Z}{2m}\frac{d\varphi_n}{dZ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

Posons maintenant:

$$\varphi_n = \frac{a}{Z}$$

la formule (34) nous donne pour ω_n l'expression:

$$\omega_n = 1 - \frac{a\,z}{m} - \frac{a}{z} - \frac{a}{2\,m\,z} = -\frac{a\,z^2 - m\,z + a\,(m + \frac{1}{2})}{m\,z}$$

que nous pouvons mettre sous la forme:

$$\omega_n = -\,Q\,\frac{(z-p)^2}{z} = -\,Q\left(z - 2\,p + \frac{p^2}{z}\right)$$

d'où nous tirons:

$$a = Q\,m \qquad 1 = 2\,p\,Q \qquad a\,(m + \tfrac{1}{2}) = p^2\,Q\,m.$$

et en résolvant:

$$p^2 = m + \tfrac{1}{2} = n + 1$$

$$Q = \frac{1}{2p} = \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$

$$a = Q\,m = \frac{m}{2\sqrt{n+1}} = \frac{2n+1}{4\sqrt{n+1}}.$$

On aura donc:

$$\varphi_n = \frac{2n+1}{4\sqrt{n+1}}\,\frac{1}{Z}$$

et comme ω_n est négatif:

$$R_n < \frac{2n+1}{4\sqrt{n+1}}\,\frac{P_n}{Z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

De la formule (3) on tire:

$$P_{n+1} = \frac{2n+1}{2Z^2}\,P_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

d'où il suit:

$$\sqrt{P_n\,P_{n+1}} = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,\frac{P_n}{Z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

Digitized by Google

Par suite de cette relation la formule (35) peut être mise sous la forme:

$$R_n < A_n \sqrt{P_n P_{n+1}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (38)$$

où

$$A_n = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{2n+1}{2(n+1)}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (39)$$

est un coefficient numérique. En dressant d'avance une table des logarithmes de A_n, la formule (38) est d'un usage commode pour le calcul.

Les meilleurs résultats sont obtenus avec cette formule en l'appliquant au reste du plus petit terme et à celui du terme qui le précède. Pour $Z=4$, on trouve par exemple:

$$R_{15} < 0{,}00000.00099.20934$$
$$R_{16} < 0{,}00000.00099.25493$$

d'où il suit:

$$\psi(4) < 0{,}12141.26081.22063$$
$$\psi(4) > 0{,}12141.26081.17505$$

c'est-à-dire la valeur de $\psi(4)$ avec 11 décimales.

Pour $Z=3$, on a:

$$R_8 < 0{,}00001.44768.55$$
$$R_9 < 0{,}00001.44969.48$$

ce qui donne les valeurs:

$$\psi(3) > 0{,}15863.56295.99$$
$$\psi(3) < 0{,}15863.56496.91$$

qui ne diffèrent que dans la 8me décimale.

Afin de faciliter l'emploi de cette formule, nous donnons ici une table des logarithmes de A_n.

n.	*log.* A_n.	*n.*	*log.* A_n.	*n.*	*log.* A_n.
0	9,5484550065	17	9,6928527761	34	9,6958455297
1	9,6365006360	18	9,6931790681	35	9,6959329305
2	9,6593793813	19	9,6934723122	36	9,6960155745
3	9,6699740308	20	9,6937372875	37	9,6960938399
4	9,6760912591	21	9,6939778939	38	9,6961680656
5	9,6800757239	22	9,6941973454	39	9,6962385565
6	9,6828776627	23	9,6943983146	40	9,6963055876
7	9,6849556425	24	9,6945830422	41	9,6963694075
8	9,6865582125	25	9,6947534206	42	9,6964302416
9	9,6878318070	26	9,6949110592	43	9,6964882946
10	9,6888683113	27	9,6950573356	44	9,6965437529
11	9,6897283015	28	9,6951934354	45	9,6965967868
12	9,6904533347	29	9,6953203850	46	9,6966475518
13	9,6910728707	30	9,6954390771	47	9,6966961905
14	9,6916083759	31	9,6955502921	48	9,6967428336
15	9,6920758621	32	9,6956547149	49	9,6967876016
16	9,6924875158	33	9,6957529493	50	9,6968306053

Digitized by Google

§ 13. Mettons enfin:

$$\varphi_n = a + \frac{2b}{Z} + \frac{c}{Z^2}.$$

La formule (34) donne alors:

$$\omega_n = -\frac{a}{m}z^2 - \frac{2b}{m}z - \frac{am+c-m}{m} - \frac{2m+1}{mz}b - \frac{m+1}{mz^2}c$$

et en mettant cette expression sous la forme:

$$\omega_n = +Q\frac{(z-p)^4}{z^2} = Q\left(z^2 - 4pz + 6p^2 - 4\frac{p^3}{z} + \frac{p^4}{z^2}\right)$$

nous trouvons:

$$\begin{aligned} a &= -Qm, \\ 2b &= +4pQm, \\ am + c - m &= -6p^2Qm, \\ b(2m+1) &= +4p^3Qm, \\ c(m+1) &= -p^4Qm; \end{aligned}$$

d'où nous tirons, en résolvant et en remplaçant m par $n + \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} p^2 &= n+1, \\ Q &= \frac{2(2n+3)}{16n^2+44n+29}, \\ a &= -\frac{(2n+1)(2n+3)}{16n^2+44n+29}, \\ 2b &= \frac{4(2n+1)(2n+3)\sqrt{n+1}}{16n^2+44n+29}, \\ c &= -\frac{2(2n+1)(n+1)^2}{16n^2+44n+29}. \end{aligned}$$

Comme ω_n est ici positif, on a:

$$R_n > -\frac{(2n+1)(2n+3)}{16n^2+44n+29}P_n + \frac{4(2n+1)(2n+3)\sqrt{n+1}}{16n^2+44n+29}\frac{P_n}{Z} - \frac{2(2n+1)(n+1)^2}{16n^2+44n+29}\frac{P_n}{Z^2}. \quad (40)$$

Par suite des relations (36) et (37), cette formule peut être écrite sous la forme:

$$R_n > B_n\sqrt{P_n P_{n+1}} - C_n P_n - D_n P_{n+1} \quad (41)$$

dans laquelle B_n, C_n et D_n ont les valeurs suivantes:

$$\left.\begin{aligned} B_n &= \frac{4(2n+3)\sqrt{(2n+1)(2n+2)}}{16n^2+44n+29}, \\ C_n &= \frac{(2n+1)(2n+3)}{16n^2+44n+29}, \\ D_n &= \frac{4(n+1)^2}{16n^2+44n+29}, \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

dont voici les logarithmes:

Digitized by Google

n	*log.* B_n	*log.* C_n.	*log.* D_n.
0	9,7672982460	9,0147232568	9,1396619934
1	9,8912306120	9,2267012524	9,2547299760
2	9,9280400838	9,2863894695	9,2986239259
3	9,9460966749	9,3150407101	9,3218801346
4	9,9568730058	9,3319342692	9,3362990746
5	9,9640456124	9,3430913407	9,3461177953
6	9,9691671679	9,3510148349	9,3532362949
7	9,9730089210	9,3569345678	9,3586343527
8	9,9759979813	9,3615261981	9,3628686860
9	9,9783902140	9,3651920254	9,3662791210
10	9,9803483245	9,3681866401	9,3690848710
11	9,9819807537	9,3706790596	9,3714336983
12	9,9833625760	9,3727859150	9,3734288381
13	9,9845474232	9,3745902982	9,3751445989
14	9,9855746341	9,3761530144	9,3766358321
15	9,9864737210	9,3775195875	9,3779439104
16	9,9872672587	9,3787247788	9,3791006287
17	9,9879728107	9,3797955911	9,3801308243
18	9,9886042470	9,3807533194	9,3810541815
19	9,9891726670	9,3816149835	9,3818865024
20	9,9896870586	9,3823943504	9,3826406189

En appliquant cette formule au cas où Z est égal à 3, on trouve:

$$R_8 > 0{,}00001.44665.5152$$
$$R_9 > 0{,}00001.44871.0929$$

d'où il suit:

$$\psi(3) < 0{,}15863.56399.0236$$
$$\psi(3) > 0{,}15863.56398.5251$$

c'est-à-dire qu'on a deux limites pour $\psi(3)$ qui diffèrent seulement de 5 unités de la 11me décimale.

Pour $Z = 2$, on trouve:

$$R_3 > 0{,}0031938.40$$
$$R_4 > 0{,}0032146.53$$

d'où il suit:

$$\psi(2) > 0{,}2263383.71$$
$$\psi(2) < 0{,}2263385.70$$

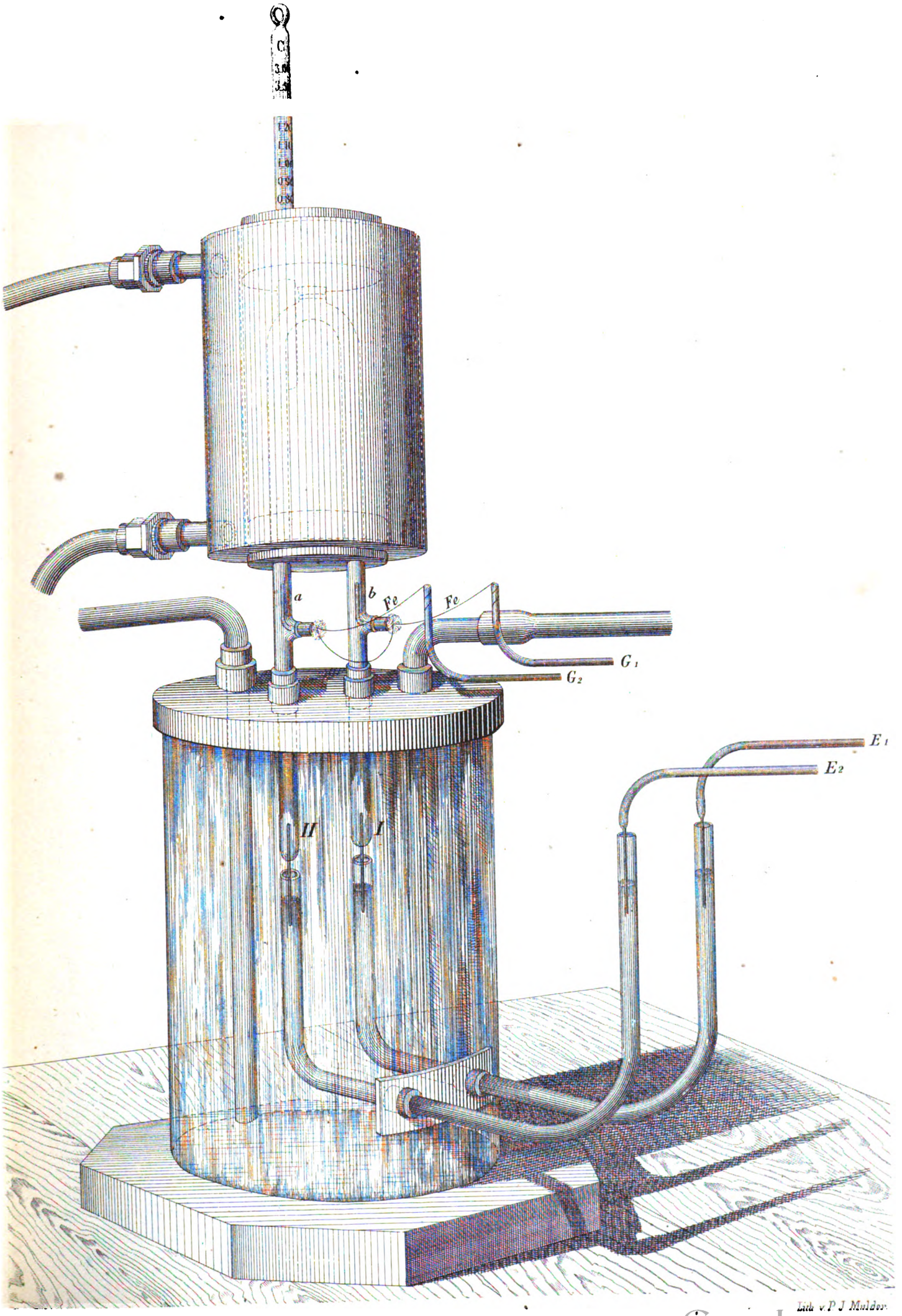
. avec une différence de 2 unités de la 7me décimale.

Digitized by Google

ERRATA.

Page	6	avant-dernière ligne	*au lieu de*	9	*lisez*	6
»	11	ligne 2	»	$\sin A'$	»	$\sin A$
»	15	» 13	»	$\frac{a^2}{1-e^2}$	»	$\frac{1}{a^2(1-e^2)}$
»	26	» 10	»	$\sin \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_0)$	»	$\cos \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_0)$
»	»	» 12	»	$\lambda - \lambda_0$	»	$\lambda_1 - \lambda_0$
»	27	formule (36)	»	$-\xi^5 \eta$	»	$-\xi^7 \eta$
»	35	ligne 2	»	$\frac{k'}{2!2} \eta^2$	»	$\frac{k'}{2!2^2} \eta^2$
»	40	» 2	»	$\sin A']$	»	$\sin^2 A']$
»	47	formules (72). Dans la formule pour k''	»	$(1 + 2c^2)$	»	$(1 + 2c)$
»	54	ligne 20	»	$-\xi^2 \eta^3$	»	$-\xi^3 \eta^2$
»	56	» 22	»	$[1 + c \cos A]$	»	$[1 + c \cos^2 A]$

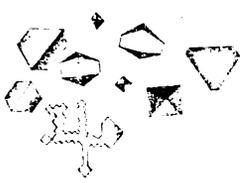
Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

1



2



3



4



5



6



7



8



9



10



11



12



13



Dessiné par l'Auteur

Lith v P J Mulder Lith

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

H. HAGA. Étude expérimentale sur l'effet thermo-électrique découvert par Thomson . . . . . 145.

J. BOSSCHA FILS. Remarques sur les inclusions de certains quartz des porphyres. 169.

TH. H. BEHRENS. Sur l'analyse microchimique des minéraux.

§ 1. Introduction . . . . . 176.
§ 2. Méthodes microchimiques . . . . . 180.
§ 3. La méthode de M. Boricky . . . . . 181.
§ 4. Méthode microchimique nouvelle . . . . . 187.
§ 5. Préparation de la matière minérale à examiner . . . . . 188.
§ 6. Dissolution et attaque des minéraux . . . . . 189.
§ 7. Recherche du calcium . . . . . 191.
§ 8. Recherche du potassium . . . . . 193.
§ 9. Recherche du sodium . . . . . 194.
§ 10. Recherche du lithium . . . . . 196.
§ 11. Recherche du baryum et du strontium 197
§ 12. Recherche du magnésium . . . . . 197.
§ 13. Recherche de l'aluminium. . . . . 199.
§ 14. Recherche du fer et du manganèse . . . . . 200.
§ 15. Recherche des métalloïdes. . . . . 200.
§ 16. Recherche du soufre. . . . . 200.
§ 17. Recherche du phosphore (et de l'arsénic) . . . . . 201.
§ 18. Recherche du chlore. . . . . 201.
§ 19. Recherche du fluorium . . . . . 204.
§ 20. Recherche du silicium et du bore . . . . . 205.
§ 21. Recherche de l'eau . . . . . 206.
§ 22. Analyses de contrôle . . . . . 208.

CH. M. SCHOLS. La série semi-convergente pour l'évaluation de l'intégrale $\psi(Z) = e^{Z^2} \int_Z^\infty e^{-z^2} dz$. . . . . 213.

Digitized by Google

Geology
182

ANNALES

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

DE

DELFT.

1re et 2me LIVRAISON.

JUL 26 1973
THE LIBRARY OF THE
JUL 23 1973
UNIVERSITY OF ILLINOIS
AT URBANA-CHAMPAIGN

LEIDE. — E. J. BRILL.
1886.

GEOLOGY
Digitized by Google

Digitized by Google

RELATION DES EXPÉRIENCES QUI ONT SERVI À LA CONSTRUCTION DE DEUX MÈTRES ÉTALONS EN PLATINE IRIDIÉ, COMPARÉS DIRECTEMENT AVEC LE MÈTRE DES ARCHIVES.

SECONDE PARTIE.

V. COMPARAISONS DES MÈTRES N°. 19, N°. 23 ET N°. 27 ENTRE EUX ET AVEC LE MÈTRE DES ARCHIVES.

61. Vers la fin du mois de Septembre 1879 M. TRESCA avertit la Commission néerlandaise que les deux règles en platine iridié n°. 19 et n°. 27, destinées à servir comme étalons néerlandais, avaient été munies de leurs traits délimitatifs. Elles avaient été tracées dans les nuits du 28 et du 25 Septembre sur le comparateur à mouvement longitudinal d'après la règle n°. 23, qui elle-même avait été copiée directement d'après le Mètre des Archives. Le comparateur à mouvement transversal venait d'être définitivement installé dans sa chambre de cuivre munie des appareils nécessaires pour maintenir à un degré voulu la température de la chambre. M. TRESCA proposa à la Commission de venir faire elle-même les vérifications des nouveaux étalons; il offrit de placer à cet effet le Mètre des Archives sur le comparateur transversal pour les comparaisons directes, le comparateur longitudinal pouvant servir en même temps pour les vérifications des nouveaux étalons entre eux.

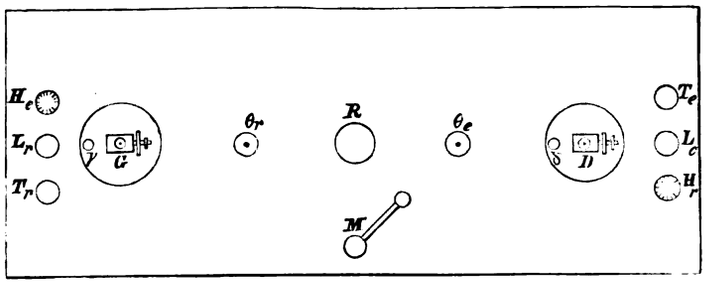
La Commission s'est rendue à Paris le 5 Octobre. M. STAMKART put cette fois prendre part à ses travaux.

62. Le choix de l'arrangement proposé par M. TRESCA reposait sur cette considération que, des deux instruments, le comparateur transversal était de beaucoup le mieux approprié pour atténuer les erreurs dues à la mise au point dans les comparaisons d'un mètre à traits avec un mètre à bouts d'après le procédé de M. FIZEAU. Dans la disposition des organes du nouvel instrument on avait mis à profit l'expérience acquise dans les mesures faites au comparateur longitudinal. Au moyen de transmissions mécaniques les mouvements qui servent à régler la position des mètres par rapport aux microscopes s'opéraient dans le nouveau comparateur du dehors de la chambre de cuivre, de sorte que l'observateur

Digitized by Google

pouvait effectuer lui-même les déplacements nécessaires, tout en ne quittant pas de l'œil l'oculaire du microscope. À cet effet trois boutons, surmontant de longues tiges qui descendaient jusqu'à la table du comparateur, étaient disposés à côté des têtes des microscopes D et G (fig. 9) au-dessus de la paroi supérieure de la chambre de cuivre. Les boutons T_e, L_e et H_e servaient à régler dans le sens transversal, dans le sens horizontal et en hauteur la position du mètre qui se trouvait au côté éloigné de l'observateur. Les boutons T_r, L_r et H_r avaient la même destination pour le mètre rapproché de l'observateur. La mise au point pouvait être réglée *au côté droit:* pour le mètre éloigné au moyen de la tête de vis δ qui permettait d'abaisser ou de relever le microscope D, pour le mètre rapproché au moyen du bouton H_r qui servait à soulever ou à descendre la table sur laquelle était placé le support de ce mètre. *Au côté gauche*, la mise au point du mètre rapproché s'opérait au moyen de la tête de vis γ du microscope, celle du mètre éloigné au moyen du bouton H_e. Les têtes de vis des microscopes ainsi que les boutons servant à régler la hauteur des tables étaient munis de cadrans divisés. Les microscopes destinés à la lecture des thermomètres se trouvaient en θ_r et θ_e. En R était installé le thermomètre enregistreur de Redier. La tige bimétallique de cet instrument se trouvait placée au milieu de l'espace fermé de la chambre de cuivre, dans une direction parallèle à celle des axes des microscopes. Le mouvement transversal du chariot, par lequel les deux mètres à comparer furent portés alternativement avec leurs deux bouts sous les microscopes, s'effectuait au moyen de la manivelle M placée à portée de l'observateur. Quoique les deux mètres ne fussent séparés l'un de l'autre que de 5 à 6 centimètres, il fallait 26 tours de la manivelle pour faire franchir cet espace par le chariot, de sorte qu'il était facile de faire arriver exactement au milieu du champ des microscopes les bouts du mètre sur lequel on avait à pointer.

Fig. 9



Si, au point de vue de la cause d'erreur que nous avons fait connaître dans la Section précédente de ce Rapport, le comparateur transversal se recommandait par la facilité de la mise au point et les moyens de la contrôler, d'autre part cet instrument présentait sur le comparateur longitudinal l'avantage d'une plus parfaite identité des conditions dans lesquelles ont lieu les mesures des

Digitized by Google

deux mètres à comparer. Dans le comparateur longitudinal, des deux microscopes l'un sert exclusivement pour pointer sur les deux bouts du mètre éloigné de l'observateur, l'autre pour mesurer le mètre rapproché, ce qui implique pour les deux étalons un éclairage et des moyens optiques différents. Dans le comparateur transversal, au contraire, les deux mètres sont mesurés alternativement au moyen des mêmes microscopes, et dans l'appareil du Conservatoire tout avait été combiné de manière à ce qu'ils fussent placés dans des positions symétriques. Ce n'est qu'en dehors de la chambre de cuivre qu'une asymétrie se présentait, l'observateur étant placé d'un côté, tandis que du côté opposé arrivait la lumière qui, au moyen de petits prismes à réflexion totale placés dans les tubes des microscopes, éclairait les mètres. Mais il ne semblait pas que cet arrangement dût produire un autre effet qu'une faible inégalité thermique qui, nécessairement, s'accuserait sur les thermomètres. Or, l'avantage d'une plus grande identité dans les conditions d'observation des deux mètres devait à lui seul fixer le choix du comparateur sur lequel seraient effectuées les mesures directes avec le Mètre des Archives. En effet, le prototype muni de ses appendices ne devait être manipulé qu'avec la plus grande circonspection; une fois mis en place, il importait de ne plus y toucher pendant toute la durée des opérations. Il fallait donc l'employer sur le comparateur dans lequel on n'avait à craindre aucune cause qui pût créer une différence systématique dans la longueur apparente des mètres selon la position qu'ils occuperaient et qui rendît nécessaire, pour éliminer les erreurs qui en résulteraient, d'entrechanger les étalons.

M. Tresca proposa à la Commission de comprendre, dans les mesures qu'elle allait exécuter, avec les étalons néerlandais n°. 19 et n°. 27, le mètre n°. 23, qui avait été tracé directement d'après le Mètre des Archives, et qui resterait affecté aux travaux de la Section française. L'adjonction de ce troisième mètre à traits nous procura l'avantage, non-seulement de pouvoir multiplier les mesures indépendantes avec le Mètre des Archives, mais aussi de pouvoir appliquer aux vérifications des mètres à traits entre eux un contrôle tout à fait concluant en combinant les trois mètres deux à deux, les trois équations n°. 19—n°. 23 $= a$, n°. 23—n°. 27 $= b$, n°. 27—n°. 19 $= c$ devant satisfaire à l'équation $a + b + c = 0$.

63. Après quelques essais préliminaires, la Commission, de concert avec M. Tresca, adopta pour son travail le programme suivant. Afin d'acquérir l'expérience nécessaire pour appliquer avec succès le procédé de M. Fizeau et d'obtenir aussi complètement que possible la mesure du degré de précision qu'on pourrait atteindre, on commencerait par des séries de comparaisons multipliées à température ambiante. Chaque observateur exécuterait deux séries complètes pour comparer avec le Mètre des Archives un des mètres à traits. Ces doubles séries

Digitized by Google

seraient exécutées avec chacun des trois nouveaux étalons, de sorte que les observations à température ambiante comprendraient 6 séries pour chaque observateur. Les deux mètres à traits qui resteraient libres pendant les comparaisons du troisième avec le prototype seraient installés sur le comparateur longitudinal pour servir à la vérification des étalons entre eux. Ces vérifications seraient exécutées par chaque observateur deux fois pour chaque combinaison des trois mètres deux à deux, ce qui donnerait encore lieu à six séries pour chaque observateur. L'ordre dans lequel la substitution de ces mètres sur le comparateur longitudinal devrait avoir lieu, pour n'exiger que le plus petit nombre de déplacements sur les supports, aurait pour effet que chaque mètre se trouverait sur cet instrument une fois dans la position rapprochée, une fois dans la position éloignée de l'observateur. Sur le comparateur transversal, au contraire, pour les raisons indiquées plus haut, le Mètre des Archives resterait constamment dans la même position éloignée.

À la demande de la Commission, M. Gustave Tresca voulut bien s'associer à ses mesures. Les comparaisons à température ambiante comprenaient ainsi 24 séries de mesures directes avec le Mètre des Archives et 24 séries de vérifications de mètres à traits entre eux.

Quoiqu'une série de mesures pût s'accomplir dans l'espace d'environ 30 minutes, la Commission dut employer six jours pour effectuer les observations à température ambiante. L'installation sur les comparateurs d'une nouvelle combinaison de deux mètres faisait monter sensiblement la température de l'air dans les chambres de cuivre, et dès lors on avait à redouter une perturbation de l'équilibre de température des divers organes du comparateur et des mètres. Il fallait donc laisser écouler quelques heures avant de commencer une nouvelle série. Sans cette précaution, l'avantage de l'effet égalisateur des parois de cuivre fût resté en grande partie illusoire.

Après ces expériences préalables on put procéder aux comparaisons à basse température qui devaient fournir les longueurs des nouveaux étalons par rapport à l'unité fondamentale du système métrique, savoir la longueur du Mètre des Archives à zéro. Au moyen de l'appareil frigorifique, mis en mouvement par une machine à vapeur, et de la circulation de chlorure de calcium établie dans la loge en bois qui contenait le comparateur transversal avec son enveloppe métallique, l'air de la chambre de cuivre fut refroidi. La température de zéro ne fut atteinte qu'après trois périodes de marche de la machine, chacune d'environ 8 heures. A cette basse température l'influence de la présence de l'observateur sur la température des instruments semblait plus à craindre qu'à la température de 18° à 17° C., des mesures préalables. On résolut donc de séparer les séries

Digitized by Google

des divers observateurs par un intervalle de trois heures, et de limiter en conséquence le nombre des séries, de manière que les deux étalons néerlandais fussent comparés avec le Mètre des Archives une fois par chaque observateur. Après que le mètre n°. 19 eut été comparé, on reconnut la nécessité de faire marcher de nouveau la machine frigorifique, l'air de la chambre de cuivre s'étant élevé au-dessus de + 4° C. dans l'espace de 30 heures. Deux nouvelles périodes de marche, l'une de 6, la seconde de 7 heures et demie, abaissèrent la température au-dessous de — 2° C. M. Tresca proposa alors à la Commission de comparer avec le Mètre des Archives, au lieu de l'étalon néerlandais n°. 27, le mètre n°. 23 de la Section française. La Commission a accepté cette proposition; elle considéra que les deux valeurs n°. 19 — A et n°. 23 — A à zéro pourraient très bien servir pour en déduire celle de n°. 27 — A, vu que l'identité des dilatations des trois mètres avait déjà été suffisamment établie par les expériences de M. Fizeau et que, d'autre part, les vérifications faites sur le comparateur longitudinal avaient fait connaître avec une grande précision les équations relatives de ces mètres à 18° C. Une nouvelle et dernière suite de quatre séries fut donc effectuée avec le mètre n°. 23.

La Commission a voulu assujétir ses comparaisons à un programme tracé d'avance, afin de se prémunir contre toute tendance à limiter ou à étendre ses mesures jusqu'à ce qu'on eût obtenu soit un résultat moyen donnant une erreur moyenne désirée soit un groupe de séries exceptionnellement bien réussies. Le présent Rapport contient tous les détails des mesures, tels qu'ils ont été copiés d'après les carnets originaux des observateurs. Aucun chiffre se rapportant à ces mesures n'a été omis ou supprimé, aucun résultat n'a été rejeté sans qu'il n'en soit fait expressément mention dans ce Rapport. Ceci nous paraît une obligation essentielle dans toute détermination scientifique fondamentale. Ce n'est qu'à la condition de permettre un contrôle complet de tous les détails qui se sont présentés à l'observateur et de tous les chiffres recueillis, même ceux qui ont été obtenus dans des conditions en apparence moins satisfaisantes, qu'on peut se rendre compte du degré d'approximation que peut offrir le résultat final des observations.

64. Deux séries à basse température ont été prises en dehors du programme adopté.

Après le premier refroidissement de la chambre de cuivre et avant qu'on ne se fût entendu sur l'ordonnance des observations qui restaient à faire, M. Oudemans effectua une série de comparaisons provisoires du mètre n°. 19 avec le Mètre des Archives.

Une série de comparaisons du mètre n°. 23 avec le Mètre des Archives, faites par M. Bosscha, constitue la seconde exception à la règle que la Commission

Digitized by Google

s'était imposée. Elle fut motivée par les circonstances suivantes. Après le second refroidissement, M. Bosscha, qui avait le premier à faire une comparaison, remarqua que le mètre n°. 23 n'était pas bien ajusté dans sa position longitudinale, de sorte qu'il fallait quatre tours entiers des tambours des micromètres pour passer des bouts du Mètre des Archives à ceux du n°. 23. Malgré l'inconvénient d'une aussi longue course des micromètres, l'observateur continua la série. Il était d'avis qu'il fallait redouter des ajustements non prévus et que la marche régulière d'une série de mesures est une des principales conditions de précision. De plus, l'ajustement entraînerait une nouvelle mise au point et prolongerait ainsi la durée du séjour de l'observateur dans la chambre froide, ce qu'il voulait éviter pour maintenir la constance de la température. Mais ses collègues estimèrent qu'une différence de pointé atteignant plus d'un dixième de millimètre introduirait dans le résultat un élément d'incertitude qu'il importait d'écarter. On décida, en conséquence, avant que la série ne fût calculée, que la série de M. Bosscha serait remplacée par une autre qu'il effectuerait après celle de M. Oudemans, cette dernière devant être précédée d'un nouvel ajustement en longueur.

Nous communiquons également ces deux séries supplémentaires, avec les raisons qui nous ont décidés à les comprendre dans le calcul du résultat final.

65. Sur le comparateur longitudinal les différentes lectures furent faites dans le même ordre que celui du Tableau VIII au n°. 52 de ce Rapport. Seulement, le nombre d'alternances des bouts de droite et de gauche fut porté à sept, ce qui nous a permis de mieux nous rendre compte de la stabilité de l'instrument et de calculer avec plus de rigueur l'erreur moyenne de chaque mesure. M. Gustave Tresca voulut bien se charger de nouveau du maniement du chariot, de sorte que pendant ces comparaisons deux personnes se trouvaient dans le cabinet du comparateur. M. Bosscha a noté au commencement et à la fin des séries les indications d'un thermomètre qui se trouvait appliqué contre la paroi extérieure de la chambre de cuivre.

Les observations au comparateur transversal furent faites dans l'ordre suivant: détermination de l'heure; lecture des thermomètres des deux règles; ajustement de la distance des microscopes aux bouts des règles d'abord en déplaçant les microscopes aux deux bouts (têtes de vis γ et δ de la figure 9) ensuite au moyen du mouvement en hauteur des tables sur les deux autres bouts (têtes de vis H_e et H_r); lectures des cadrans de la mise au point γ, δ, H_e et H_r; pointé et lecture doubles sur l'un des bouts d'un des mètres, pointé et lecture doubles sur l'autre bout, deuxième pointé et lecture doubles sur le premier bout, — ces six pointés constituent une mesure; — déplacement du chariot pour amener l'autre mètre sous les microscopes; deuxième mesure faite sur ce dernier mètre; déplacement du cha-

Digitized by Google

riot; troisième mesure faite sur le premier mètre, etc. jusqu'à obtenir sept mesures; enfin nouvelle lecture des thermomètres et détermination de l'heure.

Dans l'ajustement de la mise au point MM. Bosscha, Stamkart et G. Tresca tâchèrent d'obtenir directement la plus grande netteté de l'image. Pour ne pas fausser par le temps perdu des vis les indications des cadrans de réglage, on terminait la mise au point toujours par un mouvement de même sens. M. Oudemans a préféré un réglage plus compliqué. Il tâchait d'obtenir deux ajustements d'égale netteté en deçà et en delà de la mise au point exacte et notait les indications des cadrans correspondant à ces ajustements. Cette opération fut faite cinq ou trois fois de suite. La moyenne des dix ou six lectures de cadran fut considérée comme répondant à la mise au point la plus exacte et le cadran ajusté en conséquence. Dans les premières observations cette manière d'opérer fut appliquée aux quatre ajustements qu'on avait à faire, mais, en considération de la faible influence que les erreurs possibles de la mise au point peuvent avoir sur la longueur apparente du mètre à traits, M. Oudemans s'est décidé à appliquer dans la suite à ce dernier la méthode ordinaire et plus directe.

Dans toutes les séries du comparateur transversal, à l'exception de la première, M. Oudemans a fait suivre le réglage de la mise au point par une nouvelle lecture des thermomètres, de sorte que dans ces séries cette lecture a été faite trois fois, savoir au commencement des opérations, au commencement des comparaisons et à la fin des comparaisons. À chaque lecture on notait l'heure.

Au comparateur transversal le maniement du chariot était beaucoup plus simple qu'au comparateur longitudinal. Comme on devait éviter autant que possible l'élévation de température, que la présence d'un deuxième observateur ne pouvait manquer d'accélérer, MM. Oudemans et Bosscha, après les premières séries, effectuèrent eux-mêmes ce déplacement. M. Stamkart préféra confier cette manipulation à M. G. Tresca.

Pour écarter à l'égard de la conformité des lectures successives toute préoccupation, qui pourrait causer une certaine tendance dans les taxations, M. Bosscha pria M. Tresca d'enregistrer pour lui dans le carnet d'observations les lectures dictées et même de faire par intervalles une lecture du tambour. C'est ce qui a eu lieu dans les trois premières séries du comparateur longitudinal et dans les deux premières du comparateur transversal. Mais, ayant pris sur lui le maniement de ce dernier instrument et les observations se faisant à la longue pour ainsi dire plus machinalement, M. Bosscha n'a plus usé dans les mesures subséquentes de cette précaution peut-être exagérée.

66. Le tableau XV contient les chiffres recueillis dans les 24 séries de mesures faites au comparateur longitudinal d'après le programme de la Commission. On y a indiqué par *r* le mètre rapproché, par *e* le mètre éloigné et dans les six premières séries par C la chambre de cuivre.

Digitized by Google

TABLEAU XV.

Comparaisons des étalons n°. 19, n°. 23 et n°. 27 entre eux.

I. Bosscha. 8 Octobre 1879.
r = n°. 27; e = n°. 23.
10h.8. Therm. C 16,95; r 16,98; e 16,975.

N.	Gauche.		Droite.	
	r	e	r	e
1			27,0	31,8
			28,1	31,2
2	26,3	30,8		
	27,2	28,8		
3			26,1	29,8
			26,2	30,0
4	39,9	41,2		
	39,8	41,3		
5			43,3	46,9
			43,2	47,4
6	10,7	12,5		
	10,3	11,1		
7			10,0	12,1
			9,5	11,5

10h.24. Therm. C 17,00; r 16,98; e 16,975.

II. Bosscha. 10 Octobre 1879.
r = n°. 19; e = n°. 23.
9h.58. Therm. C 16,75; r 16,80; e 16,80.

N.	Gauche.		Droite.	
	r	e	r	e
1			21,0	6,9
			21,1	6,8
2	38,2	23,2		
	37,8	23,0		
3			39,2	25,5
			39,5	24,1
4	45,5	29,9		
	45,1	31,1		
5			46,0	32,0
			46,1	32,0
6	44,2	29,9		
	44,2	30,1		
7			47,1	34,1
			47,3	33,9

10h.18. Therm. C —; r 16,80; e 16,80.

III. Bosscha. 12 Octobre 1879.
r = n°. 19; e = n°. 27.
10h.15. Therm. C 16,80; r 16,80; e 16,79.

N.	Gauche.		Droite.	
	r	e	r	e
1	44,5	31,8		
	45,0	32,1		
2			46,0	28,6
			45,4	28,9
3	50,9	37,8		
	51,2	38,8		
4			49,1	31,9
			49,5	32,2
5	54,2	40,9		
	53,3	41,0		
6			52,9	34,4
			53,0	35,0
7	54,6	42,0		
	54,7	41,5		

10h.35. Therm. C 16,90; r 16,83; e 16,82.

IV. Bosscha. 16 Octobre 1879.
r = n°. 23; e = n°. 27.
10h.0 soir. Therm. C 15,39; r 15,42; e 15,44.

N.	Gauche.		Droite.	
	r	e	r	e
1			16,1	12,0
			16,7	11,5
2	16,2	16,0		
	16,7	17,9		
3			12,7	7,7
			12,9	6,9
4	7,9	7,0		
	8,2	6,2		
5			3,1	—3,1
			1,7	—4,8
6	4,0	2,3		
	3,7	1,6		
7			6,9	2,1
			7,3	0,8

10h.16. Therm. C 15,45; r 15,42; e 15,43.

V. Bosscha. 17 Octobre 1879.
r = n°. 23; e = n°. 19.
9h.5 soir. Therm. C 14,60; r 14,90; e 14,92.

N.	Gauche.		Droite.	
	r	e	r	e
1	15,1	35,7		
	15,9	35,7		
2			16,0	31,0
			15,6	31,1
3	17,6	38,1		
	18,3	38,0		
4			12,4	27,8
			11,9	27,9
5	7,1	26,8		
	7,2	26,5		
6			9,7	26,0
			10,5	26,0
7	11,5	32,1		
	12,1	31,8		

9h 23. Therm. C 14,68; r 14,91; e 14,93.

VI. Bosscha. 18 Octobre 1879.
r = n°. 27; e = n° 19.
8h.36 soir. Therm. C 14,15; r 14,53; e 14,53.

N.	Gauche.		Droite.	
	r	e	r	e
1	37,3	54,1		
	37,9	54,1		
2			32,9	47,9
			32,9	47,1
3	34,6	49,4		
	33,9	48,8		
4			38,9	52,2
			38,9	52,2
5	39,9	54,0		
	39,0	54,1		
6			44,7	56,2
			44,0	56,5
7	45,2	60,3		
	46,1	60,2		

8h 54. Therm. C 14,25; r 14,53; e 14,53.

VII. Oudemans. 8 Octobre 1879.
r = n°. 27; e = n°. 23.
4h.10 soir. Therm. r 17,10; e 17,095.

N.	Gauche.		Droite.	
	r	e	r	e
1	26,1	26,8		
	28,4	26,4		
2			29,1	29,1
			29,1	29,1
3	33,1	32,0		
	33,0	31,1		
4			30,2	31,0
			30,2	30,5
5	38,8	37,0		
	40,0	36,3		
6			38,6	39,2
			39,3	39,3
7	36,5	34,7		
	37,0	34,9		

4h.30. Therm. r 17,10; e 17,098.

VIII. Oudemans. 10 Octobre 1879.
r = n°. 19; e = n°. 23.
11h.10. Therm. r 16,88; e 16,87.

N.	Gauche.		Droite.	
	r	e	r	e
1			23,0	8,3
			23,1	8,3
2	22,2	6,2		
	21,8	6,1		
3			22,6	7,4
			22,1	6,8
4	19,5	3,6		
	19,3	3,6		
5			20,1	5,2
			20,5	5,2
6	22,6	6,5		
	22,6	5,5		
7			23,8	7,7
			23,0	7,2

11h.30. Therm. r 16,92; e 16,905.

IX. Oudemans. 12 Octobre 1879.
r = n°. 19; e = n°. 27.
10h.45. Therm. r 16,86; e 16,84.

N.	Gauche.		Droite.	
	r	e	r	e
1	14,3	42,6		
	13,9	41,7		
2			13,7	38,8
			13,6	38,8
3	15,1	43,0		
	14,0	43,0		
4			9,6	34,6
			9,4	34,6
5	10,2	39,1		
	10,0	39,2		
6			8,6	34,2
			9,3	34,3
7	9,8	39,3		
	9,7	38,9		

11h.7. Therm. r 16,90; e 16,89.

Digitized by Google

TABLEAU XV (*Suite*).

Comparaisons des étalons n°. 19, n°. 23 et n°. 27 entre eux.

X. Oudemans. 16 Octobre 1879.
r = n°. 23; e = n°. 27
9h.26 soir. Therm. r 15,49; e 15,52.

N.	Gauche.		Droite.	
	r	e	r	e
1	16,5	17,2		
	17,7	18,0		
2			19,1	13,8
			18,7	13,8
3	17,5	17,2		
	17,0	17,3		
4			9,9	3,5
			10,4	4,0
5	8,3	8,7		
	8,8	8,8		
6			9,8	3,3
			9,5	3,2
7	10,9	10,2		
	10,6	10,5		

9h.41. Therm. r 15,43; e 15,44.

XI. Oudemans. 17 Octobre 1879.
r = n° 23; e = n°. 19.
9h.39 soir. Therm. r 14,93; e 14,94.

N.	Gauche.		Droite.	
	r	e	r	e
1			5,0	13,8
			5,5	14,5
2	4,7	18,0		
	5,2	18,0		
3			6,8	14,9
			5 8	14,6
4	1,2	14,0		
	1,2	13,3		
5			49,9	7,8
			49,6	8,6
6	3,7	16,1		
	4,2	16,2		
7			9,9	18,1
			10,0	17,7

9h 55. Therm. 14,97; e 14,97.

XII. Oudemans. 18 Octobre 1879.
r = n°. 27; e = n°. 19.
9h.12 soir. Therm. r 14,55; e 14,54.

N.	Gauche.		Droite.	
	r	e	r	e
1	38,0	49,7		
	37,7	49,5		
2			41,3	1,8
			40,6	1,4
3	40,2	2,7		
	40,0	3,9		
4			40,1	2,3
			41,6	2,2
5	43,2	7,3		
	43,6	7,7		
6			41,0	2,0
			40,8	2,0
7	43,9	6,2		
	43,9	6,2		

9h.34. Therm. r 14,57; e 14,57.

XIII. Stamkart. 8 Octobre 1879.
r = n°. 27; e = n° 23.
10h.42 Therm. r 17,00; e 16,99.

N.	Gauche.		Droite.	
	r	e	r	e
1	40,9	36,8		
	41,8	37,5		
2			37,2	33,9
			36,1	32,8
3	46,8	41,7		
	47,8	41,8		
4			44,8	40,8
			45,0	41,7
5	54,4	49,9		
	53,8	49,2		
6			49,0	43,9
			47,6	43,2
7	12,4	7,2		
	14,2	7,2		

11h.5. Therm. r 17,03; e 17,02.

XIV. Stamkart. 10 Octobre 1879.
r = n°. 19; e = n°. 23.
10h 20. Therm. r 16,80; e 16,80.

N.	Gauche.		Droite.	
	r	e	r	e
1			24,8	16,3
			27,2	16,7
2	30,0	20,8		
	30,5	20,6		
3			27,2	18,1
			27,6	18,3
4	25,0	13,7		
	27,0	14,4		
5			24,7	13,2
			24,7	14,8
6	28,8	16,8		
	28,8	17,0		
7			24,1	12,8
			23,7	14,0

10h.54. Therm. r 16,85; e 16,84.

XV. Stamkart. 12 Octobre 1879.
r = n°. 19; e = n°. 27.
9h.32. Therm. r 16,80; e 16,79.

N.	Gauche.		Droite.	
	r	e	r	e
1			4,8	27,5
			2,4	27,5
2	13,6	39,9		
	12,8	39,9		
3			6,4	30,1
			7,1	30,2
4	5,9	31,1		
	5,9	31,8		
5			3,1	25,9
			4,5	26,1
6	2,0	27,9		
	1,9	27,8		
7			1,5	24,1
			0,0	24,0

10h.0. Therm. r 16,80; e 16,79.

XVI. Stamkart. 16 Octobre 1879.
r = n°. 23: e = n°. 27.
10h.18 soir. Therm. r 15,42; e 15,43.

N.	Gauche.		Droite.	
	r	e	r	e
1	7,8	6,1		
	8,8	4,9		
2			11,1	6,8
			12.2	7,1
3	15,8	16,1		
	17,1	17,2		
4			13,1	9,8
			13,8	9,8
5	13,2	14,0		
	12,8	13,0		
6			15,0	12,1
			15,0	10 8
7	9,8	12,4		
	11,8	12,9		

10h.50. Therm. r 15,50; e 15,49.

XVII. Stamkart. 17 Octobre 1879.
r = n°. 23; e = n°. 19.
8h 35 soir. Therm. r 14,89; e 14,92.

N.	Gauche.		Droite.	
	r	e	r	e
1			25,1	37,4
			25,2	38,8
2	22,4	38,8		
	23,9	39,2		
3			24,0	36,9
			24,9	37,1
4	20,6	37,1		
	20,4	37,6		
5			17,8	29,2
			18,7	30,1
6	22,8	36,0		
	21,9	37,0		
7			21,9	32,2
			21,0	31,9

9h.5. Therm. r 14,90; e 14,93.

XVIII. Stamkart. 18 Octobre 1879.
r = n°. 27; e = n°. 19.
9h.45 soir. Therm. r 14,48; e 14,48.

N.	Gauche.		Droite.	
	r	e	r	e
1			14,4	31,1
			13,7	31,9
2	13,9	31,8		
	12,9	32,1		
3			11,2	29,8
			11,1	27,9
4	9,7	28,9		
	8,2	29,4		
5			6,9	24,2
			8,1	24,6
6	5,0	22,8		
	5,8	22,8		
7			5,3	21,2
			5,3	22,6

10h.10. Therm. r 14,60; e 14,60.

Digitized by Google

TABLEAU XV (*Suite*).

Comparaisons des étalons n°. 19, n°. 23 et n°. 27 entre eux.

XIX. G. Tresca. 7 Octobre 1879.
r = n°. 27; e = n°. 23.
7h.30. Therm. r 17,09; e 17,09.

N.	Gauche.		Droite.	
	r	e	r	e
1			11,0	9,2
			11,0	9,0
2	16,8	12,8		
	16,8	13,2		
3			12,8	10,2
			12,8	10,2
4	20,0	16,0		
	21,0	16,0		
5			19,0	15,8
			19,0	15,9
6				
7				

7h.50. Therm. r 17,09; e 17,09.

XX. G. Tresca. 10 Octobre 1879.
r = n°. 19; e = n°. 23.
9h.20 soir Therm. r 16,90; e 16,985.

N.	Gauche.		Droite.	
	r	e	r	e
1	23,9	7,2		
	23,2	7,0		
2			23,9	7,2
			22,9	7,3
3	24,2	8,1		
	25,0	8,0		
4			24,0	8,0
			23,6	7,6
5	25,0	7 9		
	24,4	8,0		
6			23,5	8,1
			24,0	7,9
7	25,3	9,2		
	25,1	9,0		

9h.42. Therm. r 16,90; e 16,895.

XXI. G. Tresca. 11 Octobre 1879.
r = n°. 19; e = n°. 27.
10h 5 soir. Therm. r 16,96; e 16,95

N.	Gauche.		Droite.	
	r	e	r	e
1			24,7	7,2
			24,0	7,1
2	26,0	11,9		
	25,2	11,1		
3			26,0	9,9
			26,9	9,2
4	29,9	15,0		
	29,8	15 2		
5			30,8	13,1
			31,0	13,1
6	34,9	20,1		
	34,3	20,4		
7			34,1	15,8
			35,0	15,8
8	34,9	19,9		
	35,1	19,8		
9			31,9	13,1
			31,9	13,8

10h.35. Therm. r 16,95; e 16,94.

XXII. G Tresca. 17 Octobre 1872.
r = n°. 23; e = n°. 27.
8h.30. Therm. r 15,37; e 15,87.

N.	Gauche.		Droite.	
	r	e	r	e
1	31,1	29,2		
	30,1	29,3		
2			30,0	22,9
			29,8	22,9
3	32,6	30,9		
	32,7	30,9		
4			31,8	23,8
			31,1	24,4
5	28,0	26,2		
	28,1	25,8		
6			30,3	23,8
			30,0	23,2
7	24,8	22,9		
	24,9	23,2		

8h.55. Therm. r 15,37; e 15,37.

XXIII. G. Tresca. 17 Octobre 1879.
r = n°. 23; e = n°. 19.
10h.15 soir. Therm. r 15,0; e 15,0.

N.	Gauche.		Droite.	
	r	e	r	e
1	15,7	27,1		
	16,1	28,0		
2			16,8	26,1
			16,7	26,3
3	15 2	29,0		
	15,2	28,0		
4			13,9	23,4
			14,2	22,9
5	14,2	28,2		
	13,8	27,0		
6			9,9	20,6
			9,9	19,8
7	12,8	25,9		
	12,9	25,8		

10h.35. Therm. r 15,3; e 15,3.

XXIV. G. Tresca. 18 Octobre 1879.
r = n°. 27; e = n°. 19.
10h.27 soir. Therm. r 14,63; e 14,62.

N.	Gauche.		Droite.	
	r	e	r	e
1			41,8	7,0
			40,8	7,2
2	43,2	10,9		
	43,7	10,8		
3			38,9	5,9
			38,8	4,0
4	38,9	7,8		
	39,1	7,1		
5			38,1	3,5
			37,9	3,8
6	36,2	4,1		
	35,7	4,1		
7			40,8	6,9
			41,0	6,9

10h.42. Therm. r 14,68; e 14,66.

67. Dans le tableau suivant on a réuni toutes les données des comparaisons effectuées, d'après le programme de la Commission, sur l'instrument à mouvement transversal dans 24 séries à température ambiante et 8 séries à basse température.

Digitized by Google

TABLEAU XVI.

Comparaisons des étalons n°. 19, n°. 23 et n°. 27 avec le Mètre des Archives.

I. Bosscha. 7 Octobre 1879.
r = n°. 19; e = Archives.
8h.55 soir. Therm. r 17,86; e 17,86.
Mise au point.
Microscopes: n°. 19 1,0; Archives 9,3.
Tables : " 86,2; " 25,8.

N.	n°. 19.			Archives.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Gauche.	Droite.	Gauche.
1				69,8	51,0	67,2
				68,5	50,2	69,1
2	125,8	113,5	126,5			
	125,0	112,5	126,5			
3				69,5	52,9	69,1
				70.0	52,1	69,1
4	125,0	116,8	126,1			
	126,5	115,1	127,5			
5				68,6	53,5	66,9
				67,0	51,2	69,2
6	123,0	114,2	125,8			
	124,0	114,0	125,2			
7				68,9	52,0	68,0
				68,0	52,1	67,7

9h.24. Therm. r 17,90; e 17,90.

II. Bosscha. 8 Octobre 1879.
r = n°. 19; e = Archives.
8h.29 soir. Therm. r 17,92; e 17,92.
Mise au point.
Microscopes: n°. 19 1,7; Archives 8,8.
Tables : " 87,0; " 24,2.

N.	n°. 19.			Archives.		
	Droite.	Gauche.	Droite.	Droite.	Gauche.	Droite.
1	150,5	49,6	148,7			
	149.1	49,6	149,0			
2				95,0	1,7	96,2
				95,0	1,7	95,0
3	148,1	48,7	147,0			
	146,2	48,0	146,8			
4				95,1	2,0	94,2
				95,0	0,0	94,2
5	148,2	47,7	146,8			
	147,2	48,0	146,0			
6				96,2	2,0	94,2
				94,3	1,9	95,1
7	145,8	47,7	148,4			
	146,0	47,2	147,0			

8h.57. Therm. r 17,92; e 17,92.

III. Bosscha. 10 Octobre 1879.
r = n°. 27; e = Archives.
10h.50. Therm. r 17,695; e 17,72.
Mise au point.
Microscopes: n°. 27 6,4; Archives 8,8.
Tables : " 86,3; " 18,8.

N.	n°. 27.			Archives.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Gauche.	Droite.	Gauche.
1	74,8	91,0	75,2			
	74,1	90,8	74,0			
2				65,5	75,5	63,8
				64,0	76,8	63,8
3	72,8	88,1	73,0			
	72,8	88,0	72,0			
4				64,0	74,0	61,5
				63,2	73,5	62,5
5	72,0	89,0	71,8			
	72,0	88,0	72,0			
6				65,0	75,0	64,7
				63,8	75,4	64,7
7	71,8	87,5	72,0			
	71,3	88,0	71,5			

11h.24. Therm. r 17,745; e 17,785.

IV. Bosscha. 10 Octobre 1879.
r = n°. 27; e = Archives.
9h.18 soir. Therm. r 18,05; e 18,05.
Mise au point
Microscopes: n°. 27 6,7; Archives 9,55.
Tables : " 35,8; " 18,00.

N.	n°. 27.			Archives.		
	Droite	Gauche.	Droite.	Droite.	Gauche.	Droite.
1	99,0	56,0	99,0			
	99,8	55,0	98,9			
2				76,8	40,2	78,0
				77,5	40,7	77,3
3	98,9	55,6	99,1			
	98,8	54,6	98,2			
4				77,9	40,0	78,2
				77,8	40,0	77,0
5	98,1	54,8	98,7			
	99,0	55,2	98,1			
6				78,8	41,2	77.8
				78,0	40,0	78,0
7	100,8	56,3	100,0			
	99,8	55,9	100,0			

9h.55. Therm. r 18,11; e 18,10.

Digitized by Google

TABLEAU XVI (*Suite*).

Comparaisons des étalons n°. 19, n°. 23 et n°. 27 avec le Mètre des Archives.

V. Bosscha. 12 Octobre 1879.
r = n°. 23; e = Archives.
10h.85. Therm. r 17,75; e 17,78.
Mise au point
Microscopes: n°. 23 4,2; Archives 9,4.
Tables: " 22,5; " 22,5.

N.	n°. 23.			Archives.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Gauche	Droite.	Gauche.
1	66,5	6,9	66,8			
	66,8	6,5	66,3			
2				77,2	16,5	78,9
				77,5	17,9	78.0
3	67,2	5,4	66,9			
	66,8	6,3	66,5			
4				79,5	16,5	79,5
				79,0	15,9	79,6
5	66,7	6,4	67,3			
	66,4	6,5	67,2			
6				80,5	17,3	79,8
				79,8	18,2	79,0
7	66,5	6,5	66,9			
	66,6	6,7	66,5			

11h.14. Therm. r 17,79; e 17,805.

VI. Bosscha. 12 Octobre 1879.
r = n°. 23; e = Archives.
9h.55 soir. Therm. r 18,08; e 18,08.
Mise au point.
Microscopes: n°. 23 4,0; Archives 8 9.
Tables: " 22,5; " 22,5.

N.	n° 23.			Archives.		
	Droite.	Gauche.	Droite.	Droite.	Gauche.	Droite.
1				7.7	24,7	7,2
				8,1	23,2	7,0
2	6,5	19,9	6,6			
	7,0	19,7	7,0			
3				10,0	25,2	10,0
				11,2	25,5	10,0
4	6,0	20,0	6,8			
	5,8	20,0	6,3			
5				10,4	27,4	10,0
				9,5	25,4	10,1
6	6,9	19,9	7,0			
	6,5	20,0	7,1			
7				10,0	27,0	10,0
				10,8	27,4	9,7

10h.26. Therm. r 18,13; e 18,13.

VII. Bosscha. 16 Octobre 1879.
r = n°. 19; e = Archives.
11h.5. Therm. r 1,70; e 1,68.
Mise au point.
Microscopes: n°. 19 5,6; Archives 4,7.
Tables: " 35,5; " 26,7.

N.	n°. 19.			Archives.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Gauche.	Droite.	Gauche.
1	40,3	88,0	40,0			
	40,4	87,8	39,7			
2				68,0	98,5	66,8
				68,8	97,8	66,5
3	38,5	88,0	36,0			
	39,1	87,9	39,0			
4				68,2	99,0	68,0
				68,0	100,5	67,2
5	39,9	90,0	39,2			
	39,2	89,0	38,1			
6				67,4	99,7	69,5
				68,8	100,0	69,3
7	37,5	89,0	39,5			
	39,2	89,0	39,9			

11h.40. Therm. r 1,78; e 1,765.

VIII. Bosscha. 18 Octobre 1879.
r = n°. 23; e = Archives.
11h.27 soir. Therm. r — 1,17; e — 1,18.
Mise au point.
Microscopes: n°. 23 7,7; Archives 5,8.
Tables: " 22,5; " 24,5.

N.	n°. 23.			Archives.		
	Gauche	Droite.	Gauche.	Gauche.	Droite.	Gauche
1				108,0	48,0	109,2
				108,0	48,8	108,0
2	100,3	57,7	100,8			
	100,0	57,9	101,0			
3				109,1	50,0	107,5
				108,0	47,7	107,2
4	100,0	57,5	99,5			
	99,0	58,0	99,3			
5				108,0	47,8	107,0
				108,0	47,0	107,0
6	99,0	58,0	99,0			
	99,0	57,6	99,2			
7				108,3	48,5	108,0
				106,3	48,7	107,2

11h.44. Therm. r — 1,13; e — 1,18.

Digitized by Google

TABLEAU XVI (*Suite*).

Comparaisons des étalons n°. 19, n°. 23 et n°. 27 avec le Mètre des Archives.

IX. Oudemans. 7 Octobre 1879.
r = n°. 19; e = Archives.
9h.34. Therm. r —; e —.

Mise au point.

Microscopes: n°. 19	0,2	0,5	0,4			1,35	
	2,4	2,3	2,3				
Archives	8,75	8,9	9,6	8,7	8,6	10,05	
	11,5	10,8	11,3	11,5	10,9		
Tables: n°. 19	35,7	34,8	35,2	35,5	35,0	35,87	
	36,3	36,2	36,5	36,7	36,8		
Archives	24,8	24,2	24,4	24,5	24,8	25,32	
	26,1	26,2	26,0	26,0	26,2		

9h.48. Therm. r 17,695; e 17,72.

N.	n°. 19.			Archives.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Gauche.	Droite.	Gauche.
1				64,7	40,0	65,0
				65,0	39,6	65,5
2	137,0	124,4	136,7			
	137,5	124,0	137,0			
3				66,0	39,5	63,7
				64,0	39,1	63,8
4	136,8	124,0	137,2			
	136,5	124,2	137,5			
5				65,5	39,2	65,0
				63,8	38,2	64,5
6	135,5	122,8	136,0			
	136,7	124,0	136,0			
7				65,0	39,0	65,0
				65,0	40,0	65,0

10h.5. Therm. r 17,715; e 17,73.

X. Oudemans. 8 Octobre 1879.
r = n°. 19; e = Archives.
9h.53. Therm. r 17,98; e 17,98.

Mise au point.

Microscopes: n°. 19	0,7	0,9	0,4	0,3	0,4	1,53	
	2,6	2,8	2,5	1,8	2,9		
Archives	8,7	8,5	8,6	8,5	8,6	9,54	
	10,1	10,7	10,4	10,6	10,7		
Tables: n°. 19	36,0	35,2	35,4	35,4	35,9	36,20	
	36,5	37,2	37,0	36,6	36,8		
Archives	24,1	24,2	24,4	24,0	24,2	24,87	
	25,0	25,2	25,8	25,8	26,0		

10h.16 Therm. r 17,98; e 17,98.

N.	n°. 19.			Archives.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Gauche.	Droite.	Gauche.
1				74,0	44,0	74,0
				73,0	44,6	72,8
2	79,0	58,0	80,0			
	78,2	59,2	78,6			
3				72,8	44,0	73,5
				72,7	44,4	72,0
4	78,4	58,9	77,5			
	77,4	59,0	78,5			
5				72,7	44,8	73,0
				73,0	44,0	73,7
6	78,0	58,5	79,3			
	77,5	59,0	78,0			
7				73,0	44,5	73,0
				72,5	45,0	73,0

10h.49. Therm. r 17,985; e 18,00.

XI. Oudemans. 10 Octobre 1879.
r = n°. 27; e = Archives.
9h.58. Therm. r 17,67; e 17,70.

Mise au point.

Microscopes: n°. 27	6,6	6,7	6,5	6,6	6,5	6,36	
	6,4	6,2	6,1	6,0	6,0		
Archives	9,7	9,25	8,4	8,8	9,3	8,78	
	8,8	8,5		8,4	8,3		
Tables: n°. 27	36,9	36,8	36,5	36,25	36,4	36,26	
	35,3	35,8	36,0				
Archives	19,0	19,0	18,5				
	18,0	18,0					

10h.24. Therm. r 17,68; e 17,70.

N.	n°. 27.						Archives.		
	Gauche.		Droite.		Gauche.		Gauche.	Droite.	Gauche.
1							63,6	81,0	65,0
							63,4	80,8	64,8
2	75,3		95,7		75,5				
	75,0		95,5		75,0				
3							62,7	79,8	64,1
							63,0	79,0	63,0
4	73,7		95,2		74,0				
	74,2		95,3		74,0				
5							65,0	81,8	64,8
							63,8	81,2	64,5
6	74,0	71,5	94,7	93,0	74,0	72,0			
	73,7	70,7	95,3	92,7	73,0	71,7			
7							64,0	79,8	64,0
							64,2	79,5	64,0

10h.44. Therm. r 17,69; e 17,72.

XII. Oudemans. 10 Octobre 1879.
r = n°. 27; e = Archives.
10h.0 soir. Therm. r 18,125; e 18,125.

Mise au point.

Microscopes: n°. 27	6,8						
Archives	9,5	9,4	9,5	9,3	9,4	9,92	
	0,7	9,5	0,3	0,5	0,1		
Tables: n°. 27	35,8						
Archives	18,0	17,9	18,0	18,0	18,0	18,32	
	19,0	18,5		18,8	19,0		

—. Therm. —. —.

N.	n°. 27.			Archives.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Gauche.	Droite	Gauche.
1				38,0	65,2	39,0
				38,2	66,2	37,5
2	37,5	75,5	37,7			
	38,0	76,0	37,5			
3				37,3	65,0	38,0
				38,5	66,2	38,0
4	39,0	76,5	39,0			
	38,0	77,0	39,0			
5				37,2	65,0	37,4
				36,5	65,6	38,3
6	39,5	77,8	40,0			
	40,0	78,0	39,3			
7				38,3	67,5	38,5
				38,0	67,0	38,6

10h.42. Therm. r 18,20; e 18,19.

Digitized by Google

TABLEAU XVI (*Suite*).

Comparaisons des étalons n°. 19, n°. 23 et n°. 27 avec le Mètre des Archives.

XIII. Oudemans. 12 Octobre 1879.
r = n°. 23; e = Archives.
9h.27. Therm. r 17,725; e 17,75.

Mise au point.

Microscopes: n°. 23 4,15

Archives 8,8 9,0 8,8 8,8 9,5 / 9,5 9,7 0,4 9,6 0,9] 9,43

Tables: n°. 23 22,5

Archives 22,0 22,0 22,0 / 23,5 23,0 23,0] 22,6

9h.45. Therm. r 17,725; e 17,75.

N.	n°. 23.			Archives.		
	Gauche.	Droite	Gauche.	Gauche.	Droite.	Gauche.
1				73,7	6,4	74,0
				73,5	5,7	73,8
2	66,5	2,2	67,0			
	67,0	1,8	66,8			
3				74,5	7,0	74,5
				73,0	6,4	73,6
4	67,0	2,2	67,0			
	66,5	1,8	67,0			
5				74,5	7,3	74,1
				74,0	7,3	73,6
6	65,4	2,5	66,0			
	66,0	2,0	66,5			
7				75,0	9,5	74,0
				74,5	9,0	74,5

10h.22. Therm. r 17,725; e 17,76.

XIV. Oudemans. 12 Octobre 1879.
r = n°. 23; e = Archives.
10h.29 soir. Therm. r 18,18; e 18,14.

Mise au point.

Microscopes: n°. 23 4,0

Archives 9,2 8,6 8,5 8,2 8,3 / 7,5 7,7 7,6 7,4 7,5] 8,05

Tables: n°. 23 22,5

Archives 22,0 21,2 22,0 22,2 21,5 / 20,5 20,2 21,0 21,0 20,8] 21,24

10h.57. Therm. r —; e 18,185.

N.	n°. 23.			Archives.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Gauche.	Droite.	Gauche.
1				15,0	13,1	15,0
				15,1	12,5	15,0
2	2,0	99,0	1,5			
	1,5	99,0	1,5			
3				13,6	11,5	14,0
				15,0	11,0	13,2
4				20,8	10,9	19,4
				20,2	9,0	19,0
5	7,2	98,4	7,7			
	8,0	99,2	8,0			
6				20,8	13,1	22,0
				21,7	13,1	21,0
7	7,4	99,0	7,7			
	7,6	99,0	7,6			
8				21,6	11,0	21,5
				21,4	12,0	20,0

11h.18. Therm. r 18,25; e 18,21.

XV. Oudemans. 16 Octobre 1879.
r = n°. 19; e = Archives.
8h.14. Therm. r 1,33; e 1,33.

Mise au point.

Microscopes: n°. 19 5,6

Archives 5,2 4,8 4,8 4,8 / 5,8 5,3 5,7 5,8] 5,27

Tables: n°. 19 —

Archives 33,0 33,0 / 34,0 34,2] 33,55

8h.30. Therm. r —; e 1,36.

N.	n°. 19.			Archives.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Gauche.	Droite.	Gauche.
1				273,0	87,6	273,5
				272,4	86,4	273,4
2	249,5	82,6	252,0			
	249,5	82,8	251,7			
3				273,5	87,3	273,0
				274,6	86,9	273,0
4	250,0	84,8	251,0			
	250,0	84,3	251,0			
5				278,2	89,4	273,0
				278,5	88,1	278,3
6	251,0	84,8	250,8			
	251,0	85,8	251,0			
7				270,0	84,0	270,3
				271,0	84,6	270,0

8h 50. Therm. r 1,445; e 1,42.

XVI. Oudemans. 18 Octobre 1879.
r = n°. 23; e = Archives.
10h.48 soir. Therm. r — 1,27; e — 1,30.

Mise au point.

Microscopes: n°. 23 7,7

Archives 6,2 5,2 5,7 5,7 6,1 / 6,5 6,0] 5,89

Tables: n°. 23 22,5

Archives 25,5 25,8 25,2] 25,5

11h 8 Therm. r — 1,23; e — 1,27.

N.	n°. 23.			Archives.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Gauche.	Droite.	Gauche.
1				4,8	45,5	6,5
				7,1	45,0	6,0
2	100,2	54,2	101,0			
	100,2	55,0	100,5			
3				8,0	47,4	6,8
				8,8	47,7	7,2
4	99,5	55,0	100,0			
	99,8	55,3	100,0			
5				6,8	47,7	7,5
				7,5	47,6	7,4
6	100,7	56,5	101,2			
	101,2	56,5	101,0			
7				7,7	48,0	6,3
				8,0	47,5	6,6

11h.18. Therm. r — 1,20; e — 1,22.

Digitized by Google

TABLEAU XVI (*Suite*).

Comparaisons des étalons n°. 19, n°. 23 et n°. 27 avec le Mètre des Archives.

XVII. Stamkart. 7 Octobre 1879.
r = n°. 19; e = Archives.
9h.52 soir. Therm. r 17,98; e 17,97.
Mise au point.
Microscopes: n°. 19 6,6; Archives 8,2.
Tables: " 36,0; " 25,1.

N.	n°. 19.		Archives.	
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.
1			63,0	53,2
			64,0	53,0
			62,5	53,0
2	118,0	112,5		
	116,8	112,5		
	116,0	112,5		
3			60 0	51,2
			61,8	52,2
			62,0	53,0
4	120,0	116,2		
	119,3	116,0		
	119,0	116,1		
5			62,2	53,0
			60,9	51,8
			59,9	50,5

10h.15. Therm. r 18,02; e 18,01.

XVIII. Stamkart. 8 Octobre 1879.
r = n°. 19; e = Archives.
9h.0 soir. Therm. r 17,92; e 17,92.
Mise au point.
Microscopes: n°. 19 1,2; Archives 9,2.
Tables: " 36,5; " 25,0.

N.	n°. 19.			Archives.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Gauche.	Droite.	Gauche.
1				17,8	19,0	—
				18,0	19,0	—
2	30,0	30,0	28,0			
	29,8	31,0	29,1			
3				16,1	18,8	18,2
				15,5	17,5	18,2
4	28,8	30,1	28,0			
	28,8	30,1	29,3			
5				19,0	19,0	18,3
				17,4	19,0	16,0
6	30,0	30,0	28,9			
	28,2	31,0	29,1			
7				18,2	20,1	20,5
				21,0	20,1	19,0

9h.47. Therm. r 18,02; e 18,02.

XIX. Stamkart. 10 Octobre 1879.
r = n°. 27; e = Archives.
11h.55. Therm. r 17,79; e 17,81.
Mise au point.
Microscopes: n°. 27 6 8; Archives 10,0.
Tables: " 36,0; " 18,5.

N.	n°. 27.			Archives.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.
1				85,9	61,8	85,5
				85,0	59,9	85,8
2	73,9	108,9	73,2			
	74,1	109,2	72,0			
3				86,2	61,0	87,1
				86,2	61,0	87,1
4	76,0	110,1	79,9			
	75,1	111,2	75,2			
5				89,0	60,8	86,7
				87,2	60,1	85,5
6	72,8	110,1	73,5			
	73,0	110,1	73,9			
7				86,1	61,0	85,4
				85,1	60,7	86,0

12h.22. Therm. r 17,87; e 17 88.

XX. Stamkart. 10 Octobre 1879.
r = n°. 27; e = Archives.
8h.45 soir. Therm. r 17,99; e 17,98.
Mise au point
Microscopes: n°. 27 6,75; Archives 10,0.
Tables: " 35,0; " 19,55.

N.	n°. 27.			Archives.		
	Droite	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.	Gauche.
1				69,5	81,2	70,0
				69,4	80,0	68,9
2	22,5	94,0	23,0			
	23,5	95,0	23,1			
3				68,4	82,1	71,3
				69,3	81,3	69,5
4	23,1	94,9	24,1			
	24,0	95,2	24,1			
5				70,0	82,5	68,6
				68,9	81,0	70,1
6	22,8	94,9	23,2			
	23,6	94,2	24,4			
7				72,1	82,8	69,0
				70,3	83,2	69,9

9h.15. Therm. r 18,02; e 18,03.

Digitized by Google

TABLEAU XVI (*Suite*).

Comparaisons des étalons n°. 19, n°. 23 et n°. 27 avec le Mètre des Archives.

XXI. Stamkart. 12 Octobre 1879.
r = n°. 23; e = Archives.
11h.43. Therm. r 17,82; e 17,83.
Mise au point
Microscopes: n°. 23 3,8; Archives 9,4.
Tables: " 21,9; " 23,0.

N.	n°. 23.			Archives.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.
1				19,0	43,2	19,0
				20,0	42,6	19,8
2	37,3	16,0	37,9			
	36,9	17,5	38,7			
3				20,7	43,2	20,2
				19,3	44,0	19,1
4	37,6	17,0	38,3			
	37,9	18,9	37,0			
5				22,0	51,3	18,9
				21,0	51,0	19,0
6	43,0	17,0	43,0			
	42,5	16,8	42,4			
7				20,0	51,0	19,9
				19,9	51,0	20,2

12h.10. Therm. r 17,88; e 17,89.

XXII. Stamkart. 12 Octobre 1879.
r = n°. 23; e = Archives.
9h.26 soir. Therm. r 17,98; e 17,99.
Mise au point.
Microscopes: n°. 23 4,0; Archives 8,5.
Tables: " 21,7; " 22,1.

N.	n°. 23.			Archives.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.
1				91,9	114,9	91,9
				91,0	114,9	91,0
2	119,0	102,0	120,0			
	119,4	101,2	109,1			
3				92,0	115,0	91,3
				92,6	114,9	91,3
4	120,7	103,2	120,0			
	119,5	104,1	121,0			
5				93,1	115,2	90,1
				90,9	113,0	91,0
6	119,0	102,2	119,3			
	119,2	102,9	118,9			
7				91,6	113,2	91,7
				91,0	114,2	91,0

9h.50. Therm. r 18,06; e 18,06.

XXIII. Stamkart. 16 Octobre 1879.
r = n°. 19; e = Archives.
2h.24. Therm. r 2,12; e 2,10.
Mise au point.
Microscopes: n°. 19 6,3; Archives 4,0.
Tables: " 35,8; " 24,2.

N.	n°. 19.			Archives.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.
1				69,1	24,4	69,9
				68,0	21,9	68,9
2	25,9	86,0	23,1			
	23,0	86,0	25,0			
3				70,1	23,4	69,1
				69,0	21,9	69,2
4	24,9	84,0	21,0			
	22,0	86,0	24,0			
5				68,0	22,0	68,0
				66,1	22,0	67,0
6	25,4	86,2	24,9			
	22,8	90,0	24,4			
7				70,2	22,5	68,9
				69,9	21,0	67,9

2h.50. Therm. r 2,22; e 2,19.

XXIV. Stamkart. 19 Octobre 1879.
r = n°. 23; e = Archives.
11h.7. Therm. r — 0,23; e — 0,25.
Mise au point.
Microscopes: n°. 23 7,7; Archives 4,9.
Tables: " 22,7; " 24,6.

N.	n°. 23.			Archives.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.
1				60,0	87,0	58,2
				58,5	87,8	59,8
2	82,5	75,6	82,1			
	81,8	77,0	83,0			
3				61,9	86,3	59,5
				60,2	85,0	60,0
4	79,5	74,1	82,2			
	80,5	75,6	80,3			
5				61,2	86,9	59,9
				60,2	86,9	60,8
6	81,9	76,9	81,9			
	81,1	78,0	81,0			
7				62,1	85,6	62,1
				60,1	86,1	60,2

11h.30. Therm. r — 0,16; e — 0,18.

Digitized by Google

TABLEAU XVI (*Suite*).

Comparaisons des étalons n°. 19, n°. 23 et n°. 27 avec le Mètre des Archives.

XXV. G. Tresca. 5 Octobre 1879.
r = n°. 19; e = Archives.
9h.45. Therm. r 17,57; e 17,58.

Mise au point.
Non notée.

N.	Gauche.		Droite	
	n°. 19.	Archives.	n°. 19.	Archives
1	84,0	85,0	72,0	67,0
2	85,0	86,0	73,0	67,0
3	85,0	85,0	73,0	67,5
4	85,0	86,0	73,0	67,0
5	83,0	85,0	71,0	67,0

— — — — — — — — — —

XXVI. G. Tresca. 5 Octobre 1879.
r = n°. 19; e = Archives.
— — — — — — — — — —

Mise au point.
Non notée.

N.	Gauche.		Droite.	
	n°. 19.	Archives.	n°. 19.	Archives.
1	80,0	85,0	74,2	73,5
2	79,0	84,0	73,0	71,5
3	81,0	84,0	74,0	73,0
4	80,0	84,0	74,0	73,0
5	80,5	84,0	74,0	72,5

10h.30. Therm. r 17,58; e 17,60.

XXVII. G. Tresca. 10 Octobre 1879.
r = n°. 27; e = Archives.
4h.30 soir. Therm. r 18,00; e 17,98.

Mise au point.
Microscopes: n°. 27 6,5; Archives 9,0.
Tables: " 37,0; " 19,0.

N.	n°. 27.			Archives.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.
1				87,0 87,8	54,5 54,0	88,0 88,0
2	55,0 54,5	92,5 93,0	54,0 54,0			
3				87,5 88,0	53,0 53,0	87,5 88,0
4	54,0 54,2	93,5 92,5	55,0 56,0			
5				87,0 87,0	53,0 54,0	87,1 87,4
6	56,0 55,9	94,0 94,6	55,3 55,9			
7				88,0 88,5	55,0 55,0	88,3 88,5

5h.0. Therm. r 18,00; e 17,99.

XXVIII. G. Tresca. 11 Octobre 1879.
r = n°. 27; e = Archives.
9h.4. Therm. r 18,08; e 18,08.

Mise au point.
Microscopes: n°. 27 6,60; Archives 9,30.
Tables: " 36,50; " 18,80.

N.	n°. 27.			Archives.		
	Droite	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.	Gauche.
1				36,9 37,8	73,0 73,8	37,0 36,9
2	70,1 70,0	31,5 31,3	70,1 70,7			
3				36,0 36,1	73,5 73,8	37,9 37,0
4	70,9 71,0	30,0 32,0	70,4 70,1			
5				36,9 38,0	73,5 73,7	37,1 37,0
6	70,5 70,5	29,9 29,9	70,8 70,6			
7				38,0 37,9	73,8 74,8	38,7 37,4

9h.35. Therm. r 18,08; e 18,09.

Digitized by Google

TABLEAU XVI (*Suite*).

Comparaisons des étalons n°. 19, n°. 23 et n°. 27 avec le Mètre des Archives.

XXIX. G. Tresca. 11 Octobre 1879.
r = n°. 23; e = Archives.
9h 25 soir. Therm. r 17,91; e 17,92.
Mise au point.
Microscopes: n°. 23 3,6; Archives 9,2.
Tables: " 22,0; " 23,0.

N.	n°. 23.			Archives.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite	Gauche.	Droite.
1				15,0	29,8	14,8
				15,1	29,0	14,2
2	24,1	7,9	25,0			
	24,9	7,1	25,0			
3				14,5	29,0	13,8
				14,0	30,0	14,0
4	24,0	6,9	24,0			
	24,0	7,1	23,8			
5				15,1	29,0	15,0
				14,4	29,1	14,8
6	24,0	7,1	24,0			
	23,8	7,1	24,0			
7				14,7	29,0	14,0
				14,2	29,3	14,4

9h.55. Therm. r 17,92; e 17,93.

XXX. G. Tresca. 12 Octobre 1879.
r = n°. 23; e = Archives.
5h.40 soir. Therm. r 17,97; e 17,97.
Mise au point.
Microscopes: n°. 23 3,3; Archives 9,3.
Tables: " 22,0; " 24,0.

N.	n°. 23.			Archives.		
	Droite.	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.	Gauche.
1				50,5	30,6	52,5
				51,2	30,0	51,1
2	13,0	31,5	12,2			
	12,0	32,0	12,0			
3				52,0	30,0	50,5
				51,0	30,4	51,4
4	12,2	32,1	12,5			
	12,0	31,2	12,0			
5				51,5	29,1	50,0
				50,9	30,0	50,9
6	14,0	32,0	14,0			
	13,0	31,9	13,0			
7				50,0	30,0	51,0
				50,0	30,0	50,2

6h.20. Therm. r 17,97; e 17,97.

XXXI. G. Tresca. 16 Octobre 1879.
r = n°. 19; e = Archives.
5h.10 soir. Therm. r 2,51; e 2,50.
Mise au point.
Microscopes: n°. 19 5,0; Archives 5,0.
Tables: " 35,8; " 28,5.

N.	n°. 19.			Archives.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.
1				113,5	95,8	113,3
				114,1	95,4	113,9
2	56,1	95,0	55,8			
	56,1	94,8	56,0			
3				114,8	95,2	115,0
				114,8	95,0	115,0
4	55,5	94,0	56,0			
	55,6	94,0	55,8			
5				114,0	95,9	114,0
				114,5	95,4	114,0
6	54,8	94,0	55,0			
	54,3	94,0	55,0			
7				114,0	95,5	114,1
				113,9	95,0	114,0

5h.40. Therm. r 2,58; e 2,57.

XXXII. G. Tresca. 19 Octobre 1879.
r = n°. 23; e = Archives.
8h.45. Therm. r — 0,50; e — 0,50.
Mise au point.
Microscopes: n°. 23 7,7; Archives 5,9.
Tables: " 22,7; " 25,0.

N.	n°. 23.			Archives.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.
1				66,0	85,8	64,4
				65,5	84,8	65,0
2	81,2	78,0	80,5			
	81,2	77,4	80,8			
3				63,5	84,0	64,5
				63,5	83,9	64,0
4	80,2	77,2	80,7			
	80,2	78,0	80,4			
5				65,0	84,3	64,8
				65,0	84,0	64,3
6	80,2	79,1	80,7			
	81,0	78,9	80,7			
7				65,0	83,8	65,9
				64,3	83,0	65,8

9h.15. Therm. r — 0,44; e — 0,44.

Digitized by Google

68. Aux données numériques de ces Tableaux nous avons à ajouter les indications suivantes extraites des notes des observateurs.

Comparateur longitudinal. Tableau XV.

Série X. En voulant commencer les mesures M. Oudemans remarqua que l'un des mètres n'était pas assez bien ajusté dans le sens transversal. Pour corriger la position du mètre M. G. Tresca dut entrer dans la chambre de cuivre. Immédiatement après, M. Oudemans procéda aux comparaisons.

Comparateur transversal. Tableau XVI.

Série X. M. Oudemans a dû rejeter les dix premières mesures de cette série. Après la première mesure exécutée sur le Mètre des Archives il jugea nécessaire de corriger dans le sens longitudinal la position du mètre n°. 19. Il obtint alors les lectures suivantes:

N.	n°. 19.			Archives.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Gauche.	Droite.	Gauche.
1	59,8	55,0	57,8			
	59,2	55,1	58,5			
2				54,5	45,0	65,0
				54,5	45,0	66,0
3	70,5	58,6	71,5			
	71,2	58,4	71,4			
4				63,7	46,0	64,0
				66,0	45,0	65,2
5	81,0	60,6	81,0			
	80,0	60,0	81,0			

Elles indiquent un mouvement continu du mètre n°. 19 et deux mouvements brusques plus considérables du microscope gauche survenus, le premier, dans l'intervalle des deux lectures de gauche de la mesure 2, le second, dans l'intervalle des mesures 4 et 5. Ce n'est qu'à partir de la dernière mesure que les lectures sont devenues constantes.

Série XI. Vers la fin de la série M. Oudemans a ajusté de nouveau dans le sens transversal la position du mètre n°. 27.

Série XIV. En réglant la mise au point M. Oudemans constata que la lecture du cadran, correspondant à un degré de netteté déterminé, différait considérablement selon que l'on tournait la vis du microscope à gauche ou à droite, ce qui indique que le temps perdu de la vis avait une valeur très élevée.

Un changement brusque dans les lectures du microscope gauche a troublé la continuité de cette série qu'on a dû partager en deux sections se composant, la première, des mesures 1, 2, 3, la seconde, des mesures 4, 5, 6 et 7.

Digitized by Google

Dans cette même série la lecture du thermomètre de l'étalon n°. 23 a été omise au commencement des mesures.

Série XV. Dans l'intervalle de la cinquième à la sixième mesure M. OUDEMANS a déplacé dans le sens transversal l'un des bouts du Mètre des Archives. La lecture du thermomètre de l'étalon n°. 19 a été omise au commencement des comparaisons.

Série XVII. Cette série a été exécutée par M. STAMKART d'une manière différente du programme adopté. Les pointés aux microscopes ont été faites trois fois de suite au lieu de deux fois. Par contre, l'observateur, après le pointé aux deux microscopes, n'est plus revenu au microscope qui avait servi le premier. La série se compose de cinq mesures au lieu de sept.

Série XVIII. Dans cette série, exécutée d'après la méthode convenue, le deuxième pointé au microscope gauche manque pour la première mesure.

Série XX. Par rapport à ces mesures les notes de M. STAMKART relatent textuellement le fait suivant: „Le 10 Octobre soir une comparaison a été faite par „moi du n°. 27 avec le Mètre des Archives et immédiatement après par M. BOSSCHA. „Pendant que j'étais encore occupé à calculer mes chiffres notés, ou un peu après, „M. BOSSCHA avait terminé sa comparaison et en entrant il déclara que je devais „certainement avoir trouvé une valeur trop élevée. J'avais laissé le microscope „et son oculaire dans la position que j'avais employée. M. BOSSCHA, voulant com„mencer le réglage et regardant par le microscope, voyait les pointes bien défi„nies, mais devait abaisser le tube de l'oculaire pour voir distinctement les fils „(ainsi qu'il est naturel à cause de la différence de nos yeux) et ne voyait plus „alors les pointes avec des bords nets. En effet nos résultats ont été

S. $27 - A = 5{,}17$ microns,
B. $27 - A = 1{,}54$ microns."

Série XXI. Un déplacement brusque, survenu au microscope gauche, a obligé de partager la série en deux parties.

Séries XXV et XXVI. Les deux premières séries de M. G. TRESCA, effectuées avant celles des Commissaires néerlandais, se composent simplement de cinq pointés consécutifs aux deux microscopes sur chacun des mètres. Les dix lectures se rapportant au même mètre constituent ainsi une seule mesure et la série se compose de deux mesures. La série XXVI a été prise immédiatement à la suite de la série XXV après toutefois que la mise au point eut été renouvelée.

69. Les notes des observateurs contiennent encore les données supplémentaires suivantes.

Après avoir terminé la série XIII au comparateur transversal, M. OUDEMANS

Digitized by Google

a pris la mesure de la distance entre les pointes et les images réfléchies sur les bouts du Mètre des Archives ainsi que celle de la distance des fils du micromètre. Il obtint les résultats suivants.

Côté gauche.		Côté droit.	
Distance		Distance	
des pointes.	des fils.	des pointes	des fils.
$27^d,5$		$28^d,0$	
27, 5		30, 0	
29, 0	$15^d,0$	29, 0	$13^d,5$
27, 5	14, 4	29, 0	15, 7
28, 5		27, 0	15, 5
28 ,0	14, 7	28, 76	14, 9
$8\mu,85$	$4\mu,6$	$8,\mu8$	$4\mu,6$

Ainsi la distance des fils était à peu près la moitié de celle des deux images dans le champ du microscope. Il résulte de ces chiffres qu'on était parvenu à régler avec une très grande précision la distance des pointes aux faces terminales du Mètre des Archives. En effet, cette distance restait en dessous de quatre microns et demi et, de plus, elle était rigoureusement la même aux deux bouts. M. Oudemans a répété la mesure de la distance des pointes après que l'air de la chambre de cuivre eut été refroidi. Après avoir terminé ses mesures au comparateur transversal il obtint, le 16 Octobre, les nombres suivants.

Distance des pointes.	
Côté gauche.	Côté droit.
$23^d,7$	$24^d,5$
23 ,3	23, 3
23 ,5	23, 9
$7\mu,43$	$7\mu,31$

Le refroidissement de l'appareil avait donc eu pour effet de diminuer la distance des pointes à leurs images de $1\mu,42$ à gauche et de $1\mu,49$ à droite. Les pointes s'étaient donc rapprochées des bouts du Mètre de $0\mu,71$ et de $0\mu,74$.

70. Enfin, il nous reste à communiquer les deux séries de comparaisons supplémentaires de M. Oudemans et de M. Bosscha, mentionnées au n°. 64 de ce Rapport.

Digitized by Google

TABLEAU XVII.

Comparaisons des étalons n°. 19 et n°. 23 avec le Mètre des Archives.
Séries supplémentaires.

A. Oudemans. 15 Octobre 1879.
r = n°. 19; e = Archives.
11h.30 soir. Therm. r 0,54; e 0,50.

Mise au point.
Microscopes: n°. 19 6,5; Archives 4,8.
Tables: » 35,3; » 26,5.

N.	n°. 19.			Archives.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Gauche.	Droite.	Gauche.
1				95,4	35,6	95,5
				94,6	35,0	94,0
2	95,2	56,2	95,5			
	94,8	56,5	96,0			
3				97,0	38,0	96,7
				97,5	38,0	96,4
4	97,0	58,6	97,4			
	96,8	59,4	97,0			
5				99,5	39,3	98,5
				99,4	39,9	99,0
6	97,8	59,5	97,4			
	97,5	59,8	98,0			
7				95,7	37,4	96,5
				96,6	37,7	96,6

11h.49. Therm. r 0,58; e 0,50.

B. Bosscha. 18 Octobre 1879.
r = n°. 23; e = Archives.
9h.45 soir. Therm. r — 1,41; e — 1,47.

Mise au point.
Microscopes: n°. 23 7,75; Archives 5,8.
Tables. » 22,50; » 25,5.

N.	n°. 23.			Archives.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Gauche.	Droite.	Gauche.
1				53,5	69,2	53,6
				53,8	69,0	53,8
2	361,0	405,0	360,8			
	361,8	405,0	361,8			
3				57,0	70,8	57,6
				57,2	70,2	56,0
4	359,7	404,2	361,0			
	359,6	405,0	360,0			
5				58,6	70,3	57,0
				58,2	70,6	57,3
6	361,0	405,7	361,3			
	361,5	405,5	361,4			
7				57,2	72,0	56,3
				57,0	71,7	57,3

10h 22. Therm. r — 1,33; e — 1,36.

On voit que M. Oudemans, dans la série provisoire, a adopté pour la mise au point la méthode directe, constamment employée par les trois autres observateurs.

71. Avant de procéder au calcul des observations nous avons à examiner les conditions thermiques dans lesquelles elles ont été faites.

Les thermomètres enregistreurs de Redier ont été mis en marche dans les deux cabinets dès le commencement des observations. Les planches I et II reproduisent en grandeur naturelle les courbes tracées par ces instruments depuis le 9 jusqu'au 20 Octobre. L'abaissement continu de la température, qui a eu lieu depuis le commencement des expériences, a permis de tracer sur une même feuille, en deux courbes placées l'une au-dessous de l'autre, la marche de l'instrument dans douze jours consécutifs.

On a indiqué en bandes rayées l'époque et la durée de chaque série de comparaisons faites par les observateurs B (Bosscha), O (Oudemans), S (Stamkart)

Digitized by Google

et T (Tresca). Sur la courbe thermographique du comparateur transversal on a représenté de même les temps de marche de la machine frigorifique.

Dans la courbe du comparateur longitudinal on reconnaît facilement, aux brusques élévations de température, les moments où M. G. Tresca entra dans la chambre de cuivre pour changer les mètres et pour ajuster en position le nouvel étalon qu'on devait comparer. Ces manipulations ont eu lieu 11 Octobre, 11 heures du matin, 15 Octobre, 10 heures et demie du matin, 17 Octobre, 9 heures du matin et 18 Octobre, un peu avant 9 heures du matin. La courbe montre qu'après cette opération il fallait plus de trois, quelquefois six heures pour faire revenir la température à son degré normal. L'effet de la présence des observateurs en dehors de la chambre de cuivre se traduit par une ondulation de la courbe, qui cependant ne commence à se montrer qu'après qu'une série d'observations a été accomplie et seulement lorsque cette série a été immédiatement suivie d'une autre. Les séries isolées comme celles marquées T du 10 Octobre et du 11 Octobre ne produisent dans le tracé régulier de la courbe qu'une perturbation à peine sensible. Les ondulations causées par une suite de séries affectent généralement la même forme. Il faut en excepter seulement la série du 16 Octobre. En effet, la partie de la courbe se rapportant à ces observations montre distinctement le trouble survenu dans la température par l'effet du réglage nouveau dont M. Oudemans a dû faire précéder cette série et qui rendait nécessaire d'entrer dans la chambre de cuivre.

Les pentes maximum des ondulations produites par la présence des observateurs en dehors de la chambre de cuivre correspondent à une variation de température comprise entre 0°,06 et 0°,07, une fois de 0°,11, dans l'espace de dix minutes.

Sur la courbe du comparateur transversal l'influence de la mise en place et du réglage d'un nouvel étalon, qui suivaient ordinairement une série de M. Tresca, ne se remarque presque pas. L'opération se faisait beaucoup plus facilement et exigeait moins longtemps le séjour de l'opérateur dans la chambre de cuivre parce que le réglage en position de l'étalon nouvellement mis en place se faisait du dehors de cette chambre. L'échauffement dû à la présence des observateurs paraît au contraire avoir pénétré plus facilement dans l'intérieur de la chambre de cuivre. Les ondulations du 10, 11 et 12 Octobre, correspondant aux observations faites à température ambiante, offrent des pentes plus fortes que dans le comparateur longitudinal et indiquent une élévation de température de 0°,10 à 0°,14 dans les dix minutes.

Aux basses températures les deux séries supplémentaires ont été désignées par O_s et B_s. La précaution de séparer les séries par des intervalles de temps de près de trois heures, pour ne pas trop troubler l'équilibre de température, paraî-

Digitized by Google

trait donc avoir répondu au but, puisque les ondulations dans cette partie de la courbe sont à peine sensibles. Mais on remarque que même les parties de la courbe qui correspondent aux trois séries consécutives, prises dans la nuit du 18 Octobre, n'accusent qu'une élévation de température lente et tout-à-fait régulière. La grande quantité de la solution de chlorure de calcium contenue dans les réservoirs de zinc de la circulation frigorifique paraît avoir exercé, par sa capacité calorique, une action modératrice très sensible sur la marche de la température.

72. Pour faire connaître la marche des thermomètres à mercure placés sur les étalons nous avons inscrit dans les deux tableaux suivants les différences des lectures des thermomètres faites au commencement et à la fin des séries, ainsi que le temps employé pour exécuter chaque série.

TABLEAU XVIII.

Variations des thermomètres pendant les observations faites au comparateur longitudinal.

Série.			Heure.			Durée.	Variation de température.	
							pendant les mesures.	en dix minutes.
B.	I.	a_1	8 Octobre		10h.08—10h.24	16m	0°,000	0°,000
	II.	b_1	10 »		9h.58—10h.18	20	0 ,000	0 ,000
	III.	c_2	12 »		10h.15—10h.35	20	+ 0 ,030	+ 0 ,015
	IV.	d_2	16 »	soir	10h.00—10h.16	16	— 0 ,005	— 0 ,003
	V.	e_2	17 »	»	9h.05— 9h.23	18	+ 0 ,010	+ 0 ,006
	VI.	f_1	18 »	»	8h.36— 8h.54	18	0 ,000	0 ,000
O.	VII.	i	8 Octobre		4h.10— 4h.30	20m	+ 0°,002	+ 0°,001
	VIII.	b_3	10 »		11h.10—11h.30	20	+ 0 ,038	+ 0 ,019
	IX.	c_3	12 »		10h.45—11h.07	22	+ 0 ,045	+ 0 ,020
	X.	d_1	16 »	soir	9h.26— 9h.44	18	— 0 ,070	— 0 ,039
	XI.	e_3	17 »	»	9h.39— 9h.55	16	+ 0 ,035	+ 0 ,022
	XII.	f_2	18 »	»	9h.22— 9h.34	22	+ 0 ,025	+ 0 ,011
S.	XIII.	a_2	8 Octobre		10h.42—11h.05	23m	+ 0°,030	+ 0°,013
	XIV.	b_2	10 »		10h.20—10h.54	34	+ 0 ,045	+ 0 ,013
	XV	c_1	12 »		9h.32—10h.00	28	0 ,000	0 ,000
	XVI.	d_3	16 »	soir	10h.18—10h.50	32	+ 0 ,070	+ 0 ,022
	XVII.	e_1	17 »	»	8h.35— 9h.05	30	+ 0 ,010	+ 0 ,003
	XVIII.	f_3	18 »	»	9h.45—10h.10	25	+ 0 ,120	+ 0 ,048
T.	XIX	i'	7 Octobre		7h.30— 7h.50	20m	0°,000	0°,000
	XX.	i''	10 »	soir	9h.20— 9h.42	22	0 ,000	0 ,000
	XXI.	i'''	11 »	»	10h.05—10h.35	30	— 0 ,010	— 0 ,003
	XXII.	i^{IV}	17 »		8h.30— 8h.55	25	0 ,000	0 ,000
	XXIII.	e_4	17 »	soir	10h.15—10h.35	20	+ 0 ,300	+ 0 ,150
	XXIV.	f_4	18 »	»	10h.27—10h.42	15	+ 0 ,045	+ 0 ,030

Digitized by Google

TABLEAU XVIII.

Variations des thermomètres pendant les observations faites au comparateur transversal.

	Série.		Heure.	Durée.	Variation de température. pendant les mesures.	Variation de température. en dix minutes.
B.	I.	a_1	7 Octobre soir 8h.55— 9h.24	29m	+ 0°,040	+ 0°,014
	II.	b_1	8 » » 8h.29— 8h.57	28	0 ,000	0 ,000
	III.	c_2	10 » 10h.50—11h.24	34	0 ,058	0 ,017
	IV.	d_2	10 » soir 9h.18— 9h.55	37	0 ,058	0 ,016
	V.	e_2	12 » 10h.35—11h.14	39	0 ,033	0 ,008
	VI.	f_2	12 » soir 9h.55—10h.26	31	0 ,050	0 ,016
	VII.	i	16 » 11h.05—11h.40	35	0 ,083	0 ,024
	B.	g_1	18 » soir 9h.45—10h.22	37	0 ,095	0 ,026
	VIII.	g_3	18 » » 11h.27—11h.44	17	0 ,045	0 ,026
O.	IX.	a_2	7 Octobre 9h.34—10h.05	31m	— — [4])	— —.
	X.	b_3	8 » 9h.53—10h.49	56	+ 0°,013	+ 0°,004
	XI.	c_1	10 » 9h.58—10h.44	46	0 ,020	0 ,007
	XII.	d_3	10 » soir 10h.00—10h.42	42	0 ,068	0 ,016
	XIII.	e_1	12 » 9h.27—10h.22	55	0 ,005	0 ,001
	XIV.	f_3	12 » soir 10h.29—11h.18	49	0 ,070	0 ,012
	A.	i'	15 » soir 11h.30—11h.49	19 [1])	0 ,020	0 ,010
	XV.	i''	16 » 8h.14— 8h.50	36	0 ,103	0 ,030
	XVI.	g_2	18 » soir 10h.43—11h.18	35	0 ,075	0 ,020
S.	XVII.	a_3	7 Octobre soir 9h.52—10h.15	23m [2])	+ 0°,040	+ 0°,017
	XVIII.	b_2	8 » » 9h.00— 9h.47	47	0 ,100	0 ,021
	XIX.	c_3	10 » 11h.55—12h.22	27	0 ,075	0 ,028
	XX.	d_1	10 » soir 8h.45— 9h.15	30	0 ,040	0 ,013
	XXI.	e_3	12 » 11h.43—12h.10	27	0 ,060	0 ,022
	XXII.	f_1	12 » soir 9h.26— 9h.50	24	0 ,075	0 ,031
	XXIII.	i'''	16 » 2h.24— 2h.50	26	0 ,095	0 ,036
	XXIV.	i^{IV}	19 » 11h.07—11h.30	23	0 ,070	0 ,030
T.	XXV.	i^{V}	5 Octobre 9h.45—10h.30	45m [3])	+ 0°,015	+ 0°,003
	XXVI.		5 »			
	XXVII.	i^{VI}	10 » 4h.30— 5h.00	30	0 ,005	0 ,002
	XXVIII.	i^{VII}	11 » 9h.04— 9h.35	31	0 ,005	0 ,003
	XXIX.	i^{VIII}	11 » soir 9h.25— 9h.55	30	0 ,010	0 ,000
	XXX.	i^{IX}	12 » 5h.40— 6h.20	40	0 ,000	0 ,000
	XXXI.	i^{X}	16 » 5h.10— 5h.40	30	0 ,070	0 ,023
	XXXII.	i^{XI}	19 » 8h.45— 9h.15	30	0 ,060	0 ,020

[1]) Mise au point directe. [2]) Série abrégée. [3]) Série double abrégée. [4]) Température initiale non notée.

Digitized by Google

La première colonne des tableaux précédents indique le numéro de la série, dans la deuxième on a distingué par les lettres a_1 a_2 a_3 . . , b_1 b_2 b_3, etc. les séries appartenant à un même groupe de comparaisons consécutives, les indices exprimant l'ordre dans lequel les séries d'un même groupe ont été effectuées. Les séries isolées ont été indiquées par i, i', i'' etc. La troisième colonne contient la date ainsi que l'heure du commencement et de la fin de chaque série, la quatrième la durée, la cinquième l'élévation de température déduite des lectures moyennes des deux thermomètres. Dans la dernière colonne cette variation de température a été réduite à une durée de dix minutes.

73. Il résulte de ces tableaux que, dans les deux comparateurs, les thermomètres à mercure ont constamment présenté pendant les comparaisons une marche ascendante. Il n'y a que trois exceptions. La plus apparente est celle de la série X du comparateur longitudinal (Tableau XVII) dans laquelle les thermomètres ont baissé en moyenne de 0°,07 en dix minutes. C'est encore la série qui a été commencée par M. Oudemans immédiatement après que M. G. Tresca eut corrigé la position des mètres et, à cet effet, eut dû entrer dans la chambre de cuivre. La marche descendante des thermomètres correspond exactement au mouvement de même sens que nous avons remarqué dans la courbe du thermomètre enregistreur. La série IV de M. Bosscha, qui est la seconde exception, a été prise immédiatement après la série X de M. Oudemans. Elle n'accuse plus qu'un abaissement de température à peine sensible de 0,005 dans 16 minutes, dû évidemment à la même cause, qui se faisait encore sentir sur les mètres, lorsque, d'après la courbe de la Planche I, le thermomètre Redier avait déjà repris sa marche ascendante. Enfin la troisième exception est fournie par la série XXI effectuée au même comparateur par M. G. Tresca. Elle correspond à une période d'abaissement continu mais lent du thermomètre enregistreur. Ce mouvement descendant paraît avoir continué dans les thermomètres à mercure quoique, vers la fin de la série, le thermomètre Redier commençât à accuser, par une ondulation de sa courbe, l'effet de la présence de l'observateur.

Les thermomètres des étalons reproduisent ainsi avec quelque retard les variations de température de l'air dans la chambre de cuivre qui, lui-même, n'accuse qu'après un certain intervalle de temps l'effet de la présence des observateurs. Cela résulte également de l'examen des élévations différentes de température qui ont eu lieu selon que les observations avaient été précédées par une ou plusieurs autres séries. Si l'on cherche les moyennes des élévations de température en dix minutes dans les séries isolées ou premières d'une suite de séries, dans les deuxièmes, troisièmes et quatrièmes séries d'une suite, on obtient pour les ob-

Digitized by Google

servations faites à température ambiante, en exceptant les trois séries anormales citées plus haut, les résultats suivants:

Comparateur longitudinal.

Séries premières	deuxièmes	troisièmes	quatrièmes.
+ 0,0013	+ 0,028	+ 0,059	+ 0,172.

Comparateur transversal.

+ 0,0069	+ 0,015	+ 0,017.

Dans les observations à basse température l'élévation de température en dix minutes a été plus sensible pour les séries premières ou isolées. La moyenne des huit séries qui se trouvent dans ce cas est de 0,025 en dix minutes. Mais les séries XVI et VIII qui ont été prises l'une après l'autre et immédiatement après la série B donnent encore 0,020 et 0,026. L'effet régularisateur de la masse liquide des réservoirs se manifeste ici avec une évidence remarquable. Les trois séries exécutées après le second refroidissement renferment sept lectures des thermomètres faites à des moments différents dans un espace de deux heures. La marche de la température des mètres a été parfaitement constante pendant cette période, ainsi qu'il résulte du calcul suivant:

18 Octobre soir. Heure.	Température.		
	observée.	calculée.	*s*.
9h.45	— 1°,44	— 1°,446	+ 0,006
10 .22	— 1 ,345	— 1 ,346	+ 0,001
10 .43	— 1 ,285	— 1 ,293	+ 0,008
11 .08	— 1 ,25	— 1 ,231	— 0,019
11 .18	— 1 ,21	— 1 ,206	— 0,004
11 .27	— 1 ,175	— 1 ,180	+ 0,005
11 .44	— 1 ,13	— 1 ,137	+ 0,007
10h.55	— 1°,262		

La valeur la plus probable d'une variation proportionnelle au temps est de 0°,0255 en dix minutes. Elle se vérifie encore au moyen des observations de MM. Tresca et Stamkart qui, le jour suivant fournirent les lectures sensiblement plus élevées:

19 Octobre	8h.45	— 0°,50
	9 .15	— 0 ,44
19 Octobre	11 .07	— 0 ,24
	11 .30	— 0 ,17
	10h.10	— 0°,337.

Digitized by Google

Ces deux séries accusent encore une variation, la première de 0°,03, la seconde de 0,°02 en dix minutes; la moyenne se trouve différer très peu de la moyenne du jour précédent.

Cet échauffement continu et tout-à-fait uniforme a été causé évidemment par la grande différence de température de la chambre et du cabinet avec l'espace environnant et a dû suivre à peu près la même marche pour tous les objets placés dans la chambre de cuivre.

Il résulte de ces données que la masse liquide introduite dans les réservoirs a presque entièrement amorti l'effet de la présence des observateurs sur la température des mètres et que, contrairement à ce qu'on avait présumé, aux basses températures la séparation des séries consécutives par un certain intervalle de temps n'avait presque aucune utilité.

On en peut conclure que l'installation, dans l'enceinte d'un comparateur, de grands réservoirs métalliques remplis de liquide peut être un moyen efficace pour améliorer les conditions thermiques des observations.

74. L'analyse des indications thermométriques recueillies pendant les observations nous semble conduire à une appréciation extrêmement favorable des moyens réalisés par la Section française pour perfectionner, au point de vue de la température, la comparaison d'étalons de longueur. Non seulement les appareils employés permettent de contrôler dans tous les détails les variations de température, qui cependant n'atteignent que quelques centièmes de degré dans l'espace de temps nécessaire pour une série complète de comparaisons, mais, de plus, l'installation adoptée pour limiter et régulariser ces variations offre le moyen d'en rendre complètement compte et d'en retracer l'origine. Aucune incertitude ne peut exister ainsi à l'égard des corrections que la variation de longueur résultant d'un effet de température pourrait rendre nécessaires. Il est évident, de plus, que ces corrections ne peuvent être que très faibles par elles-mêmes. En effet, ce ne sont que les différences des variations de température dans les deux règles qui donnent lieu à ces corrections.

75. Les lectures des températures, au commencement des séries premières ou isolées à température ambiante, permettent de vérifier la marche comparative des thermomètres des deux étalons comparés. En effet, après un temps de repos de quelques heures et lorsque le thermomètre Redier indique que, pendant une assez longue période, la température de l'air dans la chambre de cuivre a été à très peu près constante, les thermomètres, placés dans un espace à enveloppe métallique, à 4 ou 5 centimètres de distance l'un de l'autre, se trouvent dans des conditions satisfaisantes pour accuser des différences accidentelles de leurs

Digitized by Google

échelles [1]). Le tableau suivant renferme les lectures des thermomètres au commencement de toutes les séries premières ou isolées à température ambiante, à l'exception de la série X du comparateur longitudinal, qui a été précédée par un réglage de la position des mètres.

TABLEAU XIX.

Marche comparative des thermomètres, à température ambiante.

Série.		Comparateur longitudinal.			Série.		Comparateur transversal.		
		r Therm. n°. 4896	e Therm. n°. 4900.	$r - e$.			r Therm. n°. 4897.	e Therm. n°. 4895.	$r - e$.
I.	a_1	16°,98	16°,975	+0,005	I.	a_1	17°,86	17°,86	0,000
II.	b_1	16 ,80	18 ,80	0,000	II.	b_1	17 ,92	17 ,92	0,000
XV.	c_1	16 ,80	16 ,79	+0,010	XI.	c_1	17 ,68	17 ,70	—0,020
X.	d_1	—	—		XX.	d_1	17 ,99	17 ,98	+0,010
XVII.	e_1	14 ,89	14 ,92	—0,030	XIII.	e_1	17 ,725	17 ,75	—0,025
VI.	f_1	14 ,53	14 ,53	0,000	XXII.	f_1	17 ,98	17 ,99	—0,010
VII.	i	17 ,10	17 ,095	+0,005	XXV.	i'	17 ,57	17 ,58	—0,010
XIX.	i'	17 ,09	17 ,09	0,000	XXVII.	i''	18 ,00	17 ,98	+0,020
XX.	i''	16 ,90	16 ,895	+0,005	XXVIII.	i'''	18 ,08	18 ,08	0,000
XXI.	i'''	16 ,96	16 ,95	+0,010	XXIX.	i^{iv}	17 ,91	17 ,92	—0,010
XXII.	i^{iv}	15 ,37	15 ,37	+0,000	XXX.	i^{v}	17 ,97	17 ,97	0.000
			Moyenne	+0°,0005				Moyenne	—0°,0035

La différence moyenne des thermomètres, tant du comparateur longitudinal que du comparateur transversal, est à peu près nulle et n'offre pour la réduction des mesures aucune importance réelle.

On ne peut pas appliquer avec une aussi grande sécurité le même procédé pour comparer les thermomètres à basse température, parce que, après les périodes de refroidissement, la température de l'air de la chambre de cuivre n'a pas été suffisamment constante. En effet, nous avons reconnu (n°. 73) que les thermomètres à mercure des étalons, après le refroidissement de la chambre de cuivre, ont monté uniformément de 0°,025 dans les dix minutes, élévation trop rapide pour donner la certitude que, des deux

[1]) Pour comparer des thermomètres sur une partie de l'échelle embrassant les températures ambiantes qui se présentent dans une longue période de temps, l'un de nous se sert de la méthode suivante. Les deux thermomètres sont placés, l'un à côté de l'autre, dans un cylindre de cuivre à parois très épaisses. Les tiges passent par le couvercle du cylindre, de manière que les ménisques sont visibles. Pour égaliser les rayonnements auxquels peuvent être exposées les différentes parties de l'enveloppe métallique on fait tourner lentement celle-ci autour de son axe.

Digitized by Google

mètres, différents de masse et de forme, l'un n'a pas été en retard sur l'autre de quelques minutes. Comme dans les expériences à basse température le mouvement de la chaleur a été à peu près indépendant de la présence des observateurs, il n'y aurait pas de raison d'établir une différence entre les séries premières ou isolées d'un côté et les séries deuxième et troisième de l'autre. Si l'on voulait donc déduire des indications simultanées des thermomètres à basse température leur marche relative, de la même manière que nous l'avons fait pour la température ambiante, on pourrait utiliser toutes les séries et on trouverait ainsi :

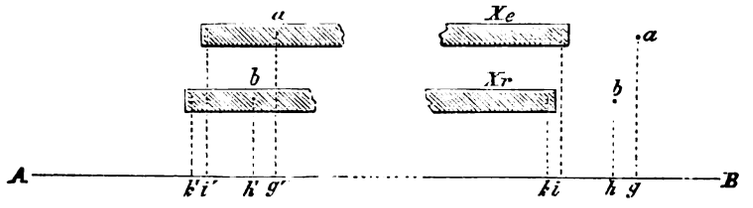
Therm. n°. 4897 — Therm. n°. 4895 = + 0°,022.

Cette différence est évidemment trop faible pour pouvoir être établie dans ces circonstances. Un retard de dix minutes du Mètre des Archives sur le mètre à traits suffirait à l'expliquer. Nous avons donc préféré la détermination directe qui a été faite par M. Tresca et d'après laquelle les deux thermomètres, placés dans la glace fondante, n'accusaient aucune différence de lecture appréciable. L'un et l'autre marquaient + 0°,28 C.

76. Le calcul de la différence de longueur de deux étalons comparés sur l'instrument à mouvement longitudinal se déduit des considérations suivantes.

Soient X_e (fig. 10) la face supérieure tracée du mètre éloigné, X_r celle du mètre rapproché de l'observateur, A B une droite parallèle au mouvement du chariot, située dans le plan de X_e et X_r. Désignons par a le point de ce plan dont l'image apparaît au milieu entre les fils du microscope éloigné lorsque le tambour du micromètre est à zéro, par b le point analogue du microscope rapproché. Soient h et g les projections orthogonales sur A B de a et de b et désignons par M la longueur hg que, pour abréger, nous nommerons la distance des microscopes. Projetons de même sur A B les points qui, sur les deux mètres, limitent leur longueur aux bouts droits, soient i et k ces projections et désignons $ki = D$ comme la distance des bouts droits des étalons.

Fig. 10.



Dans les microscopes du comparateur longitudinal les lectures croissantes du tambour indiquent que le pointé se transporte vers la gauche de l'observateur. Nous considérons en conséquence les distances $hg = M$ et $ki = D$ comme posi-

Digitized by Google

tives lorsque le point h se trouve à gauche de g et k à gauche de i. Si, dans ces conditions, les pointés sur les traits des étalons X_e et X_r donnent respectivement les lectures e_1 et r_1 et si les valeurs d'une division des micromètres en microns sont désignées par ε et ϱ on aura:

$$i\,g = e_1\,\varepsilon\,; \qquad\qquad k\,h = r_1\,\varrho.$$

Mais on a:

$$i\,g = i\,h + h\,g = i\,h + \mathrm{M}\,; \qquad k\,h = k\,i + i\,h = \mathrm{D} + i\,h\,,$$

d'où il suit:

$$\mathrm{D} - \mathrm{M} = r_1\,\varrho - e_1\,\varepsilon. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Si, après que les bouts gauches ont été amenés sous les microscopes, les pointés ont donné:

$$i'\,g' = e_2\,\varepsilon\,, \qquad\qquad k'\,h' = r_2\,\varrho\,,$$

on aura de même, en désignant par G la distance $i'\,k'$ des bouts gauches des étalons:

$$i'\,g' = i'\,h' + h'\,g' = i'\,h' + \mathrm{M}, \quad k'\,h' = k'\,i + i'\,h' = \mathrm{G} + i'\,h',$$

d'où:

$$\mathrm{G} - \mathrm{M} = r_2\,\varrho - e_2\,\varepsilon. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Mais, comme on a:

$$k'\,i = k'\,k + k\,i = k'\,i' + i'\,i$$

c'est-à-dire:

$$\mathrm{X}_r + \mathrm{D} = \mathrm{G} + \mathrm{X}_e$$

ou:

$$\mathrm{X}_r - \mathrm{X}_e = x = \mathrm{G} - \mathrm{D}\,,$$

l'équation (2) peut s'écrire sous la forme:

$$\mathrm{D} - \mathrm{M} + x = r_2\,\varrho - e_2\,\varepsilon.$$

En posant $\mathrm{D} - \mathrm{M} = \mathrm{N}$, les sept mesures d'une série fournissent ainsi les sept équations:

$$\left.\begin{array}{ll|ll}
\mathrm{N} = r_1\,\varrho - e_1\,\varepsilon = \mu_1 & & \text{ou bien} & \mathrm{N} + x = r_1\,\varrho - e_1\,\varepsilon = \mu_1 \\
\mathrm{N} + x = r_2\,\varrho - e_2\,\varepsilon = \mu_2 & & & \mathrm{N} = r_2\,\varrho - e_2\,\varepsilon = \mu_2 \\
\mathrm{N} = r_3\,\varrho - e_3\,\varepsilon = \mu_3 & & & \mathrm{N} + x = r_3\,\varrho - e_3\,\varepsilon = \mu_3 \\
\mathrm{N} + x = r_4\,\varrho - e_4\,\varepsilon = \mu_4 & & & \mathrm{N} = r_4\,\varrho - e_4\,\varepsilon = \mu_4 \\
\mathrm{N} = r_5\,\varrho - e_5\,\varepsilon = \mu_5 & & & \mathrm{N} + x = r_5\,\varrho - e_5\,\varepsilon = \mu_5 \\
\mathrm{N} + x = r_6\,\varrho - e_6\,\varepsilon = \mu_6 & & & \mathrm{N} = r_6\,\varrho - e_6\,\varepsilon = \mu_6 \\
\mathrm{N} = r_7\,\varrho - e_7\,\varepsilon = \mu_7 & & & \mathrm{N} + x = r_7\,\varrho - e_7\,\varepsilon = \mu_7,
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{I})$$

Digitized by Google

selon que l'observateur a commencé la série aux bouts droits ou aux bouts gauches des étalons.

Comme on doit attribuer des poids égaux aux mesures successives, les équations normales qu'on en déduit sont les suivantes:

$$7\,N + 3\,x = [\mu] = R_1 \quad \text{ou bien} \quad 7\,N + 4\,x = [\mu] = R_1$$
$$3\,N + 3\,x = \mu_2 + \mu_4 + \mu_6 = R_2 \qquad 4\,N + 4\,x = \mu_1 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 = R_2$$

d'où:

$$\left.\begin{aligned} N &= \tfrac{1}{4} R_1 - \tfrac{1}{4} R_2 \\ &= \tfrac{1}{4}(\mu_1 + \mu_3 + \mu_5 + \mu_7) \\ x &= -\tfrac{1}{4} R_1 + \tfrac{7}{12} R_2 \\ &= \tfrac{1}{2}(\mu_2 + \mu_4 + \mu_6) - \\ &\quad -\tfrac{1}{4}(\mu_1 + \mu_3 + \mu_5 + \mu_7) \end{aligned}\right| \qquad \left.\begin{aligned} N &= \tfrac{1}{3} R_1 - \tfrac{1}{3} R_2 \\ &= \tfrac{1}{3}(\mu_2 + \mu_4 + \mu_6) \\ x &= -\tfrac{1}{3} R_1 + \tfrac{7}{12} R_2 \\ &= \tfrac{1}{4}(\mu_1 + \mu_3 + \mu_5 + \mu_7) - \\ &\quad -\tfrac{1}{3}(\mu_2 + \mu_4 + \mu_6) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (II)$$

Dans les deux cas, lorsque m est l'erreur moyenne d'une mesure, l'erreur moyenne m_x de la valeur x déduite de l'ensemble des mesures sera:

$$m_x = m\sqrt{\tfrac{7}{12}} = 0{,}7638\,m.$$

m étant égal à $\sqrt{\dfrac{[\varepsilon^2]}{5}}$.

77. Dans le calcul précédent nous avons supposé que les valeurs de M, D, G, X_r et X_e étaient restées constantes pendant toute la durée d'une série de mesures. En général, cette condition ne sera pas remplie et il importe de considérer quelle influence les variations que ces quantités peuvent éprouver, exerceront sur le résultat final de la série et sur l'erreur moyenne d'une mesure.

Ces variations sont en partie accidentelles ou telles qu'on n'en peut connaître la loi; ou bien elles proviennent de causes suffisamment connues et agissant d'une manière assez régulière pour permettre d'en éliminer par le calcul l'effet sur la valeur cherchée de x et d'en débarrasser l'erreur moyenne d'une mesure. Quant à la première catégorie de ces variations, leur influence sur le résultat final d'une série se confond avec celle des erreurs accidentelles d'observation, on ne peut pas en délivrer l'inconnue, ni l'erreur moyenne, on peut seulement, en multipliant les mesures, atténuer leur effet réuni sur la valeur x et calculer sa limite probable.

78. *Variations de M.* Les microscopes supposés fixes peuvent varier de position de manière à déplacer les points a et b soit dans le sens transversal, soit dans le sens longitudinal, soit en hauteur de manière que la mise au point exacte ne correspond plus avec le plan dans lequel se trouvent les traits délimitatifs des étalons. Le premier de ces déplacements ne peut evidemment avoir aucune influence sur la projection $h\,g$ de $a\,b$; un déplacement en hauteur, nécessairement

Digitized by Google

très faible tant que la mise au point n'est pas manifestement troublée, peut seulement faire varier la valeur d'une division des micromètres exprimée en microns, mais comme la distance entre les traits et les objectifs des microscopes est d'environ 14000 microns et que la longueur mesurée x n'a jamais dépassé la valeur de 2 microns, un déplacement en hauteur tout à fait inadmissible de 70 microns n'aurait pu causer qu'une erreur d'un centième de micron dans la valeur de x. Nous n'avons donc qu'à considérer un déplacement des points a et b dans le sens longitudinal. Il peut provenir de trois causes, savoir 1°. d'un mouvement du support commun, 2°. du mouvement des corps des microscopes dans leurs douilles, 3°. d'un déplacement de l'axe optique des microscopes par rapport aux corps des microscopes.

Dans le comparateur longitudinal le premier de ces mouvements peut, en dehors des trépidations essentiellement accidentelles, être produit d'une manière systématique par l'effet du mouvement du chariot qui, avec les mètres et les supports, présente un poids considérable et après chaque mesure fait une course d'un mètre. Le déplacement sur une aussi grande distance du point d'application d'une force de quelques dizaines de kilogrammes peut produire, dans la fondation de l'instrument et dans le sol sous-jacent, une variation de tension, capable de déplacer le support. Mais une inclinaison du support affecte les deux points a et b de la même manière et ne peut faire varier la distance M. Ce n'est qu'un mouvement tournant autour d'un axe vertical qui pourrait se faire sentir sur la projection hg de ab sur AB. Pour autant qu'un tel mouvement se reproduit dans chaque déplacement, la variation de M causera dans l'équation des deux étalons une erreur constante qui n'affectera pas l'erreur moyenne d'une mesure et qui, changeant de signe avec la position des mètres, sera éliminée dans la moyenne des équations obtenues dans les deux positions.

Le mouvement des microscopes dans leurs douilles peut être causé accidentellement par l'effet du pointé de l'observateur. En effet, le maniement du tambour du micromètre peut facilement donner lieu à un effort de traction ou de poussée exercé sur le bout supérieur des microscopes. Mais ceux-ci se mouvant à frottement dur dans leurs douilles, il est très peu probable que par cet effort, toujours faible, ils puissent se déplacer sensiblement. Une cause de mouvement lent et régulier peut être située dans la mise au point. Le frottement dur peut, après l'ajustage en hauteur, donner lieu à un résidu d'élasticité, qui continue le mouvement de l'ajustage après que celui-ci a été terminé, et comme la mise au point entraîne presque toujours un déplacement du point fixé dans le champ du microscope, il peut en résulter une variation continue, mais lente et à peu près proportionnelle au temps, des lieux de a et b.

Digitized by Google

Plus considérable sera le déplacement de ces points résultant d'une déformation des corps des microscopes. Accidentelle pour autant qu'elle dépend des actions mécaniques exercées par l'observateur sur les têtes des microscopes, cette variation sera assez régulière pour autant qu'elle est produite par la dilatation thermique. Comme la température ne s'élève que très lentement par rapport à la durée d'une série de mesures, on tiendra compte de la plus grande partie de cette variation, en la considérant comme proportionnelle au temps et en calculant son effet d'après cette loi.

79. *Variations de* D, G, X_ℓ *et* X_r. Les distances longitudinales des bouts droits et gauches des étalons ne peuvent varier que par un défaut de fixité des organes qui relient les règles avec le banc du comparateur. La seule pièce mobile de cette partie du comparateur consiste dans le mécanisme qui sert à ajuster dans le sens longitudinal la position des étalons. On conçoit facilement que le mouvement du chariot dans le sens de l'axe des mètres, lorsqu'il est commencé ou terminé d'une manière plus ou moins brusque, peut causer, par suite d'un certain temps perdu de ce mécanisme, soit un retard soit un entraînement dans le mouvement des règles, qui n'est pas nécessairement le même pour les deux étalons. La différence accidentelle de ces mouvements, s'ils existent en effet, entrera dans les erreurs d'observation, la partie constante sera éliminée par l'inversion de la position des mètres.

Les étalons eux-mêmes ne peuvent présenter aucune variation accidentelle de leurs longueurs. Les variations lentes et continues résultant de leur faible dilatation thermique seront presqu'entièrement éliminées lorsqu'on admet une variation proportionnelle au temps et que, après avoir calculé la valeur de x correspondant à l'époque moyenne de la série, on prend pour les températures des étalons les moyennes des lectures, obtenues au commencement et à la fin de la série.

80. Il résulte de cette discussion qu'il y a lieu d'introduire dans les équations (I) un terme proportionnel au temps. Le coefficient constant de ce terme exprimera l'effet réuni des variations qui se produisent d'une manière régulière et continue pendant la durée d'une série. Comme les mesures se font à intervalles sensiblement égaux, on pourra prendre pour le facteur variable le numéro d'ordre de la mesure et pour simplifier le calcul on attribuera le numéro d'ordre zéro à la mesure qui occupe le rang moyen. Les équations (I) deviennent ainsi, lorsque l'on désigne par α la variation de N intervenue dans l'intervalle d'une mesure à l'autre:

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{l} N - 3\alpha = \mu_1 \\ N + x - 2\alpha = \mu_2 \\ N - \alpha = \mu_3 \\ N + x = \mu_4 \\ N + \alpha = \mu_5 \\ N + x + 2\alpha = \mu_6 \\ N + 3\alpha = \mu_7 \end{array}\right\} \quad \text{ou bien} \quad \left.\begin{array}{l} N + x - 3\alpha = \mu_1 \\ N - 2\alpha = \mu_2 \\ N + x - \alpha = \mu_3 \\ N = \mu_4 \\ N + x + \alpha = \mu_5 \\ N + 2\alpha = \mu_6 \\ N + x + 3\alpha = \mu_7 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

qui donnent lieu aux équations normales suivantes:

$$\begin{array}{lll} 7N + 3x = [\mu] & = R_1 & \text{ou bien} \\ 3N + 3x = \mu_2 + \mu_4 + \mu_6 & = R_2 & \\ 28\alpha = 3(\mu_7 - \mu_1) + & & \\ + 2(\mu_6 - \mu_2) + & & \\ + (\mu_5 - \mu_3) & = R_3 & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} 7N + 4x = [\mu] & = R_1 & \\ 4N + 4x = \mu_1 + \mu_3 + \mu_5 + \mu_7 & = R_2 & \\ 28\alpha = 3(\mu_7 - \mu_1) + & & \\ + 2(\mu_6 - \mu_2) + & & \\ + (\mu_5 - \mu_3) & = R_3 & \end{array}$$

On en déduit:

$$\left.\begin{array}{l} N = \frac{1}{4} R_1 - \frac{1}{4} R_2 \\ \quad = \frac{1}{4}(\mu_1 + \mu_3 + \mu_5 + \mu_7) \\ x = -\frac{1}{4} R_1 + \frac{7}{14} R_2 \\ \quad = \frac{1}{2}(\mu_2 + \mu_4 + \mu_6) - \\ \quad\quad - \frac{1}{4}(\mu_1 + \mu_3 + \mu_5 + \mu_7) \\ \alpha = \frac{1}{28} R_3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} N = \frac{1}{3} R_1 - \frac{1}{3} R_2 \\ \quad = \frac{1}{3}(\mu_2 + \mu_4 + \mu_6) \\ x = -\frac{1}{3} R_1 + \frac{7}{14} R_2 \\ \quad = \frac{1}{4}(\mu_1 + \mu_3 + \mu_5 + \mu_7) - \\ \quad\quad - \frac{1}{3}(\mu_2 + \mu_4 + \mu_6) \\ \alpha = \frac{1}{28} R_3 \end{array}\right\} \text{(IV)}$$

Les valeurs de x sont les mêmes que celles des équations (II). Les mesures avaient, en effet, été arrangées d'après la méthode employée généralement pour éliminer l'influence d'une action perturbatrice proportionnelle au temps et qui consiste à alterner les mesures des deux quantités qu'on veut comparer de manière à renfermer n mesures de l'une entre $n+1$ mesures de l'autre.

L'erreur moyenne de m_x sera comme précédemment:

$$m_x = m\sqrt{\tfrac{7}{14}} = 0{,}7638\, m$$

m étant égal à $\sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{4}}$.

81. C'est d'après ces dernières formules que les mesures faites au comparateur longitudinal ont été calculées. Le résultat de ce calcul se trouve inscrit dans le tableau XX. En tête de chaque série on a distingué par les équations $\mu_1 = D - M$, $\mu_1 = G - M$ les deux cas où l'on a commencé la série par une mesure soit sur les bouts droits, soit sur les bouts gauches des étalons et où par conséquent on a appliqué la première ou la seconde série des équations (III). La première colonne contient le numéro de la mesure, la seconde la moyenne r des lectures faites d'après le tableau XV sur le mètre rapproché, la troisième la moyenne analogue e du mètre éloigné. Dans la quatrième colonne on a inscrit les valeurs calculées de μ_1, μ_2 etc. Les données de cette colonne ont

Digitized by Google

servi à calculer les valeurs R_1, R_2, R_3, N, x et α des équations (IV). Avec les nombres obtenus pour N, x et α on a calculé les valeurs μ_1, μ_2 etc. qu'on eût dû trouver dans le cas où les formules (III) reproduisent exactement les observations. Ces valeurs ont été inscrites sous C dans la cinquième colonne. Enfin la sixième colonne donne les erreurs apparentes de chaque mesure qui ont servi à calculer l'erreur moyenne m d'une mesure et celle m_x de la valeur de x.

82. Pour calculer μ il faut connaître les valeurs des divisions des micromètres. Elles ont été déduites des mesures qui avaient été faites avec beaucoup de soins par M. TRESCA avant l'arrivée des commissaires néerlandais. A cet effet, on avait mesuré, deux fois avec chacun des microscopes du comparateur transversal, une fois avec les microscopes du comparateur longitudinal, les 30 dixièmes de millimètre contenus dans un micromètre de BRUNNER [1]). La comparaison des valeurs trouvées, en additionnant pour chaque dixième de millimètre les six nombres obtenus, fit reconnaître que la longueur moyenne des trente divisions était représentée par la seizième division. Cette division a été choisie comme étalon d'une longueur de 100 microns. Les séries de mesures, faites ensuite sur cette division avec chacun des microscopes, fournirent les résultats suivants.

	Comparateur longitudinal.		Comparateur transversal.		
Microscope:	rapproché	éloigné.	droit	gauche.	
100 microns =	331d,220	332d,850	324d,615	316d,180 . . .	(A)

Les valeurs obtenues dans les mesures qui avaient servi pour déterminer la longueur comparative des divisions avaient été:

330d,55	333d,50	324d,27	316d,32 . . .	(B)

On déduit de ces chiffres les valeurs suivantes d'une division:

	Microscope.	(A)	(B)
Comparateur longitudinal	rapproché	0μ,3019	0μ,3025
	éloigné	0μ,3004	0μ,2998
Comparateur transversal	droit	0μ,3081	0μ,3084
	gauche	0μ,3163	0μ,3161.

Les valeurs de la série (A), ayant été déduites d'un plus grand nombre d'observations, ont été adoptées dans la suite.

Les calculs de μ_1, R_1, R_2 et R_3 ainsi que des quantités qui en dépendent ont été faits avec deux décimales de plus que ne l'indique le Tableau, les valeurs de ε ont été obtenues en retranchant les nombres inscrits C de μ.

---

[1]) Le choix du millimètre de BRUNNER comme étalon avait été motivé par un examen comparatif des millimètres de divers constructeurs, duquel il était résulté que le millimètre de BRUNNER représentait la valeur moyenne. Voir: Exposé de la situation des travaux de la Section française au 1er Octobre 1874 p. 11.

Digitized by Google

TABLEAU XX.

Calcul des observations du comparateur longitudinal.

I. Bosscha. 8 Octobre 1879. x = n°. 27 — n°. 23. μ_1 = D — M.

N.	r	e	μ	C	ε
1	27,55	31,50	— 1,15	— 1,26	+ 0,11
2	26,75	29,80	0,88	0,72	— 0,16
3	26,15	29,90	1,09	1,08	0,01
4	39,85	41,25	0,36	0,54	+ 0,18
5	43,25	47,15	1,11	0,89	— 0,22
6	10,50	11,80	0,37	0,35	— 0,02
7	9,75	11,80	— 0,60	— 0,70	+ 0,10

$R_1 = -5{,}55$ $N = -0{,}99$ $m^2 = 0{,}0323$
$R_2 = -1{,}61$ $x = +0{,}45$ $m = 0{,}180$
$R_3 = +2{,}62$ $\alpha = +0{,}093$ $m_x = 0{,}137$

II. Bosscha. 10 Octobre 1879. x = n°. 19 — n°. 28. μ_1 = D — M.

N.	r	e	μ	C	ε
1	21,05	6,85	+ 4,30	+ 4,41	— 0,11
2	38,00	23,10	4,53	4,55	— 0,02
3	39,35	24,80	4,43	4,31	+ 0,12
4	45,30	30,50	4,51	4,46	+ 0,05
5	46,05	32,00	4,29	4,22	+ 0,07
6	44,20	30,00	4,33	4,37	— 0,04
7	47,20	34,00	+ 4,04	+ 4,12	— 0,08

$R_1 = +30{,}43$ $N = +4{,}26$ $m^2 = 0{,}0106$
$R_2 = +13{,}38$ $x = +0{,}20$ $m = 0{,}103$
$R_3 = -1{,}33$ $\alpha = -0{,}047$ $m_x = 0{,}079$

III. Bosscha. 12 Octobre 1879. x = n°. 19 — n°. 27. μ_1 = G — M.

N.	r	e	μ	C	ε
1	44,75	31,95	+ 3,91	+ 3,83	+ 0,08
2	45,70	28,75	5,16	5,26	— 0,10
3	51,05	38,30	3,91	3,90	+ 0,01
4	49,30	32,05	5,26	5,33	— 0,07
5	53,75	40,95	3,93	3,97	— 0,04
6	52,95	34,70	5,56	5,39	+ 0,17
7	54,65	41,75	+ 3,96	+ 4,03	— 0,07

$R_1 = +31{,}68$ $N = +5{,}33$ $m^2 = 0{,}0142$
$R_2 = +15{,}70$ $x = -1{,}40$ $m = 0{,}119$
$R_3 = -0{,}96$ $\alpha = +0{,}034$ $m_x = 0{,}091$

IV. Bosscha. 16 Octobre 1879 soir. x = n°. 23 — n°. 27. μ_1 = D — M.

N.	r	e	μ	C	e
1	16,40	11,75	+ 1,42	+ 1,41	+ 0,01
2	16,45	16,95	— 0,13	0,12	— 0,25
3	12,80	7,30	+ 1,67	1,59	+ 0,08
4	8,05	6,60	0,45	0,30	+ 0,15
5	2,40	— 3,95	1,91	1,77	+ 0,14
6	3,85	1,95	0,58	0,48	+ 0,10
7	7,10	1,45	+ 1,71	+ 1,95	— 0,24

$R_1 = +7{,}61$ $N = +1{,}68$ $m^2 = 0{,}0447$
$R_2 = +0{,}90$ $x = -1{,}38$ $m = 0{,}211$
$R_3 = +2{,}50$ $\alpha = +0{,}089$ $m_x = 0{,}161$

V. Bosscha. 17 Octobre 1879 soir. x = n°. 23 — n°. 19. μ_1 = G — M.

N.	r	e	μ	C	ε
1	15,50	35,70	— 6,04	— 5,96	— 0,08
2	15,80	31,05	4,56	4,67	+ 0,11
3	17,95	38,05	6,01	5,98	— 0,03
4	12,15	27,85	4,70	4,67	— 0,03
5	7,15	26,65	5,85	5,99	+ 0,14
6	10,10	26,00	4,76	4,69	— 0,07
7	11,80	31,95	— 6,04	— 6,01	— 0,03

$R_1 = -37{,}96$ $N = -4{,}67$ $m^2 = 0{,}0114$
$R_2 = -23{,}94$ $x = -1{,}81$ $m = 0{,}108$
$R_3 = -0{,}22$ $\alpha = -0{,}008$ $m_x = 0{,}083$

VI. Bosscha. 18 Octobre 1879. x = n°. 27 — n°. 19. μ_1 = G — M.

N.	r	e	μ	C	ε
1	37,60	54,10	— 4,90	— 4,86	— 0,04
2	32,90	47,50	4,34	4,18	— 0,16
3	34,25	49,10	4,41	4,61	+ 0,20
4	38,90	52,20	3,94	3,94	0,00
5	39,45	54,05	4,33	4,37	— 0,04
6	44,35	56,35	3,54	3,69	+ 0,15
7	45,65	60,25	— 4,32	— 4,12	— 0,20

$R_1 = -29{,}77$ $N = -3{,}94$ $m^2 = 0{,}0330$
$R_2 = -17{,}95$ $x = -0{,}55$ $m = 0{,}181$
$R_3 = -8{,}43$ $\alpha = +0{,}122$ $m_x = 0{,}138$

Digitized by Google

TABLEAU XX (*Suite*).

Calcul des observations du comparateur longitudinal.

VII. Oudemans. 8 Octobre 1879. x = n°. 27 — n°. 28. μ_1 = G — M.

N.	r	e	μ	C	ε
1	27,25	26,60	+ 0,24	+ 0,44	— 0,20
2	29,10	29,10	+ 0,04	— 0,12	+ 0,16
3	33,05	31,55	+ 0,50	+ 0,52	— 0,02
4	30,20	30,75	— 0,12	— 0,04	— 0,08
5	39,40	36,65	+ 0,89	+ 0,61	+ 0,28
6	38,95	39,25	— 0,08	+ 0,05	— 0,08
7	36,75	34,80	+ 0,64	+ 0,70	— 0,06

R_1 = + 2,15 N = — 0,04 m^2 = 0,0402
R_2 = + 2,26 x = + 0,60 m = 0,200
R_3 = + 1,52 α = + 0,043 m_x = 0,153

VIII. Oudemans. 10 Octobre 1879. x = n°. 19 — n°. 28. μ_1 = D — M.

N.	r	e	μ	C	ε
1	23,05	8,30	+ 4,47	+ 4,46	+ 0,01
2	22,00	6,15	4,79	4,76	+ 0,03
3	22,35	7,10	4,61	4,56	+ 0,05
4	19,40	3,60	4,78	4,86	— 0,08
5	20,30	5,20	4,57	4,67	— 0,10
6	22,60	6,00	5,02	4 97	+ 0,05
7	23,40	7,45	+ 4,83	+ 4,78	+ 0,05

R_1 = + 33,06 N = + 4,62 m^2 = 0,0062
R_2 = + 14,59 x = + 0,25 m = 0,078
R_3 = + 1,49 α = + 0,058 m_x = 0,060

IX. Oudemans. 12 Octobre 1879. x = n°. 19 — n°. 27. μ_1 = G — M.

N.	r	e	μ	C	ε
1	14,10	42,15	— 8,41	— 8,44	+ 0,03
2	13,65	38,55	7,46	7,41	— 0,05
3	14,55	43,00	8,52	8,55	+ 0,03
4	9,50	34,60	7,53	7,52	— 0,01
5	10,10	39,15	8,71	8,67	— 0,04
6	8,95	34,25	7,59	7,64	+ 0,05
7	9,75	39,10	— 8,80	— 8,79	— 0,01

R_1 = — 57,02 N = — 7,52 m^2 = 0,0087
R_2 = — 34,44 x = — 1,09 m = 0,047
R_3 = — 1,68 α = — 0,058 m_x = 0,035

X. Oudemans. 16 Octobre 1879. x = n°. 28 — n°. 27. μ_1 = G — M.

N.	r	e	μ	C	ε
1	17,10	17,60	— 0,12	— 0,16	+ 0,04
2	18,90	13,80	+ 1,56	+ 1,71	— 0,15
3	17,25	17,25	+ 0,03	— 0,05	+ 0,08
4	10,15	3,75	+ 1,94	+ 1,81	+ 0,13
5	8,55	8,75	— 0,05	+ 0,05	— 0,10
6	9,65	3,25	+ 1,94	+ 1,92	+ 0,02
7	10,75	10,35	+ 0,14	+ 0,15	— 0,01

R_1 = + 5,43 N = + 1,81 m^2 = 0,0146
R_2 = — 0,01 x = — 1,81 m = 0,121
R_3 = + 1,46 α = + 0,052 m_x = 0,092

XI. Oudemans. 17 Octobre 1879 soir. x = n°. 23 — n°. 19. μ_1 = D — M.

N.	r	e	μ	C	ε
1	5,25	14,15	— 2,67	— 2,72	+ 0,05
2	4,95	18,00	3,91	3,88	— 0,03
3	5,90	14,75	2,65	2,61	— 0,04
4	1,20	13,65	3,74	3,77	+ 0,03
5	— 0,25	8,20	2,54	2,50	— 0,04
6	3,95	16,15	3,66	3,66	0,00
7	9,95	17,90	— 2,37	— 2,40	+ 0,03

R_1 = — 21,54 N = — 2,56 m^2 = 0,0021
R_2 = — 11,31 x = — 1,21 m = 0,046
R_3 = + 1,50 α = + 0,053 m_x = 0,035

XII. Oudemans. 18 Octobre 1879 soir. x = n°. 27 — n°. 19. μ_1 = G — M.

N.	r	e	μ	C	ε
1	37,85	— 0,40	— 11,55	— 11,33	— 0,22
2	40,95	1,60	11,88	11,88	— 0,05
3	40,10	3,30	11,11	11,26	+ 0,15
4	40,85	2,25	11,66	11,76	+ 0,10
5	43,40	7,50	10,85	11,19	+ 0,34
6	40,90	2,00	11,75	11,69	— 0,06
7	43,90	6,20	— 11,39	— 11,12	— 0,27

R_1 = + 80,19 N = + 11,76 m^2 = 0,0689
R_2 = + 44,90 x = — 0,54 m = 0,262
R_3 = — 1,00 α = — 0,036 m_x = 0,200

Digitized by Google

TABLEAU XX (*Suite*).

Calcul des observations du comparateur longitudinal.

XIII. Stamkart. 8 Octobre 1879. x = n°. 27 — n°. 23. μ_1 = G — M.

N.	r	e	μ	C	ε
1	41,35	37,15	+ 1,32	+ 1,36	— 0,04
2	36,65	33,35	1,06	1,08	— 0,02
3	47,30	41,75	1,74	.,51	+ 0,23
4	44,90	41,25	1,16	1,24	— 0,08
5	54,10	49,55	1,45	1,67	— 0,22
6	48,30	43,55	1,50	1,40	+ 0,10
7	13,30	7,20	+ 1,85	+ 1,82	+ 0,03

R_1 = + 10,08 N = + 1,24 m^2 = 0,0801
R_2 = + 6,36 x = + 0,35 m = 0,173
R_3 = + 2,18 α = + 0,078 m_x = 0,132

XIV. Stamkart. 10 Octobre 1879. x = n°. 19 — n°. 23. μ_1 = D — M.

N.	r	e	μ	C	ε
1	26,00	16,50	+ 2,89	+ 2,74	+ 0,15
2	30,25	20,70	2,91	3,19	— 0,28
3	27,40	13,20	2,80	2,94	— 0,14
4	26,00	14,05	3,63	3,39	+ 0,24
5	24,70	14,00	3,25	3,13	+ 0,12
6	28,80	16,90	3,62	3,58	+ 0,04
7	23,90	13,40	+ 3,19	+ 3,33	— 0,14

R_1 = + 12,80 N = + 3,03 m^2 = 0,0534
R_2 = + 10,16 x = + 0,35 m = 0,231
R_3 = + 2,75 α = + 0,098 m_x = 0,176

XV. Stamkart. 12 Octobre 1879. x = n°. 19 — n°. 27. μ_1 = D — M.

N.	r	e	μ	C	ε
1	3,60	27,50	— 7,17	— 7,11	— 0,06
2	13,20	39,90	8,00	7,91	— 0,09
3	6,75	30,15	7,02	7,01	— 0,01
4	5,90	31,45	7,67	7,81	+ 0,14
5	3,80	26,00	6,66	6,92	+ 0,26
6	1,95	27,85	7,78	7,72	— 0,06
7	0,75	24,10	— 7,01	— 6,83	— 0,18

R_1 = — 51,31 N = — 6,97 m^2 = 0,0388
R_2 = — 23,44 x = — 0,85 m = 0,184
R_3 = + 1,30 α = + 0,046 m_x = 0,140

XVI. Stamkart. 16 Octobre 1879. x = n°. 23 — n°. 27. μ_1 = G — M.

N.	r	e	μ	C	ε
1	8,30	5,50	+ 0,85	+ 0,57	+ 0,28
2	11,65	6,95	+ 1,48	+ 1,62	— 0,19
3	16,45	16,65	— 0,04	+ 0,21	— 0,25
4	13,45	9,30	+ 1,27	+ 1,26	+ 0,01
5	13,00	13,50	— 0,13	— 0,14	+ 0,01
6	15,00	11,45	+ 1,09	+ 0,91	+ 0,18
7	10,80	12,65	— 0,54	— 0,49	— 0,05

R_1 = + 3,93 N = + 1,26 m^2 = 0,0530
R_2 = + 0,15 x = — 1,22 m = 0,230
R_3 = — 4,96 α = — 0,177 m_x = 0,175

XVII. Stamkart. 17 Octobre 1879 soir. x = n°. 23 — n°. 19. μ_1 = D — M.

N.	r	e	μ	C	ε
1	25,15	38,10	— 3,85	— 3,90	+ 0,05
2	23,15	39,00	4,78	4,90	+ 0,17
3	24,45	37,00	3,73	3,66	— 0,07
4	20,50	37,35	5,03	4,66	— 0,37
5	18,25	29,65	3,40	3,41	+ 0,01
6	22,35	36,50	4,22	4,41	+ 0,19
7	21,45	32,05	— 3,15	— 3,16	+ 0,01

R_1 = — 18,11 N = — 3,53 m^2 = 0,0524
R_2 = — 13,97 x = — 1,12 m = 0,229
R_3 = + 3,46 α = + 0,128 m_x = 0,175

XVIII. Stamkart. 18 Octobre 1879 soir. x = n°. 27 — n°. 19. μ_1 = D — M.

N.	r	e	μ	C	ε
1	14,05	31,50	— 5,22	— 5,32	+ 0,10
2	13,40	31,95	5,55	5,72	+ 0,17
3	11,15	28,35	5,30	5,20	+ 0,10
4	8,95	29,15	6,05	5,61	— 0,44
5	7,50	24,40	5,07	5,08	+ 0,01
6	5,40	22,80	5,22	5,49	+ 0,27
7	5,30	21,90	— 4,98	— 4,97	— 0,01

R_1 = — 37,39 N = — 5,14 m^2 = 0,0789
R_2 = — 16,83 x = — 0,47 m = 0,281
R_3 = + 1,63 α = + 0,058 m_x = 0,214

Digitized by Google

TABLEAU XX (*Suite*).

Calcul des observations du comparateur longitudinal.

XIX. G. Tresca. 7 Octobre 1879 soir. x = n°. 27 — n°. 23. μ_1 = D — M.

N.	r	e	μ	C	ε
1	11,00	9,10	+ 0,59	+ 0,59	0,00
2	16,80	13,00	1,17	1,18	— 0,01
3	12,80	10,20	0,80	0,79	+ 0,01
4	20,50	16,00	1,38	1,37	+ 0,01
5	19,00	15,85	+ 0,97	+ 0,99	— 0,02

$R_1 = + 4{,}91$ $N = + 0{,}79$ $m_3 = 0{,}0008$
$R_2 = + 2{,}55$ $x = + 0{,}49$ $m = 0{,}017$
$R_3 = + 0{,}99$ $\alpha = + 0{,}099$ $m_x = 0{,}015$

XX. G Tresca. 10 Octobre 1879 soir. x = n°. 19 — n°. 23. μ_1 = G — M.

N.	r	e	μ	C	ε
1	23,55	7,10	+ 4,98	+ 5,03	— 0,05
2	23,40	7,25	4,89	4,87	+ 0,02
3	24,60	8,05	5,01	5,00	+ 0,01
4	23,80	7,80	4,84	4,83	+ 0,01
5	24,70	7,95	5,07	4,96	+ 0,11
6	23,75	8,00	4,77	4,80	— 0,03
7	25,20	9,10	+ 4,87	+ 4,93	— 0,06

$R_1 = + 34{,}42$ $N = + 4{,}83$ $m^2 = 0{,}0049$
$R_2 = + 19{,}93$ $x = + 0{,}15$ $m = 0{,}070$
$R_3 = — 0{,}49$ $\alpha = — 0{,}017$ $m_x = 0{,}053$

XXI. G. Tresca. 11 Octobre 1879 soir. x = n°. 19 — n°. 27. μ_1 = D — M.

N.	r	e	μ	C	ε
1	24,35	7,15	+ 5,20	+ 5,16	+ 0,04
2	25,60	11,50	4,27	4,25	+ 0,02
3	26,45	9,55	5,12	5,28	— 0,16
4	29,85	15,10	4,48	4,37	+ 0,11
5	30,90	13,10	5,39	5,40	— 0,01
6	34,60	20,25	4,36	4,49	— 0,13
7	34,55	15,80	5,68	5,52	+ 0,16
8	35,00	19,85	4,60	4,61	— 0,01
9	31,90	13,45	+ 5,59	+ 5,63	— 0,04

$R_1 = + 44{,}70$ $N = + 5{,}40$ $m^2 = 0{,}0140$
$R_2 = + 17{,}72$ $x = — 0{,}97$ $m = 0{,}118$
$R_3 = + 3{,}56$ $\alpha = + 0{,}059$ $m_x = 0{,}074$

XXII. G Tresca. 17 Octobre 1879. x = n°. 23 — n°. 27. μ_1 = G — M

N.	r	e	μ	C	ε
1	30,60	29,25	+ 0,45	+ 0,51	— 0,06
2	29,65	22,90	2,07	2,09	— 0,02
3	32,65	30,90	0,57	0,55	+ 0,02
4	31,20	23,85	2,25	2,12	+ 0,13
5	28,05	26,00	0,66	0,58	+ 0,08
6	30,15	23,50	2,04	2,15	— 0,11
7	24,85	23,50	+ 0,58	+ 0,61	— 0,03

$R_1 = + 8{,}63$ $N = + 2{,}12$ $m^2 = 0{,}0102$
$R_2 = + 2{,}26$ $x = — 1{,}56$ $m = 0{,}101$
$R_3 = + 0{,}40$ $\alpha = + 0{,}014$ $m_x = 0{,}77$

XXIII. G. Tresca. 17 Octobre 1879 soir. x = n°. 23 — n°. 19 μ_1 = G — M.

N.	r	e	μ	C	ε
1	15,90	27,55	— 3,48	— 3,67	+ 0,19
2	16,75	26,20	2,81	2,75	— 0,06
3	15,20	28,50	3,97	3,77	— 0,20
4	14,05	23.15	2,71	2,87	+ 0,16
5	14,00	27,60	4,06	3,89	— 0,17
6	9,90	20,20	3,08	2,98	— 0,10
7	12,85	25,60	— 3,81	— 4,00	+ 0,19

$R_1 = — 23{,}93$ $N = — 2{,}87$ $m^2 = 0{,}0451$
$R_2 = — 15{,}32$ $x = — 0{,}96$ $m = 0{,}212$
$R_3 = — 1{,}63$ $\alpha = — 0{,}058$ $m_x = 0{,}161$

XXIV. G. Tresca. 18 Octobre 1879 soir. x = n°. 27 — n°. 19. μ_1 = D — M.

N.	r	e	μ	C	ε
1	41,30	7,10	+ 10,34	+ 10,36	— 0,02
2	43,45	10,85	9,86	9,73	+ 0,13
3	38,85	4,95	10,24	10,33	— 0,09
4	39,00	7,20	9,59	9,69	— 0,10
5	38,60	3,65	10,38	10,29	+ 0,09
6	35,95	4,10	9,62	9,65	— 0,03
7	40,90	6,90	+ 10,27	+ 10,25	+ 0,02

$R_1 = + 70{,}30$ $N = + 10{,}30$ $m^2 = 0{,}0114$
$R_2 = + 29{,}07$ $x = — 0{,}62$ $m = 0{,}107$
$R_3 = — 0{,}52$ $\alpha = — 0{,}019$ $m_x = 0{,}082$

Digitized by Google

83. Les valeurs de x, calculées dans le Tableau précédent, doivent encore subir une faible correction à cause des différences de température que les étalons ont présentées dans la plupart des séries. C'est ce qui a été fait dans le Tableau suivant, où l'on a adopté pour la dilatation des règles la valeur de $8^{\mu},5$ par degré centigrade. On a rangé les séries dans un ordre différent afin de mettre en regard les valeurs d'une même différence de longueur obtenues par les divers observateurs. La longueur des mètres est désignée par les signes (19), (23), (27). On a distingué les deux positions dans lesquelles les mètres comparés se sont trouvés, en écrivant la différence de manière à nommer toujours le premier le mètre qui s'est trouvé dans la position rapprochée. Ainsi la différence des étalons n°. 19 et n°. 23 a été désignée par (19) — (23) lorsque le mètre n°. 19 s'est trouvé dans la position rapprochée de l'observateur, par — ⌈(23) — (19)⌉ lorsque les deux mètres avaient été placés dans la position inverse. Par T on a indiqué les températures moyennes des deux mètres, par Δ T la différence moyenne $T_r - T_e$ des températures des mètres rapproché et éloigné, par x les valeurs calculées du Tableau XX, par Δx la correction nécessaire pour tenir compte de la différence de température Δ T, par $x + \Delta x$ (observé) la valeur corrigée. Les deux dernières colonnes se rapportent au calcul du résultat final de ces comparaisons.

TABLEAU XXI.

Calcul des différences de longueur des étalons n°. 19, n°. 23 et n°. 27.

Longueur mesurée.	Série.	T.	Δ T.	x	Δx.	$x + \Delta x$.		ε
						Observé.	Calculé.	
— ⌈(27) — (23)⌉	I. B.	16,98	+ 0,005	— 0,45	+ 0,04	— 0,41	— 0,43	— 0,02
» »	VII. O.	17.10	+ 0.003	— 0.60	+ 0,03	— 0,57	»	+ 0,14
» »	XIII. S.	17,01	+ 0,010	— 0,35	+ 0,08	— 0,27	»	— 0,16
» »	XIX. T.	17,09	0,000	— 0,49	0,00	— 0,49	»	— 0,06
(23) — (27)	IV. B.	15,43	— 0,015	— 1,38	+ 0,13	— 1,25	— 1,41	+ 0,16
» »	X. O.	15,47	— 0,020	— 1,81	+ 0,17	— 1,64	»	— 0,23
» »	XVI. S.	15,46	0,000	— 1,22	0,00	— 1,22	»	+ 0,19
» »	XXII. T.	15,37	0,000	— 1,56	0,00	— 1,56	»	— 0,15
(19) — (23)	II. B.	16,80	0,000	+ 0,20	0,00	+ 0,20	+ 0,20	0,00
» »	VIII. O.	16,89	+ 0,012	+ 0,25	— 0,10	+ 0,15	»	— 0,05
» »	XIV. S.	16,82	+ 0.005	+ 0,35	— 0,04	+ 0,31	»	+ 0,11
» »	XX. T.	16,90	+ 0.005	+ 0,15	— 0,04	+ 0,11	»	— 0.09
— ⌈(23) — (19)⌉	V. B.	14,92	— 0,020	+ 1,31	— 0,17	+ 1,14	+ 1,04	+ 0,10
» »	XI. O.	14,95	— 0.005	+ 1.21	— 0,04	+ 1,17	»	+ 0,13
» »	XVII. S.	14,91	— 0,030	+ 1,12	— 0,25	+ 0,87	»	— 0,17
» »	XXIII. T.	15,15	— 0,000	+ 0,96	0,00	+ 0,96	»	— 0,08
(19) — (27)	III. B.	16,81	+ 0,010	— 1,40	— 0,08	— 1,48	— 1,18	— 0,30
» »	IX. O.	16,87	+ 0,015	— 1,09	— 0,13	— 1,22	»	— 0,04
» »	XV. S.	16,80	+ 0,010	— 0,85	— 0,08	— 0,93	»	+ 0,25
» »	XXI. T.	16.95	+ 0,010	— 0,97	— 0,08	— 1 05	»	+ 0,13
— ⌈(27) — (19)⌉	VI. B.	14,53	0,000	+ 0,55	0,00	+ 0,55	+ 0,58	— 0,03
» »	XII. O.	14,56	+ 0,005	+ 0,54	+ 0,04	+ 0.58	»	0,00
» »	XVIII. S.	14,54	0,000	+ 0,47	0,00	+ 0,47	»	— 0,11
» »	XXIV. T.	14 65	+ 0,015	+ 0,62	+ 0,13	+ 0,75	»	+ 0,17

Digitized by Google

84. On reconnaît immédiatement que les valeurs corrigées $x + \Delta x$ se rapportant à une même combinaison et une même position de deux mètres sont à peu près les mêmes pour les divers observateurs. Les écarts n'atteignent que quelques dixièmes de micron, le plus grand écart de la valeur moyenne n'est que de trois dixièmes de micron, l'écart moyen reste au dessous de $0^{\mu},15$. Au contraire, les différences de longueur apparente de deux mètres varient sensiblement selon la position qu'ils ont occupée sur le comparateur. Pour les étalons n°. 19 et n°. 27 cette variation monte jusqu'à près de deux microns, valeur dépassant évidemment la limite de précision. On vérifie facilement que cette variation ne peut être attribuée, ni à la différence de près de 2°. C. des températures T auxquelles les comparaisons ont eu lieu, ni à quelque autre cause qui eût introduit une erreur, soit dans les comparaisons faites entre le 7 et le 12 Octobre, soit dans celles de la seconde période après que les mètres avaient été refroidis dans le comparateur transversal. En effet, ni les valeurs de la première, ni celles de la seconde période ne satisfont à l'équation de condition:

$$(19) - (23) + (23) - (27) - \{(19) - (27)\} = 0$$

et les écarts, savoir $+ 0{,}93$ pour les observations de la première période, $- 0{,}97$ pour celles de la seconde, presque égaux et de signe contraire, indiquent clairement qu'il y a une source d'erreur constante ayant agi en sens contraires dans les deux cas. Il y a donc eu une différence systématique dans la longueur apparente des étalons selon qu'ils ont occupé sur le comparateur la position rapprochée ou éloignée de l'observateur.

Elle peut provenir, soit du fonctionnement du comparateur, ainsi que nous l'avons remarqué (n°s. 78 et 79), soit de l'éclairage et des moyens optiques différents employés dans les deux positions, soit de ces deux causes réunies.

85. Soient $(19) + a$ la longueur apparente de l'étalon n°. 19 dans la position rapprochée, $(19) - a$ sa longueur apparente dans la position éloignée, $(23) + b$, $(23) - b$, $(27) + c$, $(27) - c$ les longueurs analogues des deux autres étalons; posons de plus:

$$(19) - (23) = x'$$
$$(23) - (27) = x''$$
$$(19) - (27) = x' + x''.$$

Les vingt-quatre équations, auxquelles donne lieu le Tableau XXI, pourront être réunies en six groupes de quatre équations qui, additionnées par groupes, s'écriront comme il suit:

$$\left.\begin{array}{rrrrr}
 & 4x'' & -4b & -4c & = -1{,}74 \\
4x' & & +4a+4b & & = +0{,}77 \\
4x' & +4x'' & +4a & +4c & = -4{,}68 \\
 & 4x'' & +4b & +4c & = -5{,}67 \\
4x' & & -4a-4b & & = +4{,}14 \\
4x' & +4x'' & -4a & -4c & = +2{,}35,
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (V)$$

Digitized by Google

d'où l'on déduit les équations normales suivantes:

$$\left.\begin{aligned} 16\,x' + 8\,x'' &= +2{,}58 = R_1 \\ 8\,x' + 16\,x'' &= -9{,}74 = R_2 \\ 16\,a + 8\,b + 8\,c &= -10{,}40 = R_3 \\ 8\,a + 16\,b + 8\,c &= -7{,}30 = R_4 \\ 8\,a + 8\,b + 16\,c &= -10{,}96 = R_5, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(VI)}$$

qui donnent:

$$\left.\begin{aligned} x' &= +\tfrac{1}{17}R_1 - \tfrac{1}{34}R_2 = +0{,}62 \\ x'' &= -\tfrac{1}{34}R_1 + \tfrac{1}{17}R_2 = -0{,}92 \\ a &= +\tfrac{3}{32}R_3 - \tfrac{1}{32}R_4 - \tfrac{1}{32}R_5 = -0{,}404 \\ b &= -\tfrac{1}{32}R_3 + \tfrac{3}{32}R_4 - \tfrac{1}{32}R_5 = -0{,}017 \\ c &= -\tfrac{1}{32}R_3 - \tfrac{1}{32}R_4 + \tfrac{3}{32}R_5 = -0{,}471. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(VII)}$$

Si, avec ces valeurs, on calcule les valeurs $x + \Delta x$ du Tableau XXI, on obtient les nombres inscrits dans la huitième colonne ainsi que les écarts s de la neuvième colonne. La somme des carrés des écarts étant 0,4841, l'erreur moyenne M d'une comparaison sera:

$$M = \sqrt{\frac{0{,}4841}{24-5}} = 0\mu{,}16,$$

l'erreur moyenne M_x des valeurs de x' de x'' ou de $x' + x''$

$$M_x = M\sqrt{\tfrac{1}{17}} = 0{,}046,$$

et l'erreur moyenne M_a des valeurs a, b, c

$$M_a = M\sqrt{\tfrac{3}{32}} = 0{,}049.$$

86. Le résultat final des comparaisons des étalons n°. 19, n°. 23 et n°. 27 entre eux est donc exprimé par les équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} (19) - (23) &= +0\mu{,}62 \pm 0\mu{,}031 \\ (23) - (27) &= -0\mu{,}92 \pm 0\mu{,}031 \\ (19) - (27) &= -0\mu{,}30 \pm 0\mu{,}031 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(VIII)}$$

La température moyenne à laquelle ces équations ont été obtenues est de 15°,95. Mais les différences des dilatations de ces étalons sont tellement faibles que les équations peuvent être considérées comme exactes dans des limites de température très étendues.

87. Le degré de précision que présentent les équations (VIII) témoigne de l'excellent fonctionnement du comparateur et des bonnes conditions dans lesquelles les observations ont pu être faites. La moitié de l'incertitude déjà très faible du résultat final provient des erreurs inévitables des pointés, qu'on ne saurait diminuer qu'en augmentant encore le pouvoir grossissant des microscopes.

Digitized by Google

En effet, si l'on suppose qu'aucune autre cause d'erreur n'ait troublé le résultat de l'ensemble des observations que l'incertitude du pointé, que de plus les pointés aient été aussi exacts que ceux des premières expériences de la Commission (nos. 30 à 32 de ce Rapport), on arrive à une erreur probable de $0^{\mu},0155$, moitié de celle qui a été réalisée, savoir $0^{\mu},031$. Le chiffre $0^{\mu},0155$ s'obtient par le calcul suivant. L'erreur moyenne, lorsqu'on prend dix pointés consécutifs sans aucun dérangement de l'instrument, a été trouvée égale à $0^{\mu},083$ pour un grossissement de 268 fois. Mais les microscopes avaient été munis, pour les comparaisons, de nouveaux objectifs, qui avaient élevé la valeur d'une division des micromètres de $0^{\mu},24$ à $0^{\mu},30$, c'est-à-dire diminué le grossissement dans le rapport 5 : 4. L'erreur moyenne d'un pointé était donc montée avec les nouveaux systèmes à $0^{\mu},104$. Chaque mesure, étant obtenue en prenant la différence de deux pointés doubles, devrait présenter la même erreur moyenne $0^{\mu},104$ si aucune nouvelle cause n'eût été introduite. L'erreur moyenne du résultat d'une série, dans cette même supposition, eût été de $0^{\mu},104 \times \sqrt{\frac{7}{14}}$ et l'erreur probable du résultat final $0^{\mu},104 \times 0,674 \times \sqrt{\frac{7}{14.14}} = 0^{\mu},0155$.

Cependant, en réalité, les pointés des observateurs n'ont pas atteint la précision qui avait été obtenue antérieurement en opérant sans aucun dérangement de l'appareil et sans aucune autre préoccupation que celle des pointés et des lectures. Les 14 pointés doubles de chaque série du Tableau XV permettent de calculer l'erreur moyenne d'un pointé de la même manière que nous l'avons fait pour les expériences des Tableaux III et IV. Dans le Tableau XXII nous mettons en regard les carrés des erreurs moyennes m_p d'un pointé, et des erreurs moyennes m d'une mesure d'après le Tableau XX.

TABLEAU XXII.

Erreurs moyennes d'un pointé et d'une mesure du comparateur longitudinal.

Bosscha.		Oudemans.		Stamkart.		Tresca.	
m_p^2	m^2	m_p^2	m^2	m_p^2	m^2	m_p^2	m^2
0,0291	0,0323	0,0299	0,0402	0,0392	0,0301	0,0053	0,0003
0,0129	0,0106	0,0093	0,0062	0,0488	0,0534	0,0125	0,0049
0,0116	0,0142	0,0095	0,0022	0,0378	0,0338	0,0113	0,0140
0,0426	0,0447	0,0114	0,0146	0,0512	0,0530	0,0161	0,0102
0,0089	0,0114	0,0126	0,0021	0,0319	0,0524	0,0175	0,0451
0,0132	0,0333	0,0158	0,0689	0,0406	0,0789	0,0105	0,0114
0,0197	0,0244	0,0147	0,0224	0,0416	0,0503	0,0122	0,0143
$m_p = 0,140$		$m_p = 0,121$		$m_p = 0,204$		$m_p = 0,110$	
$m = 0,156$		$m = 0,150$		$m = 0,224$		$m = 0,120$	

Digitized by Google

On remarque que, généralement, les séries dans lesquelles les pointés ont été moins bons sont aussi celles qui ont fourni la plus grande erreur moyenne d'une mesure. Le même rapport se vérifie plus exactement dans les valeurs individuelles des quatre observateurs. Les différences, d'une série à l'autre, dans les erreurs d'un même observateur s'expliquent, au moins en partie, par les conditions variables de la tranquillité du sol, ébranlé par le mouvement des voitures de roulage qui circulaient dans les rues adjacentes au Conservatoire. L'effet des trépidations se remarquait par l'apparence plus ou moins diffuse des traits.

La valeur moyenne de m_p^2, savoir 0,0221, élève le carré de l'erreur moyenne du résultat final, calculée dans la supposition qu'aucune autre source d'erreur ne fût intervenue, à 0,00107, presque exactement la moitié du carré $M_x^2 = 0{,}0022$. L'influence de la limite de visibilité des traits a donc exactement équilibré celle de toutes les autres causes perturbatrices réunies.

En comparant d'une part les valeurs moyennes de m_p^2 avec celles de m^2, de l'autre les carrés $m_x^2 = \frac{7}{12} m^2$ des erreurs moyennes de chaque série avec le carré M_x^2 des erreurs moyennes des équations finales, on obtient la mesure du degré d'incertitude que chaque nouvelle complication a introduit dans le résultat des opérations. On trouve ainsi:

	m_p^2	m^2	Différences.	m_x^2	M^2	Différences.
B.	0,0197	0,0244	+ 0,0047	0,0142	0,0255	+ 0,0113
O.	0,0147	0,0224	+ 0,0077	0,0131	»	+ 0,0124
S.	0,0416	0,0503	+ 0,0087	0,0293	»	— 0,0038
T.	0,0122	0,0143	+ 0,0021	0,0083	»	+ 0,0172.
			+ 0,0058			

La différence moyenne des premiers carrés montre que les causes perturbatrices dépendant du fonctionnement du comparateur ont introduit une erreur moyenne d'environ $0^{\mu},08$. Les différences du second groupe de chiffres représenterait le carré de l'erreur moyenne qui dépend du déplacement des mètres, des variations des conditions d'installation, des inégalités personnelles dans les appréciations des observateurs et enfin de tout ce qui peut modifier la différence apparente des mètres d'une série à l'autre. Mais, ici déjà, le signe négatif de la troisième différence semble indiquer que les variations dues à ces dernières causes atteignent la limite des différences de précision qui résultent des divers degrés d'aptitude des observateurs.

88. Les valeurs $a = -0^{\mu},404$, $b = -0^{\mu},017$, $c = -0^{\mu},471$, dont l'erreur moyenne n'est que $0^{\mu},049$, montrent que, pour obtenir dans les mesures du comparateur longitudinal la précision que cet instrument permet d'atteindre, il faut nécessairement tenir compte de la différence systématique que présentent les

Digitized by Google

longueurs mesurées selon la position des mètres comparés. En dehors des causes que nous avons mentionnées aux nos. 78 et 79, le fonctionnement du comparateur peut donner lieu à cette différence lorsque le chariot, en passant de l'une de ses deux positions extrêmes à l'autre, n'est pas resté parallèle à lui-même. Un mouvement transversal de l'un des bouts de 25 microns peut faire varier d'environ un micron les projections $k\,i$ ou $k'\,i'$ de la figure 10. Le collimateur de M. Fizeau, décrit au n°. 49, sert bien à contrôler ce mouvement et le comparateur est muni des moyens de réglage pour le corriger, mais nous n'avons pas jugé utile de l'employer dans le cours d'une série de comparaisons, à cause de la trop grande complication qui en résulterait dans la marche des observations, dont nous avons voulu surtout assurer la régulière continuité.

Nous nous sommes assurés, dans l'intervalle des deux groupes de douze séries, que le défaut de parallélisme était à peine visible dans l'appareil de collimation, et nous nous sommes fiés à la stabilité de l'instrument, qui rendait problable la constance du réglage adopté. Il paraît que sous ce rapport encore l'instrument n'a rien laissé à désirer. En effet, les deux écarts $+0{,}93$ et $-0{,}97$ calculés au n°. 84 représentent les valeurs de $-2\,c$ dans le premier et de $+2\,c$ dans le second des deux groupes. Car, si l'on voulait admettre que les valeurs de a, b et c, fussent devenues a', b', c' dans la seconde période, les équations (V) donneraient:

$$\begin{aligned} x'' \quad -b-c &= -0{,}432 \\ x' \quad +a+b \quad &= +0{,}192 \\ x'+x''+a \quad +c &= -1{,}170 \end{aligned}$$

d'où $2\,c = -0{,}930$

$$\begin{aligned} x'' \quad +b'+c' &= -1{,}418 \\ x' \quad -a'-b' \quad &= +1{,}035 \\ x'+x''-a' \quad -c' &= +0{,}588 \end{aligned}$$

d'où $2\,c' = -0{,}971.$

La différence de c et c' rentre tout à fait dans les limites des erreurs accidentelles. Quoique l'on ne puisse vérifier directement si $a = a'$, $b = b'$, l'égalité de c et c' suffit pour exclure une variation du mouvement oblique du chariot.

Si le défaut de parallélisme du chariot eût été l'unique cause d'une différence systématique, on eût dû trouver $a = b = c$. Pour $a = -0{,}404$, $c = -0{,}471$, cette égalité se vérifie assez exactement, mais la valeur de $b = -0{,}017$ n'y satisfait point. Une autre cause a masqué pour le mètre n°. 23 l'influence du mouvement oblique du chariot. Elle peut provenir soit d'un déplacement longitudinal qui dans l'une des positions du mètre n°. 23 a été causé par un mouvement perdu dans l'appareil de réglage (n°. 79), soit de l'éclairage différent ou des propriétés optiques différentes des deux microscopes. A ce sujet nous devons remar-

Digitized by Google

quer que les traits du mètre n°. 23 sont beaucoup moins réussis que ceux des étalons n°. 19 et n°. 27, et que, sur l'un des bouts, le trait du milieu peut donner lieu à quelque incertitude.

89. Pour déduire d'une série de mesures faites au comparateur transversal l'équation entre l'étalon à traits et le Mètre des Archives, on peut partir des mêmes formules que nous avons employées pour le comparateur longitudinal. Soient a et b, dans un plan passant par les bouts des deux mètres, les points visés lorsque les micromètres sont à zéro, et désignons par $M = a\,b$ la distance des microscopes. Dans ces micromètres les lectures croissantes du tambour indiquent que, dans le plan visé, le pointé se déplace à droite. Si, en pointant sur le bout droit du mètre à traits, on obtient la lecture d_1, ce bout se trouvera à une distance $d_1\,\delta$ du point a, δ désignant la valeur d'une division du micromètre du microscope droit. La lecture g_1 donnera de même la distance $g_1\,\gamma$ à laquelle le bout gauche de l'étalon se trouvera à droite du point b. En désignant par X la longueur du mètre à traits on a évidemment:

$$X - M = d_1\,\delta - g_1\,\gamma.$$

Le Mètre des Archives, dont nous désignerons la longueur par A, ayant remplacé sous les microscopes le mètre à traits, une deuxième mesure donnera de même:

$$A - M = d_2\,\delta - g_2\,\gamma.$$

En posant $X - M = N$, $X - A = x$ on déduit des sept mesures d'une série les systèmes d'équations:

$$\left.\begin{array}{llll}
N & = d_1\,\delta - g_1\,\gamma = \mu_1 & \text{ou bien} & N - x = d_1\,\delta - g_1\,\gamma = \mu_1 \\
N - x & = d_2\,\delta - g_2\,\gamma = \mu_2 & & N = d_2\,\delta - g_2\,\gamma = \mu_2 \\
N & = d_3\,\delta - g_3\,\gamma = \mu_3 & & N - x = d_3\,\delta - g_3\,\gamma = \mu_3 \\
N - x & = d_4\,\delta - g_4\,\gamma = \mu_4 & & N = d_4\,\delta - g_4\,\gamma = \mu_4 \\
N & = d_5\,\delta - g_5\,\gamma = \mu_5 & & N - x = d_5\,\delta - g_5\,\gamma = \mu_5 \\
N - x & = d_6\,\delta - g_6\,\gamma = \mu_6 & & N = d_6\,\delta - g_6\,\gamma = \mu_6 \\
N & = d_7\,\delta - g_7\,\gamma = \mu_7 & & N - x = d_7\,\delta - g_7\,\gamma = \mu_7
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(IX)}$$

selon que l'on aura commencé les mesures par le mètre à traits ou par le Mètre des Archives.

90. Des considérations analogues à celles que nous avons développées en établissant les équations du comparateur longitudinal (nos. 77—80) conduisent à ajouter aux premiers membres de ces équations un terme proportionnel au temps ou au numéro d'ordre de la mesure, afin de tenir compte de la variation de M, qui résulte des causes constantes, telles que les dilatations thermiques et les résidus d'élasticité, par lesquelles les points a et b sont déplacés dans le sens longitudinal d'une manière uniforme. Sur le comparateur transversal une inclinaison

Digitized by Google

ou une déformation des supports des microscopes peut déterminer de plus grandes variations de M que dans le comparateur longitudinal, parce que dans le premier de ces instruments les deux supports sont entièrement indépendants et placés à la distance d'un mètre l'un de l'autre. Mais, en dehors de la variation de M, il faut avoir égard à une influence qui se fait sentir spécialement sur le Mètre des Archives. En discutant les équations du comparateur longitudinal nous avons remarqué qu'un mouvement en hauteur des microscopes n'affecte pas sensiblement les mesures. Il n'en est pas de même pour les mesures du Mètre des Archives. En effet, nous avons reconnu, par les expériences et l'analyse des n°. 50—60 de ce Rapport, qu'un déplacement en hauteur des microscopes en dérangeant la mise au point fait varier la longueur apparente du Mètre des Archives. La dilatation des corps des microscopes a dû, à elle seule, produire cet effet d'une manière sensible. Les tubes de ces instruments installés dans la cloche de cuivre aux deux côtés de la tige bimétallique du thermomètre Redier ont dû subir la même élévation de température, que nous avons reconnu atteindre 0°,10 à 0°,14 dans l'espace de dix minutes (n°. 71). Si l'on suppose que les supports en fer des microscopes ont subi la même élévation de température que les tubes en laiton, l'échauffement de 0°,10 à 0°,14 sur une longueur de 80 centimètres aurait fait baisser les objectifs de $0^{\mu},66$ à $0^{\mu},92$, ce qui causerait une variation dans la longueur apparente du prototype de $0^{\mu},15$ à $0^{\mu},20$.

La variation proportionnelle au temps, dont il faut tenir compte dans les équations (IX), est donc différente pour les équations de rang impair et pour celles de rang pair. Si nous désignons par α le coefficient dû à la variation de M, par β celui qui représente l'influence combinée de la variation de M et de la variation de la longueur apparente du Mètre des Archives, les équations deviendront:

$$\left.\begin{array}{ll|ll}
N & -3\alpha = \mu_1 & \text{ou bien} & N - x - 3\beta = \mu_1 \\
N - x - 2\beta = \mu_2 & & & N - 2\alpha = \mu_2 \\
N & -\alpha = \mu_3 & & N - x - \beta = \mu_3 \\
N - x & = \mu_4 & & N = \mu_4 \\
N & +\alpha = \mu_5 & & N - x + \beta = \mu_5 \\
N - x + 2\beta = \mu_6 & & & N + 2\alpha = \mu_6 \\
N & +3\alpha = \mu_7 & & N - x + 3\beta = \mu_7
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(X)}$$

dont la solution fournit les équations normales suivantes:

$$\begin{array}{rrl|rrl}
7N - & 3x = & [\mu] = R_1 & 7N - & 4x = & [\mu] = R_1 \\
-3N + & 3x = & -(\mu_2 + \mu_4 + \mu_6) = R_2 & -4N + & 4x = & -(\mu_1 + \mu_3 + \mu_5 + \mu_7) = R_2 \\
20\alpha = & 3(\mu_7 - \mu_1) + & & 8\alpha = & 2(\mu_6 - \mu_2) & = R_3 \\
+(\mu_5 - \mu_3) & = R_3 & & 20\beta = & 3(\mu_7 - \mu_1) + & \\
8\beta = & 2(\mu_6 - \mu_2) & = R_4 & + & (\mu_5 - \mu_3) & = R_4
\end{array}$$

Digitized by Google

d'où:

$$\left.\begin{array}{ll|ll} N = & \frac{1}{4} R_1 + \frac{1}{4} R_2 & N = & \frac{1}{3} R_1 + \frac{1}{3} R_2 \\ = & \frac{1}{4}(\mu_1 + \mu_3 + \mu_5 + \mu_7) & = & \frac{1}{3}(\mu_2 + \mu_4 + \mu_6) \\ x = & \frac{1}{4} R_1 + \frac{7}{12} R_2 & x = & \frac{1}{3} R_1 + \frac{7}{12} R_2 \\ = & +\frac{1}{4}(\mu_1 + \mu_3 + \mu_5 + \mu_7) - & = & -\frac{1}{4}(\mu_1 + \mu_3 + \mu_5 + \mu_7) + \\ & -\frac{1}{3}(\mu_2 + \mu_4 + \mu_6) & & +\frac{1}{3}(\mu_2 + \mu_4 + \mu_6) \\ \alpha = & \frac{1}{20} R_3 & \alpha = & \frac{1}{8} R_3 \\ = & \frac{1}{20}\{3(\mu_7 - \mu_1) + \mu_5 - \mu_3\} & = & \frac{1}{4}(\mu_6 - \mu_4) \\ \beta = & \frac{1}{8} R_4 & \beta = & \frac{1}{20} R_4 \\ = & \frac{1}{4}(\mu_6 - \mu_2) & = & \frac{1}{20}\{3(\mu_7 - \mu_1) + \mu_5 - \mu_3\} \end{array}\right\} \quad \text{(XI)}$$

L'erreur moyenne m_x sera:

$$m_x = m\sqrt{\tfrac{7}{12}} = 0{,}7638\sqrt{\frac{[\delta^2]}{3}}.$$

91. La valeur de x, déduite des équations (XI), ne représente pas la différence X — A correspondant à une mise au point que l'observateur a jugée exacte. Elle correspond, au contraire, à la longueur apparente du Mètre des Archives dans la position que le microscope a prise lors de la quatrième mesure de la série. A cette époque la mise au point avait déjà été faussée par la dilatation et par le mouvement en hauteur du microscope. Pour obtenir la valeur X — A qui paraît la plus exacte à l'observateur, il faut calculer A pour l'époque de la première mesure qui a immédiatement suivi la mise au point. Or, la variation de X — A étant $\alpha - \beta$ dans l'intervalle de deux mesures consécutives, la valeur x_o de X — A au commencement de la série a été:

$$x_o = x + 3(\beta - \alpha).$$

Cette réduction de x à la valeur qui correspond à la première des sept mesures a l'inconvénient d'amoindrir sensiblement le degré de certitude du résultat final d'une série. En effet, tandis que l'erreur moyenne de x est 0,7638 m, l'erreur moyenne m_o de x_o sera:

$$m_o = m\sqrt{\tfrac{7}{12} + \tfrac{9}{20} + \tfrac{9}{8}} = 1{,}4691\, m$$

c'est-à-dire près du double de m_x. Mais, évidemment, cette considération ne saurait dispenser de la correction que x doit subir. Il importe avant tout d'éliminer dans le résultat final toute erreur constante, et une moindre valeur de l'erreur moyenne ou de l'erreur probable ne constituerait qu'un avantage fictif et entièrement illusoire, lorsque l'on sait que la quantité qu'il s'agit de déterminer n'est pas representée par le chiffre obtenu.

92. Le Tableau suivant contient les éléments et les résultats du calcul, ordonnés de la même manière que ceux du Tableau XX.

Digitized by Google

TABLEAU XXII.

Calcul des observations du comparateur transversal.

I. Bosscha. 7 Octobre 1879 soir. x = n°. 19 — A. μ_1 = A — M.

N.	d	g	μ	C	ε
1	50,60	68,65	— 6,12	— 6,03	— 0,09
2	113,00	125,95	5,02	4,89	— 0,13
3	52,50	69,42	5,78	5,81	+ 0,03
4	115,95	126,27	4,22	4,49	+ 0,27
5	52,35	67,92	5,86	5,58	+ 0,22
6	114,10	124,50	4,23	4,09	— 0,14
7	52,05	68,15	— 5,52	— 5,36	— 0,16

N = — 4,49 x = + 1,21 m^2 = 0,0641
α = + 0,199 3 ($\beta - \alpha$) = — 0,26 m = 0,253
β = + 0,112 x_0 = + 0,95 m_0 = 0,372

II. Bosscha. 8 Octobre 1879 soir. x = n°. 19 — A. μ_1 = X — M.

N.	d	g	μ	C	ε
1	149,32	49,60	+ 30,32	+ 30,20	+ 0,12
2	95,30	1,70	28,82	28,86	— 0,04
3	147,02	48,35	30,02	30,19	— 0,17
4	94,62	1,00	28,84	28,77	+ 0,07
5	147,05	47,85	30,17	30,17	0,00
6	94,95	1,95	28,64	28,67	— 0,03
7	146,80	47,45	+ 30,22	+ 30,16	+ 0,06

N = + 30,18 x = + 1,42 m^2 = 0,0181
α = — 0,007 3 ($\beta - \alpha$) = — 0,13 m = 0,134
β = — 0,049 x_0 = + 1,29 m_0 = 0,197

III. Bosscha. 10 Octobre 1879. x = n°. 27 — A. μ_1 = X — M.

N.	d	g	μ	C	ε
1	90,90	74,52	+ 4,43	+ 4,34	+ 0,09
2	76,15	64,27	3,13	3,10	+ 0,03
3	88,05	72,65	4,15	4,37	— 0,22
4	73,75	62,80	2,86	2,91	— 0,05
5	88,50	71,82	4,55	4,40	+ 0,15
6	75,20	64,55	2,75	2,72	+ 0,03
7	87,75	71,52	+ 4,41	+ 4,43	— 0,02

N = + 4,39 x = + 1,47 m^2 = 0,0279
α = + 0,016 3 ($\beta - \alpha$) = — 0,33 m = 0,167
β = — 0,095 x_0 = + 1,14 m_0 = 0,245

IV. Bosscha. 10 Octobre 1879 soir. x = n°. 27 — A. μ_1 = X — M.

N.	d	g	μ	C	e
1	99,05	55,50	+ 12,96	+ 12,96	0,00
2	77,40	40,45	11,05	11,10	— 0 05
3	98,75	55,10	13,00	13,00	0,00
4	77,72	40,00	11,30	11,19	+ 0,11
5	98,72	55,00	13,02	13,04	— 0,02
6	78,15	40,60	11,24	11,29	— 0,05
7	100,15	56,10	+ 13,11	+ 13,09	+ 0,02

N = + 13,02 x = + 1,83 m^2 = 0,0060
α = + 0,021 3 ($\beta - \alpha$) = + 0,08 m = 0,077
β = + 0,046 x_0 = + 1,91 m_0 = 0,113

V. Bosscha. 12 Octobre 1879. x = n°. 23 — A. μ_1 = X — M.

N.	d	g	μ	C	ε
1	6,70	66,60	— 19,00	— 19,15	+ 0,15
2	17,20	77,90	19,34	19,53	+ 0,19
3	5,85	66,85	19,34	19,14	— 0,20
4	16,20	79,40	20,12	19,74	— 0,38
5	6,45	66,90	19,17	19,14	— 0,03
6	17,75	79,77	19,76	19,95	+ 0,19
7	6,60	66,62	— 19,04	— 19,13	+ 0,09

N = — 19,14 x = + 0,60 m^2 = 0,0959
α = + 0,002 3 ($\beta - \alpha$) = — 0,33 m = 0,310
β = — 0,106 x_0 = 0,27 m_0 = 0,455

VI. Bosscha. 12 Octobre 1879 soir. x = n°. 23 — A. μ_1 = A — M.

N.	d	g	μ	C	ε
1	7,50	23,95	— 5,26	— 5,04	— 0,22
2	6,77	19,80	4,19	4,26	+ 0,07
3	10,30	25,35	4,84	5,17	+ 0,33
4	6,22	20,00	4,41	4 26	— 0,15
5	10,00	26,40	5,27	5,28	+ 0,01
6	6,87	19,95	4,19	4,27	+ 0,08
7	10,00	27,20	— 5,52	— 5,40	— 0,12

N = — 4,26 x = + 0,96 m^2 = 0,0687
α = — 0,001 3 ($\beta - \alpha$) = — 0,18 m = 0,262
β = — 0,060 x_0 = + 0,78 m_0 = 0,385

Digitized by Google

TABLEAU XXII (*Suite*).

Calcul des observations du comparateur transversal.

VII. Bosscha. 16 Octobre 1879. x = n°. 19 — A. μ_1 = X — M.

N.	d	g	μ	C	ε
1	87,90	40,10	+ 14,40	+ 14,62	— 0,22
2	97,90	67,40	8,84	8,96	— 0,12
3	87,95	38,15	15,03	14,84	+ 0,19
4	99,75	67,85	9,27	9,04	+ 0,23
5	89,50	89,10	15,21	15,06	+ 0,15
6	99,85	68,75	9,02	9,13	— 0,11
7	89,00	39,02	+ 15,08	+ 15,29	— 0,21

N = + 14,95 x = + 5,91 m^2 = 0,0768
α = + 0,110 $3(\beta - \alpha)$ = — 0,20 m = 0,277
β = + 0,043 x_0 = + 5,71 m_0 = 0,407

VIII. Bosscha. 18 Octobre 1879 soir. x = n°. 28 — A. μ_1 = A — M.

N.	d	g	μ	C	ε
1	48,40	8,30	— 19,34	— 19,36	+ 0,02
2	57,80	0,52	13,99	13,96	— 0,03
3	48,85	7,95	19,09	19,26	+ 0,17
4	57,75	99,45	13,66	13,72	+ 0,06
5	47,40	7,50	19,40	19,16	— 0,24
6	57,80	99,05	13,52	13,49	— 0,03
7	48,60	7,45	— 19,01	— 19,06	+ 0,05

N = — 13,72 x = + 5,49 m^2 = 0,0316
α = + 0,116 $3(\beta - \alpha)$ = — 0,20 m = 0,178
β = + 0,049 x_0 = + 5,29 m_0 = 0,261

IX. Oudemans. 7 Octobre 1879. x = n°. 19 — A. μ_1 = A — M.

N.	d	g	μ	C	ε
1	89,80	65,05	— 8,31	— 8,30	— 0,01
2	124,20	137,05	5,08	5,10	+ 0,02
3	89,80	64,37	8,25	8,35	+ 0,10
4	124,10	137,00	5,10	5,06	— 0,04
5	88,70	64,70	8,54	8,40	— 0,14
6	123,40	136,05	5,01	5,03	+ 0,02
7	89,50	65,00	— 8,39	— 8,45	+ 0,06

N = — 5,06 x = + 3,31 m^2 = 0,0119
α = + 0,017 $3(\beta - \alpha)$ = — 0,13 m = 0,109
β = — 0,026 x_0 = + 3,18 m_0 = 0,160

X. Oudemans. 8 Octobre 1879. x = n°. 19 — A. μ_1 = A — M.

N.	d	g	μ	C	ε
1	44,30	73,45	— 9,58	— 9,56	— 0,02
2	58,60	78,95	6,92	6,82	— 0,10
3	44,20	72,75	9,39	9,47	+ 0,08
4	58,95	77,95	6,49	6,68	+ 0,19
5	44,40	73,10	9,44	9,37	— 0,07
6	58,75	78,20	6,63	6,54	— 0,09
7	44,75	72,88	— 9,26	— 9,28	+ 0,02

N = — 6,68 x = + 2,74 m^2 = 0,0221
α = + 0,071 $3(\beta - \alpha)$ = — 0,08 m = 0,149
β = + 0,045 x_0 = + 2,66 m_0 = 0,219

XI. Oudemans. 10 Octobre 1879. x = n°. 27 — A. μ_1 = A — M.

N.	d	g	μ	C	ε
1	80,90	64,20	+ 4,62	+ 4,64	— 0,02
2	95,60	75,20	5,67	5,71	— 0,04
3	79,40	63,20	4,47	4,56	— 0,09
4	95,25	73,97	5,95	5,87	+ 0,08
5	81,50	64,52	4,70	4,48	+ 0,22
6	93,92	72,57	5,98	6,02	— 0,04
7	79,65	64,05	+ 4,28	+ 4,40	— 0,12

N = + 5,87 x = + 1,35 m^2 = 0,0269
α = + 0,078 $3(\beta - \alpha)$ = — 0,35 m = 0,164
β = — 0,089 x_0 = + 1,00 m_0 = 0,240

XII. Oudemans. 10 Octobre 1879 soir. x = n°. 27 — A. μ_1 = A — M.

N.	d	g	μ	C	ε
1	65,70	38,17	+ 8,17	+ 8,12	+ 0,05
2	75,75	37,67	11,42	11,40	+ 0,02
3	65,60	37,95	8,21	8,26	— 0,05
4	76,75	38,75	11,39	11,41	— 0,02
5	65,30	37,35	8,31	8,39	— 0,08
6	77,90	39,70	11,44	11,42	+ 0,02
7	67,25	38,35	+ 8,59	+ 8,52	+ 0,07

N = + 11,41 x = + 3,10 m^2 = 0,0058
α = + 0,005 $3(\alpha - \beta)$ = + 0,19 m = 0,076
β = + 0,068 x_0 = + 3,29 m_0 = 0,112

Digitized by Google

TABLEAU XXII (*Suite*).

Calcul des observations du comparateur transversal.

XIII. Oudemans. 12 Octobre 1879. x = n°. 23 — A. μ_1 = A — M.

N.	d	g	μ	C	ε
1	6,05	73,75	— 21,46	— 21,53	+ 0,07
2	2,00	66,82	20,52	20,56	+ 0,04
3	6,70	73,90	21,31	21,30	— 0,01
4	2,20	66,87	20,47	20,39	— 0,08
5	7,30	74,30	21,25	21,07	— 0,18
6	2,25	65,97	20,17	20,22	+ 0,05
7	9,25	74,50	— 20,71	— 20,84	+ 0,13

$N = -20,39$ $\quad x = +0,79$ $\quad m^2 = 0,0216$
$\alpha = +0,086$ $\quad 3(\beta - \alpha) = +0,09$ $\quad m = 0,147$
$\beta = +0,115$ $\quad x_0 = +0,88$ $\quad m_0 = 0,216$

XIV. Oudemans. 12 Octobre 1879 soir. x = n°. 23 — A. μ_1 = A — M; μ_4 = A — M.

N.	d	g	μ	C	ε
1	12,80	15,02	— 0,86	Les valeurs de μ	
2	99,00	1,62	0,82	indiquent que la dis-	
3	11,25	13,95	0,95	tance des microscopes	
4	9,95	19,85	3,21	a varié trop considé-	
5	98,80	7,72	2,81	rablement entre la	
6	13,10	21,17	2,66	3me et la 5me mesure	
7	99,00	7,57	2,70	pour permettre de	
8	11,50	21,12	— 3,14	calculer α, β et x_0.	

En séparant les mesures 1, 2, 3 des cinq suivantes et en attribuant aux résultats des mesures 1, 2, 3 et des mesures 5, 6, 7, 8 des poids relatifs 5 et 9, on trouve: $x = +0,19$.

XV. Oudemans. 16 Octobre 1879. x = n°. 19 — A. μ_1 = A — M.

N.	d	g	μ	C	ε
1	87,00	273,07	+ 3,69	+ 3,69	0,00
2	82,70	250,67	9,45	9,54	— 0,09
3	87,10	273,52	3,58	3,76	— 0,16
4	84,55	250,50	10,08	9,90	+ 0,18
5	88,75	273,25	4,17	3,83	+ 0,34
6	85,30	250,95	10,17	10,25	— 0,08
7	84 30	270,32	+ 3,73	+ 3,90	— 0,17

$N = +9,90$ $\quad x = +6,10$ $\quad m^2 = 0,0723$
$\alpha = +0,178$ $\quad 3(\beta - \alpha) = -0,43$ $\quad m = 0,269$
$\beta = +0,035$ $\quad x_0 = +5,67$ $\quad m_0 = 0,395$

XVI. Oudemans. 18 Octobre 1879 soir. x = n°. 23 — A. μ_1 = A — M.

N.	d	g	μ	C	ε
1	45,25	6,10	+ 12,01	+ 12,04	— 0,03
2	54,60	0,47	16,67	16,73	— 0,06
3	47,55	7,70	12,21	12,19	+ 0,02
4	55,15	99,82	17,05	16,93	+ 0,12
5	47,65	7,30	12,37	12,34	+ 0,03
6	56,50	1,02	17,08	17,14	— 0,06
7	47,75	7,15	+ 12,45	+ 12,48	— 0,03

$N = +16,93$ $\quad x = +4,67$ $\quad m^2 = 0,0074$
$\alpha = +0,103$ $\quad 3(\beta - \alpha) = -0,09$ $\quad m = 0,086$
$\beta = +0,073$ $\quad x_0 = +4,58$ $\quad m_0 = 0,124$

XVII. Stamkart. 7 Octobre 1879 soir. x = n°. 19 — A. μ_1 = A — M.

N.	d	g	μ	C	ε
1	53,07	63,17	— 3,63	— 3,57	— 0,06
2	112,50	116,93	2,32		
3	52,13	61,27	3,32	3,43	+ 0,11
4	116,10	119,43	2,00		
5	51,77	61,00	— 3,34	— 3,29	— 0,05

$N = -2,16$ $\quad x = +1,27$ $\quad m^2 = 0,0182$
$\alpha = +0,163$ $\quad 2(\beta - \alpha) = -0,18$ $\quad m = 0,135$
$\beta = +0,072$ $\quad x_0 = +1,09$ $\quad m_0 = 0,246$

XVIII. Stamkart. 8 Octobre 1879 soir. x = n°. 19 — A. μ_1 = A — M.

N.	d	g	μ	C	ε
1	19,00	17,90	+ 0,19	+ 0,25	— 0,06
2	30,50	29,22	0,15	0,16	— 0,01
3	18,15	17,00	0,21	0,19	+ 0,02
4	30,10	28,72	0,19	0,18	+ 0,01
5	19,00	17,67	0,26	0,13	+ 0,13
6	30,50	29,05	+ 0,21	0,21	0,00
7	20,10	19,67	— 0,03	+ 0,07	— 0,10

$N = +0,18$ $\quad x = +0,02$ $\quad m^2 = 0,0104$
$\alpha = +0,014$ $\quad 3(\beta - \alpha) = -0,13$ $\quad m = 0,102$
$\beta = -0,031$ $\quad x_0 = -0,11$ $\quad m_0 = 0,150$

Digitized by Google

TABLEAU XXII (*Suite*).

Calcul des observations du comparateur transversal.

XIX. Stamkart. 10 Octobre 1879. x = n°. 27 — A. μ_1 = A — M.

N.	d	g	μ	C	ε
1	85,55	60,60	+ 7,19	+ 7,34	— 0,15
2	109,05	73,30	10,41	10,18	+ 0,23
3	86,65	61,00	7,40	7,36	+ 0,04
4	110,65	76,55	9,88	10,34	— 0,46
5	87,10	60,45	7,72	7,37	+ 0,35
6	110,10	73,30	10,74	10,51	+ 0,23
7	85,65	60,85	+ 7,14	+ 7,39	— 0,25

$N = +10{,}34$ $\quad x = +2{,}98$ $\quad m^2 = 0{,}1755$
$\alpha = +0{,}083$ $\quad 3(\beta - \alpha) = -0{,}22$ $\quad m = 0{,}419$
$\beta = +0{,}009$ $\quad x_0 = +2{,}76$ $\quad m_0 = 0{,}616$

XX. Stamkart. 10 Octobre 1879 soir. x = n°. 27 — A. μ_1 = A — M.

N.	d	g	μ	C	ε
1	80,60	69,45	+ 2,87	+ 2,86	+ 0,01
2	23,02	94,50	8,01	8,02	— 0,01
3	81,20	69,62	3,00	3,03	— 0,03
4	23,82	95,05	8,09	8,08	+ 0,01
5	81,75	69,40	3,24	3,19	+ 0,05
6	23,50	94,55	8,14	8,15	— 0,01
7	83,00	70,30	+ 3,34	+ 3,36	— 0,02

$N = +8{,}03$ $\quad x = +4{,}97$ $\quad m^2 = 0{,}0014$
$\alpha = +0{,}032$ $\quad 3(\beta - \alpha) = +0{,}15$ $\quad m = 0{,}037$
$\beta = +0{,}082$ $\quad x_0 = +5{,}12$ $\quad m_0 = 0{,}054$

XXI. Stamkart. 12 Octobre 1879. x = n°. 23 — A. μ_1 = A — M.

N.	d	g	μ	C	ε
1	19,45	42,90	— 7,58	Les valeurs de μ indiquent une variation trop considérable de la distance des microscopes pour permettre de calculer α, β et x_0.	
2	16,75	37,70	6,76		
3	19,82	43,60	7,68		
4	17,95	37,70	6,39		
5	20,00	51,15	10,02		
6	16,90	42,72	8,30		
7	20,00	51,00	— 9,97		

En divisant la série en deux sections comprenant les mesures 1—4 et 5—6 et ayant des poids relatifs 3 et 2 on obtient $x = +1{,}30$.

XXII. Stamkart. 12 Octobre 1879 soir. x = n°. 23 — A. μ_1 = A — M.

N.	d	g	μ	C	ε
1	91,45	114,90	— 8,17	— 8,18	+ 0,01
2	101,60	119,37	6,46	6,40	— 0,06
3	91,75	114,95	8,09	8,07	— 0,02
4	103,70	120,30	6,10	6,21	+ 0,11
5	91,27	114,10	7,97	7,96	— 0,01
6	102,55	119,10	6,08	6,02	— 0,06
7	91,33	113,70	— 7,83	— 7,84	+ 0,01

$N = -6{,}21$ $\quad x = +1{,}80$ $\quad m^2 = 0{,}0067$
$\alpha = +0{,}095$ $\quad 3(\beta - \alpha) = -0{,}11$ $\quad m = 0{,}082$
$\beta = +0{,}057$ $\quad x_0 = +1{,}69$ $\quad m_0 = 0{,}120$

XXIII. Stamkart. 16 Octobre 1879. x = n°. 19 — A. μ_1 = A — M.

N.	d	g	μ	C	ε
1	68,97	23,15	+ 13,93	+ 13,92	+ 0,01
2	86,00	24,25	13,83	13,75	+ 0,08
3	69,35	22,65	14,20	14,03	+ 0,17
4	85,00	22,97	13,93	13,06	— 0,13
5	67,27	22,00	13,77	14,14	— 0,37
6	88,10	24,37	13,43	13,37	+ 0,06
7	69,22	21,75	+ 14,45	+ 14,26	+ 0,19

$N = +19{,}06$ $\quad x = +4{,}98$ $\quad m^2 = 0{,}0763$
$\alpha = +0{,}153$ $\quad 3(\beta - \alpha) = -0{,}29$ $\quad m = 0{,}276$
$\beta = +0{,}056$ $\quad x_0 = +4{,}69$ $\quad m_0 = 0{,}405$

XXIV. Stamkart. 19 Octobre 1879. x = n°. 23 — A. μ_1 = A — M.

N.	d	g	μ	C	ε
1	59,12	87,40	— 9,42	— 9,21	— 0,21
2	76,30	82,35	2,54	2,61	+ 0,07
3	60,40	85,65	8,48	8,92	+ 0,44
4	74,85	80,62	2,44	2,30	— 0,14
5	60,52	86,90	8,84	8,62	— 0,22
6	77,45	81,47	1,91	1,99	+ 0,08
7	61,12	85,85	— 8,32	— 8,32	0,00

$N = -2{,}30$ $\quad x = +6{,}47$ $\quad m^2 = 0{,}1057$
$\alpha = +0{,}155$ $\quad 3(\beta - \alpha) = -0{,}02$ $\quad m = 0{,}325$
$\beta = +0{,}148$ $\quad x_0 = +6{,}45$ $\quad m_0 = 0{,}477$

Digitized by Google

TABLEAU XXII (*Suite*).

Calcul des observations du comparateur transversal.

XXV. G. Tresca. 5 Octobre 1879. x = n° 19 — A. μ_1 = X — M.

N.	d	g	μ	
1	72,40	84,40	— 4,39	Les mesures arrangées autrement que les précédentes ne permettent pas le calcul de α, β et x_0.
2	67,10	85,40	— 6,34	

N = — 4,39 x = + 1,95

XXVI. G. Tresca. 5 Octobre 1879. x = n°. 19 — A. μ_1 = X — M.

N.	d	g	μ	
1	73,84	80,10	— 2,58	Les mesures ont été arrangées de la même manière que dans la série précédente.
2	72,70	84,20	— 4,23	

N = — 2,58 x = + 1,65

XXVII. G. Tresca. 10 Octobre 1879 x = n°. 27 — A. μ_1 = A — M.

N.	d	g	μ	C	ε
1	87,70	54,25	+ 9,86	+ 10,04	— 0,18
2	92,75	54,37	11,38	11,35	+ 0,03
3	87,75	53,00	10,27	9,99	+ 0,28
4	93,00	54,80	11,32	11,37	— 0,05
5	87,12	53,50	9,92	9,94	— 0,02
6	94,30	55,77	11,41	11,39	+ 0,02
7	83,32	55,00	+ 9,82	+ 9,89	— 0,07

N = + 11,37 x = + 1,40 m^2 = 0,0400
α = + 0,009 3 (β — α) = — 0,10 m = 0,200
β = — 0,024 x_0 = + 1,30 m_0 = 0,294

XXVIII. G. Tresca. 11 Octobre 1879. x = n°. 27 — A. μ_1 = A — M.

N.	d	g	μ	C	ε
1	73,40	37,15	+ 10,86	+ 10,96	— 0,10
2	70,22	31,40	11,70	11,69	+ 0,01
3	73,65	36,75	11,07	10,92	+ 0,15
4	70,60	31,00	11,95	11,98	— 0,03
5	73,60	37,25	10,89	10,89	0,00
6	70,6[illegible]	29,90	12,29	12,28	+ 0,01
7	74,05	38,00	+ 10,80	+ 10,85	— 0,05

N = + 11,98 x = + 1,08 m^2 = 0,0120
α = + 0,147 3 (β — α) = — 0,50 m = 0,110
β = — 0,019 x_0 = + 0,58 m_0 = 0,162

XXIX. G. Tresca. 11 Octobre 1879 soir. x = n°. 23 — A. μ_1 = A — M.

N.	d	g	μ	C	ε
1	14,77	29,40	— 4,75	— 4,82	+ 0,07
2	7,50	24,75	5,52	5,51	— 0,01
3	10,07	29,50	4,99	4,80	— 0,19
4	7,00	23,95	5,42	5,44	+ 0,02
5	14,82	29,05	4,62	4,78	+ 0,16
6	7,10	23,95	5,39	5,38	— 0,01
7	14,32	29,15	— 4,81	— 4,76	— 0,05

N = — 5,44 x = — 0,65 m^2 = 0,0232
α = + 0,032 3 (β — α) = — 0,07 m = 0,152
β = + 0,010 x_0 = — 0,72 m_0 = 0,223

XXX. G. Tresca. 12 Octobre 1879. x = n°. 23 — A. μ_1 = A — M.

N.	d	g	μ	C	ε
1	30,30	51,32	— 6,90	— 6,95	+ 0,05
2	12,30	31,75	6,25	6,31	+ 0,06
3	30,20	51,22	6,90	6,89	— 0,01
4	12,17	31,65	6,26	6,15	— 0,11
5	29,55	50,77	6,96	6,82	— 0,14
6	13,50	31,95	5,95	6,00	+ 0,05
7	30,00	50,30	— 6,67	— 6,76	+ 0,09

N = — 6,15 x = + 0,70 m^2 = 0,0162
α = + 0,076 3 (β — α) = — 0,13 m = 0,127
β = + 0,032 x_0 = + 0,57 m_0 = 0,186

XXXI. G. Tresca. 16 Octobre 1879. x = n°. 19 — A. μ_1 = A — M.

N.	d	g	μ	C	ε
1	113,70	95,60	+ 4,79	+ 4,97	— 0,18
2	94,90	56,00	11,53	11,44	+ 0,09
3	114,90	95,10	5,32	4 99	+ 0,33
4	94,00	55,72	11,34	11,50	— 0,16
5	114,12	95,65	4,91	5,01	— 0,10
6	94,00	54,77	11,64	11,55	+ 0,09
7	114,00	95,25	+ 5,00	+ 5,03	— 0,03

N = + 11,50 x = + 6,50 m^2 = 0,0647
α = + 0,027 3 (β — α) = — 0,05 m = 0,254
β = + 0,010 x_0 = + 6,45 m_0 = 0,373

XXXII. G. Tresca. 19 Octobre 1879. x = n°. 23 — A. μ_1 = A — M.

N.	d	g	μ	C	ε
1	65,22	85,30	— 6,88	— 6,98	+ 0,10
2	77,70	80,92	1,66	1,69	+ 0,03
3	63,87	83,95	6,87	6,78	— 0,09
4	77,60	80,37	1,51	1,45	— 0,05
5	64,77	84,15	6,66	6,57	+ 0,09
6	79,00	80,65	1,17	1,20	+ 0,03
7	65,25	83,40	— 6,28	— 6,37	— 0,09

N = — 1,45 x = + 5,23 m^2 = 0,0132
α = + 0,121 3 (β — α) = — 0,06 m = 0,115
β = + 0,102 x_0 = + 5,17 m_0 = 0,169

Digitized by Google

93. Parmi les 28 valeurs de $3(\beta - \alpha)$ qu'on a pu calculer, il y a 23 négatives dont la somme est $-4{,}64$, 5 positives dont la somme est $+0{,}53$. Il paraît donc que, ainsi qu'il était à présumer, la longueur apparente du Mètre des Archives s'est abaissée dans le cours des séries d'observation, ce qui indique que les objectifs des microscopes se sont rapprochés des bouts du prototype. Les mesures du comparateur longitudinal ne montrent rien de pareil, car si l'on calcule les séries du Tableau XV de la même manière en distinguant les variations proportionnelles au temps des équations de rang pair de celles de rang impair et en désignant par β les variations de G — M, par α celles de D — M, les 24 séries fournissent 9 valeurs positives de $3(\beta - \alpha)$ avec une somme $+1{,}92$ et 15 négatives avec une somme $-1{,}91$.

La valeur moyenne de $\beta - \alpha$ dans les mesures du comparateur transversal serait 0,0489. On peut évaluer le temps écoulé entre deux mesures consécutives à 3 minutes, moyenne des chiffres de M. Oudemans qui a noté l'heure où, la mise au point étant terminée, il commençait ses mesures. Dans l'espace de dix minutes l'accroissement de la longueur apparente du Mètre des Archives a donc été en moyenne de $0^{\mu},16$ ce qui s'accorde assez bien avec le chiffre $0^{\mu},12$ à $0^{\mu},17$ que nous avons calculé au n°. 90, en attribuant la variation de la longueur apparente du prototype à la différence des dilatations des supports en fonte et des corps des microscopes.

Il reste encore à corriger les valeurs x_o de la différence de température des mètres. Comme, à l'exception des séries XIV, XXII, XXV et XXVI, x_o se rapporte au commencement de la série, nous avons admis, pour les séries qui ont permis de calculer β et α, que cette différence était celle des thermomètres au commencement des observations. Nous avons réduit les valeurs de x_o aux températures des mètres à traits en attribuant à la dilatation du Mètre des Archives la valeur $8^{\mu},7$ par degré, un peu plus élevée que celle des nouveaux étalons.

Digitized by Google

TABLEAU XXIII.

Récapitulation et correction des observations du comparateur transversal.

	Longueur mesurée.	Série.	T.	Δ T.	x_o.	Δ x_o.	$x_o + \Delta x_o$.
	(19) — A	I.	17,58	0,000	+ 0,95	—	+ 0,95
	(19) — A	II.	17,64	0,000	+ 1,29	—	+ 1,29
	(27) — A	III.	17,42	— 0,025	+ 1,14	+ 0,22	+ 1,36
	(27) — A	IV.	17,77	0,000	+ 1,91	—	+ 1,91
B.	(23) — A	V.	17,47	— 0,030	+ 0,27	+ 0,26	+ 0,53
	(23) — A	VI.	17,80	0,000	+ 0,78	—	+ 0,78
	(19) — A	VII.	+ 1,40	+ 0,020	+ 5,71	— 0,17	+ 5,54
	(23) — A	VIII.	— 1,45	+ 0,010	+ 5,29	— 0,09	+ 5,20
	(19) — A	IX.	17,42	— 0,025	+ 3,18	+ 0,22	+ 3,40
	(19) — A	X.	17,70	0,000	+ 2,66	—	+ 2,66
	(27) — A	XI.	17,40	— 0,020	+ 1,00	+ 0,17	+ 1,17
	(27) — A	XII.	17,88	+ 0,005	+ 3,29	— 0,04	+ 3,25
O.	(23) — A	XIII.	17,45	— 0,025	+ 0,88	+ 0,22	+ 1,10
	(23) — A	XIV.	17,94	+ 0,040	+ 0,19	— 0,35	— 0,16
	(19) — A	XV.	+ 1,10	+ 0,012	+ 5,67	— 0,10	+ 5,57
	(23) — A	XVI.	— 1,51	+ 0,040	+ 4,58	— 0,35	+ 4,23
	(19) — A	XVII.	17,70	+ 0,010	+ 1,09	— 0,09	+ 1,00
	(19) — A	XVIII.	17,64	0,000	— 0,11	—	— 0,11
	(27) — A	XIX.	17,51	— 0,020	+ 2,76	+ 0,17	+ 2,93
	(27) — A	XX.	17,71	+ 0,010	+ 5,12	— 0,09	+ 5,03
S.	(23) — A	XXI.	17,57	— 0,010	+ 1,30	+ 0,09	+ 1,39
	(23) — A	XXII.	17,70	— 0,010	+ 1,69	+ 0,09	+ 1,78
	(19) — A	XXIII.	+ 1,84	+ 0,020	+ 4,69	— 0,17	+ 4,52
	(23) — A	XXIV.	— 0,51	+ 0,020	+ 6,45	— 0,17	+ 6,28
	(19) — A	XXV.	17,29	— 0,015	+ 1,95	+ 0,13	+ 2,08
	(19) — A	XXVI.	17,29	— 0,015	+ 1,65	+ 0,13	+ 1,78
	(27) — A	XXVII.	17,72	+ 0,020	+ 1,30	— 0,17	+ 1,13
	(27) — A	XXVIII.	17,80	0,000	+ 0,58	—	+ 0,58
T.	(23) — A	XXIX.	17,63	— 0,010	— 0,72	+ 0,09	— 0,63
	(23) — A	XXX.	17,69	0,000	+ 0,57	—	+ 0,57
	(19) — A	XXXI.	+ 2,23	+ 0,010	+ 6,45	— 0,09	+ 6,36
	(23) — A	XXXII.	— 0,78	0,000	+ 5,17	—	+ 5,17

94. La dernière colonne du Tableau précédent montre que les comparaisons des étalons à traits avec le mètre à bouts des Archives sont loin d'être aussi sûres que celles des mètres à traits entre eux, récapitulées au Tableau XXI. Les

Digitized by Google

écarts des diverses valeurs d'une même différence X — A dépassent fréquemment un micron. Le plus grand écart, 27 — A des séries XX et XXVIII, atteint même $4^{\mu},45$. Il n'y a pas à douter que ces divergences considérables proviennent des erreurs causées par une mise au point inexacte. Pour la valeur évidemment trop élevée $27 - A = +5,02$ de la série XX l'inexactitude de ce réglage a été constatée. Nous avons communiqué au n°. 68 les termes dans lesquels M. Stamkart a relaté lui-même cet incident. A ce sujet nous remarquerons cependant que, probablement, ce n'était par l'ajustement de l'image des pointes du prototype, mais celui des fils micrométriques qui laissait à désirer. Il est vrai que l'observateur, qui succédait à M. Stamkart hypermétrope, était myope, mais au moment où il remarquait que l'image des fils était diffuse il avait corrigé sa myopie par des verres négatifs. La série XX nous semble ainsi fournir la preuve que l'ajustement exact de l'oculaire n'est pas moins important que celui du microscope entier.

Les divergences assez fortes des résultats numériques de M. Oudemans sont plus difficiles à expliquer. Les valeurs relativement faibles des erreurs moyennes des pointés ainsi que des erreurs moyennes des mesures de M. Oudemans que nous avons déduites des expériences du comparateur longitudinal montrent bien la précision habituelle de ses observations. Il faut donc admettre que la méthode compliquée, employée par cet observateur pour obtenir un ajustement exact, a exposé à des erreurs, soit parce qu'il est difficile de juger si deux ajustements du microscope sont également défectueux mais de sens contraire, soit parce que les parties du comparateur qui servent à régler la mise au point ne permettent pas d'obtenir avec une exactitude suffisante une mise au point chiffrée. Nous avons remarqué, en effet, que le temps perdu des vis qui servent à ce réglage est considérable. Cela est surtout le cas pour celles qui servent à abaisser ou à élever les tables qui portent les mètres. Les longues tiges qui transmettent le mouvement se tordent sensiblement avant que la table suive le mouvement du bouton divisé. Le défaut d'une relation suffisamment constante entre les lectures des cadrans divisés dans les différentes séries et la véritable position des tables apparaît d'ailleurs avec évidence si l'on consulte les chiffres des mises au point obtenus dans celles des séries qui se rapportent à une même combinaison de deux mètres. On reconnaît qu'il n'existe aucun rapport fixe entre ces chiffres et les résultats numériques des séries, ce qui cependant eût dû arriver si, aux mêmes lectures des cadrans de réglage, eût répondu un même ajustement de la mise au point. Il est bien probable que, par les causes que nous venons d'indiquer, on a perdu tout l'avantage qu'au point de vue théorique on était en droit d'attendre de la méthode, qui consistait à chercher la moyenne de plusieurs ajustements consécutifs et de diminuer ainsi l'erreur probable de la mise au point adoptée pour la comparaison.

Digitized by Google

Remarquons que les chiffres obtenus dans les comparaisons à basse température présentent un accord beaucoup plus satisfaisant. Or, ce sont ces dernières comparaisons qui sont les plus importantes pour le résultat final auquel doivent conduire toutes les opérations, savoir, la longueur des nouveaux étalons par rapport au Mètre des Archives à la température de la glace fondante.

95. Les remarques qui précèdent peuvent servir à fixer le mode de calcul qu'il faudra employer pour déduire de l'ensemble des observations les équations (19) — A, (23) — A, (27) — A à zéro. A la rigueur il faudrait établir un système d'équations comprenant toutes les comparaisons, tant celles du comparateur longitudinal que celles du comparateur transversal, chacune multipliée par un coefficient représentant le poids de l'équation. Ce coefficient serait différent pour les équations obtenues avec les deux instruments et varierait même d'un observateur à l'autre. Mais le nombre de séries est trop restreint pour fixer d'une manière assez sûre la valeur des poids relatifs des deux espèces de comparaisons. Il est bien évident, cependant, que le poids des comparaisons des mètres à traits entre eux est très considérable par rapport à celui des comparaisons qui ont été exposées aux erreurs des mises au point. On ne s'écartera que très peu de la méthode rigoureuse en considérant les équations des mètres à traits entre eux comme des équations de condition auxquelles doivent satisfaire, d'une manière absolue, les équations entre les nouveaux étalons et le prototype. Quant aux poids relatifs des équations des divers observateurs, ils présentent également quelque incertitude et nous avons estimé d'autant mieux pouvoir les prendre égaux, que le calcul, fait en employant des valeurs approximatives, conduit à un résultat presque identique.

Mais avant de procéder à la déduction des équations finales, nous avons cru devoir introduire les deux séries de comparaisons à basse température, effectuées en dehors du programme adopté par la Commission. La série A de M. Oudemans (Tableau XVII) offre l'avantage particulier, que, par exception, l'observateur s'est servi, pour la mise au point, d'un ajustement direct. La série B de M. Bosscha a bien été faite dans des conditions défavorables par suite de la trop longue course des fils du micromètre, mais il est inadmissible que, par cette cause, il ait pu s'introduire une erreur qui entre en comparaison avec les incertitudes de la mise au point. Or, non seulement les comparaisons à basse température sont les plus importantes, parce que le poids du résultat final est presque proportionnel à leur nombre, mais, de plus, l'occasion de mesurer la longueur du Mètre des Archives à une température voisine de zéro est tellement rare, qu'on justifierait difficilement d'en avoir négligé une seule. La réduction des séries supplémentaires est contenue dans le Tableau suivant.

Digitized by Google

TABLEAU XXIV.

Calcul des séries supplémentaires.

A. Oudemans. 15 Octobre 1879 soir. x = n°. 19 — A. A — M = μ_1.

N.	d	g	μ	C	ε
1	35,30	94,87	− 19,13	− 19,10	− 0,03
2	56,35	95,37	12,81	12,76	− 0,05
3	38,00	96,90	18,94	19,05	+ 0,11
4	59,00	97,05	12,52	12,61	+ 0,09
5	39,60	99,10	19,14	19,01	− 0,13
6	59,65	97,67	12,52	12,47	− 0,05
7	37,55	96,35	− 18,90	− 18,96	+ 0,06

$N = -12{,}61$ $\quad x = +6{,}42$ $\quad m^2 = 0{,}0152$
$\alpha = +0{,}073$ $\quad 3(\beta - \alpha) = -0{,}15$ $\quad m = 0{,}123$
$\beta = +0{,}024$ $\quad x_0 = +6{,}27$ $\quad m_x = 0{,}181$

B. Bosscha. 18 Octobre 1879 soir. x = n°. 23 — A. A — M = μ_1.

N.	d	g	μ	C	ε
1	69,10	53,67	+ 4,31	+ 4,02	+ 0,29
2	406,00	361,35	10,49	10,55	− 0,06
3	70,50	56,95	3,71	3,94	− 0,23
4	404,60	360,07	10,77	10,65	+ 0,12
5	70,45	57,77	3,43	3,85	− 0,42
6	405,60	361,30	10,69	10,75	− 0,06
7	71,85	56,95	+ 4,12	+ 3,77	+ 0,35

$N = +10{,}65$ $\quad x = +6{,}75$ $\quad m^2 = 0{,}1525$
$\alpha = +0{,}050$ $\quad 3(\beta - \alpha) = -0{,}28$ $\quad m = 0{,}391$
$\beta = -0{,}042$ $\quad x_0 = +6{,}47$ $\quad m_x = 0{,}574$

Les deux séries attribuent de nouveau une valeur négative à la différence $\beta - \alpha$. Quant à la série B, quoique la valeur relativement élevée de l'erreur moyenne indique que les observations ont été faites dans des conditions désavantageuses, l'erreur probable ne dépasse pas celle qui résulte des difficultés inhérentes à la comparaison d'un mètre à traits avec un mètre à bouts.

96. Les expériences de M. Fizeau, que nous rapporterons plus loin, démontrent que les mètres n°. 19, n°. 27 et n°. 23 ont à très peu près le même coefficient de dilatation. Un calcul provisoire de nos comparaisons fait voir que la différence des dilatations des mètres n°. 19 et n°. 23 est trop faible pour pouvoir être accusée par nos mesures. Si l'on réunit en un seul groupe les comparaisons du n°. 19 avec A à température ambiante, et qu'on retranche, de la valeur moyenne de (19) — A, celle qu'indiquent les comparaisons à basse température, on obtient pour la différence des dilatations par degré d_{19} et d_A des deux mètres: $d_{19} - d_A = -0{,}247$. Le même calcul appliqué au mètre n°. 23 donne $d_{23} - d_A = -0{,}245$, d'où résulterait pour $d_{19} - d_{23}$ une valeur de beaucoup inférieure à la limite de précision.

Nous avons, en conséquence, adopté pour les trois étalons le même coefficient $d - d_A = \delta$. En réduisant au moyen des équations VIII du n°. 86:

$$(19) - (23) = +0\mu{,}62$$
$$19) - (27) = -0\mu{,}30$$

Digitized by Google

les différences (23) — A et (27) — A à la même valeur (19) — A, que nous désignerons par z, on déduit de chaque comparaison une équation de la forme:

$$z + \delta t = p$$

z et δ étant les inconnues.

97. Les systèmes d'équations que fournissent les comparaisons de chaque observateur ont été résolus séparément. Les données qui ont servi à ce calcul ainsi que les résultats obtenus sont indiqués dans le Tableau XXV, qui contient aussi le calcul des écarts de chaque comparaison et de l'erreur moyenne de chaque résultat individuel. En posant $[p] = R_1$, $[pt] = R_2$ on aura:

$$z = Q_{11} R_1 + Q_{12} R_2$$
$$\delta = Q_{12} R_1 + Q_{22} R_2,$$

où

$$Q_{11} = \frac{[t^2]}{n[t^2] - [t]^2} \qquad Q_{12} = \frac{-[t]}{n[t^2] - [t]^2} \qquad Q_{22} = \frac{n}{n[t^2] - [t]^2}$$

n étant le nombre des comparaisons.

L'erreur moyenne d'une comparaison sera $M = \sqrt{\frac{[e^2]}{n-2}}$, celle de la valeur de z, $M_z = M\sqrt{Q_{11}}$, celle de la valeur de δ sera $M_\delta = M\sqrt{Q_{22}}$, et l'erreur moyenne de la valeur de z_T qui, d'après les valeurs trouvées de z et δ, exprimerait la différence (19) — A à la température T:

$$M_{zT} = M\sqrt{Q_{11} + 2Q_{12}T + Q_{22}T^2}.$$

Cette dernière erreur est minimum pour:

$$Q_{12} + Q_{22}T = 0$$

c'est-à-dire:

$$T = \frac{[t]}{n}$$

la température moyenne des observations.

Digitized by Google

TABLEAU XXV.

Calcul des équations finales.

Série.		T.	$x_0 + \Delta x_0$.	$p = 19 - \Lambda$. Observé.	$p = 19 - \Lambda$. Calculé.	s.	p calculé d'après la formule générale.	E.
B.	I.	17,58	0,95	0,95	1,25	— 0,30	1,61	— 0,66
	II.	17,64	1,29	1,29	1,23	+ 0,06	1,59	— 0,30
	III.	17,42	1,36	1,06	1,29	— 0,23	1,64	— 0,58
	IV.	17,77	1,91	1,61	1,20	+ 0,41	1,56	+ 0,05
	V.	17,47	0,53	1,15	1,28	— 0,13	1,63	— 0,48
	VI.	17,80	0,78	1,40	1,19	+ 0,21	1,55	— 0,15
	VII.	1,42	5,54	5,54	5,46	+ 0,08	5,46	+ 0,08
	VIII.	— 1,45	5,20	5,82	6,21	— 0,39	6,15	— 0,33
	B.	— 1,69	5,95	6,57	6,28	+ 0,29	6,20	+ 0,37
		$z =$ 5$^{\mu}$,835		$M^2 = 0,0883$		$M_2 = 0,166$		
		$\delta =$ — 0 ,2609		$M = 0,297$		$M_3 = 0,011$.		
O.	IX.	17,42	3,40	3,40	2,06	+ 1,34	1,64	+ 1,76
	X.	17,70	2,66	2,66	2,01	+ 0,65	1,58	+ 1,08
	XI.	17,40	1,17	0,87	2,06	— 1,19	1,65	— 0,78
	XII.	17,88	3,25	2,95	1,97	+ 0,98	1,53	+ 1,42
	XIII.	17,45	1,10	1,72	2,05	— 0,33	1,64	+ 0,08
	XIV.	17,94	— 0,16	0,46	1,96	— 1,50	1,52	— 1,06
	A.	0,26	5,92	5,92	5,37	+ 0,55	5,74	+ 0,18
	XV.	1,10	5,57	5,57	5,20	+ 0,37	5,54	+ 0,03
	XVI.	— 1,51	4,23	4,85	5,71	— 0,86	6,16	— 1,31
		$z =$ 5$^{\mu}$,417		$M^2 = 0,9979$		$M_2 = 0,574$		
		$\delta =$ — 0 ,1927		$M = 0,999$		$M_3 = 0,040$.		
S.	XVII.	17,70	1,00	1,00	2,08	— 1,08	1,58	— 0,58
	XVIII.	17,64	— 0,11	— 0,11	2,09	— 2,20	1,59	— 1,70
	XIX.	17,51	2,93	2,63	2,12	+ 0,51	1,62	+ 1,01
	XX.	17,71	5,03	4,73	2,07	+ 2,66	1,58	+ 3,15
	XXI.	17,57	1,39	2,01	2,11	— 0,10	1,61	+ 0,40
	XXII.	17,70	1,78	2,40	2,08	+ 0,32	1,58	+ 0,82
	XXIII.	1,84	4,52	4,52	5,51	— 0,99	5,36	— 0,84
	XXIV.	— 0,51	6,28	6,90	6,02	+ 0,88	5,92	+ 0,98
		$z =$ 5$^{\mu}$,907		$M^2 = 2,5348$		$M_2 = 1,167$		
		$\delta =$ — 0,2163		$M = 1,592$		$M_3 = 0,076$.		
T.	XXV.	17,29	2,08	2,08	1,12	+ 0,96	1,68	+ 0,40
	XXVI.	17,29	1,78	1,78	1,12	+ 0,66	1,68	+ 0,10
	XXVII.	17,72	1,13	0,83	0,99	— 0,16	1,57	— 0,74
	XXVIII.	17,80	0,58	0,28	0,97	— 0,69	1,55	— 1,27
	XXIX.	17,63	— 0,63	— 0,01	1,02	— 1,03	1,60	— 1,61
	XXX.	17,69	0,57	1,19	1,00	+ 0,19	1,58	— 0,39
	XXXI.	2,23	6,36	6,36	5,59	+ 0,77	5,27	+ 1,09
	XXXII.	— 0,78	5,17	5,79	6,49	— 0,70	5,99	— 0,20
		$z =$ 6$^{\mu}$,254		$M^2 = 0,6731$		$M_2 = 0,603$		
		$\delta =$ — 0 ,2969		$M = 0,820$		$M_3 = 0,040$.		

Digitized by Google

98. Si l'on réunit toutes les comparaisons en leur attribuant des poids égaux, on obtient:

$$z = 5{,}801\,; \qquad \delta = -0{,}2386.$$

Avec ces données on a calculé les valeurs de p inscrites dans la septième colonne et les écarts de chacune des comparaisons. Il en résulte pour l'erreur moyenne d'une comparaison: $M = 1^{\mu},033$, pour celle de z et δ: $M_z = 0^{\mu},327$, $M_\delta = 0{,}022$. Comme dans ce dernier calcul on a $Q_{11} = 0{,}10037$; $Q_{12} = -0{,}005691$; $Q_{22} = 0{,}0004751$, l'équation générale résultant de l'ensemble des observations serait:

$$((19) - A)_t = 5^{\mu},801 - 0{,}2386\,t \pm 0{,}696\,\sqrt{0{,}1004 - 0{,}0114\,t + 0{,}000475\,t^2} \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Par ce calcul l'erreur probable de l'équation subit toute l'influence de la moindre exactitude des observations effectuées à température ambiante. Cependant, le poids de la valeur de z n'est que très peu modifié par l'adjonction de ces comparaisons à celles qui ont été effectuées à basse température. En effet, si l'on attribue au résultat d'une comparaison le poids = 1, le poids P de la valeur $z = 5{,}801$ déduite de l'ensemble des 34 comparaisons sera exprimé par:

$$P = \frac{1}{Q_{11}} = n - \frac{[t]^2}{[t^2]} = 9{,}963.$$

Or, le poids de la valeur de z déduite des 10 comparaisons à basse température se calcule de même à:

$$P = 9{,}958.$$

La faible influence des 24 comparaisons à température ambiante sur la précision de l'équation à zéro est due à cette circonstance favorable que la moyenne des températures basses diffère très peu de zéro. Les 10 comparaisons à basse température donnent en moyenne:

$$z = 5^{\mu},784 - 0{,}091\,\delta$$

ce qui rend tout à fait insensible l'influence de δ sur la valeur de z. Si, avec la valeur moyenne $\delta = -0{,}24$, on calcule z et les erreurs des comparaisons, on trouve:

$$z = 5^{\mu},806 \pm 0^{\mu},159$$

avec les valeurs extrêmes du Tableau XXV $\delta = -0{,}30$ et $\delta = -0{,}19$:

$$z = 5^{\mu},812 \pm 0^{\mu},163$$
$$\text{et} \quad z = 5^{\mu},801 \pm 0^{\mu},156.$$

La différence que présentent entre eux ces résultats, tant par rapport à la valeur la plus probable de z que par rapport à la précision, est insignifiante.

Digitized by Google

Nous adoptons, en conséquence, l'équation:

$$((19) - A)_0 = 5^{\mu},81. \quad \ldots \quad (B)$$

avec l'erreur probable $\pm 0^{\mu},16$.

Au moyen des équations VIII du n°. 86 on a, avec la même précision:

$$((23) - A)_0 = 5^{\mu},19. \quad \ldots \quad (C)$$

$$((27) - A)_0 = 6^{\mu},11. \quad \ldots \quad (D)$$

Remarquons encore que les 5 séries VII, A, XV, XXIII, XXXI, dans lesquelles l'étalon n°. 19 a été comparé directement avec le Mètre des Archives, donnent par elles-mêmes, en moyenne, $(19) - A = 5^{\mu},58$ à la température moyenne 1°,37. Avec $\delta = 0,24$ on aurait encore:

$$((19) - A)_0 = 5^{\mu},80.$$

La différence de la dilatation du Mètre des Archives et des nouveaux étalons, calculée d'après l'ensemble des observations, savoir:

$$\delta = -0,2386$$

est plus sujette à quelque erreur, parce que sa valeur dépend en grande partie des observations à température ambiante qui, pour les divers observateurs, offrent une précision très différente. Si l'on combine les quatre groupes en attribuant à chacun d'eux un poids calculé d'après l'erreur moyenne des résultats individuels, l'excès de la dilatation du Mètre des Archives sur celle des nouveaux étalons s'élève de deux unités de la deuxième décimale.

99. L'analyse de l'influence, que diverses causes d'erreur ont eue sur l'incertitude du résultat de l'ensemble des observations, offrirait peu d'intérêt, parce qu'une simple inspection du Tableau XXV suffit pour montrer l'influence prépondérante des erreurs de la mise au point. Le calcul serait plus compliqué que pour les observations du comparateur longitudinal, parce qu'il faudrait distinguer les erreurs des pointés selon qu'il s'agit du mètre à traits X ou du Mètre des Archives A. En effet, les lectures inscrites au Tableau XVI donnent en moyenne:

	Erreur moyenne d'un pointé.	
	X	A
Bosscha	0,168	0,217
Oudemans	0,123	0,171
Stamkart	0,308	0,251
Tresca	0,119	0,128.

A l'exception des pointés de M. Stamkart, qui ont été particulièrement défavorables pour ce qui regarde le mètre à traits, ces données démontrent que le

Digitized by Google

pointé se fait avec plus de précision sur les traits que sur le milieu de la distance des pointes, qui servent à indiquer les bouts du Mètre des Archives.

Les erreurs moyennes d'une mesure, calculées dans le Tableau XXII, sont trop peu certaines pour permettre d'en tirer quelque conséquence. Les systèmes d'équations dont elles ont été déduites se divisent en deux groupes indépendants; l'un de ces groupes ne contient que trois équations pour la détermination de deux inconnues, proportion qui ôte presque toute valeur à l'erreur moyenne calculée. Les moyennes des divers observateurs (B. 0,220; O. 0,150; S. 0,250; T. 0,179) ne peuvent non plus être comparées entre elles, parce que le deuxième et le troisième chiffre ont dû être obtenus en excluant les séries dans lesquelles les écarts, jugés trop forts, ont conduit à partager la série en deux sections.

100. Les trois équations (B), (C), (D) permettent de reproduire au moyen de l'un quelconque des étalons n°. 19, n°. 23 et n°. 27 la base du système métrique, c'est-à-dire la longueur du Mètre des Archives à zéro. A cet effet il suffit de refroidir les étalons jusqu'à la température de la glace fondante. Au point de vue pratique, cependant, il est important de connaître la différence en longueur que les nouveaux étalons, mesurés à une température quelconque, présentent avec le Mètre des Archives mesuré à zéro. Pour opérer la réduction nécessaire il faut connaître la dilatation absolue du métal des nouvelles règles. M. Fizeau a bien voulu nous procurer cette importante donnée. L'illustre physicien a déterminé d'après la méthode bien connue qui lui est propre, avec l'appareil qu'il s'est fait construire, les dilatations de deux bouts coupés sur les barres étirées qui ont fourni les règles n°. 19 et n°. 27. Nous reproduisons dans le Tableau XXVI le résumé des expériences et des calculs que M. Fizeau a transmis à la Commission néerlandaise.

Digitized by Google

TABLEAU XXVI.

Expériences de M. Fizeau relatives à la dilatation du métal des Règles N°. (19) et N°. (26 — 27).

Epaisseurs des Echantillons et Températures des Expériences.

Numéros des Expériences.	Epaisseur de l'Echantillon.		Epaisseur de l'espace compris entre le plan de verre et le métal.		Température stationnaire.		Intervalle des températures.	Degré moyen
	en millimètres.	en longueurs d'onde mm $\lambda = 0{,}0005888.$ e	en millimètres.	en longueurs d'onde. ε	Inférieure. t	Supérieure. t'	$t' - t$	$\frac{t' - t}{2}$ θ
Echantillon N°. (19).								
I.	13,922	23644,7	0,02	33,97	12,496	61,585	49,089	37,04
II.	13,922	23644,7	0,02	33,97	12,496	43,746	31,250	28,12
III.	13,922	23644,7	0,02	33,97	12,496	42,333	29,837	27,41
IV.	13,922	23644,7	0,02	33,97	12,496	60,025	47,529	36,26
Echantillon N°. (26 — 27).								
V.	13,728	23315,2	0,02	33,97	12,790	62,250	49,460	37,52
VI.	13,728	23315,2	0,02	33,97	12,790	41,387	28,597	27,09
VII.	13,728	23315,2	0,02	33,97	12,790	40,223	27,433	26,51
VIII.	13,728	23315,2	0,02	33,97	12,790	60,515	47,725	36,65

Valeurs du déplacement des Franges.

Numéros des Expériences.	Déplacement centripète des franges de t à t' pour chacun des dix points de repère (en fraction de frange).										moyenne. f	Dilatation apparente de l'échantillon en longueurs d'onde $= \frac{f}{2}$ δ
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.		
Echantillon N°. (19).												
I.	0,25	0,25	0,20	0,25	0,25	0,20	0,12	0,15	0,15	0,20	0,202	— 0,1010
II.	0,12	0,15	0,12	0,15	0,10	0,10	0,07	0,10	0,10	0,10	0,111	— 0,0555
III.	0,10	0,10	0,15	0,10	0,10	0,10	0,07	0,05	0,10	0,10	0,097	— 0,0485
IV.	0,25	0,20	0,20	0,25	0,25	0,20	0,12	0,15	0,15	0,20	0,197	— 0,0985
Echantillon N°. (26 — 27).												
V.	0,25	0,17	0,20	0,13	0,15	0,18	0,20	0,17	0,25	0,15	0,185	— 0,0925
VI.	0,15	0,13	0,15	0,08	0,07	0,10	0,15	0,10	0,17	0,10	0,120	— 0,0600
VII.	0,10	0,10	0,15	0,08	0,05	0,05	0,10	0,10	0,15	0,10	0,098	— 0,0490
VIII.	0,20	0,20	0,20	0,13	0,13	0,15	0,20	0,15	0,25	0,12	0,173	— 0,0865

Digitized by Google

TABLEAU XXVI (*Suite*).

Expériences de M. Fizeau relatives à la dilatation du métal des Règles N°. (19) et N°. (26 — 27).

Epaisseurs des Echantillons et Températures des Expériences.

Valeurs des dilatations obtenues.

Numéros des Expériences.	Coefficient de dilatation des vis du trépied de platine pour le degré moyen θ de chaque expérience $\alpha'_{\theta=40}=0{,}0000.0881.8$, $\frac{\Delta\alpha}{\Delta\theta}=0{,}75882$ (voir Compt. Rend. de l'Ac. d. Sc. T. 62). α'_θ.	Dilatation des vis du trépied de t à t' en longueurs d'onde. $\delta'=\alpha'_\theta(e+\varepsilon)(t'-t)$.	Dilatation réelle de l'échantillon du métal en longueurs d'onde. $\Delta=\delta'+\delta$.	Coefficient de dilatation de l'échantillon du métal pour le degré moyen θ de chaque expérience. $\alpha_\theta=\frac{\Delta}{e(t'-t)}$.	
		Echantillon N°. (19).			
I.	0,0000.0879.63	10,2245	10,1235	0,00000872.19	
II.	872.79	6,4583	6,4028	866.53	
III.	872.31	6,1629	6,1144	866.69	
IV.	879.00	9,8925	9,7940	871.50	
		Echantillon N°. (26 — 27).			
V.	880.00	10,1627	10,0702	873.26	
VI.	872.07	5,8230	5,7630	864.35	
VII.	871.58	5,5828	5,5338	865.19	
VIII.	879.29	9,7983	9,7118	872.08	

Coefficients de dilatation.

Expériences employées dans le calcul.	Différence des coefficients. $\Delta\alpha=\alpha_{\theta'}-\alpha_\theta$.	Différence des degrés moyens. $\Delta\theta=\theta'-\theta$.	Coefficient de variation pour 1°. $\frac{\Delta\alpha}{\Delta\theta}$	Coefficient de dilatation pr. 1° au degré moyen $\theta=40°$ $\alpha_{\theta=40°}=\alpha_\theta+(40°-\theta)\times\frac{\Delta\alpha}{\Delta\theta}$.	Formule à deux coefficients $l_t=l_0(1+at+bt^2)$ dans laquelle $a=\alpha_\theta=o$ $b=\frac{1}{2}\times\frac{\Delta\alpha}{\Delta\theta}$.
			Echantillon N°. (19).		
I et II.	5,660	8,92	0,635	0,0000.0874.07	
III et IV.	4,810	8,85	0,543	0,0000.0873.53	
			Valeurs moyennes		
			0,587	0,0000.0873.80	$l_t=l_0(1+0{,}0000.0850.32\,t+0{,}0000.0000.2935\,t^2)$
			Echantillon N°. (26 — 27).		
V et VI.	8,910	10,43	0,854	0,0000.0874.38	
VII et VIII.	7,610	10,14	0,750	0,0000.0875.32	
			Valeurs moyennes		
			0,802	0,0000.0875.35	$l_t=l_0(1+0{,}0000.0843.27\,t+0{,}0000.0000.401\,t^2)$

Digitized by Google

101. Il résulte des expériences de M. Fizeau que la dilatation moyenne entre 0° et 18° de l'étalon n°. 19, provenant directement du gros bloc coulé le 13 Mai 1874, est $8^{\mu},556$ par degré centigrade. La dilatation moyenne, entre ces mêmes limites de température, du mètre n°. 27 provenant du métal refondu se calcule à $8^{\mu},505$.

Les chiffres de M. Fizeau, combinés avec ceux de la Commission néerlandaise, permettent de calculer une donnée importante, savoir, la dilatation absolue du Mètre des Archives. En ajoutant à la moyenne de $8^{\mu},556$ et $8^{\mu},505$ la valeur de δ trouvée au n°. 97 savoir 0,239 on obtient pour la dilatation moyenne du Mètre des Archives de 0° à 18° par degré centigrade:

$$8^{\mu},770.$$

102. Le résultat des opérations effectuées pour obtenir deux copies authentiques du Mètre des Archives, complété par celui des observations de M. Fizeau, se résume ainsi dans les deux équations suivantes, exprimant la longueur des nouveaux étalons en fonction de la température:

$$\text{Etalon n°. 19} = 1^{m},00000580\,\{1 + 0,0000085032\,t + 0,000000002935\,t^2\}$$
$$\text{Etalon n°. 27} = 1^{m},00000611\,\{1 + 0,0000084327\,t + 0,00000000401\,t^2\}$$

Après que les observations furent terminées, les étalons n°. 19 et n°. 27 ont été signés au brunissoir dans une des rainures latérales par MM. F. J. Stamkart, J. Bosscha, J. A. C. Oudemans, A. Morin et H. Tresca. Un procès verbal sommaire des opérations effectuées a été dressé par M. Tresca et signé par les mêmes personnes. La Commission néerlandaise a confié à la garde de MM. Morin et Tresca les deux mètres, dans le but de rendre possibles des vérifications ultérieures avec les comparateurs de la Section française pour le cas où le calcul définitif des observations y donnerait lieu.

VI. NOUVELLE VÉRIFICATION DES ÉTALONS N°. 19, N°. 23 ET N°. 27.

103. La remise définitive des nouveaux étalons néerlandais a eu lieu le 24 Octobre 1880. Quoique le résultat des comparaisons de l'année précédente parût satisfaisant, les deux commissaires qui se trouvaient à Paris dans le but de prendre livraison des mètres ont utilisé leur visite au Conservatoire des Arts et Métiers pour effectuer quelques vérifications avec les étalons n°. 19, n°. 23 et n°. 27.

Pour examiner si la longueur relative des règles n°. 19 et n°. 27 était restée

Digitized by Google

invariable, on les compara cette fois sur le comparateur à mouvement transversal. M. G. Tresca voulut bien de nouveau prêter son concours aux commissaires néerlandais en s'associant à leurs mesures. Chacun des trois observateurs effectua six séries de comparaisons dont trois dans l'une des positions des mètres, trois dans la position inverse. Ces dix-huit séries ont été suivies de douze autres dans lesquelles chaque observateur compara les étalons n°. 19 et n°. 27 avec le n°. 23 dans les deux positions. Les séries étaient arrangées de la même manière que celles de l'année précédente inscrites au Tableau XVI. Seulement, on s'est dispensé de noter les indications de la mise au point, beaucoup moins importante dans ces comparaisons que dans celles d'un mètre à bouts. On avait encore changé les objectifs des microscopes dont la distance focale plus grande, en diminuant le grossissement, avait, d'après les mesures de M. G. Tresca, élevé les valeurs des divisions du micromètre à $0^{\mu},367$ pour le microscope de droite et à $0^{\mu},385$ pour celui de gauche.

Les deux Tableaux suivants contiennent tous les chiffres recueillis, ainsi que leur calcul, enregistrés dans le même ordre que celui des Tableaux XVI et XXII (n°. 67 et 92). Dans le Tableau XXVIII on a ajouté, au résultat du calcul de chaque série, la différence moyenne $\Delta T = T_r - T_e$ des températures des deux étalons comparés, la correction Δx qui en dépend et la valeur corrigée $x + \Delta x$ de la différence $X_r - X_e$.

Digitized by Google

TABLEAU XXVII.

Vérification des étalons n°. 19, n°. 23 et n°. 27.

I. Bosscha. 12 Octobre 1880. r = n°. 19; e = n°. 27.
9h.14. Therm. r 17,31, e 17,31.

N.	n°. 19.			n°. 27.		
	Droite.	Gauche.	Droite.	Droite.	Gauche.	Droite.
1	9,0	34,8	9,0			
	9,0	34,0	9,3			
2				92,4	16,0	93,0
				92,8	16,2	93,0
3	8,5	32,6	8,9			
	8,8	32,8	7,5			
4				97,3	20,1	96,7
				97,3	20,0	97,0
5	7,5	31,8	7,8			
	8,0	35,2	7,5			
6				98,3	21,0	98,5
				98,4	21,0	98,9
7	8,2	32,1	9,8			
	9,5	32,3	8,0			

9h.45. Therm. r 17,36; e 17,36.

II. Bosscha. 13 Octobre 1880. r = n°. 19; e = n°. 27.
10h 34. Therm. r 17,18; e 17,18.

N.	n°. 19.			n°. 27.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Gauche.	Droite.	Gauche.
1	41,7	21,7	40,0			
	40,3	21,0	41,3			
2				51,0	36,0	52,0
				51,0	35,1	51,0
3	47,0	28,0	47,4			
	47,1	27,6	48,6			
4				60,0	44,3	59,6
				59,8	43,1	58,8
5	43,3	24,3	43,7			
	44,1	24,4	44,7			
6				52,8	38,0	53,9
				52,0	38,0	53,0
7	42,0	24,2	42,7			
	42,5	23,8	42,8			

10h.54. Therm. r 17,21; e 17,20

III. Bosscha. 14 Octobre 1880. r = n°. 19; e = n°. 27.
9h 15. Therm. r 17,00; e 17,00.

N.	n°. 19.			n°. 27.		
	Droite.	Gauche.	Droite.	Droite.	Gauche.	Droite.
1	9,0	54,5	9,7			
	9,8	54,8	9,2			
2				1,8	45,2	2,7
				1,6	45,0	2,0
3	7,5	53,0	9,0			
	7,8	53,5	7,5			
4				1,9	44,4	2,0
				2,0	45,0	2,1
5	6,8	51,0	7,8			
	6,1	51,1	6,7			
6				4,9	47,3	5,0
				5,3	47,7	5,0
7	6,0	51,0	6,0			
	7,0	50,8	6,8			

9h 41. Therm. r 17,01; e 17,00.

IV. Bosscha. 15 Octobre 1880. r = n°. 27; e = n°. 19.
8h.50. Therm. r 16,905; e 16,90.

N.	n° 27.			n°. 19.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Gauche.	Droite.	Gauche.
1	45,0	3,1	44,7			
	45,0	2,8	44,2			
2				39,0	96,5	38,2
				39,2	96,8	38,8
3	43,5	1,5	43,5			
	43,5	2,0	43,7			
4				39,9	98,0	39,7
				40,0	99,0	39,7
5	43,6	1,9	43,5			
	43,2	1,3	43,5			
6				40,5	99,5	40,0
				40,0	100,0	40,1
7	43,6	1,6	43,5			
	43,5	1,3	43,5			

9h 12. Therm. r 16,905; e 16,90.

V. Bosscha. 16 Octobre 1880. r = n°. 27; e = n°. 19.
8h.42. Therm. r 16,73; e 16,72.

N.	n°. 27.			n°. 19.		
	Droite.	Gauche.	Droite.	Droite.	Gauche.	Droite.
1				65,0	10,5	65,0
				65,0	10,9	64,6
2	63,0	8,0	62,9			
	63,0	8,0	63,1			
3				68,0	13,2	67,7
				68,0	14,0	68,0
4	63,0	7,8	63,2			
	63,3	7,8	63,0			
5				67,0	12,0	67,4
				67,2	12,1	67,2
6	63,4	8,4	63,8			
	63,7	8,2	63,7			
7				67,7	12,0	67,3
				67,5	12,1	67,6

9h.11. Therm. r 16,73; e 16,72.

VI. Bosscha. 17 Octobre 1880. r = n°. 27; e = n°. 19.
8h.45. Therm. r 16,62; e 16,60.

N.	n°. 27.			n°. 19.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Gauche.	Droite.	Gauche.
1	20,0	94,5	20,4			
	20,0	95,0	20,4			
2				13,0	84,9	11,8
				12,5	84,8	11,9
3	19,0	93,3	19,3			
	19,3	93,9	18,9			
4				12,0	85,2	12,0
				12,4	84,8	12,0
5	18,0	92,5	17,8			
	18,0	92,8	17,5			
6				12,0	85,8	12,2
				12,0	85,8	12,8
7	15,2	90,5	15,7			
	15,3	90,9	15,3			

9h.14. Therm. r 16,62; e 16,60.

Digitized by Google

TABLEAU XXVII (*Suite*).

Vérification des étalons n°. 19, n°. 23 et n°. 27.

VII. Bosscha. 18 Octobre 1880. r = n°. 23; e = n°. 19. 8h.38. Therm. r 16,48; e 16,48.

N.	n°. 23.			n°. 19.		
	Droite.	Gauche.	Droite.	Droite.	Gauche.	Droite.
1	17,0	44,1	16,5			
	16,4	44,3	17,0			
2				13,8	42,7	14,1
				14,0	43,0	13,8
3	13,5	42,7	13,8			
	13,8	42,2	13,5			
4				15,9	44,5	16,2
				15,9	44,6	16,0
5	16,0	44,0	16,0			
	15,8	44,3	15,8			
6				17,9	45,4	18,0
				17,3	45,2	18,1
7	14,7	43,0	14,6			
	14,7	43,0	14,5			

9h.3. Therm. r 16,48; e 16,48.

VIII. Bosscha. 19 Octobre 1880. r = n°. 19; e = n°. 23. 8h.58. Therm. r 16,43; e 16,42.

N.	n°. 19.			n°. 23.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Gauche.	Droite.	Gauche.
1	29,9	92,6	30,8			
	29,9	92,7	30,2			
2				37,7	98,9	36,9
				37,3	98,7	37,1
3	33,0	96,5	34,0			
	32,2	96,7	33,9			
4				38,0	100,8	38,2
				38,0	100,4	38,6
5	31,0	94,0	31,8			
	31,3	94,8	31,8			
6				38,2	99,8	38,3
				38,2	100,0	38,5
7	30,0	94,4	31,0			
	30,4	94,2	31,0			

9h.20. Therm. r 16,43; e 16,43.

IX. Bosscha. 20 Octobre 1880. r = n°. 27; e = n°. 23. 9h.15. Therm. r 16,33; e 16,32.

N	n°. 27.			n°. 23.		
	Droite.	Gauche.	Droite.	Droite.	Gauche.	Droite.
1				4,1	44,1	3,5
				3,5	43,3	3,8
2	5,0	44,8	5,3			
	5,2	44,5	5,9			
3				6,8	45,9	6,8
				7,2	45,9	6,8
4	6,3	45,0	6,0			
	6,5	45,2	6,0			
5				9,0	48,0	8,8
				8,6	47,8	8,8
6	5,9	44,5	6,8			
	6,3	45,0	6,8			
7				9,0	48,0	9,0
				9,0	48,4	8,6

9h.37. Therm. r 16,33; e 16,33.

X. Bosscha. 21 Octobre 1880. r = n°. 23; e = n°. 27. 9h.37. Therm. r 16,205; e 16,195.

N.	n°. 23.			n°. 27.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Gauche	Droite.	Gauche.
1				22,8	87,7	22,7
				22,7	88,2	22,7
2	22,2	85,7	22,7			
	22,8	85,5	23,0			
3				24,0	90,3	24,1
				24,8	90,5	24,0
4	22,0	87,0	22,7			
	23,0	86,4	23,0			
5				25,0	92,0	25,0
				24,8	92,0	24,8
6	22,7	88,5	23,8			
	23,5	88,0	24,0			
7				21,1	92,0	21,0
				20,8	92,0	20,8

10h.0. Therm. r 16,21; e 16,20.

XI. Oudemans. 12 Octobre 1880. r = n°. 19; e = n°. 27. 8h.36. Therm. r 17,305; e 17,305.

N.	n°. 19.			n°. 27.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Gauche.	Droite.	Gauche.
1				39,0	12,2	38,0
				38,5	12,5	38,5
2	36,5	10,5	36,0			
	36,0	10,9	35,4			
3				39,8	13,7	39,0
				39,0	13,5	39,0
4	28,0	3,0	27,9			
	29,2	3,8	28,4			
5				32,4	6,7	31,4
				32,0	6,6	32,0

8h.50. Therm. r 17,305; e 17,305.

XII. Oudemans. 13 Octobre 1880. r = n°. 19; e = n°. 27. 9h.14. Therm r 17,15; e 17,14.

N.	n°. 19.			n°. 27.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Gauche.	Droite.	Gauche.
1				36,5	17,3	36,6
				36,5	17,5	37,0
2	26,6	6,7	26,9			
	26,8	6,4	26,7			
3				34,5	14,7	34,0
				34,3	14,0	34,0
4	25,9	4,9	25,8			
	25,5	5,0	25,0			
5				22,3	2,6	23,2
				22,2	2,8	22,8
6	18,0	98,0	17,7			
	18,0	98,0	18,2			
7				21,9	2,0	21,8
				22,0	1,7	21,8

9h.51 Therm. r 17,15; e 17,14.

Digitized by Google

TABLEAU XXVII (*Suite*).

Vérification des étalons n°. 19, n°. 23 et n°. 27.

XIII. Oudemans. 14 Octobre 1880. r = n°. 19; e = n°. 27. 8h.48. Therm. r 17,00; e 17,00.

N.	n°. 19.			n°. 27.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Gauche.	Droite.	Gauche.
1	58,5	12,5	59,0			
	59,0	12,1	59,2			
2				58,0	13,5	58,2
				57,7	13,4	57,5
3	52,5	7,1	54,0			
	53,2	7,4	53,8			
4				53,5	9,9	53,6
				53,0	9,2	53,5
5	51,5	5,8	51,5			
	51,5	5,8	51,8			
6				52,8	9,0	53,0
				52,8	9,0	53,0
7	48,0	3,0	48,0			
	48,4	3,0	48,0			

9h.9. Therm. r 17,00; e 17,00.

XIV. Oudemans. 15 Octobre 1880. r = n°. 27; e = n°. 19. 9h.17. Therm. r 16,91; e 16,90.

N.	n°. 27.			n°. 19.		
	Gauche.	Droite.	Gauche	Gauche.	Droite.	Gauche.
1	38,0	96,4	37,8			
	38,3	96,4	37,1			
2				43,0	1,7	42,8
				42,0	1,2	41,8
3	30,6	91,1	31,0			
	31,1	91,0	31,0			
4				31,7	91,0	31,6
				32,0	90,5	30,8
5	31,0	91,2	31,3			
	31,0	91,3	31,1			
6				30,6	89,6	30,8
				30,1	89,1	30,8
7	30,8	91,4	31,3			
	31,0	91,0	31,0			

9h.41. Therm. r 16,92; e 16,91.

XV. Oudemans. 16 Octobre 1880. r = n°. 27; e = n°. 19. 9h.20. Therm. r 16,73; e 16,72.

N.	n°. 27.			n°. 19.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Gauche.	Droite.	Gauche.
1	5,1	59,1	5,7			
	5,5	59,1	5,2			
2				3,8	57,8	4,0
				3,1	57,4	3,8
3	1,6	55,2	1,5			
	1,5	55,0	1,6			
4				2,0	55,4	1,8
				1,8	55,2	1,0
5	0,0	54,0	0,2			
	0,6	54,0	0,5			
6				1,0	55,0	0,3
				1,5	55,0	0,8
7	1,0	55,8	1,8			
	1,0	56,0	1,2			

9h.45. Therm. r 16,745; e 16,745.

XVI. Oudemans. 17 Octobre 1880. r = n°. 27; e = n°. 19. 9h 29. Therm. r 16,62; e 16,60.

N.	n°. 27.			n°. 19		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Gauche.	Droite.	Gauche.
1	74,0	37,5	73,8			
	74,0	38,2	73,6			
2				81,2	44,8	82,1
				80,8	44,9	81,6
3	72,9	37,0	73,0			
	72,8	36,8	73,0			
4				80,5	44,2	80,0
				80,0	43,8	80,7
5	70,4	35,1	71,4			
	70,2	35,0	71,5			
6				78,6	43,0	78,8
				78,7	43,0	79,0
7	68,5	32,9	69,4			
	68,9	33,5	69,5			

9h.59. Therm. r 16,645; e 16,645.

XVII. Oudemans. 18 Octobre 1880. r = n°. 23; e = n°. 19. 9h.25. Therm. r 16,48; e 16,49.

N.	n°. 23.			n°. 19.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Gauche.	Droite.	Gauche.
1	69,4	30,2	69,0			
	69,0	30,1	69,0			
2				70,6	31,5	70,2
				70,0	32,0	70,0
3	66,4	28,4	67,6			
	67,0	29,0	67,0			
4				70,0	32,2	69,9
				69,9	32,1	69,9
5	67,5	28,8	68,0			
	67,5	29,0	68,0			
6				71,0	33,1	71,0
				71,5	33,6	70,0
7	70,0	32,1	70,1			
	70,0	31,8	70,1			

9h 46. Therm. r 16,505; e 16,500.

XVIII. Oudemans. 19 Octobre 1880. r=n°. 19; e=n°. 23. 9h 26. Therm. r 16,43; e 16,43.

N.	n°. 19.			n°. 23.		
	Gauche	Droite.	Gauche.	Gauche.	Droite.	Gauche.
1				38,0	7,0	38,0
				38,0	7,0	38,0
2	37,1	5,0	36,6			
	37,0	5,6	36,0			
3				38,2	8,0	38,5
				38,1	8,0	38,8
4	34,5	3,8	34,6			
	34,8	3,8	34,5			
5				38,0	8,0	39,0
				38,0	8,0	38,4
6	33,7	- 4,0	34,0			
	33,9	4,2	33,7			
7				37,3	6,8	37,0
				36,8	6,2	36,0

9h.51. Therm. r 16 445; e 16,44.

Digitized by Google

TABLEAU XXVII (*Suite*).

Vérification des étalons n°. 19, n°. 23 et n°. 27.

XIX. Oudemans. 20 Octobre 1880. r = n°. 27; e = n°. 23. 8h.47. Therm. r 16,32; e 16,31.

N.	n°. 27.			n°. 23		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Gauche.	Droite.	Gauche.
1				43,6	3,0	43,0
				43,6	2,0	42,5
2	36,8	96,8	37,2			
	37,3	97,0	37,4			
3				42,3	3,0	43,2
				43,1	2,7	42,7
4	41,2	1,1	42,0			
	41,8	1,3	42,0			
5				43,6	3,7	43,2
				43,8	3,3	43,5
6	41,0	0,3	41,0			
	40,6	1,0	40,8			
7				46 2	6,7	47,0
				46,0	6,7	46,2

9h.12. Therm. r 16,32; e 16,31.

XX. Oudemans. 21 Octobre 1880. r = n°. 23; e = n°. 27. 8h.57. Therm r 16,20; e 16,20.

N.	n°. 23.			n°. 27.		
	Gauche.	Droite	Gauche.	Gauche	Droite.	Gauche.
1				23,4	89,7	23,4
				23,5	90,3	22,2
2	21,7	86,7	23,0			
	22,1	86,5	22,3			
3				23,8	90,5	22,9
				23,8	90,0	23,9
4	21,5	86,2	21,3			
	21,4	86,6	21,5			
5				22,0	89,0	21,5
				21,7	89,0	21,2
6	19,3	85,2	20,6			
	19,5	85,3	20,1			
7				23,0	90,0	22,7
				22,5	90,0	23,0

9h.25. Therm. r 16,20; e 16,20.

XXI. G. Tresca. 11 Octobre 1880. r = n°. 19; e = n°. 27. 4h.10. Therm. r 17,36; e 17,35.

N.	n°. 19.			n°. 27.		
	Droite.	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.	Gauche
1	88,1	8,1	88,0			
	87,1	8,0	80,2			
2				9,0	88,0	8,6
				8,0	89,0	9,0
3	86,5	8,0	87,1			
	87,0	6,9	87,0			
4				10,0	93,0	12,0
				11,0	93,0	11,8
5	89,0	10,0	89,1			
	89,0	10,0	89,1			
6				12,5	94,0	12,5
				13,0	93,4	13,2

4h.35. Therm. r 17,36; e 17,35.

XXII. G. Tresca. 13 Octobre 1880. r = n°. 19; e = n°. 27 3h.10. Therm. r 17,24; e 17,23.

N.	n°. 19.			n°. 27.		
	Droite.	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.	Gauche.
1				53,2	19,9	54,0
				53,0	19,5	53,8
2	19,2	93,0	19,0			
	19,0	93,5	18,0			
3				52,0	18,0	51,5
				51,5	18,0	51,5
4	17,2	52,5	18,3			
	18,0	52,2	18,5			
5				54,5	23,0	56,0
				55,3	24,0	56,0
6	21,0	55,8	21,5			
	21,8	56,0	21,2			
7				57,0	23,8	56,5
				56,8	23,0	57,0

3h.30. Therm. r 17,24; e 17,23.

XXIII. G. Tresca. 14 Octobre 1880. r=n°. 19; e=n°. 27. 4h.40. Therm. r 16,99; e 16,98.

N.	n°. 19.			n°. 27.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.
1				8,0	53,0	7,0
				7,0	52,5	6,9
2	57,0	8,8	57,0			
	57,0	9,0	57,2			
3				8,3	54,0	8,1
				9,0	54,0	8,0
4	54,2	6,3	54,8			
	54,0	6,3	54,6			
5				9,6	54,0	8,9
				9,2	55,0	9,0
6	53,9	5,4	53,0			
	53,9	5,8	53,0			
7				9,0	54,2	10,0
				8,4	54,6	10,0

5h 4. Therm. r 16,99; e 16,98.

XXIV. G. Tresca. 15 Octobre 1880. r=n°. 27; e=n°. 19. 4h 10. Therm r 17,92; e 17,91.

N.	n°. 27.			n°. 19.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.
1				68,5	11,0	67,8
				68,3	10,9	67,6
2	9,4	66,4	9,1			
	10,0	66,1	9,0			
3				72,0	13,0	72,4
				71,6	13,0	72,0
4	11,2	69,0	11,0			
	11,0	68,2	10,8			
5				72,1	13,9	73,0
				72,2	13,5	73,0
6	10,8	67,2	10,9			
	10,7	68,2	10,0			
7				72,1	13,7	73,0
				72,1	13,2	72,9

4h.40. Therm. r 17,925; e 17,915.

Digitized by Google

TABLEAU XXVII (*Suite*).

Vérification des étalons n°. 19, n°. 23 et n°. 27.

XXV. G. Tresca. 16 Octobre 1880. r = n°. 27; e = n°. 19. 4h.15. Therm. r 16,75; e 16,74.

N.	n°. 27.			n°. 19.		
	Droite.	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.	Gauche.
1	88,1	12,2	88,0			
	88,0	11,7	88,0			
2				5,9	81,0	5,0
				5,0	81,7	5,7
3	89,0	11,8	89,3			
	88,3	11,8	89,0			
4				5,1	82,6	5,9
				5,1	82,0	5,8
5	88,0	11,2	88,2			
	88,0	11,1	88,0			
6				7,1	83,0	6,9
				6,2	83,2	6,2
7	88,1	10,9	88,8			
	88,8	11,0	88,2			

4h.45. Therm. r 16,75; e 16,74.

XXVI. G. Tresca. 16 Octobre 1880. r = n°. 27; e = n°. 19. 5h.20. Therm. r 16,76; e 16,75.

N.	n°. 27.			n°. 19.		
	Droite.	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.	Gauche
1				9,0	84,5	8,5
				9,0	84,8	8,9
2	85,7	9,8	85,7			
	85,8	9,5	85,7			
3				8,8	85,2	8,9
				8,9	85,2	8,7
4	83,0	7,3	83,3			
	84,0	7,2	83,0			
5				8,2	84,5	8,1
				8,2	85,0	8,0
6	83,6	7,6	83,3			
	84,2	7,0	83,5			
7				8,8	84,7	8,2
				8,8	85,0	8,2

5h.42. Therm. r 16,775; e 16,765.

XXVII. G. Tresca. 18 Octobre 1880 r = n°. 23; e = n°. 19. 3h.55. Therm. r 16,52; e 16,51.

N.	n°. 23.			n°. 19.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.
1				33,1	66,0	32,8
				33,4	66,0	32,8
2	64,0	29,8	64,0			
	63,2	30,1	63,6			
3				32,5	65,0	32,8
				32,2	65,7	32,2
4	65,0	32,1	65,5			
	65,0	32,0	65,4			
5				32,5	65,9	33,0
				33,0	65,9	32,8
6	64,0	32,5	65,2			
	65,0	32,8	65,0			
7				32,0	64,0	32,1
				32,0	64,4	32,0

4h.20. Therm. r 16,52; e 16,51.

XXVIII. G. Tresca. 19 Octobre 1880. r = n°. 19; e = n°. 23. 3h.55. Therm. r 16,465; e 16,460.

N.	n°. 19.			n°. 23.		
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.
1				18,2	50,0	17,8
				18,2	49,0	17,6
2	49,8	17,5	49,1			
	50,0	18,0	49,2			
3				17,2	49,1	17,7
				17,2	48,9	17,1
4	48,0	16,7	48,2			
	48,1	17,0	48,2			
5				18,0	49,0	18,0
				18,0	49,0	17,6
6	47,4	16,2	47,0			
	47,4	16,0	47,5			
7				17,2	48,1	18,0
				17,3	48,1	17,5

4h 20. Therm. r 16,465; e 16,460.

XXIX. G. Tresca. 20 Octobre 1880. r = n°. 27; e = n°. 23. 3h.55. Therm. r 16,325; e 16,320.

N.	n°. 27.			n°. 23.		
	Droite.	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.	Gauche.
1				25,4	94,1	25,0
				24,8	93,2	25,3
2	85,8	16,2	85,1			
	85,0	16,0	85,0			
3				27,2	97,0	27,0
				26,8	97,1	27,2
4	85,0	15,0	85,2			
	85,1	15,1	84,8			
5				25,0	86,0	25,2
				25,0	85,5	25,0
6	75,0	15,0	76,0			
	75,1	14,5	76,2			
7				26,9	87,2	26,3
				26,0	87,3	26,2

4h 25. Therm. r 16,325; e 16,320.

XXX. G. Tresca. 21 Octobre 1880. r = n°. 23; e = n°. 27. 4h.20. Therm. r 16,295; e 16,290.

N.	n°. 23.			n°. 27.		
	Gauche	Droite.	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.
1				87,0	20,9	86,2
				87,0	21,0	86,2
2	24,2	90,2	24,0			
	25,0	90,0	24,2			
3				87,0	21,0	87,0
				87,9	21,0	87,4
4	25,2	91,0	25,9			
	26,2	91,0	26,0			
5				87,4	21,1	87,2
				87,9	20,9	87,2
6	25,2	91,0	25,5			
	25,0	91,0	25,2			
7				87,2	22,2	87,0
				87,0	22,0	87,0

4h.50. Therm. r 16,295; e 16,290.

Digitized by Google

TABLEAU XXVIII.

Calcul des vérifications des étalons n°. 19, n°. 23 et n°. 27.

I. Bosscha. 12 Octobre 1880. x = n°. 19 — n°. 27. $\mu_1 = X_r - M$.

N.	d	g	μ	C	ε
1	109,07	34,40	+ 26,79	+ 26,89	— 0,10
2	92,80	16,10	27,85	27,76	+ 0,09
3	108,42	32,70	27,20	27,07	+ 0,13
4	97,07	20 05	27,90	27,94	— 0,04
5	107,70	32,15	27.15	27,24	— 0,09
6	98,52	21,00	28.06	28,11	— 0,05
7	108,67	32,20	+ 27,48	+ 27,42	+ 0,06

N = + 27,15 ΔT = 0,000 m^2 = 0,0127
x = — 0,79 Δx = 0,00 m = 0,113
α = + 0,087 $x + \Delta x$ = — 0,79 m_x = 0,084

II. Bosscha. 13 Octobre 1880. x = n°. 19 — n°. 27. $\mu_1 = X_r - M$.

N.	d	g	μ	C	ε
1	21,35	40,82	— 7,88	— 8,07	+ 0,19
2	35,55	51,50	6,78	6,83	+ 0,05
3	27,80	47,52	8,19	7,94	— 0,15
4	43,70	59,55	6,89	5,70	— 0,19
5	24,35	43,95	7.98	7,81	— 0,18
6	38,00	52,92	6,43	6,57	+ 0,14
7	24,00	42,50	— 7,55	— 7,68	+ 0,13

N = — 7,85 ΔT = + 0,005 m^2 = 0,0415
x = — 1,17 Δx = — 0,04 m = 0,204
α = + 0,064 $x + \Delta x$ = — 1,21 m_x = 0,156

III. Bosscha. 14 Octobre 1880. x = n°. 19 — n°. 27. $\mu_1 = X_r - M$.

N.	d	g	μ	C	ε
1	9,42	54,40	— 17,48	— 17,52	+ 0,04
2	2,02	45,10	16,62	16,62	0,00
3	7,95	53,25	17,58	17,42	— 0,16
4	2,00	44,70	16,48	16,51	+ 0,03
5	6,82	51,05	17,15	17,30	+ 0,15
6	5,05	47,50	16,44	16,40	— 0,04
7	6,45	50,90	— 17,23	— 17,20	— 0,03

N = — 17,36 ΔT = + 0,005 m^2 = 0,0133
x = — 0,85 Δx = — 0,04 m = 0,115
α = + 0,055 $x + \Delta x$ = — 0,89 m_x = 0,084

IV. Bosscha. 15 Octobre 1880. x = n°. 27 — n°. 19. $\mu_1 = X_r - M$

N.	d	g	μ	C	ε
1	102,95	44,72	+ 20,57	+ 20,46	+ 0,11
2	96,65	38,80	20,53	20,76	— 0,23
3	101,75	43,55	20,58	20,52	+ 0,06
4	98,50	39,82	20,82	20,82	0,00
5	101,60	43,45	20,56	20,58	— 0,02
6	99,75	40,15	20,11	20,88	+ 0,23
7	101,45	43,52	+ 20,48	+ 20,64	— 0,16

N = + 20,55 ΔT = + 0,005 m^2 = 0,0364
x = — 0,27 Δx = — 0,04 m = 0,161
α = + 0,030 $x + \Delta x$ = — 0,31 m_x = 0,123

V. Bosscha. 16 Octobre 1880. x = n°. 27 — n°. 19. $\mu_1 = X_c - M$.

N.	d	g	μ	C	ε
1	64,90	10,70	+ 19,70	+ 19,69	+ 0,01
2	63,00	8,00	20,03	17,97	+ 0,06
3	67,92	13,60	19,69	19,82	— 0,13
4	63,12	7,80	20,15	20,10	+ 0,05
5	67,20	12,05	20,02	19,94	+ 0,08
6	63,65	8,30	20,13	20,23	— 0,10
7	67 52	12,05	+ 20,11	+ 20,07	+ 0,04

N = + 20,10 ΔT = + 0,010 m^2 = 0,0095
x = + 0,22 Δx = — 0,08 m = 0,097
α = + 0,063 x = + 0,14 m_x = 0,074

VI. Bosscha. 17 Octobre 1880. x = n°. 27 — n°. 19. $\mu_1 = X_r - M$.

N.	d	g	μ	C	ε
1	94,75	20,20	+ 26,98	+ 26,89	+ 0,09
2	84,85	12,30	26,40	26,42	— 0,02
3	93,60	19,13	26,98	27,04	— 0,06
4	85,00	12,10	26,54	26,57	— 0,03
5	92,65	17,82	27,12	27,18	— 0,06
6	85 80	12,25	26,77	26,72	+ 0,05
7	90,70	15,37	+ 27,37	+ 27,33	+ 0,04

N = + 27,11 ΔT = + 0,020 m^2 = 0,0052
x = + 0,54 Δx = — 0,17 m = 0,072
α = + 0,073 $x + \Delta x$ = + 0,37 m_x = 0,055

VII. Bosscha. 18 Octobre 1880. x = n°. 23 — n°. 19. $\mu_1 = X_r - M$.

N.	d	g	μ	C	ε
1	16,72	44,20	— 10,88	— 11,16	+ 0,28
2	13,92	42,85	11,39	11,20	— 0,19
3	13,65	42,45	11,33	11,15	— 0,18
4	16,00	44,55	11,28	11,19	— 0,09
5	15,90	44,15	11,17	11,14	— 0,03
6	17,83	45,30	10,90	11,18	+ 0,28
7	14,62	43,00	— 11,20	— 11,12	— 0,08

N = — 11,14 ΔT = 0,000 m^2 = 0,0602
x = + 0,05 Δx = 0,00 m = 0,245
α = + 0,006 $x + \Delta x$ = + 0,05 m_x = 0,187

VIII. Bosscha. 19 Octobre 1880. x = n°. 19 — n°. 23. $\mu_1 = X_r - M$.

N.	d	g	μ	C	ε
1	92,65	30,20	+ 22,37	+ 22,46	— 0,09
2	98,80	37,25	21,91	21,92	— 0,01
3	96,60	33,27	22,64	22,55	+ 0,09
4	100,60	38,20	22,21	22,01	+ 0,20
5	94,40	31,48	22,52	22,63	— 0,11
6	99,90	38,30	21,92	22,10	— 0,18
7	94,30	30,60	+ 22,82	+ 22,72	+ 0,10

N = + 22,59 ΔT = + 0,005 m^2 = 0,0277
x = + 0,58 Δx = — 0,04 m = 0,166
α = + 0,045 $x + \Delta x$ = + 0,54 m_x = 0,127

Digitized by Google

TABLEAU XXVIII (*Suite*).

Calcul des vérifications des étalons n°. 19, n°. 23 et n°. 27.

IX. Bosscha. 20 Octobre 1880. x = n°. 27 — n°. 23. $\mu_1 = X_e - M$.

N.	d	g	μ	C	ε
1	3,72	43,70	— 15,47	— 15,41	— 0,06
2	5,35	44,65	15,23	15,10	— 0,13
3	6,90	45,90	15,15	15,32	+ 0,17
4	6,20	45,10	15,08	15,05	— 0,03
5	8,80	47,90	15,22	15,24	+ 0,02
6	6,45	44,75	14,86	15,01	+ 0,15
7	8,90	48,20	— 15,29	— 15,16	— 0,13

$N = -15,05$ $\Delta T = +0,005$ $m^2 = 0,0227$
$x = +0,23$ $\Delta x = -0,04$ $m = 0,151$
$\alpha = +0,043$ $x + \Delta x = +0,19$ $m_x = 0,115$

X. Bosscha. 21 Octobre 1880. x = n°. 23 — n°. 27. $\mu_1 = X_e - M$.

N.	d	g	μ	C	ε
1	87,95	22,72	+ 23,53	+ 23,53	0,00
2	85,60	22,67	22,69	22,71	— 0,02
3	90,40	24,23	23,85	23,85	0,00
4	86,70	22,68	23,09	23,03	+ 0,06
5	92,00	24,90	24,18	24,17	+ 0,01
6	88,25	23,50	+ 23,32	+ 23,35	— 0,03

$N = +22,95$ $\Delta T = +0,010$ $m^2 = 0,0017$
$x = -0,98$ $\Delta x = -0,08$ $m = 0,041$
$\alpha = +0,160$ $x + \Delta x = -1,06$ $m_x = 0,035$

XI. Oudemans. 12 Octobre 1880. x = n°. 19 — n°. 27. $\mu_1 = X_e - M$.

N.	d	g	μ	C	ε
1	12,35	38,50	— 10,30	— 10,31	+ 0,01
2	10,70	35,97	9,92	9,91	— 0,01
3	13,60	39,20	10,11	10,09	— 0,02
4	3,40	28,37	9,68	9,69	+ 0,01
5	6,65	31,95	— 9,87	— 9,87	0,00

$N = -9,80$ $\Delta T = 0,000$ $m^2 = 0,00035$
$x = +0,29$ $\Delta x = 0,00$ $m = 0,019$
$\alpha = +0,110$ $x + \Delta x = +0,29$ $m_x = 0,017$

XII. Oudemans. 13 Octobre 1880. x = n°. 19 — n°. 27. $\mu_1 = X_e - M$.

N.	d	g	μ	C	ε
1	17,40	36,65	— 7,73	— 7,84	+ 0,11
2	6,55	26,75	7,89	7,90	+ 0,01
3	14,35	34,20	7,91	7,80	— 0,11
4	4,95	25,55	8,02	7,86	— 0,16
5	2,70	22,62	7,73	7,76	+ 0,03
6	98,00	17,97	7,66	7,82	+ 0,16
7	1,85	21,87	— 7,75	— 7,72	— 0,03

$N = -7,86$ $\Delta T = +0,010$ $m^2 = 0,0193$
$x = -0,08$ $\Delta x = -0,08$ $m = 0,139$
$\alpha = +0,021$ $x + \Delta x = -0,16$ $m_x = 0,106$

XIII. Oudemans. 14 Octobre 1880. x = n°. 19 — n°. 27. $\mu_1 = X_r - M$.

N.	d	g	μ	C	ε
1	12,30	58,92	— 18,18	— 18,13	— 0,05
2	13,45	57,92	17,37	17,38	+ 0,01
3	7,25	53,37	17,89	17,91	+ 0,02
4	9,55	53,40	17,06	17,17	+ 0,11
5	5,80	51,57	17,73	17,69	— 0,04
6	9,00	52,90	17,07	17,96	— 0,11
7	3,00	48,10	— 17,42	— 17,47	+ 0,05

$N = -17,80$ $\Delta T = 0,000$ $m^2 = 0,0078$
$x = -0,63$ $\Delta x = 0,00$ $m = 0,088$
$\alpha = +0,109$ $x + \Delta x = -0,63$ $m_x = 0,068$

XIV. Oudemans. 15 Octobre 1880. x = n°. 27 — n°. 19. $\mu_1 = X_r - M$.

N.	d	g	μ	C	ε
1	96,40	37,80	+ 20,83	+ 21,10	— 0,27
2	101,45	42,40	+ 20,91	20,87	+ 0,04
3	91,05	30,93	21,51	21,27	+ 0,24
4	90,75	31,52	21,16	21,03	+ 0,13
5	91,25	31,10	21,52	21,43	+ 0,09
6	89,35	30,57	21,01	21,19	— 0,18
7	91,20	31,02	+ 21,53	+ 21,60	— 0,07

$N = +21,35$ $\Delta T = +0,010$ $m^2 = 0,0483$
$x = +0,32$ $\Delta x = -0,08$ $m = 0,220$
$\alpha = +0,082$ $x + \Delta x = +0,24$ $m_x = 0,168$

XV. Oudemans. 16 Octobre 1880. x = n°. 27 — n°. 19. $\mu_1 = X_r - M$.

N.	d	g	μ	C	ε
1	59,05	5,37	+ 19,60	+ 19,57	+ 0,03
2	57,60	3,55	19,77	19,65	+ 0,12
3	55,10	1,55	19,62	19,68	— 0,06
4	55,30	1,65	19,66	19,76	— 0,10
5	54,00	0,32	19,69	19,80	— 0,11
6	55,00	0,90	19,84	19,87	— 0,03
7	55,90	1,25	+ 20,04	+ 19,90	+ 0,14

$N = +19,74$ $\Delta T = +0,005$ $m^2 = 0,0154$
$x = -0,02$ $\Delta x = -0,04$ $m = 0,124$
$\alpha = +0,055$ $x + \Delta x = -0,06$ $m_x = 0,095$

XVI. Oudemans. 17 Octobre 1880. x = n°. 27 — n°. 19. $\mu_1 = X_r - M$.

N.	d	g	μ	C	ε
1	37,85	73,85	— 14,55	— 14,64	+ 0,09
2	44,85	81,42	14,89	14,82	— 0,07
3	36,65	72,92	14,63	14,55	— 0,08
4	44,00	80,30	14,75	14,73	— 0,02
5	35,05	70,87	14,43	14,47	+ 0,04
6	43,00	78,77	14,55	14,64	+ 0,09
7	33,20	69,07	— 14,42	— 14,38	— 0,06

$N = -14,51$ $\Delta T = +0,010$ $m^2 = 0,0081$
$x = +0,22$ $\Delta x = -0,08$ $m = 0,090$
$\alpha = +0,043$ $x + \Delta x = +0,14$ $m_x = 0,069$

Digitized by Google

TABLEAU XXVIII (*Suite*).

Calcul des vérifications des étalons n°. 19, n°. 23 et n°. 27.

XVII. Oudemans. 18 Octobre 1880. x = n°. 23 — n°. 19. $\mu_1 = X_r - M$.

N.	d	g	μ	C	ε
1	30,15	69,10	— 15,54	— 15,52	— 0,02
2	31,75	70,20	15,37	15,27	— 0,10
3	28,70	67,00	15,26	15,43	+ 0,17
4	32,15	69,92	15,13	15,18	+ 0,05
5	28,90	67,75	15,48	15,35	— 0,13
6	33,35	70,87	15 05	15,09	+ 0,04
7	31,95	70,05	— 15,27	— 15,26	— 0,01

N = — 15,39 $\quad \Delta T = - 0,003 \quad m^2 = 0,0151$
$x = - 0,21 \quad \Delta x = + 0,03 \quad m = 0,123$
$\alpha = + 0,044 \quad x + \Delta x = - 0,18 \quad m_x = 0,094$

XVIII. Oudemans 19 Octobre 1880. x = n°. 19 — n°. 23. $\mu_1 = X_e - M$.

N.	d	g	μ	C	ε
1	7,00	38,00	— 12,06	— 12,11	+ 0,05
2	5,30	36,67	12,17	12,00	— 0,17
3	8,00	38,40	11,85	11,96	+ 0,11
4	3,80	34,35	11,84	11,85	+ 0,01
5	8,00	38,35	11,84	11,80	— 0,04
6	4,10	33,82	11,53	11,70	+ 0,17
7	6,50	36,77	— 11,77	— 11,65	— 0,12

N = — 11,85 $\quad \Delta T = + 0,002 \quad m^2 = 0,0221$
$x = + 0,03 \quad \Delta x = - 0,02 \quad m = 0,149$
$\alpha = - 0,076 \quad x + \Delta x = + 0,01 \quad m_x = 0,114$

XIX. Oudemans. 20 Octobre 1880. x = n°. 27 — n°. 23. $\mu_1 = X_e - M$.

N.	d	g	μ	C	ε
1	2,00	43,17	— 15,89	— 15,67	— 0,22
2	96,90	37,17	15,46	15,61	+ 0,15
3	2,85	42,82	15,45	15,59	+ 0,14
4	1,20	41,75	15,64	15,53	— 0,11
5	3,50	43,52	15,48	15,51	+ 0,03
6	0,65	40,85	15,49	15,45	— 0,04
7	6,70	46,35	— 15,39	— 15,43	+ 0,04

N = — 15,53 $\quad \Delta T = + 0,010 \quad m^2 = 0,0267$
$x = + 0,02 \quad \Delta x = - 0,08 \quad m = 0,163$
$\alpha = + 0,040 \quad x + \Delta x = - 0,06 \quad m_x = 0,125$

XX. Oudemans. 21 Octobre 1880. x = n°. 23 — n°. 27. $\mu_1 = X_e - M$.

N.	d	g	μ	C	ε
1	90,00	23,12	+ 24,12	+ 24,02	+ 0,10
2	86,60	22,27	23,21	23,32	— 0,11
3	90,25	23,60	24,03	24,13	— 0,10
4	86,40	21,42	23,44	23,43	+ 0,01
5	89,00	21,60	24,34	24,23	+ 0,11
6	85,25	19,87	23,63	23,54	+ 0,09
7	90,00	22,80	+ 24,25	+ 24,34	— 0,11

N = + 23,43 $\quad \Delta T = 0,000 \quad m^2 = 0,0161$
$x = - 0,75 \quad \Delta x = 0,00 \quad m = 0,127$
$\alpha = + 0,055 \quad x + \Delta x = - 0,75 \quad m_x = 0,097$

XXI. G. Tresca. 11 Octobre 1880. x = n°. 19 — n°. 27. $\mu_1 = X_r - M$.

N.	d	g	μ	C	ε
1	85,85	8,05	+ 28,41	+ 28,57	— 0,16
2	88,50	8,65	29,15	29,29	— 0,14
3	86,90	7,45	29,03	28,75	+ 0,28
4	93,00	11,20	29,83	29,48	+ 0,35
5	89,05	10,00	28,83	28,94	— 0,11
6	93,70	12,80	+ 29,46	+ 29,66	— 0,20

N = + 28,80 $\quad \Delta T = + 0,10 \quad m^2 = 0,0994$
$x = - 0,63 \quad \Delta x = - 0,08 \quad m = 0,315$
$\alpha = + 0,091 \quad x + \Delta x = - 0,71 \quad m_x = 0,269$

XXII. G. Tresca. 13 Octobre 1880. x = n°. 19 — n°. 27. $\mu_1 = X_e - M$.

N.	d	g	μ	C	ε
1	19,70	53,50	— 13,37	— 13,39	+ 0,02
2	18,80	53,25	13,83	13,65	— 0,05
3	18,00	51,62	13,27	13,16	— 0,11
4	18,00	52,35	13,52	13,42	— 0,10
5	23,50	55,45	12,72	12,92	+ 0,20
6	21,37	55,90	13,13	13,18	+ 0,03
7	23,40	56,82	— 12,77	— 12,69	— 0,08

N = — 13,49 $\quad \Delta T = + 0,010 \quad m^2 = 0,0179$
$x = - 0,38 \quad \Delta x = - 0,08 \quad m = 0,134$
$\alpha = + 0,117 \quad x + \Delta x = - 0,46 \quad m_x = 0,104$

XXIII. G. Tresca. 14 Octobre 1880. x = n°. 19 — n°. 27. $\mu_1 = X_e - M$.

N.	d	g	μ	C	ε
1	7,22	52,75	— 17,66	— 17,73	+ 0,07
2	8,90	57,05	18,71	18,69	— 0,02
3	8,35	54,00	17,72	17,66	— 0,06
4	6 30	54,40	18,63	18,62	— 0,01
5	9,17	54,50	17,61	17,60	— 0,01
6	5,60	53,45	18,52	18,55	+ 0,03
7	9,35	54,40	— 17,51	— 17,53	+ 0,02

N = — 18,62 $\quad \Delta T = + 0,010 \quad m^2 = 0,0026$
$x = - 0,99 \quad \Delta x = - 0,08 \quad m = 0,051$
$\alpha = + 0,084 \quad x + \Delta x = - 1,07 \quad m_x = 0,039$

XXIV. G. Tresca. 15 Octobre 1880. x = n°. 27 — n°. 19. $\mu_1 = X_e - M$.

N.	d	g	μ	C	ε
1	68,05	10,95	+ 20,76	+ 21,03	— 0,27
2	66,25	9,37	20,70	20,64	+ 0,06
3	72,00	13,00	21,42	21,18	+ 0,24
4	68,60	11,00	20,93	20,79	+ 0,14
5	72,57	13,70	21,36	21,32	+ 0,04
6	67,70	10,60	20,78	20,94	— 0,16
7	72,52	13,45	+ 21,44	+ 21,47	— 0,03

N = + 20,79 $\quad \Delta T = + 0,010 \quad m^2 = 0,0455$
$x = - 0,46 \quad \Delta x = - 0,08 \quad m = 0,213$
$\alpha = + 0,074 \quad x + \Delta x = - 0,54 \quad m_x = 0,163$

Digitized by Google

TABLEAU XXVIII (*Suite*).

Calcul des vérifications des étalons n°. 19, n°. 23 et n°. 27.

XXV. G. Tresca 16 Octobre 1880. x = n°. 27 — n°. 19. $\mu_1 = X_r - M.$

N.	d	g	μ	C	ε
1	88,02	11,95	+ 27,70	+ 27,82	— 0,12
2	81,35	5,40	27,78	27,81	— 0,03
3	88,90	11,80	28,09	27,95	+ 0,14
4	82,30	5,47	28,10	27,94	+ 0,16
5	88,05	11,15	28,03	28,09	— 0,06
6	83,10	6,60	27,95	28,07	— 0,12
7	88,47	10,95	+ 28,25	+ 28,22	+ 0,03

$N = + 28,02$ $\quad \Delta T = + 0,010$ $\quad m^2 = 0,0199$
$x = + 0,08$ $\quad \Delta x = - 0,08$ $\quad m = 0,141$
$\alpha = + 0,067$ $\quad x + \Delta x = 0,00$ $\quad m_x = 0,108$

XXVI. G. Tresca. 16 Octobre 1880. x = n°. 27 — n°. 19. $\mu_1 = X_e - M.$

N.	d	g	μ	C	ε
1	84,65	8,85	+ 27,66	+ 27,69	— 0,03
2	85,72	9,65	27,74	27,70	+ 0,04
3	85,20	8,82	27,86	27,79	+ 0,07
4	83,32	7,25	27,74	27,80	— 0,06
5	84,75	8,12	27,98	27,89	+ 0,09
6	83,72	7,30	27,91	27,90	+ 0,01
7	84,85	8,50	+ 27,87	+ 27,99	— 0,12

$N = + 27,80$ $\quad \Delta T = + 0,010$ $\quad m^2 = 0,0084$
$x = - 0,04$ $\quad \Delta x = - 0,08$ $\quad m = 0,092$
$\alpha = + 0,049$ $\quad x + \Delta x = - 0,12$ $\quad m_x = 0,070$

XXVII. G. Tresca. 18 Octobre 1880. x = n°. 23 — n°. 19. $\mu_1 = X_e - M.$

N.	d	g	μ	C	ε
1	33,02	66,00	— 13,29	— 13,43	+ 0,14
2	29,95	63,70	13,54	13,44	— 0,10
3	32,42	65,35	13,26	13,28	+ 0,02
4	32,05	65,22	13,36	13,29	— 0,07
5	32,82	65,90	13,33	13,14	— 0,19
6	32,65	64,80	12,97	13,14	+ 0,17
7	32,02	64,20	— 12,97	— 12,99	+ 0,02

$N = - 13,29$ $\quad \Delta T = + 0,010$ $\quad m^2 = 0,0250$
$x = - 0,08$ $\quad \Delta x = - 0,08$ $\quad m = 0,158$
$\alpha = + 0,072$ $\quad x + \Delta x = - 0,16$ $\quad m_x = 0,121$

XXVIII. G. Tresca. 19 Octobre 1880. x = n°. 19 — n°. 23. $\mu_1 = X_e - M.$

N.	d	g	μ	C	ε
1	17,95	49,50	— 12,47	— 12,54	+ 0,07
2	17,75	49,52	12,56	12,54	— 0,02
3	17,30	49,00	12,52	12,41	— 0,11
4	16,85	48,12	12,35	12,41	+ 0,06
5	17,90	49,00	12,30	12,29	— 0,01
6	16,10	47,32	12,32	12,28	— 0,04
7	17,50	48,10	— 12,10	— 12,16	+ 0,06

$N = - 12,41$ $\quad \Delta T = + 0,005$ $\quad m^2 = 0,0066$
$x = - 0,06$ $\quad \Delta x = - 0,04$ $\quad m = 0,081$
$\alpha = + 0,065$ $\quad x + \Delta x = - 0,10$ $\quad m_x = 0,062$

XXIX. G. Tresca. 20 Octobre 1880. x = n°. 27 — n°. 23. $\mu_1 = X_e - M.$

N.	d	g	μ	C	ε
1	93,65	25,12	+ 24,69	Le changement brusque dans la position du microscope, survenu entre la quatrième et la cinquième mesure, oblige de partager la série en deux sections.	
2	85,22	16,10	25,08		
3	97,05	27,05	25,20		
4	85,02	15,05	25,41		
5	85,75	25,05	21,83		
6	75,57	14,75	22,06		
7	87,25	26,35	+ 21,88		

$\Delta T = + 0,005$
$x = + 0,26$ $\quad \Delta x = - 0,04$
$x + \Delta x = + 0,22$

XXX. G. Tresca. 21 Octobre 1880. x = n°. 23 — n°. 27. $\mu_1 = X_e - M.$

N.	d	g	μ	C	ε
1	86,60	20,95	+ 23,71	+ 23,86	— 0,15
2	90,10	24,35	23,70	23,68	+ 0,02
3	87,32	21,00	23,96	23,81	+ 0,15
4	91,00	25,82	23,46	23,62	— 0,16
5	87,42	21,00	23,99	23,75	+ 0,24
6	91,00	25,22	23,69	23,56	+ 0,13
7	87,05	22,10	+ 23,44	+ 28,69	— 0 25

$N = + 23,62$ $\quad \Delta T = + 0,005$ $\quad m^2 = 0,0520$
$x = - 0,16$ $\quad \Delta x = - 0,04$ $\quad m = 0,228$
$\alpha = + 0,029$ $\quad x + \Delta x = - 0,20$ $\quad m_x = 0,174$

Dans le calcul du Tableau XXVIII on a admis pour le coefficient de la variation proportionnelle au temps une valeur unique α, parce que la variation en hauteur des microscopes n'a pu produire sur la longueur apparente des mètres à traits qu'un effet presque insensible et de plus égal pour les deux étalons. Un calcul préalable avait montré, en effet, que, si l'on distingue deux coefficients:

Digitized by Google

β pour le mètre éloigné, α pour le mètre rapproché, la différence moyenne $\beta - \alpha$ n'atteint que la valeur 0,0043. Pour faire juger des circonstances particulièrement favorables dans lesquelles ces comparaisons ont été faites, nous inscrivons dans le Tableau suivant la durée des séries, l'élévation moyenne des lectures des thermomètres, ainsi que les valeurs calculées de α, les carrés m_p^2

TABLEAU XXIX.

	Série.	Durée en minutes.	Elevation de température totale.	Elevation de température en 10 minutes.	α	m_p^2.	m^2
B.	I. a_2	31	0°,050	0°,016	+ 0,087	0,0229	0,0127
	II. b_2	20	0 ,025	0 ,012	0,064	0,0411	0,0415
	III. c_2	26	0 ,005	0 ,002	0,055	0,0260	0,0133
	IV. d_1	22	0 ,000	0 ,000	0,030	0,0054	0,0364
	V. e_1	29	0 ,000	0 ,000	0,063	0,0120	0,0095
	VI. f_1	29	0 ,000	0 ,000	0,073	0,0078	0,0052
	VII. g_1	25	0 ,000	0 ,000	0,006	0,0053	0,0602
	VIII. h_1	22	0 ,005	0 ,002	0,045	0,0089	0,0277
	IX. j_2	22	0 ,005	0 ,002	0,043	0,0093	0,0227
	X. k_2	23	0°,005	0°,002	+ 0,160	0,0136	0,0017
		24,9	0°,0095	0°,0036	+ 0,0656	0,01523	0,02309
						$m_p = 0{,}123$;	$m = 0.152$.
O.	XI. a_1	14 [1])	0°,000	0°,000	+ 0,110	0,0230	0,0003
	XII. b_1	37	0 ,000	0 ,000	0,021	0,0075	0,0193
	XIII. c_1	21	0 ,000	0 ,000	0,109	0,0055	0,0078
	XIV. d_2	24	0 ,010	0 ,004	0,082	0,0165	0,0483
	XV. e_2	25	0 ,020	0 ,008	0,055	0,0096	0,0154
	XVI. f_2	30	0 ,035	0 ,012	0,043	0,0094	0,0081
	XVII. g_2	21	0 ,017	0 ,008	0,044	0,0123	0,0151
	XVIII. h_2	25	0 ,012	0 ,005	0,076	0,0117	0,0221
	XIX. j_1	25	0 ,000	0 ,000	0,040	0,0134	0,0267
	XX. k_1	28	0°,000	0°,000	+ 0,055	0,0016	0,0161
		26,2	0°,0094	0°,0037	+ 0,0635	0,01250	0,01792
						$m_p = 0\,112$;	$m = 0.134$.
T.	XXI. i	25	0°,000	0°,000	+ 0,091	0,0282	0,0994
	XXII. i	20	0 ,000	0 ,000	0,117	0,0198	0,0179
	XXIII. i	24	0 ,000	0 ,000	0,034	0,0127	0,0026
	XXIV. i	30	0 ,005	0 ,002	0,074	0,0129	0,0455
	XXV. i	30	0 ,000	0 ,000	0,067	0,0177	0,0199
	XXVI. i	22	0 ,015	0 ,007	0,049	0,0083	0,0084
	XXVII. i	25	0 ,000	0 ,000	0,072	0,0122	0,0250
	XXVIII. i	25	0 ,000	0 ,000	0,065	0,0086	0,0066
	XXIX. i	30	0 ,000	0 ,000	——	0,0133	——
	XXX. i	30	0°,000	0°,000	+ 0,029	0,0108	0,0520
		26,1	0°,0020	0°,0009	+ 0,0664	0,01445	0,03081
						$m_p = 0{,}120$;	$m = 0{,}176$.

[1]) Série abrégée.

Digitized by Google

des erreurs moyennes des pointés et les carrés m^2 des erreurs moyennes des mesures de chaque série. L'ordre dans lequel les séries consécutives se sont succédé est indiqué par l'indice des groupes a, b, c, d etc.; les séries isolées ont été désignées par i. Une seule fois (Série XXIX) un mouvement brusque de l'un des microscopes a obligé de partager la série en deux sections, une autre fois (Série X) ce mouvement, intervenu dans l'intervalle de la sixième à la septième mesure, a obligé d'écarter cette dernière, ce qui cependant n'a pas empêché de calculer la constante α avec les six premières mesures.

L'élévation de température en dix minutes n'a été en moyenne que 0°,0005 pour les séries premières ou isolées, et 0°,0069 pour les séries qui avaient été précédées d'une autre. Ces valeurs sont notablement moindres que celles obtenues en 1879 avec le même comparateur. Le fonctionnement régulier de l'instrument se montre surtout dans les valeurs de α, qui offrent une constance remarquable. Non seulement elles présentent le même signe dans toutes les séries, mais, de plus, elles sont toutes du même ordre de grandeur.

L'erreur moyenne des pointés, eu égard au grossissement, a été encore plus faible que dans les premières expériences de la Commission. En effet, la moyenne $m_p = 0{,}119$ de 621 pointés doubles avec une valeur $d = 0^{\mu},376$ des divisions du tambour équivaut à $m_p = 0{,}076$ pour $d = 0^{\mu},24$, au lieu du chiffre 0,083 obtenu en 1876, et donne pour le grossissement $= 1$ une erreur de $20^{\mu},37$. (Voir le Tableau du n°. 34).

Malgré ces conditions favorables, le résultat des nouvelles vérifications ne présente pas le même degré de certitude que celui des comparaisons des mètres à traits effectuées au moyen du comparateur longitudinal. Pour le faire voir nous avons admis, de même que nous l'avions fait pour ces dernières, qu'il peut exister une différence systématique dans la longueur apparente des étalons selon qu'ils se trouvent dans la position rapprochée ou éloignée de l'observateur. En adoptant les mêmes notations que celles du n°. 85, on déduit de chacun des trois groupes de dix comparaisons un système d'équations de la forme:

$$\begin{aligned}
x' + x'' + a \quad\quad + c &= p_1 \\
x' + x'' - a \quad\quad - c &= p_2 \\
x' \quad\quad - a - b \quad\quad &= p_3 \\
x' \quad\quad + a + b \quad\quad &= p_4 \\
x'' \quad\quad - b - c &= p_5 \\
x'' \quad\quad + b + c &= p_6
\end{aligned}$$

dont les deux premières ont un poids trois fois plus grand que les suivantes.

Le résultat de la solution de ces équations, d'après la méthode des moindres

Digitized by Google

carrés, est inscrit dans le Tableau suivant. L'erreur moyenne d'une comparaison s'y trouve indiquée par M, celle du résultat de chaque groupe par M_x.

TABLEAU XXX.

Calcul des différences de longueur des étalons n°. 19, n°. 23 et n°. 27 d'après les nouvelles vérifications.

Longueur mesurée.	Série.		Th.	p Observé.	p Calculé.	Ecart ε.	p Calcul moyen.	Ecart E.
(19) — (27)	I.		17,33	— 0,79	— 0,94	+ 0,15	— 0,61	— 0,18
» »	II.		17,19	— 1,21	— 0,94	— 0,27	— 0,61	— 0,60
» »	III.		17,00	— 0,89	— 0,94	+ 0,05	— 0,61	— 0,28
— |(27) — (19)|	IV.		16,90	+ 0,31	— 0,05	+ 0,36	+ 0,01	+ 0,30
» »	V.	B.	16,72	— 0,14	— 0,05	— 0,09	+ 0,01	— 0,15
» »	VI.		16,61	— 0,37	— 0,05	— 0,32	+ 0,01	— 0,38
— |(23) — (19)|	VII.		16,48	— 0,05	— 0,11	+ 0,06	+ 0,08	— 0,13
(19) — (23)	VIII.		16,42	+ 0,54	+ 0,48	+ 0,06	+ 0,14	+ 0,40
— |(27) — (23)|	IX.		16,33	— 0,19	— 0,25	+ 0,06	— 0,15	— 0,04
(23) — (27)	X.		16,20	— 1,06	— 1,12	+ 0,06	— 0,67	— 0,39
		$x' = + 0,19$			$a = + 0,14$		$M^2 = 0,0705$	
		$x'' = - 0,68$			$b = + 0,15$		$M = 0,266$	
		$x' + x'' = - 0,49$			$c = - 0,58$		$M_x = 0,142$	
(19) — (27)	XI.		17,30	+ 0,29	— 0,18	+ 0,47	— 0,61	+ 0,90
» »	XII.		17,14	— 0,16	— 0,18	+ 0,02	— 0,61	+ 0,45
» »	XIII.		17,00	— 0,63	— 0,18	— 0,45	— 0,61	— 0,02
— |(27) — (19)|	XIV.		16,91	— 0,24	— 0,12	— 0,12	+ 0,01	— 0,25
» »	XV.	O.	16,73	+ 0,06	— 0,12	+ 0,18	+ 0,01	+ 0,05
» »	XVI.		16,63	— 0,14	— 0,12	— 0,02	+ 0,01	— 0,15
— |(23) — (19)|	XVII.		16,49	+ 0,18	+ 0,23	— 0,05	+ 0,08	+ 0,10
(19) — (23)	XVIII.		16,44	+ 0,01	+ 0,06	— 0,05	+ 0,14	— 0,13
— |(27) — (23)|	XIX.		16,31	+ 0,06	+ 0,10	— 0,04	— 0,15	+ 0,21
(23) — (27)	XX.		16,20	— 0,75	— 0,70	— 0,05	— 0,67	— 0,08
		$x' = + 0,14$			$a = + 0,14$		$M^2 = 0,0960$	
		$x'' = - 0,30$			$b = - 0,23$		$M = 0,310$	
		$x' + x'' = - 0,15$			$c = - 0,14$		$M_x = 0,166$	
(19) — (27)	XXI.		17,35	— 0,71	— 0,75	+ 0,04	— 0,61	— 0,10
» »	XXII.		17,23	— 0,46	— 0,75	+ 0,29	— 0,61	+ 0,15
» »	XXIII.		16,98	— 1,07	— 0,75	— 0,32	— 0,61	— 0,46
— |(27) — (19)|	XXIV.		17,93	+ 0,54	+ 0,21	+ 0,33	+ 0,01	+ 0,53
» »	XXV.	T.	16,74	0,00	+ 0,21	— 0,21	+ 0,01	— 0,01
» »	XXVI.		16,76	+ 0,12	+ 0,21	— 0,09	+ 0,01	+ 0,11
— |(23) — (19)|	XXVII.		16,51	+ 0,16	+ 0,12	+ 0,04	+ 0,08	+ 0,08
(19) — (23)	XXVIII.		16,46	— 0,10	— 0,14	+ 0,04	+ 0,14	— 0,24
— |(27) — (23)|	XXIX.		16,32	— 0,22	— 0,26	+ 0,04	— 0,15	— 0,07
(23) — (27)	XXX.		16,29	— 0,20	— 0,24	+ 0,04	— 0,67	+ 0,47
		$x' = - 0,01$			$a = - 0,31$		$M^2 = 0,0711$	
		$x'' = - 0,25$			$b = + 0,18$		$M = 0,267$	
		$x' + x'' = - 0,27$			$c = - 0,17$		$M_x = 0,143$	

Digitized by Google

104. La concordance de ces résultats est sensiblement moindre que celle des chiffres obtenus en 1879 en opérant avec le comparateur longitudinal (Tableau XXI). On ne peut attribuer le moindre degré de précision atteint dans les nouvelles vérifications à un défaut de stabilité du comparateur, car les erreurs moyennes d'une mesure ont été dans les dernières expériences presque aussi faibles, en moyenne $0^{\mu},156$, que celles obtenues par les mêmes observateurs avec le comparateur longitudinal, en moyenne $0^{\mu},143$. Les écarts du Tableau XXX sont évidemment dus à des variations, d'une série à l'autre, dans les longueurs apparentes des étalons. Il paraîtrait donc que l'éclairage avec les nouveaux objectifs a été moins bien réglé et moins constant qu'avec les objectifs à plus petite distance focale. Les variations dans les longueurs apparentes qui peuvent en résulter proviennent de deux causes, d'abord, d'une différence d'aspect que présentent les bords des traits lors même que la mise au point est exactement réglée, différence qui dépend en grande partie de la régularité des traits mêmes, ensuite de l'effet qui se produit sur l'apparence des traits et des fils des micromètres lorsque la mise au point est défectueuse et que l'objectif n'est pas uniformément éclairé par les rayons réfléchis sur la surface des étalons. Dans ce dernier cas il doit se produire entre la longueur apparente des mètres et la distance des objectifs aux traits un rapport analogue à celui que nous avons analysé aux nos. 56—60 de cette Relation. Les écarts entre les différentes valeurs d'une même différence de longueur, inscrites dans le Tableau, semblent démontrer que les deux causes ont agi simultanément. Nous remarquons, en effet, dans les séries IV—VI, XIV—XVI, XXIV—XXVI des écarts considérables, quoique les mètres n'aient pas changé de place. D'autre part, les différences des valeurs obtenues dans les deux positions sont assez bien accusées, surtout dans les six premières séries de chaque groupe, pour démontrer l'existence d'une différence systématique. Or, dans le comparateur transversal elle ne peut exister que par l'effet d'un éclairage inégal dans les deux installations du mètre observé.

La moyenne des trois groupes fournit les équations:

$$x' = (19) - (23) = + 0^{\mu},11 \pm 0^{\mu},073$$
$$x'' = (23) - (27) = - 0^{\mu},41 \pm 0^{\mu},073$$
$$x' + x'' = (19) - (27) = - 0^{\mu},30 \pm 0^{\mu},073$$
$$a = - 0^{\mu},01 \pm 0^{\mu},075$$
$$b = + 0^{\mu},04 \pm 0^{\mu},075$$
$$c = - 0^{\mu},30 \pm 0^{\mu},075.$$

Les équations VIII du n°. 86 déduites des observations de 1879 donnent:

$$(19) - (23) = + 0^{\mu},62 \pm 0^{\mu},031$$
$$(23) - (27) = - 0^{\mu},92 \pm 0^{\mu},031$$
$$(19) - (27) = - 0^{\mu},30 \pm 0^{\mu},031.$$

Digitized by Google

105. Avant l'arrivée des Commissaires néerlandais M. G. Tresca avait effectué quelques vérifications des étalons n°. 19 et n°. 27 en se servant du comparateur longitudinal. Ces comparaisons, faites dans des conditions entièrement identiques à celles de toutes nos mesures, comprennent six séries, trois dans chacune des positions des étalons. Nous nous bornons à transcrire ici les résultats de ces expériences, dont M. G. Tresca a bien voulu nous transmettre tous les détails:

$$\begin{aligned} -|(27)-(19)| &= +0{,}21 \\ \text{»} \quad \text{»} &= -0{,}14 \\ \text{»} \quad \text{»} &= -0{,}05 \\ (19)-(27) &= -0{,}98 \\ \text{»} \quad \text{»} &= -1{,}20 \\ \text{»} \quad \text{»} &= -1{,}12. \end{aligned}$$

La concordance des chiffres d'un même groupe est ici de nouveau tout à fait satisfaisante et égale à celle des comparaisons inscrites au Tableau XXI. On en déduit les équations:

$$x' + x'' = (19) - (27) = -0.55 \pm 0{,}041$$
$$a + c = -0{,}55.$$

La différence systématique dépendant de la position des mètres est encore de même signe et du même ordre de grandeur que celle obtenue avec le même instrument en 1879.

106. En comparant les valeurs de x', x'', $x' + x''$ obtenues en 1880 et en 1879 on reconnaît que celle de $x' + x''$ est exactement la même dans les deux groupes, mais que x' et x'' varient en sens contraire. On pourrait donc conclure que le mètre n°. 23, fréquemment manié dans l'intervalle de 1879 à 1880, a subi quelque variation, qui pourtant ne dépasserait pas sensiblement un demi-micron. Cependant, en présence des écarts des comparaisons de 1880, nous hésitons à admettre cette conclusion. Soit qu'on l'adopte, soit qu'on la repousse, il est évident qu'il n'y a pas lieu de modifier les résultats obtenus en 1879, en introduisant dans le calcul des Tableaux XXIV et XXV les nouvelles données comme équations de condition. Nous avons donc adopté les équations du n°. 102 comme le résultat final de nos opérations.

107. Dans le cours de nos relations avec la Section française nous avons eu à regretter la mort du Président, M. le Général Morin, directeur du Conservatoire des Arts et Métiers, qui non seulement nous a honorés par l'intérêt qu'il a constamment témoigné à l'égard de nos expériences, mais nous a aussi offert dans les laboratoires et les ateliers de la célèbre Institution l'hospitalité la plus franche

Digitized by Google

et la plus cordiale. M. DUMAS ayant succédé à M. MORIN dans ses fonctions de Président, les nouveaux étalons néerlandais ont été définitivement remis à notre Commission par MM. J. B. DUMAS, président, et H. TRESCA, secrétaire, assistés de M. NICOLAS, secrétaire administratif de la Section française de la Commission internationale du mètre, ainsi qu'il est attesté par le Procès-verbal suivant:

„L'an Mil huit cent quatre vingt, le vingt trois Octobre à 3 heures et demie, M. BOSSCHA et M. OUDEMANS, Commissaires du Gouvernement Néerlandais, se sont présentés au Conservatoire des arts et métiers, suivant l'invitation qui leur en a été faite par l'entremise de Monsieur le Baron VAN ZUYLEN VAN NYEVELT, envoyé extraordinaire et Ministre plénipotentiaire de Sa Majesté le Roy des Pays-Bas, pour recevoir, au nom de leur Gouvernement, conformément aux instructions de Monsieur le Ministre de l'Agriculture et du Commerce de la République française, deux mètres étalons en platine iridié qui lui ont été réservés par la décision du 29 Mars 1876.

„Ils ont été reçus par Monsieur J. B. DUMAS, Président de la Section française de la Commission internationale du Mètre, par M. H. TRESCA, secrétaire, et par M. C. NICOLAS, secrétaire administratif de la dite Commission.

„Les deux mètres, numéros dix neuf et vingt sept, que MM^{rs} les Commissaires néerlandais ont pu soumettre précédemment aux comparaisons nécessaires tant entr'eux qu'avec le mètre des Archives, ont été immédiatement mis à leur disposition, ainsi que leurs deux boîtes, deux échantillons de platine iridié servant de témoins et quatre thermomètres portant les numéros 4570, 4571, 4899 et 4900.

„Le poids du platine des mètres et des témoins est au total de 6 kilogrammes et 460 grammes.

„Cette remise est faite sous la réserve du droit qu'aura le Gouvernement des Pays-Bas de faire effectuer les comparaisons entre ces mètres et le prototype du Bureau international des poids et mesures pour la détermination de leurs équations à l'égard de ce mètre.

„MM^{rs} BOSSCHA et OUDEMANS se sont déclaré satisfaits de la remise qui leur a été faite et qui a été constatée par le présent procès verbal, signé de toutes les personnes y dénommées.

Paris le 23 Octobre 1880.

(Signé) J. DUMAS, J. BOSSCHA, J. A. C. OUDEMANS, C. NICOLAS et H. TRESCA.

„Pour copie conforme remise à MM^{rs} les Commissaires néerlandais.

„Le secrétaire de la Section française de la Commission internationale du mètre.

(Signé) H. TRESCA."

Digitized by Google

Les Commissaires néerlandais ont transporté, le 24 Octobre 1880, les nouveaux étalons dans les Pays-Bas, où ils ont été provisoirement déposés dans le laboratoire de physique de l'Ecole Polytechnique de Delft. L'étalon n°. 27 a été déposé depuis dans le „Trippenhuis" à Amsterdam, siège de l'Académie royale des Sciences, d'où, plus tard, il a été transféré à l'Observatoire d'Utrecht pour servir à vérifier le mètre normal de Repsold, appartenant à l'appareil à mesurer les bases, construit par le même artiste, et dont M. Oudemans et les ingénieurs du Service Géographique des Indes Orientales néerlandaises se sont servis dans la triangulation de l'île de Java.

L'étalon n°. 19 est resté à l'Ecole Polytechnique, où il est enfermé dans un coffre-fort solide, spécialement construit dans ce but et offert en don à l'Ecole Polytechnique par le fabricant renommé, M. Chatwood de Bolton. Les thermomètres accompagnant le mètre n°. 19, la copie certifiée du procès-verbal de remise ainsi que les documents contenant tous les chiffres originaux des comparaisons y ont été également déposés.

108. Nous ne pouvons terminer ce Rapport sans exprimer nos sentiments de gratitude envers la Section française qui nous a procuré l'occasion de nous acquitter de notre mission dans les circonstances les plus favorables. Mettant à notre disposition deux règles en platine iridié qui remplissent toutes les conditions qu'on peut exiger et même raisonnablement désirer dans ces instruments de haute précision, la Section française nous a confié en même temps ses précieuses installations, avec entière liberté de travailler sous notre propre responsabilité. C'est ainsi que, étant les premiers à profiter des perfectionnements que les Membres de la Section française avaient introduits dans presque tous les détails des appareils de mesures, nous avons pu non seulement apprécier l'esprit libéral qui inspire ces hommes de science, mais aussi reconnaître, dans les qualités supérieures des moyens de recherche dont nous pouvions nous servir, la haute valeur de leur expérience et de leur sens pratique. Le comparateur à mouvement longitudinal, les microscopes à fort grossissement, l'enveloppe métallique qui protège les comparateurs et les étalons de longueur contre les sources de chaleur extérieures, la méthode optique de comparer les mètres à bouts avec les mètres à traits, méthode qui, malgré les difficultés éprouvées, nous paraît préférable à toute autre et d'ailleurs susceptible d'une application améliorée, ces innovations, presque toutes dues aux conseils éclairés de M. Fizeau, constituent à notre avis des progrès dont il faudra tenir compte dans toute mesure de longueur où l'on se propose d'atteindre les limites extrêmes de précision et de certitude. On peut douter s'il est possible de

Digitized by Google

déterminer d'une manière non équivoque, et indépendante des instruments optiques et du mode d'éclairage employés, la longueur d'un mètre dans une limite qui ne serait qu'une fraction d'onde des rayons moyens du spectre solaire; on peut discuter la question de savoir si, dans l'état actuel de la science et même dans un avenir assez éloigné, la détermination absolue d'une longueur, jusqu'à un ou deux dix-millionièmes de sa valeur offre une grande importance scientifique réelle; — ce que l'expérience acquise avec les magnifiques instruments de la Section française nous semble avoir démontré incontestablement, c'est que, pour réaliser la plus grande précision possible, pour découvrir, analyser et éliminer avec quelque certitude les sources d'erreur, pour fixer la véritable limite dans laquelle on peut compter sur le résultat des mesures, la première condition à remplir sera de se fonder sur les principes expérimentaux mis en avant par les savants français de la Commission internationale du mètre. Il restera alors à employer, dans l'application de ces principes, l'expérience pratique, le talent et jusqu'à l'habileté manuelle dont M. Gustave Tresca a donné tant de preuves, et surtout les soins constants, le zèle infatigable que notre regretté ami, M. H. Tresca, n'a cessé de vouer à une tâche, longue et difficile, mais qui, malgré des épreuves décourageantes et d'amères déceptions, a été pour lui un devoir glorieux envers la science et envers son pays.

La Commission néerlandaise:

J. BOSSCHA, *Rapporteur.*
J. A. C. OUDEMANS.

Digitized by Google

Digitized by Google

ANNEXES.

Digitized by Google

Digitized by Google

NOTE I.

ANALYSE DES ERREURS CAUSÉES, DANS LES MESURES MICROMÉTRIQUES, PAR UNE MISE AU POINT DÉFECTUEUSE.

PAR

J. BOSSCHA.

---

1. Les instruments qu'on emploie dans les mesures micrométriques pour obtenir des images agrandies des dimensions qu'il s'agit de déterminer, constituent ordinairement des systèmes optiques centrés, se composant d'une série de surfaces réfringentes sphériques dont les centres de courbure sont situés sur une même droite, qui forme l'axe du système. En faisant abstraction de quelques irrégularités peu importantes et des défauts accidentels de l'œil humain, on peut appliquer à cet organe la même définition. Si donc, devant l'œil de l'observateur, un instrument micrométrique est placé de manière que les axes optiques des deux appareils coïncident, leur ensemble possédera les propriétés générales des systèmes optiques centrés. Les rayons émanés de chaque point d'un objet lumineux placé devant l'instrument, après avoir traversé le système, atteindront la rétine de l'œil, où ils produiront une sensation, différente selon la manière dont la lumière est distribuée sur cette membrane. Cet effet physiologique est le point de départ du travail mental par lequel nous arrivons à nous représenter la position relative, la grandeur, la forme, le degré d'éclairement et la couleur des objets observés à travers l'instrument. L'examen de la relation qui existe entre cette représentation et la réalité, pour autant qu'elle dépend d'actions physiques connues, se réduit donc à l'étude de la distribution de la lumière sur la rétine et peut en définitive, lorsqu'on laisse hors de considération les effets d'interférence, être ramené à la solution de ce problème: Etant

Digitized by Google

donné un point lumineux, placé devant un système optique centré, déterminer les points de rencontre de ses rayons avec un écran placé en arrière du système.

2. On simplifie ce problème en admettant que les rayons lumineux qui traversent le système, ainsi que les rayons de courbure des surfaces réfringentes aux points d'incidence, font avec l'axe du système des angles assez petits pour que l'on puisse, sans erreur sensible, confondre les sinus et les tangentes avec les arcs de ces angles. Dans ce cas, on démontre facilement que les rayons incidents sur une surface réfringente sphérique isolée, soit qu'ils divergent d'un point lumineux, soit que, pas l'effet de réfractions antérieures, ils convergent vers un point situé derrière la surface, se rencontrent, après la réfraction, dans un même point. Il en résulte immédiatement qu'un cône de rayons incidents sur la première surface réfringente d'un assemblage de surfaces sphériques est transformé, par son passage à travers le système, en un cône dont la section par un plan perpendiculaire à l'axe est une figure semblable à la partie éclairée de la première surface. Pour déterminer ce cône il suffira de suivre la marche de deux rayons quelconques. Leur point de rencontre après leur passage à travers le système sera le sommet du cône émergent, et leurs intersections avec un plan perpendiculaire à l'axe, constituant des points homologues avec les points d'incidence sur la première surface, suffiront pour déterminer en position et en grandeur la section du cône émergent avec le plan considéré. Cette solution du problème est encore simplifiée par un choix convenable des deux rayons. En supposant qu'ils se trouvent dans un plan passant par l'axe du système, on n'aura qu'à considérer les réfractions qui ont lieu dans ce plan même, parce qu'il contient les normales aux points d'incidence sur les surfaces successives et par conséquent les trajectoires entières de ces rayons. On évite ainsi, dans la solution générale du problème, de considérer des rayons croisant l'axe optique et dont la marche ne peut être définie analytiquement que par les équations de leurs coordonnées par rapport à deux plans différents. Le problème énoncé dans le paragraphe précédent se trouve ainsi ramené au problème beaucoup plus simple: Etant donné un rayon lumineux, incident dans un système optique centré, et situé dans un plan passant par l'axe du système, trouver le rayon émergent correspondant. La solution suivante nous semble non seulement la plus simple, mais aussi la plus propre pour en déduire analytiquement les conséquences dont nous aurons besoin dans cette étude.

3. Un rayon situé dans un plan passant par l'axe du système, est déterminé par l'angle qu'il fait avec l'axe et par la distance à l'axe de son point d'incidence sur une des surfaces réfringentes. Pour abréger le langage, nous nommerons *divergence* la première donnée, *amplitude* la seconde. La divergence

Digitized by Google

sera positive lorsque la direction est telle que l'amplitude du rayon prolongé va en augmentant dans les surfaces réfringentes subséquentes. La divergence du rayon incident sera indiquée par D_1, l'amplitude dans la première surface par A_1. Le rayon émergent sera, de même, défini par la divergence finale D_f et par l'amplitude A_f dans la dernière surface.

Il est clair que D_f et A_f seront fonctions de D_1 et A_1 et des indices de réfraction, des rayons de courbure et des distances des surfaces réfringentes consécutives. Dans un système optique donné on pourra poser

$$D_f = f(D_1, A_1); \qquad A_f = \varphi(D_1, A_1).$$

Les propriétés indiquées dans le paragraphe précédent suffisent pour déterminer ces fonctions. En effet, dans un plan passant par l'axe, tout rayon incident peut être considéré comme appartenant à un cône de rayons divergents ou convergents dont le sommet est situé sur l'axe à une distance x de la première surface réfringente. Pour ces rayons on aura $A_1 = x D_1$. Mais la section du cône incident par la première surface et celle du cône émergent par la dernière surface étant des figures semblables et les points d'incidence et d'émergence des points homologues, si l'on fait varier le point d'incidence de manière que l'amplitude A_1 du rayon augmente de ΔA_1, ou la divergence D_1 de ΔD_1, le rapport $\Delta A_f : \Delta A_1$ sera constant, de même que le rapport $\Delta D_f : \Delta D_1$. Les fonctions $f(D_1, x D_1)$ et $\varphi(D_1, x D_1)$ seront donc linéaires par rapport à D_1. Comme, de plus, un rayon coincidant avec l'axe n'éprouve aucune réfraction, de sorte que pour $D_1 = 0$ et $A_1 = 0$ on a $D_f = 0$ et $A_f = 0$, les fonctions $f(D_1, A_1)$, $\varphi(D_1, A)$ ne comprendront aucun terme constant; on pourra donc poser:

$$\left.\begin{aligned} D_f &= c D_1 + p A_1 \\ A_f &= r D_1 + s A_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

c, p, r, s étant des constantes pour un système donné [1]).

---

[1]) Lagrange, dans un mémoire »*Sur la théorie des Lunettes*" publié dans les »Nouveaux Mémoires de l'Académie royale de Berlin, Année 1778", a le premier fait connaître ces deux équations pour un système de lentilles centrées. En appliquant aux lentilles successives les formules connues $\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} = \frac{1}{f'}$; $\frac{1}{a''} + \frac{1}{b''} = \frac{1}{f''}$ etc., auxquelles il ajoute les conditions $b' + a'' = h'$, $b'' + a''' = h''$, où h', h'' etc. désignent les distances des lentilles, Lagrange introduit, dans le calcul qui sert à trouver la distance du dernier foyer conjugué à la dernière surface, des quantités auxiliaires x, x', x'', x''', etc. telles qu'on ait $a' = \frac{x'}{x}$, $b' = \frac{x'}{x''}$, $a'' = \frac{x'''}{x''}$, $b'' = \frac{x'''}{x^{IV}}$ etc. et il fait voir, par le calcul de x, x', x'', etc. que l'expression d'une inconnue quelconque sera composée de deux parties, l'une toute multipliée par x, l'autre toute multipliée par x'. Il remarque ensuite que pour x, x'', x^{IV} etc. on peut prendre les tangentes des angles que le rayon fait successivement avec l'axe du système et pour x', x''' etc. ce qu'il appelle l'ouverture des lentilles, qui n'est autre chose que la distance des points d'incidence à l'axe. Les équations de Lagrange, qui s'appliquent également à un système de surfaces réfringentes, renferment en réalité toute la théorie des systèmes optiques centrés.

Digitized by Google

A chacune des quatre constantes c, p, r, s, qui déterminent complètement la réfraction d'un rayon par un système donné, on peut assigner une signification physique particulière.

Imaginons que l'œil soit placé au point O où l'axe traverse la première surface d'un instrument optique et qu'il aperçoive sous un angle α une perpendiculaire menée du point L_1 de l'axe au point H_1 situé au-dessous de l'axe. Si le rayon $H_1 O$ continue sa route à travers le système il ira couper, après son émergence, l'axe en un point O_2. Si de ce point l'œil regardant dans l'instrument aperçoit l'image de $H_1 L_1$, l'image du point H_1 devra être située dans la direction du rayon $H_1 O$ après sa sortie; donc, si β est la divergence finale du rayon considéré, $\frac{\beta}{\alpha}$ sera le grossissement angulaire de l'image. Mais comme $\alpha = D_1$, $\beta = D_f$ et $A_1 = 0$, on aura $\frac{\beta}{\alpha} = c$. La première constante c peut donc être désignée comme *le grossissement angulaire* de l'instrument.

La déviation δ qu'un rayon, situé dans un plan passant par l'axe, éprouve en passant à travers l'instrument sera $\delta = D_f - D_1$. Pour un rayon incident parallèle à l'axe on aura $\delta = D_f = p A_1$. Donc, p sera la déviation d'un rayon parallèle à l'axe et ayant une amplitude initiale égale à l'unité. On peut le désigner comme *le pouvoir réfringent* de l'instrument. En exprimant dans l'équation:

$$p = \frac{D_f}{A_1}$$

la valeur de A_1 en mètres, p sera donné en dioptries, mesure employée dans l'ophthalmologie pour exprimer la puissance optique des verres de lunettes. Dans nos notations, p sera négatif lorsque la lentille est convergente.

Considérons encore un rayon incident au point O où $A_1 = 0$. L'amplitude finale de ce rayon sera $A_f = r D_1$. Supposons que le point d'émergence G soit situé sur le bord d'une ouverture circulaire centrée couvrant la dernière surface ou l'oculaire de l'instrument. Si nous imaginons que l'œil, placé en O et regardant dans l'instrument, aperçoive l'image du bord de l'oculaire, il faudra que l'image de G se trouve dans la direction du rayon qui a G pour point d'émergence. L'angle sous lequel se présente à l'œil le rayon de l'ouverture sera donc D_1. Or, en désignant par *distance apparente* d'un objet la distance d à laquelle il faut le placer pour qu'il se présente sous le même angle que son image dans un instrument optique, on aura $d = \frac{A_f}{D_1} = r$. La troisième des constantes peut donc être définie comme *la distance apparente de l'oculaire.*

Enfin, si dans l'équation $A_f = r D_1 + s A_1$ on fait $D_1 = 0$, $s = \frac{A_f}{A_1}$ sera le rap-

Digitized by Google

port des dimensions des parties éclairées des surfaces extrêmes du système. Ce coefficient indique donc le rapport dans lequel la section du cylindre de rayons parallèles incidents se trouve dilatée à sa sortie. On peut le désigner comme *le pouvoir dilatant*, ou $\frac{1}{s}$ comme *le pouvoir concentrant* du système.

4. Pour faire connaître les relations qui existent entre les constantes et les éléments d'un système, nous concevons celui-ci partagé en deux parties, séparées par un intervalle d. Soient c, p, r, s les constantes de la première, c', p', r', s' celles de la deuxième partie. Les rayons incidents sur la seconde partie auront dans ce dernier système une divergence initiale $D_f = c\,D_1 + p\,A_1$ et une amplitude initiale $A_f + d\,D_f = r\,D_1 + s\,A_1 + d\,c\,D_1 + d\,p\,A_1$. En substituant ces valeurs dans les équations du second système on obtient pour la divergence finale D_F et l'amplitude finale A_F les équations:

$$D_F = C\,D_1 + P\,A_1; \qquad A_F = R\,D_1 + S\,A_1;$$

où:

$$\left.\begin{aligned} C &= c\,(c' + p'\,d) + p'\,r \\ P &= p\,(c' + p'\,d) + p'\,s \\ R &= c\,(r' + s'\,d) + s'\,r \\ S &= p\,(r' + s'\,d) + s'\,s \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

On en déduit

$$C\,S - P\,R = (c\,s - p\,r)\,(c'\,s' - p'\,r') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C)$$

Pour une surface sphérique isolée, de rayon R_1 et dont la concavité est tournée du côté de la lumière incidente, on trouve facilement

$$D_f = \frac{1}{n_{1.2}}\,D_1 + \frac{n_{1.2} - 1}{n_{1.2}}\,\frac{A_1}{R_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (D)$$

$n_{1.2}$ étant l'indice de réfraction d'un rayon qui passe du premier milieu dans le second [1]). Comme de plus on a évidemment

$$A_f = A_1,$$

[1]) La déviation δ qu'un rayon éprouve par la réfraction sur une surface lorsqu'il forme avec la normale un angle i sera $\delta = i - r$, si r est l'angle de réfraction. En substituant dans la formule qui exprime la loi de réfraction les angles aux sinus on aura $i = n_{1.2}\,r$, $\delta = \frac{n_{1.2} - 1}{n_{1.2}}\,i$. Le rayon de divergence D_1 qui tombe sur la surface concave éprouvera la déviation δ dans le sens positif ou dans le sens négatif, selon qu'il se trouve à l'extérieur ou à l'intérieur de l'angle aigu N que la normale au point d'incidence fait avec l'axe. Mais dans le premier cas on aura $i = N - D_1$ dans le second $i = D_1 - N$, de sorte que dans les deux cas indistinctement $D_2 = D_1 + \frac{n_{1.2} - 1}{n_{1.2}}\,(N - D_1)$. Substituant $\frac{A_1}{R_1}$ pour N_1 on obtient la formule du texte.

Digitized by Google

les constantes seront

$$c = \frac{1}{n_{1.2}}; \quad p = \frac{n_{1.2}-1}{n_{1.2}} \frac{1}{\mathrm{R}}; \quad r = 0; \quad s = 1,$$

et

$$c\,s - p\,r = \frac{1}{n_{1.2}}.$$

Une seconde surface réfringente, séparant les milieux 2 et 3, donnera de même

$$c'\,s' - p'\,r' = \frac{1}{n_{2.3}},$$

de sorte que pour un système se composant de q surfaces réfringentes sphériques, séparant les milieux 1, 2, 3.... $q+1$, on aura

$$\mathrm{C\,S - P\,R} = (c\,s - p\,r)\,(c'\,s' - p'\,r')\,(c''\,s'' - p''\,r'')\ldots\text{etc.} = \frac{1}{n_{1.2}} \cdot \frac{1}{n_{2.3}} \cdot \frac{1}{n_{3.4}} \cdot \ldots$$

$$\ldots \frac{1}{n_{q.q+1}} = \frac{1}{n_{1.q+1}} = n_{q+1.1} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(E)}$$

Donc, dans chaque système le binôme C S — P R, que, pour abréger, nous désignerons dans la suite par N, sera égal à l'indice de réfraction d'un rayon qui passe du dernier milieu dans le premier. Pour les systèmes optiques ordinaires, tel que lentilles, microscopes et lunettes, on aura C S — P R = 1 [1]). Si l'on considère l'ensemble de l'œil armé d'un instrument optique comme un seul système, C S — P R sera l'indice de réfraction d'un rayon qui passe de l'humeur vitrée dans l'air.

Les formules (B) et (D) peuvent servir pour calculer les constantes d'un système optique donné, la formule (E) peut servir à contrôler le calcul. Dans le cas où le système se compose d'une série de lentilles dont on peut négliger l'épaisseur, on a pour chaque lentille

$$\mathrm{D}_f = \mathrm{D}_1 - \frac{\mathrm{A}_1}{\varphi_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(F)}$$

φ_1 étant la distance focale de la lentille, et par conséquent $c = 1$, $p = -\frac{1}{\varphi}$, $r = 0$, $s = 1$.

Les relations qui existent entre les constantes C, P, R, S d'un système et les constantes C', P', S', R' du système renversé s'obtiennent en écrivant dans les équa-

---

[1]) Relation déjà connue de LAGRANGE. Dans le mémoire cité, LAGRANGE écrit: $\mathrm{P}\,\lambda+1\,\mathrm{Q}\,\lambda - \mathrm{Q}\,\lambda+1\,\mathrm{P}\,\lambda = \pm 1$, et il ajoute: »le signe supérieur étant pour le cas où λ est pair et l'inférieur pour celui où λ est impair." Dans un mémoire subséquent, publié dans les »Mémoires de l'Académie royale de Berlin, Année 1803", LAGRANGE a corrigé cette erreur.

Digitized by Google

tions du système: $-D_1$ au lieu de D_2, et $-D_2$ au lieu de D_1; A_1 au lieu de A_2, et A_2 au lieu de A_1. On a alors:

$$(C S - P R) D_2 = S D_1 + P A_1$$
$$(C S - P R) A_2 = R D_1 + C A_1,$$

d'où:

$$C' = \frac{S}{N}, \qquad P' = \frac{P}{N}, \qquad R' = \frac{R}{N}, \qquad \text{et } S' = \frac{C}{N}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (G)$$

5. Pour appliquer les équations des systèmes optiques au problème énoncé au paragraphe 1er, plaçons devant la première surface réfringente ou l'objectif d'un système c, p, r, s, à une distance x, un écran E_o, plan, perpendiculaire à l'axe, transparent et sans épaisseur. Soit, de même, E un écran placé à une distance y au-delà de la dernière surface réfringente ou de l'oculaire du système. Nous pouvons considérer ces écrans comme de nouvelles surfaces réfringentes, ajoutées à celles du système donné, et nous proposer de calculer les constantes du système composé. A cet effet nous remarquons que, la direction des rayons ne variant pas par leur passage à travers les écrans, les divergences initiale et finale d'un rayon donné seront les mêmes pour le système primitif et pour le système composé. Mais, si l'amplitude du rayon est A_1 dans l'objectif, A_f dans l'oculaire, A_o dans l'écran E_o, A_e dans l'écran E, on aura

$$A_1 = A_o + x D_1 \qquad\qquad A_f = A_e - y D_1.$$

La substitution de ces valeurs dans les équations du système primitif donnera celles du système composé, savoir:

$$\left.\begin{aligned} D_f &= (c + p x) D_1 + p A_o \\ A_e &= (r + s x + c y + p x y) D_1 + (s + p y) A_o \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (H)$$

Nous pouvons maintenant faire varier les distances x et y des écrans de manière que D_f et A_e satisfassent à certaines conditions. Déterminons x et y de manière que les rayons partis d'un point lumineux L_1 placé dans le plan E_o, après leur passage à travers le système, se coupent dans le même point L_2 en E. Si la distance de L_1 à l'axe est A_o, nous pouvons considérer les rayons de L_1 qui tombent sur l'objectif, comme des rayons qui sont entrés dans le système composé avec la même amplitude A_o, mais avec des divergences diverses. Le point où un rayon réfracté coupe l'écran E sera situé dans un plan mené par l'axe optique et L_1, sa distance à l'axe A_e sera donnée par la seconde des deux équations. Dans le second membre de cette équation le second terme est constant pour tous les rayons émanés de L_1, mais le premier est variable avec D_1. Pour que A_e ait la même valeur pour tous les rayons de L_1, il suffira donc que le coefficient de D_1 dans le premier terme s'évanouisse, c'est-à-dire que l'on ait:

Digitized by Google

$$r + s x + c y + p x y = 0 \text{ [1]} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(I)}$$

ou

$$y = -\frac{r + s x}{c + p x},$$

d'où il suit que tous les points lumineux de l'écran E_o forment des images stigmatiques en E en même temps que le point L_1. Le rapport d'agrandissement G de l'image formée en E d'un objet lumineux en E_o est évidemment:

$$G = \frac{A_e}{A_o} = s + y p \text{ [1]} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(K)}$$

En ayant égard à l'équation (I), on a

$$(s + y p)(c + p x) = c s - p r = n,$$

donc aussi

$$G = \frac{n}{c + p x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(L)}$$

Pour deux autres plans conjugués, on a de même

$$r + s x' + c y' + p x' y' = 0$$

$$G' = s + y' p = \frac{n}{c + p x'}.$$

En combinant la première de ces équations avec (I), on trouve

$$s(x' - x) + c(y' - y) + p y (x' - x) + p x' (y' - y) = 0,$$

d'où

$$\frac{y' - y}{x' - x} = -\frac{s + p y}{c + p x'} = -\frac{G G'}{n} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(M)}$$

Lorsque les milieux extrêmes sont identiques, comme dans les instruments optiques ordinaires, on aura

$$y' - y = -G G' (x' - x) \text{ [2]} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(N)}$$

Lorsque x' diffère peu de x, les valeurs de G et de G' seront sensiblement égales, de sorte qu'on peut poser

$$\Delta y = -G^2 \Delta x \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(O)}$$

6. La position du *plan focal* postérieur ou *second plan focal*, où se forment les images d'objets placés à une distance infinie, s'obtient en posant dans l'équation (I) $x = \infty$, $y = q_2$, q_2 désignant la distance du plan cherché à l'oculaire. On a ainsi:

$$q_2 = -\frac{s}{p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(P)}$$

---

[1]) Equation employée au n° 33 du Rapport.

[2]) C'est l'équation $\lambda_1 \lambda = -G G' \Delta a$ du n°. 57 du Rapport.

Digitized by Google

En posant $x = q_1$, $y = \infty$, on obtient la distance du plan focal antérieur ou *premier plan focal* à l'objectif:

$$q_1 = -\frac{c}{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (Q)$$

La distance o_2 du plan conjugué de l'objectif s'obtient en posant $x = 0$, d'où:

$$o_2 = -\frac{r}{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (R)$$

On trouve le grossissement G_{o_2} de l'image de l'ouverture de l'objectif en substituant cette valeur au lieu de y en $s + y\,p$, c'est-à-dire:

$$G_{o_2} = \frac{c\,s - r\,p}{c}: \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (S)$$

dans les instruments optiques ordinaires on a donc:

$$G_{o_2} = \frac{1}{c}.$$

Le grossissement angulaire du système est donc l'inverse du grossissement de l'image de l'objectif [1]). Dans le système renversé on aura

$$o_1 = -\frac{r}{s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (T)$$

$$G_{o_1} = \frac{1}{s}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (U)$$

Pour conserver l'analogie avec la désignation des plans focaux et des foyers, on peut appeler *second plan oculaire* le plan qui renferme l'image de l'objectif et qui est situé à une distance o_2 de la dernière surface réfringente. L'intersection de ce plan avec l'axe sera le *second point oculaire*, ou le point de l'œil proprement dit. Le *premier plan oculaire* et le *premier point oculaire*, qui se trouvent ordinairement devant l'objectif, ont les même propriétés par rapport au système renversé, que les précédents par rapport au système donné. L'image de l'ouverture circulaire de l'objectif est désignée ordinairement comme l'anneau

---

[1]) Cette propriété, sur laquelle se fonde le procédé connu de déterminer le grossissement angulaire des lunettes, a été découverte par LAGRANGE. Le deuxième mémoire cité plus haut a même pour but spécial de publier cette loi, à propos de laquelle LAGRANGE dit: »Comme il y a en mécanique la loi générale des vitesses virtuelles par laquelle on peut connaître l'augmentation de force produite par une machine, sans connaître la nature ni la construction de la machine, mais par le simple rapport des vitesses simultanées du point où est appliquée la puissance et du point auquel la puissance est transmise par la machine. De même on peut dire qu'il y a en optique une loi analogue, par laquelle, sans connaître la disposition d'un télescope où d'un microscope, on peut juger de sa force par le simple rapport du diamètre de l'ouverture de l'objectif au diamètre de l'ouverture de l'oculaire".

Digitized by Google

oculaire. Comme tous les rayons incidents sur un point de l'objectif doivent passer par le point homologue de l'anneau, il est clair que la circonférence de l'anneau oculaire est la directrice commune de tous les cônes de rayons émergents provenant de divers points lumineux placés devant le système. Dans les systèmes optiques ordinaires, il suffira, pour déterminer les quatre constantes, de connaître le rapport d'agrandissement c de l'anneau oculaire postérieur, sa distance $-\frac{r}{c}$, et l'une des distances $-\frac{c}{p}$ ou $-\frac{s}{p}$ des foyers aux surfaces réfringentes extrêmes de l'instrument. Les anneaux oculaires et les points focaux sont beaucoup plus propres à faire connaître les qualités réfringentes d'un système que les points nodaux ou les points principaux combinés avec les foyers, qu'on a proposés dans ce but. Les premiers, en effet, sont caractérisés par des propriétés que l'on reconnaît facilement par l'expérience. Les points nodaux et principaux, au contraire, ne sont ordinairement pas accessibles et ce n'est que par voie indirecte que l'on peut les reconnaître expérimentalement et calculer leur position [1]).

Le pouvoir réfringent p peut se déterminer directement en mesurant la variation ΔG du grossissement produite par une variation Δy dans la position de l'écran où se forme l'image après qu'on a fait varier x, car de $G = s + y\,p$ on déduit:

$$p = \frac{\Delta G}{\Delta y}.$$

Remarquons encore que, en posant $x = \xi - \frac{c}{p}$, $y = \eta - \frac{s}{p}$, c'est-à-dire en déterminant la position des écrans par leurs distances ξ et η aux plans focaux, l'équation (I) prend la forme

$$\xi\,\eta = \frac{n}{p^2},$$

---

[1]) Le premier point nodal étant le point de l'axe qui jouit de la propriété qu'un rayon incident, dirigé vers ce point, n'éprouve point de variation dans sa direction par le passage à travers le système, on trouve sa distance n_1 à la première surface réfringente en faisant dans la première des équations (H) $A_0 = 0$, $Df = D_1$, $x = n_1$, d'où

$$n_1 = \frac{1-c}{p}.$$

Le second point nodal étant le point conjugué de n_1, sa distance à la dernière surface réfringente sera

$$n_2 = \frac{c\,s - r\,p - s}{p} = \frac{n-s}{p}.$$

Les points principaux de Gauss étant des points conjugués caractérisés par la propriété que le grossissement est $+1$, on a pour déterminer la distance p_2 du second de ces points à la dernière surface réfringente

$$s + p_2\,p = 1,$$

d'où

$$p_2 = \frac{1-s}{p};\quad p_1 = \frac{c\,s - r\,p - c}{p} = \frac{n-c}{p}.$$

Digitized by Google

formule bien connue, qui indique que le produit des distances de deux plans conjugués aux foyers respectifs est constant et égal à l'inverse du produit des pouvoirs réfringents du système et du système renversé. Dans ces notations le grossissement devient

$$G = \eta p = \frac{n}{\xi p}.$$

7. L'impression que l'œil reçoit de rayons incidents sur un même point de la rétine peut être considérée comme étant indépendante de la direction des rayons en ce point. Au moins, dans les limites restreintes qui se présentent dans la vision ordinaire, l'influence des différences de direction n'a pas été reconnue jusqu'ici. Des deux équations (H) qui déterminent le rayon réfracté il n'y a donc que la seconde dont puissent dépendre les effets éprouvés par l'œil humain. De plus, la distance de la rétine à la face postérieure du cristallin peut être considérée comme invariable. On peut donc attribuer à y une valeur constante et même la poser égale à zéro, ce qui revient à considérer comme appartenant au système optique de l'œil une certaine région du dernier milieu, dans laquelle la lumière n'éprouve plus aucune réfraction. On aura alors:

$$A_e = (R + S x) D_1 + S A_o. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (V)$$

et dans cette forme l'équation peut aussi bien s'appliquer à l'œil armé qu'à l'œil nu. Nous distinguerons ces deux cas en désignant par C, P, R, S les constantes de l'œil nu, c'est-à-dire du système qui s'étend de la cornée jusqu'à la rétine, et par C', P', R', S' celles d'un système composé d'un instrument optique et de l'œil jusqu'à la rétine.

Dans les deux cas l'effet de la lumière incidente ne dépendra que de deux constantes et même, lorsque l'on suppose connue la distance x_o pour laquelle l'œil se trouve accommodé, d'une seule, parce qu'alors $R + S x_o$ ou $R' + S' x_o$ sont zéro, de sorte qu'on pourra écrire:

$$A_e = S (x - x_o) D_1 + S A_o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (X)$$

On ne connaît pas de méthode directe pour déterminer par voie expérimentale, pour l'œil vivant, la constante unique qui suffit pour déterminer le point d'incidence d'un rayon quelconque sur la rétine. Il suffirait de connaître la dimension linéaire d'un objet situé sur la rétine et de mesurer la même dimension dans l'image que les surfaces réfringentes de l'œil forment de cet objet.

M. Listing, se basant sur diverses mesures des éléments optiques de l'œil, a introduit dans l'optique physiologique la notion d'un œil schématique ou œil moyen, auquel on attribue les propriétés numériques suivantes, toutes exprimées en chiffres ronds, savoir:

Digitized by Google

indice de réfraction de l'humeur aqueuse	$n_{1,2} = \frac{103}{77}$
" " " du cristallin	$n_{1,3} = \frac{16}{11}$
" " " de l'humeur vitrée	$n_{1,4} = \frac{103}{77}$
rayon de courbure de la cornée	$\varrho_1 = -8^{mm}$.
" " " " " face antérieure du cristallin	$\varrho_2 = -10^{mm}$.
" " " " " " postérieure " "	$\varrho_3 = +6^{mm}$.
distance de la cornée au cristallin	$d_1 = 4^{mm}$.
épaisseur du cristallin	$d_2 = 4^{mm}$.

où nous avons attribué à ϱ_1 et ϱ_2 le signe négatif parce que la cornée et la première face du cristallin ont leurs côtés convexes tournés vers la lumière. Si l'on calcule avec ces données, au moyen des formules (D) et (B), les constantes du système compris entre la cornée et la face postérieure du cristallin, on trouve:

$$c = 0{,}639; \qquad p = -0{,}0498; \qquad r = 5{,}644; \qquad s = 0{,}730.$$

Pour ajouter à ce système la région de l'humeur vitrée, qui s'étend jusqu'à la rétine, placée à une distance de $14^{mm},65$ de la face postérieure du cristallin, on n'a qu'à supposer qu'un écran, pour lequel $c' = 1$, $p' = 0$, $r' = 0$, $s' = 1$, $d = 14^{mm},65$, forme la seconde partie du système. Les formules (B) donnent alors:

$$C = 0{,}639; \qquad P = -0{,}0498; \qquad R = 15{,}00; \qquad S = 0{,}00.$$

De ces quatre constantes les deux dernières suffisent pour déterminer, de tout rayon donné, le point d'incidence sur la rétine.

Avec les valeurs calculées de l'œil moyen, l'équation:

$$R + S\,x = 0$$

donnera $x = \infty$, ce qui indique qu'on a supposé que l'œil fût accommodé pour distance infinie.

Si un système γ, π, ϱ, σ est placé à une distance δ de l'œil, les nouvelles constantes C', P', R', S' se calculeront encore au moyen des formules (B), en y remplaçant c, p, r, s par γ, π, ϱ, σ; c', p', r', s' par C, P, R, S et d par δ. On a ainsi, à cause de $S = 0$,

$$R' = \gamma R; \qquad S' = \pi R;$$

indépendamment de δ. Toutefois, lors même que l'œil est accommodé pour distance infinie, le lieu qu'il devra occuper par rapport à l'instrument optique est déterminé par la condition que le champ visible soit maximum. A cet effet, il faudra placer l'œil de manière que le second anneau oculaire de l'instrument coïncide avec la pupille ou, plus exactement, avec l'image que la cornée et l'humeur aqueuse forment de cette ouverture.

Digitized by Google

8. Lorsque la condition $R' + S' x = 0$ n'est pas remplie, les rayons partis du point lumineux L_1 placé dans l'écran E_o ne rencontreront pas la rétine au même point; leurs points d'intersection avec cette membrane seront situés sur une région de forme semblable à celle de l'ouverture de l'objectif. Si, au moyen d'un diaphragme à ouverture étroite, on intercepte tous les rayons de L_1 qui tombent sur l'objectif, à l'exception d'un pinceau assez mince pour que les rayons transmis ne diffèrent pas sensiblement de divergence initiale, nous aurons, en désignant celle-ci par D_1', pour déterminer l'amplitude des rayons sur la rétine, l'équation:

$$A'_e = (R' + S' x) D'_1 + S' A_o.$$

Lorsque le pinceau transmis passe par le centre de l'objectif, on a évidemment:

$$D'_1 = -\frac{A_o}{x}.$$

Supposons que l'œil reçoive en même temps les rayons d'un point lumineux L_o, situé dans le même plan passant par l'axe que L_1, ayant de lui même amplitude A_o, mais placé à une distance x_o telle que $R' + S' x_o = 0$, de sorte que pour ce point la mise au point de l'instrument soit exacte. L'amplitude de l'image de ce point sur la rétine sera:

$$A_e = S' A_o,$$

d'où:

$$A'_e - A_e = \Delta A_e = (R' + S' x) D'_1 = S' (x_o - x) \frac{A_o}{x}.$$

Cette distance ΔA_e des images de L_o et L_1 sur la rétine sera évidemment le déplacement que l'image de L_o sur la rétine subira lorsque l'on déplace sur une distance:

$$\Delta x = x - x_o$$

le point lumineux dans une direction parallèle à l'axe. Le déplacement ΔA_o qu'il faudrait faire subir au point L_o dans un plan perpendicaire à l'axe, pour produire la même déviation ΔA_e de son image, s'obtient en divisant ΔA_e par le grossissement S'; on a donc:

$$\Delta A_o = -\frac{\Delta x}{x} A_o.$$

Avec des objectifs circulaires entièrement découverts et lorsque la lumière est uniformément distribuée dans le cône incident, l'observateur, dans le cas d'une vision non distincte, s'oriente d'après les rayons centraux. ΔA_o sera donc le déplacement apparent causé par une variation Δx de la mise au point. Dans les mesures micrométriques on indique quelquefois cette variation comme l'effet d'une modification dans la valeur des divisions du micromètre; aussi l'expression

Digitized by Google

trouvée pour ΔA_o est identique avec la formule employée au n°. 35 de notre Rapport.

9. Supposons que, par un mouvement approprié du diaphragme à étroite ouverture, on déplace le pinceau incident dans le plan passant par l'axe optique et L_1. Lorsque le pinceau aura atteint le bord supérieur de l'ouverture circulaire de l'objectif, la divergence $-\frac{A_o}{x}$ sera augmentée de $\frac{O}{x}$, si O désigne le rayon de l'objectif. Les limites dans lesquelles on pourra faire varier les rayons incidents étant $-\frac{A_o}{x} \pm \frac{O}{x}$, le lieu de l'image sur la rétine, dans un même plan passant par l'axe optique, sera donné par une amplitude comprise entre:

$$(R' + S' x)\left(\frac{-A_o \pm O}{x}\right) + S' A_o.$$

La variation

$$\pm (R' + S' x)\frac{O}{x}$$

correspondra à un déplacement apparent M dans le plan de vision distincte:

$$M = \frac{x - x_o}{x} 2\,O.$$

Si $x = \infty$, on aura:

$$M = 2\,O.$$

Une expérience bien simple peut servir à vérifier ces conclusions. Lorsque devant une fenêtre on fixe l'œil sur quelque petit objet placé contre la vitre, l'image d'objets éloignés paraît diffuse. Un morceau de carton dans lequel on a pratiqué une petite ouverture et qu'on tient comme diaphragme devant l'œil suffit pour rendre parfaitement nets les contours des objets éloignés. Si, maintenant, tout en continuant de fixer l'objet rapproché, on fait mouvoir le carton, on verra se déplacer les objets éloignés par rapport au point fixé. En tenant la tête bien tranquille on peut mesurer ce déplacement au moyen d'une échelle divisée appliquée contre la vitre. On vérifie ainsi que l'étendue M du mouvement, mesurée dans le plan de vision distincte, est de 3 à 4 millimètres, c'est-à-dire à peu près égale au diamètre 2 O de la pupille.

10. Supposons l'objectif entièrement découvert et de forme circulaire. Lorsque la mise au point n'est pas exacte et que par conséquent dans l'équation (X) le terme $S'(x - x_o) D_1$ ne s'évanouit pas, le cône réfracté dessinera sur la rétine un cercle de diffusion dont le rayon sera:

$$\varrho = S' \frac{x - x_o}{x} O.$$

Digitized by Google

Le rapport d'agrandissement S' du système entier sera proportionnel au grossissement de l'instrument placé devant l'œil. La dimension linéaire du cercle de diffusion, qui se forme sur la rétine par l'effet d'une erreur de mise au point $x - x_o$ sera donc d'autant plus grande que le grossissement de l'instrument optique est plus fort. La précision avec laquelle un observateur, qui se laisse guider par la netteté des images, peut obtenir une mise au point rigoureuse croîtra donc avec le grossissement de l'instrument employé, et elle sera proportionnelle à ce grossissement, lorsque la sensibilité de l'œil reste la même et que, de plus, l'angle $\frac{O}{x}$ soustendu au point lumineux L_1 par le rayon de l'objectif ne varie pas.

11. Lorsque la quantité de lumière incidente par unité de surface n'est pas la même pour les différents points de l'objectif, le cercle de diffusion sur la rétine reproduira encore symétriquement les divers degrés d'éclairement de l'objectif. On n'a pas de données suffisamment complètes et exactes pour pouvoir énoncer la loi d'après laquelle l'observateur juge alors du lieu du point lumineux, mais il est très probable que le lieu apparent correspondra au centre de gravité de la partie éclairée de la rétine, si l'on attribue à chaque élément une densité proportionnelle au degré d'éclairement. Nous nommerons ce point *le centre d'éclairement.*

Il est clair que les centres d'éclairement de l'objectif et du cercle de diffusion seront des point homologues. On peut se convaincre facilement que le lieu apparent d'un objet se déplace en même temps que le centre d'éclairement des figures de diffusion sur la rétine. Si l'on regarde une page imprimée, à une distance plus petite que celle de vision distincte, et que par un carton placé devant l'œil on intercepte successivement les rayons qui peuvent entrer par la pupille, on voit les lettres imprimées se déplacer vers le bord du carton. Si la distance dépasse celle de vision distincte, les lettres paraissent fuir devant le bord de l'écran mobile.

Lorsque le centre d'éclairement de l'objectif est situé dans le plan passant par l'axe optique et le point lumineux L_1, on trouvera immédiatement le centre d'éclairement de la rétine. Il sera situé dans l'intersection de la rétine avec ce plan et à une distance A_e de l'axe telle que

$$A_e = S'(x - x_o) D_1 + S' A_o,$$

si pour D_1 on substitue la divergence du rayon mené de L_1 au centre d'éclairement de l'objectif et pour A_o l'amplitude de L_1 sur l'écran E_o.

Dans le cas plus général où le centre d'éclairement de l'objectif ne se trouve pas dans le plan que nous venons d'indiquer, la détermination du centre d'éclairement de la rétine n'offrira encore aucune difficulté, si l'on considére que le cercle de diffusion sur la rétine est complètement déterminé par le lieu de son centre

Digitized by Google

et son rayon, et qu'il ne s'agit que de trouver dans ce cercle le point homologue du centre d'éclairement de l'objectif. Mais, dans les observations micrométriques, les distances qu'il s'agit de mesurer sont toujours comptées sur la direction dans laquelle, par le mouvement de la vis, se déplacent les fils du micromètre. On peut concevoir que cette direction soit donnée dans l'écran E_o lui-même par une droite passant par le point d'intersection de l'axe avec l'écran E_o, c'est-à-dire par le centre du champ. Pour connaître l'erreur qui dans la mesure micrométrique résulte d'une mise au point défectueuse, il suffira de mener un plan par cette droite et l'axe optique et de projeter sur ce plan, que nous désignerons comme le *plan de mesure*, le point lumineux L_1, ainsi que le centre d'éclairement de l'objectif. L'amplitude de la projection de L_1 donnera la valeur qu'il faudra substituer dans la formule précédente pour A_o; la projection du centre d'éclairement de l'objectif fera connaître la valeur D_1 qu'il faudra employer pour déterminer dans le plan de mesure l'amplitude A_e du point de la rétine sur lequel l'observateur fait arriver l'image du fil central du réticule, lorsqu'il cherche à pointer exactement sur l'image apparente de L_1. Ordinairement le point L_1 se trouvera dans la direction même du mouvement des fils, c'est-à-dire dans le plan de mesure.

12. Soit, sur la première surface réfringente de l'objectif, $\theta\varrho$ l'amplitude du centre d'éclairement projeté sur le plan de mesure. Lorsque A_o est l'amplitude projetée du point lumineux L_1, la divergence initiale du rayon de L_1 mené vers le centre géométrique de l'objectif sera $-\frac{A_o}{x}$, celle du rayon dirigé vers le centre d'éclairement $-\frac{A_o+\theta\varrho}{x}$. L'amplitude du centre d'éclairement de la rétine sera:

$$A_e = S'(x-x_o)\frac{-A_o+\theta\varrho}{x} + S'A_o. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (Y)$$

Dans le cas d'une mise au point exacte, on aurait $x - x_o = 0$; l'erreur due à la mise au point défectueuse correspondra donc à un déplacement e sur la rétine:

$$e = S'(x-x_o)\frac{-A_o+\theta\varrho}{x}.$$

Dans le plan où l'objet visé se trouverait en cas de vision distincte, l'erreur équivaudra à un déplacement linéaire:

$$\varepsilon = \frac{e}{S'} = -\frac{x-x_o}{x}A_o + \frac{x-x_o}{x}\theta\varrho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (Z)$$

Le premier des deux termes du second membre, étant proportionnel à l'amplitude A_o du point lumineux, représente la variation du rapport d'agrandissement ou la variation de la valeur des divisions du micromètres; le second est l'erreur

Digitized by Google

qui résulte de l'inégale répartition de la lumière sur l'objectif. Dans les expériences où l'on n'a qu'à mesurer de faibles longueurs et où par conséquent A_o n'est que de quelques microns, le deuxième terme peut facilement excéder le premier. Avec des objectifs à moitié couverts, ainsi qu'il faut les employer dans l'application du procédé Fizeau pour comparer les mètres à bouts, on a $\theta = \frac{4}{3\pi} =$ 0,424. Même avec des objectifs dont l'ouverture n'a qu'un millimètre de rayon, l'erreur due au second terme est plus forte que celle du premier, tant que la longueur mesurée reste au dessous de 424 microns.

13. Mais ce n'est pas seulement dans les circonstances exceptionnelles d'un objectif partiellement couvert que la mise au point peut causer des erreurs considérables, distinctes de celles, ordinairement beaucoup plus faibles, qui résultent de la variation de la valeur des divisions micrométriques. Dans beaucoup de cas, en effet, l'objectif n'est pas uniformément éclairé par les points lumineux qui forment, pour l'observateur, les limites de l'objet dont il veut déterminer le lieu dans le champ de l'instrument micrométrique; souvent même il est difficile de s'en assurer. Remarquons, à ce sujet, que l'examen de la distribution de la lumière dans l'anneau oculaire ne peut pas nous renseigner sur ce point. En effet, l'image de l'objectif est formée dans cet anneau par le concours de tous les rayons incidents qui peuvent traverser l'instrument. L'éclat de chaque élément de l'anneau oculaire dépend donc de la quantité de lumière que l'élément correspondant de l'objectif reçoit intégralement de tous les points lumineux dont l'image se forme dans le champ de l'instrument. Or, ce qu'il s'agirait de constater, c'est l'uniformité de la partie de l'éclairage qui est due exclusivement aux points lumineux qui forment la limite de l'objet visé. Il est à peu près impossible d'isoler cette partie de la lumière incidente et de juger de l'uniformité de l'éclat que les diverses parties de l'anneau oculaire présentent dans ce cas.

L'effet d'une mise au point défectueuse est plus ou moins sensible selon la nature de l'objet visé et la manière dont il est éclairé. Sous ce dernier rapport on peut distinguer les cas suivants:

1°. l'objet visé est lumineux par lui-même;

2°. il est éclairé par une source de lumière dont il renvoie les rayons par réflexion spéculaire; ou

3°. par réflexion diffuse;

4°. l'objet visé est opaque et se montre en noir sur un fond, soit lumineux par lui-même, soit éclairé par réflexion spéculaire;

5°. l'objet opaque paraît en noir sur un fond éclairé par la lumière diffuse.

Digitized by Google

Le premier cas se présente dans l'observation des étoiles. Il est évident que tous les éléments de l'objectif reçoivent la même quantité de lumière par unité de surface et que, si l'on fait abstraction des absorptions inégales que les rayons peuvent avoir éprouvées, le cercle de diffusion sur la rétine sera uniformément éclairé. Le lieu apparent correspondra avec le centre de ce cercle et l'erreur, due au second terme de ε, s'évanouit.

L'éclairage de l'objet visé par une source de lumière dont les rayons sont réfléchis spéculairement est réalisé dans un fil métallique ou un fil d'araignée éclairé par une lampe, placée en avant du fil. La direction des rayons éclairants sera nécessairement oblique par rapport à l'axe de l'instrument optique et les rayons émanés de la caustique de réflexion peuvent éclairer d'une manière différente les deux moitiés de l'objectif. La mesure micrométrique se fait ordinairement dans une direction perpendiculaire au fil. Dans le cas d'une réflexion non symétrique, le centre d'éclairement sera donc dévié dans le plan de mesure même.

Le troisième cas est plus favorable, il se trouve réalisé par un trait blanc sur fond noir. Lorsque la diffusion est parfaite sur la surface du trait, celui-ci paraîtra également illuminé en quelque point de l'objectif que l'on place l'œil. Et même lorsque la réflexion est en partie spéculaire et que les rayons éclairants tombent à peu près dans la direction normale à la surface du trait, la lumière, en partie diffuse en partie réfléchie, se trouvera distribuée d'une manière symétrique sur la surface de l'objectif. La difficulté de réaliser des traits fins de cette nature, ayant des bords suffisamment nets et réguliers, s'oppose malheureusement à leur emploi.

Lorsque l'objet est opaque, comme dans les cas cités en quatrième et en cinquième lieu, sa limite apparente est formée par les points lumineux du fond éclairé sur lequel il se projette. Imaginons un point p situé sur la limite visible de l'objet. Si du bord de l'ouverture de l'objectif nous menons une droite vers p et que cette droite glisse le long de ce bord, son prolongement circonscrira sur le fond éclairé une région circulaire. Pour que le cercle de diffusion qui se forme sur la rétine, en cas de mise au point défectueuse, soit uniformément éclairé, il faudra que dans cette région tous les éléments aient le même éclat, car l'aire lumineuse sur la rétine sera évidemment formée par les rayons qui, de différents points du fond éclairé, tombent sur l'objectif après avoir passé par p. Cette condition pourra être remplie lorsque l'objet visé est un fil opaque placé devant une flamme ou devant l'image réelle ou virtuelle d'une flamme. Plus la flamme ou son image sont rapprochées du fil, plus petite aussi sera la région dans laquelle l'éclat doit être uniforme et plus facile sera, par conséquent, le réglage approprié de la source de lumière. Cet éclat peut, du reste, varier d'un point p à l'autre.

Digitized by Google

Un trait fin dessiné en matière opaque sur une surface à réflexion spéculaire pourra encore satisfaire aux mêmes conditions, lorsque l'image réfléchie d'une flamme éclairante se forme à peu de distance au-dessous de la surface réfléchissante. Mais il sera beaucoup plus difficile d'obtenir un éclairage qui écarte toute source d'erreur, lorsque le trait est obtenu par incision sur une surface métallique, parce que les bords du trait peuvent présenter dans ce cas des propriétés réfléchissantes variables et difficiles à contrôler. Pour reconnaître de quels détails accidentels dans la configuration des bords dépendra la possibilité d'une erreur due à la mise au point, il faut se représenter que l'éclairage devra satisfaire à cette condition que les bords du trait, vus des différents points de l'objectif, se présentent partout avec le même éclat. Pour y satisfaire, il est essentiel que l'ouverture de l'objectif soit petite et la distance du trait assez grande, en d'autres termes, que l'angle soustendu au point visé par le diamètre de l'objectif soit petit.

Le cinquième cas se présente lorsqu'un trait noir est dessiné sur un fond blanc, ce qui, au point de vue que nous avons à considérer, est identique avec un trait blanc sur un fond noir. Il est donc également avantageux et se trouve encore réalisé lorsque le trait est dessiné sur une surface métallique réfléchissant l'image d'une surface blanche. Cette disposition se rencontre ordinairement dans les microscopes destinés à la lecture des cercles divisés; la surface blanche est formée par un écran soit de carton, soit en laiton peint au blanc de céruse, incliné de 45° sur l'axe du microscope et percé d'une ouverture centrale. Ce mode d'éclairage est certainement le plus rationnel, mais les bords de traits gravés dans une surface métallique peuvent encore donner lieu à quelque incertitude.

14. Nous avons supposé jusqu'ici que le déplacement apparent de l'objet visé, résultant d'une variation de la mise au point, fût mesuré dans un plan perpendiculaire à l'axe et passant par le point visé, et que par conséquent dans ce plan fût donné un point de repère fixe. Dans la plupart des mesures micrométriques, au contraire, le point de repère est formé par l'image d'un point donné du réticule mobile placé devant le système oculaire; la position de ce point est indiquée par l'échelle et le tambour du micromètre. Il est clair que l'image du réticule est également sujette à des déplacements apparents résultant d'une mise au point défectueuse de l'oculaire. On peut, en effet, considérer l'ensemble de l'oculaire et de l'œil jusqu'à la rétine comme un système devant lequel se trouvent placés les fils du micromètre. Toutes les considérations développées dans les paragraphes précédents sont également applicables à cette disposition et il est évident que l'erreur commise dans la détermination du lieu apparent d'un objet par rapport au centre du champ, lorsque la mesure se fait au moyen des fils micrométriques, sera la différence des erreurs de même sens provenant d'une

Digitized by Google

mise au point défectueuse de l'objet visé d'une part et du réticule de l'autre.

Lorsque le réticule est éclairé par un appareil illuminant séparé, comme dans les instruments astronomiques, l'erreur due à la mise au point des fils du micromètre sera entièrement indépendante de celle du point visé. C'est ainsi que, comme nous venons de le remarquer, un certain degré de diffusion de l'image d'une étoile ne causera aucune erreur systématique, tandis que le même défaut dans l'image des fils peut donner lieu à des erreurs considérables.

Dans les mesures de longueur, au contraire, le réticule est ordinairement éclairé par les rayons transmis à travers l'objectif et son image se dessine en noir sur le champ éclairé. Dans ces conditions il peut exister certaine relation entre les effets des mises au point du système entier et du système oculaire. Tel est le cas lorsque l'écart entre le centre d'éclairement et le centre géométrique du cercle de diffusion est causé par une obturation partielle de l'objectif, comme dans l'emploi du procédé Fizeau pour la comparaison des mètres à bouts; et même généralement, lorsque l'on pointe le fil micrométrique directement sur l'objet même dont on veut déterminer la position dans le champ. Il est évident, en effet, que le cône de rayons qui rend visible le point visé est le même que le cône de rayons qui forme l'image des bords du fil, parce que ce dernier, étant opaque, n'est vu que par contraste avec l'image lumineuse qu'il couvre en partie.

15. Désignons par c, p, r, s les constantes du système optique de l'objectif, par c', p', r', s', celles de l'ensemble de l'oculaire et de l'œil jusqu'à la rétine et, comme précédemment, par C', P', R', S' celles du système entier. Soit m un point du fil micrométrique, placé à une distance y de la dernière surface réfringente de l'objectif et à une distance x' de la première surface réfringente de l'oculaire, soit a_o l'amplitude de m dans le plan du réticule. Comme dans ce plan le grossissement du système de l'objectif est $s+yp$, l'amplitude a_o correspondra dans le plan de l'objet visé, placé devant l'objectif, à une amplitude A_o telle que:

$$A_o = \frac{a_o}{s+yp} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Le grossissement du système entier étant S', celui de l'oculaire et de l'œil s', on aura de plus:

$$s+yp = \frac{S'}{s'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Soit x'_o la distance à l'oculaire d'un point m_o, où le fil devrait se trouver pour être vu distinctement. Ce point sera situé dans le plan conjugué, par rapport à l'objectif, du plan de vision distincte du système composé et dont, comme

Digitized by Google

précédemment, nous désignons par x_o la distance en avant de l'objectif. Le fil peut, de même, être considéré comme situé dans le plan conjugué d'un écran placé à une distance x'' devant l'objectif, et en vertu de la formule (0) on aura alors:

$$\frac{x' - x'_o}{x'' - x_o} = (s + y\,p)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

L'amplitude a_e du centre d'éclairement de l'image de m sur la rétine sera d'après (Y):

$$a_e = s' \frac{x' - x'_o}{x'} (-a_o + \theta'\,\varrho') + s'\,a_o.$$

Le premier terme du second membre est l'écart dû à une mise au point défectueuse. En divisant par S' on obtiendra l'écart ε' mesuré dans le plan de l'objet placé devant l'objectif, d'où, en ayant égard à (1), (2) et (3):

$$\varepsilon' = -\frac{x' - x'_o}{x'} A_o + (s + y\,p) \frac{x'' - x_o}{x'} \theta'\,\varrho'.$$

Soit $\theta\,\varrho$ l'amplitude du centre d'éclairement de la première surface réfringente de l'objectif, l'éclairement se rapportant exclusivement aux rayons qui, après réfraction, passent par m. Le grossissement de l'anneau oculaire du système de l'objectif étant $\frac{1}{c}$, l'amplitude du centre d'éclairement dans cet anneau sera $\frac{\theta\,\varrho}{c}$. Or, les rayons qui passent par m forment un cône ayant cet anneau pour base, m pour sommet; l'amplitude $\theta'\,\varrho'$ du centre d'éclairement de ces rayons sur la première surface réfringente de l'oculaire sera donc:

$$\theta'\,\varrho' = -\frac{\theta\,\varrho}{c} \frac{x'}{y + \frac{r}{c}} = -\frac{\theta\,\varrho\,x'}{r + c\,y},$$

parce que, la distance de l'anneau oculaire de l'objectif à la dernière surface de ce système étant $-\frac{r}{c}$, la distance de l'anneau à m sera $y + \frac{r}{c}$.

Mais, les distances x'', y se rapportant à des points conjugués de l'objectif, on aura:

$$r + s\,x'' + c\,y + p\,x''\,y = 0$$

d'où:

$$\theta'\,\varrho' = \frac{\theta\,\varrho}{s + y\,p} \frac{x'}{x''}.$$

Substituant dans l'équation de ε', on a:

$$\varepsilon' = -\frac{x' - x'_o}{x'} A_o + \frac{x'' - x_o}{x''} \theta\,\varrho.$$

Digitized by Google

Au paragraphe 12 nous avons trouvé pour l'erreur due à une mise au point défectueuse de l'objet visé:

$$\varepsilon = -\frac{x - x_0}{x} A_0 + \frac{x - x_0}{x} \theta \rho.$$

Dans le cas où l'objet visé et le fil du micromètre paraissent coïncider, A_0 et $\theta \rho$ auront la même signification dans les deux expressions et, l'erreur de mesure E étant la différence de ε et de ε', on aura, en observant que les différences de x_0, x et x'' sont nécessairement très petites:

$$E = -\left(\frac{x - x_0}{x_0} - \frac{x' - x'_0}{x'_0}\right) A_0 + \frac{x - x''}{x_0} \theta \rho.$$

Le second terme qui exprime la partie de l'erreur dépendant de l'inégale distribution de la lumière, est donc proportionnel à la distance de l'objet visé à l'image qui se formerait du fil en avant de l'objectif si le réticule était lumineux par lui-même; l'erreur est donc aussi proportionnelle à la distance du plan du réticule au plan dans lequel l'objectif forme l'image réelle de l'objet visé. On vérifie facilement que, lorsque ces deux plans ne coïncident pas, un éclairage asymétrique de l'objectif déplace l'image d'un objet visé par rapport à celle du réticule; il suffit de faire glisser devant l'objectif le bord d'un écran opaque. On peut obtenir le même effet au moyen d'un petit écran placé devant l'œil et qu'on fait mouvoir de manière à intercepter successivement diverses parties de l'anneau oculaire. C'est encore le même effet qu'on observe en déplaçant simplement l'œil devant une lunette ou un microscope. Par suite du mouvement de l'œil, les bords de la pupille interceptent diverses parties des cônes de lumière qui ont pour directrice commune la circonférence de l'anneau oculaire. L'apparence d'une parallaxe de l'objet visé et du fil micrométrique, qui en résulte, sert même à vérifier s'il y a coïncidence des plans de leurs images.

Dans la formule de E le second terme sera plus considérable que le premier dans tous les cas où le point visé ne s'écarte que peu du milieu du champ. Le défaut de symétrie dans l'éclairement de l'objectif est donc généralement la cause principale des erreurs dues à une mise au point défectueuse.

16. Les deux facteurs $x - x''$ et $\theta \rho$, qui entrent dans le second terme de E, dépendent en sens contraire du rayon de l'ouverture de l'objectif. Plus ρ sera grand, plus sensible sera à l'observateur l'effet d'une mise au point défectueuse sur la netteté de l'image, parce que le rayon du cercle de diffusion est proportionnel à ρ. Pour renfermer les valeurs possibles de $x - x''$ dans d'étroites limites, il faudra donc employer des objectifs à large ouverture. Au contraire, pour atténuer l'effet d'un écart donné de la mise au point, il faudra diminuer ρ, c'est-

Digitized by Google

à-dire diaphragmer l'objectif. Il sera donc utile de se servir dans les mesures micrométriques d'un diaphragme à fente ou ouverture aussi étroite que le permet le degré d'éclairement, de mettre au point avec l'objectif entièrement découvert, et d'opérer les mesures micrométriques après avoir muni l'objectif de son diaphragme.

On parvient au même but d'une manière qui, en général, sera plus commode, si, au lieu de diaphragmer l'objectif, on emploie un écran, à fente ou ouverture très étroite, placé exactement dans le plan de l'anneau oculaire, qui nécessairement se trouve à portée de la main de l'observateur. Un pareil écran, placé en deçà ou au delà de l'anneau oculaire, rétrécira le champ, à mesure qu'il s'éloigne de l'anneau. Dans le plan de l'anneau même, lorsque l'instrument est bien réglé et que l'éclairage est uniforme, il diminuera simplement dans le rapport de l'aire de l'ouverture la clarté des objets visés. En appliquant donc, après avoir opéré la mise au point, dans le plan de l'anneau oculaire un diaphragme à ouverture justement suffisante pour admettre les rayons nécessaires à la vision, on diminuera autant que possible l'influence de cette source d'erreurs.

Digitized by Google

NOTE II.

ANALYSE DU MÉTAL DES RÈGLES.

PAR

A. OUDEMANS.

DENSITÉ DU MÉTAL.

Avant de procéder à l'examen chimique des deux bouts de mètre, j'en ai déterminé la densité par la pesée hydrostatique. Voici les résultats obtenus:

N°. 1, pesant 10gr,3276, densité . 21,20
N°. 2, pesant 10 ,3113, „ . 21,14
N°. 1 et n°. 2 conjointement . . . 21,16

Ces chiffres n'ont qu'une valeur très-relative, vu la petite quantité de métal mise à ma disposition.

RECHERCHE DU RUTHÉNIUM.

Pour la recherche du ruthénium, j'ai suivi en grande partie les indications données par M. Claus dans le journal *Für praktische chemie* (tome LXXX, pages 282 et suiv.) relativement à l'analyse des combinaisons platiniques et iridiques, qui contiennent de petites quantités de ruthénium.

M. Claus a prouvé que la présence d'une quantité très-petite de ruthénium dans l'osmiure d'iridium ou dans un mélange de platine et d'iridium ne se décèle pas par la fusion avec le nitre et la potasse, et trouve dans ce fait, inconnu à MM. Deville et Debray, l'explication de ce que ces chimistes ont omis de signaler le ruthénium comme une des parties constituantes des osmiures d'iridium de Russie.

M. Claus a donné une méthode pour constater la présence du ruthénium,

Digitized by Google

quand ce métal se trouve associé en minime quantité aux autres métaux du groupe platinique, et même pour en déterminer la quantité avec une précision satisfaisante. Cette méthode est fondée sur la différence de solubilité des sels doubles formés par le bichlorure de platine, le bichlorure d'iridium et le sesquichlorure de ruthénium avec le chlorure d'ammonium, et permet d'éliminer la plus grande partie du platine et de l'iridium dans une combinaison de ces métaux avec le ruthénium et de concentrer, pour ainsi dire, le métal nommé en dernier lieu dans une des matières à analyser.

Le platine iridié qui m'avait été remis fut attaqué pendant quelques heures par une grande quantité de zinc fondu, auquel était ajouté de temps en temps une petite quantité de chlorure de zinc pour assurer le contact intime des métaux. Le culot refroidi fut traité par l'acide sulfurique dilué, qui laissa un résidu métallique, noir foncé, mélangé à quelques morceaux de l'alliage, corrodés mais non attaqués complètement par le zinc fondu.

Le résidu noir fut transporté dans une cornue en verre dont le col aboutissait dans un récipient rempli d'alcool à 90°, puis dissous dans l'eau régale. La solution fut maintenue en ébullition durant une demi-heure. Les vapeurs rutilantes qui se développaient en passant par l'alcool ne produisirent point de précipité par le contact avec ce liquide et par conséquent ne contenaient pas de ruthénium sous forme d'une combinaison volatile.

La solution brun foncé fut évaporée au bain-marie, le résidu dissous dans l'eau distillée et le liquide résultant soumis à une précipitation fractionnée par le chlorure d'ammonium.

Les diverses portions de sel double, obtenues de cette manière, furent lavées avec une solution concentrée de sel ammoniac. Les eaux mères, qui ne formèrent plus de précipité avec ce réactif, furent traitées par l'hydrogène sulfuré, qui détermina la précipitation partielle et lente de sulfures métalliques. Ces précipités furent séparés de temps en temps par le filtre et conservés séparément pour la recherche du ruthénium.

Enfin, le liquide, qui ne donna plus de précipité par l'hydrogène sulfuré et qui manifestait encore un contenu en métal par sa couleur brunâtre, fut évaporé à sec et le résidu chauffé dans une capsule en platine pour chasser le sel ammoniac. Il resta ainsi un résidu métallique très-faible. Celui-ci fut fondu avec un mélange de nitre et de potasse dans un creuset d'argent. Les sulfures mentionnés ci-dessus furent calcinés et puis soumis *séparément* au même traitement.

Toutes ces matières donnaient à un degré différent la réaction caractéristique du ruthénium.

En réitérant le traitement avec le nitre et la potasse sur les résidus laissés

Digitized by Google

après l'extraction par l'eau distillée, j'ai pu recueillir successivement environ 200 centimètres cubes d'une liqueur colorée en orange foncé par la présence de l'hyper-ruthéniate de potassium. Cette solution, traitée par l'alcool concentré, donna un précipité d'hydrate de sesquioxyde de ruthénium, qui, par la calcination, fournit le métal sous forme d'une poudre noire.

16gr,561 de platine iridié me fournirent ainsi 0gr,0444 de ruthénium, soit 0,27 p. °/o.

Quant aux sels doubles consistant en chlorures platinico-ammonique et iridio-ammonique, ils furent soumis au traitement prescrit par M. Claus: extraction fractionnée par l'eau pure et précipitation de l'extrait aqueux par l'ammoniaque en léger excès à la température de l'ébullition. Ces expériences, cependant, me donnèrent un résultat négatif, d'où je conclus que, pendant la précipitation des chlorures doubles, le ruthénium était resté en totalité dans les eaux mères provenant de cette opération.

Pour surcroît de sûreté, j'ai de nouveau attaqué par l'eau régale concentrée les résidus indiqués provenant de la fusion avec le nitre et la potasse, et précipité de nouveau, par le sel ammoniac, la solution obtenue de la sorte et qui contenait principalement du bichlorure d'iridium. Puis j'ai cherché de nouveau le ruthénium dans les liqueurs séparées du précipité par le filtre, ainsi que dans le résidu laissé par l'eau régale. Cette recherche, cependant, n'a donné qu'un résultat négatif.

RECHERCHE DU FER.

Pour éviter toute source d'erreur dans la recherche du fer, j'ai renoncé à l'emploi du zinc ou du plomb pour réduire le métal massif en poudre divisée, et je me suis borné à attaquer par l'eau régale concentrée les morceaux des bouts de mètre corrodés par le zinc fondu et provenant de la recherche du ruthénium.

Il est vrai que le métal n'est attaqué par l'eau régale que difficilement, mais cependant il s'y dissout à la longue, sans laisser aucun résidu. La solution en fut évaporée au bain-marie, le résidu dilué avec de l'eau pure, et enfin le liquide fut traité par l'acide sulfhydrique, qui, après un assez long laps de temps, détermina la précipitation presque complète des métaux du groupe platinique à l'état de sulfures.

La liqueur filtrée donna un précipité noir verdâtre avec un excès d'ammoniaque et de sulfure d'ammonium qui, traité par l'acide chlorhydrique faible, laissa un faible résidu de sulfure platinique, iridique ou ruthénique. De la solution de chlorure ferreux fut retirée une quantité de fer à l'état de sesquioxyde

Digitized by Google

correspondant à 0,5 p. °/₀ de fer dans le platine iridié (0gr,0121 d'oxyde de fer sur 1gr,703 de métal).

Un second essai sur le bout de mètre n°. 1 donna le même résultat.

Il va sans dire que je ne me suis servi que de réactifs (acide chlorhydrique, acide nitrique et ammoniaque) dont la pureté absolue, notamment en ce qui concerne la présence du fer, avait été constatée par un essai préliminaire.

ANALYSE QUANTITATIVE DU MÉTAL DU MÈTRE.

Pour pouvoir calculer la composition du métal du mètre, j'en ai dissous une certaine quantité (2 à 3 grammes) dans l'eau régale concentrée, et transformé les métaux platiniques en chlorures doubles par la précipitation et le lavage avec le sel ammoniac, en tenant compte des petites quantités qui étaient restées dans les eaux mères.

Les chlorures doubles, chauffés avec précaution, laissèrent de l'éponge platinique et iridique qui fut traitée par l'eau régale, diluée de quatre à cinq fois son poids d'eau pure.

Je déterminai enfin le poids de l'iridium laissé insoluble et trouvai, par soustraction de la quantité totale des métaux, la proportion du platine.

De cette manière, je trouvai dans le mélange des métaux platiniques du bout de mètre n°. 1:

9,73 p. °/₀ d'iridium plus ruthénium;
90,27 p. °/₀ de platine.

Et dans le mélange des métaux retirés du bout de mètre n°. 2:

9,64 p. °/₀ d'iridium et de ruthénium;
90,36 p. °/₀ de platine.

Ces chiffres diffèrent notablement entre eux et de ceux obtenus par M. Deville.

Quant à cette dernière partie de mon travail, je ne prétends aucunement infirmer les résultats obtenus par ce chimiste, étant convaincu que l'analyse exacte d'un alliage de métaux platiniques ne réussit qu'à ceux qui ont acquis une grande habitude dans ces sortes de travaux.

Delft, 30 octobre 1875. A. C. OUDEMANS.

Digitized by Google

SOMMAIRE.

PREMIÈRE PARTIE.

I. INTRODUCTION.

§ 1. *Origine de la Commission internationale du mètre.*

1. Vœux exprimés par divers corps savants de l'Europe. Rapport présenté à l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg par MM. STRUVE, WILD et JACOBI. Résolution de cette Académie exprimant le vœu qu'une commission internationale fût instituée afin de pourvoir à la construction de nouveaux étalons métriques.
2. Rapport de M. DUMAS, présenté au nom de MM. ELIE DE BEAUMONT, MATHIEU, MORIN, REGNAULT, LE VERRIER, FAYE et DUMAS à l'Académie des Sciences de Paris. Résolution de cette Académie.
3. Décret impérial instituant la Commission internationale du mètre.

§ 2. *Travaux et résolutions de la Commission internationale du mètre.*

4. Première réunion de la Commission, le 4 Août 1870. Réunion complète du 24 Septembre 1872. Commissaires néerlandais.
5. Résolutions relatives à la construction et aux comparaisons des nouveaux étalons.
6. Résolutions relatives à l'organisation du travail.
7. Proposition relative à l'établissement d'un Bureau Permanent.

§ 3. *Travaux de la Section française et concours du Comité Permanent.*

8. Difficultés techniques que la Section française avait à surmonter pour satisfaire aux conditions imposées par la Commission internationale.
9. Réunions du Comité Permanent. Composition de ce Comité. Abstention de MM. FÖRSTER, HERR et WILD.
10. Résultat de nouvelles analyses du platine et de l'iridium. Proposition d'employer pour la confection des prototypes, des métaux purifiés d'après les nouvelles méthodes.
11. Progrès dans la fonte des métaux platiniques.
12. Succès des opérations de tréfilage.
13. Déclaration de MM. IBANEZ, WREDE, MORIN, CHISHOLM, BROCH, STAS et BOSSCHA constatant leur satisfaction de la fabrication des règles.
14. Résultat satisfaisant des mesures de l'élasticité des règles; invariabilité du coefficient.
15. Déclaration du Comité Permanent constatant les progrès dans la construction des comparateurs et du tracelet.
16. Résolution du Comité demandant de réunir dans une seule fonte 250 kilogrammes de platine iridié.
17. Suite des travaux de la Section française. Premières fontes de 80 kilogrammes d'alliage.
18. Fonte de la masse de 250 kilogrammes exécutée le 13 mai 1874.

Digitized by Google

19. Déclaration de MM. IBANEZ, BROCH, CHISHOLM, HILGARD, MORIN, STAS et BOSSCHA formulant leur entière satisfaction à l'égard de la fabrication et de la qualité de la matière du mètre.
20. Résolutions du Comité prises sur la proposition de la Section française.

§ 4. *Conférence diplomatique du mètre.*

21. Nécessité de pourvoir aux moyens nécessaires aux travaux du Comité Permanent. Proposition de convoquer une conférence diplomatique dans ce but.
22. Conférence diplomatique du 1er Mars 1875. La création d'un Bureau Permanent, qui continuerait son action après l'accomplissement de la tâche de la Commission, proposée comme le but principal de la Conférence. Vues différentes énoncées à ce sujet.
23. Moyen proposé pour les concilier, écarté par suite de la déclaration de l'un des délégués.
24. Résultat de la conférence diplomatique. Les Gouvernements, qui n'adhéraient pas à la création d'un Bureau Permanent, exclus de la coopération internationale.
25. Droit de ces Gouvernements, de recevoir de nouveaux étalons, formellement reconnu. Résolution du Gouvernement néerlandais.
26. Commission néerlandaise.

II. ÉLASTICITÉ DES RÈGLES. DEGRÉ DE PRÉCISION DES MESURES MICROMÉTRIQUES.

27. Première réunion des Commissaires néerlandais avec la Section française. Désignation de l'un des étalons néerlandais.
28. Détermination de son coefficient d'élasticité par MM. G. TRESCA et BOSSCHA.
29. Principes adoptés par la Section française dans la construction des microscopes. Doutes élevés à l'égard de l'utilité de forts grossissements. Nécessité d'une vérification expérimentale.
30. Conditions des expériences de la Commission néerlandaise.
31. Expériences de simple pointé.
32. Erreurs moyennes des pointés.
33. Constantes optiques des microscopes employés.
34. Discussion des expériences de pointé de la Commission néerlandaise et de divers autres observateurs. La précision du pointé proportionnelle au grossissement.
35. Causes qui peuvent influer sur la précision d'une mesure. Note: Formule erronée proposée pour calculer la variation du rapport d'agrandissement.
36. Mesure d'une longueur de 100 microns faite par M. OUDEMANS. Erreur moyenne d'un pointé et d'une mesure. Calcul de l'erreur moyenne résultant de la mise au point.
37. Expériences plus complètes de M. OUDEMANS. Calcul des erreurs moyennes.
38. Remarque sur ces erreurs.
39. Discussion de ces expériences. Evaluation du maximum de l'erreur dans la mise au point. Note: Calcul erroné publié à cet égard.

III. EXAMEN DES QUALITÉS CHIMIQUES DES RÈGLES.

40. Résultat des analyses, faites d'après de nouvelles méthodes, du métal des règles. Densité du métal. Analyse de M. OUDEMANS faite d'après la meilleure méthode connue en 1872.
41. Motifs qui ont décidé la Commission néerlandaise à accepter les nouveaux étalons.
42. Nécessité de vérifier si les règles présentaient un défaut qu'on leur avait reproché. Expériences de la Commission néerlandaise. Rapport présenté au Ministre des Travaux publics: Refus du Comité international d'accepter les mètres fabriqués par la Section française et demande adressée par ce Comité

Digitized by Google

au Gouvernement français pour ordonner la suspension de ces travaux. Motifs de cette démarche donnés dans un Rapport de MM. Broch, Ste Claire Deville et Stas. Examen de la portée pratique de ces motifs. L'assertion que les règles étaient sujettes à se couvrir de rouille de fer reconnue seule sérieuse. Expérience de M. Stas tendant à démontrer cette assertion. Expérience de M. Péligot démontrant le contraire. Désignation du mètre n°. 27 comme second étalon néerlandais. Expériences avec les mètres n°. 19 et n°. 27, montrant que la production de rouille de fer est accidentelle. Moyen simple de se garantir contre cet accident. Les règles n°. 19 et n°. 27 définitivement acceptées.

43. Résultat de la Commission néerlandaise confirmé par le Comité international lui-même. Rapport de MM. Broch, Förster, Stas constatant que les règles de la Section française se comportent, dans les épreuves les plus énergiques, exactement de la même manière que les règles en métal pur. Conclusion de ce Rapport.
44. Portée favorable de cette conclusion.
45. Les règles fabriquées par la Section française, malgré ces conclusions favorables, restées sans emploi. Conséquences regrettables de cette solution.

IV. RECHERCHE D'UNE CAUSE D'ERREUR DANS LA MESURE DE LA LONGUEUR D'UN MÈTRE A BOUTS.

46. Tracé du premier étalon de la Section française. Méthode de M. Fizeau pour mesurer les mètres à bouts. Difficultés éprouvées dans les premières mesures.
47. Lettre de M. Tresca rendant compte des divers moyens pour remédier à ces difficultés.
48. Troisième visite des Commissaires néerlandais. Perfectionnements réalisés par la Section française dans les conditions thermiques des mesures.
49. Description du comparateur longitudinal.
50. Conditions favorables dans lesquelles de nouvelles expériences purent être faites.
51. Premières mesures de M. Bosscha et de M. Oudemans indiquant l'influence de la mise au point.
52. Nouvelles mesures à lumière achromatisée.
53. Détermination du degré de tolérance de la mise au point.
54. Mesures faites en variant systématiquement la mise au point.
55. Mêmes mesures effectuées sur un mètre à traits.
56. Cause de l'influence de la mise au point indiquée par M. Fizeau.
57. Analyse et calcul de cette influence.
58. Vérification expérimentale de l'analyse théorique.
59. Contrôle de cette vérification au moyen d'un mètre à traits.
60. Remarques sur les erreurs dues à la mise au point. Avantage considérable que présentent les microscopes à fort grossissement. Moyen proposé pour atténuer ces erreurs.

SECONDE PARTIE.

V. COMPARAISONS DES MÈTRES N°. 19, N°. 23 ET N°. 27 ENTRE EUX ET AVEC LE MÈTRE DES ARCHIVES.

61. Tracé des nouveaux étalons néerlandais. Proposition faite par M. Tresca à la Commission néerlandaise.
62. Disposition du comparateur à mouvement transversal. Causes qui rendent cet instrument particulièrement propre aux mesures du Mètre des Archives.
63. Programme des travaux de la Commission néerlandaise. Motif qui a conduit la Commission à le tracer d'avance. Raisons qui rendent nécessaire de communiquer tous les chiffres recueillis.

Digitized by Google

64. Séries supplémentaires.
65. Arrangement des observations.
66. Détails des 24 séries de comparaisons effectuées sur le comparateur longitudinal.
67. Détails des 32 séries de comparaisons effectuées sur le comparateur transversal.
68. Indications spéciales extraites des carnets des observateurs.
69. Données supplémentaires: distances des fils du micromètre et des pointes du Mètre des Archives.
70. Détails des deux séries supplémentaires.
71. Examen des conditions thermiques dans lesquelles les observations ont été faites. Courbe du thermomètre enregistreur de REDIER.
72. Variations de température des mètres comparés.
73. Parallélisme des variations du thermomètre de REDIER et de la température des règles. Régularité de la variation de température dans les observations faites à basse température. Influence des réservoirs à solution de chlorure de calcium. Utilité de l'installation, dans l'enceinte des comparateurs, de réservoirs à grande capacité calorique.
74. Appréciation des moyens employés par la Section française pour régulariser et contrôler la température.
75. Différences des échelles thermométriques.
76. Méthode de calcul des mesures faites au comparateur longitudinal.
77. Variabilité des quantités considérées comme constantes dans ce calcul.
78. Analyse de l'influence de cette variabilité. Variation de la distance des microscopes.
79. Variation de la distance des bouts droits des règles, des bouts gauches et des règles mêmes.
80. Introduction dans le calcul d'une variation proportionnelle au temps. Calcul de l'erreur moyenne.
81. Indications relatives au Tableau contenant les résultats du calcul.
82. Valeur des divisions du micromètre. Résultats du calcul des séries du comparateur longitudinal.
83. Corrections pour différences de température. Récapitulation des valeurs corrigées.
84. Concordance des valeurs obtenues pour les différences de longueur observées dans des conditions identiques. Différence systématique selon la position des mètres sur le comparateur longitudinal.
85. Déduction des équations normales. Calcul.
86. Résultat final des comparaisons des nouveaux étalons entre eux.
87. Appréciation du degré de précision obtenu. Erreurs moyennes des pointés, des mesures, et des résultats des séries.
88. Observations relatives à la différence systématique.
89. Calcul des observations effectuées sur le comparateur transversal.
90. Variabilité des quantités regardées comme constantes dans le calcul. Variation proportionnelle au temps. Distinction à établir entre les variations apparentes du mètre à bouts et du mètre à traits. Equations modifiées.
91. Correction nécessaire pour réduire la longueur calculée du mètre à bouts à la valeur de la longueur apparente au commencement d'une série de mesures.
92. Données et résultats du calcul.
93. Remarques relatives aux deux coefficients distincts de la variation proportionnelle au temps. Corrections pour différences de température.
94. Degré de concordance des valeurs obtenues dans des conditions identiques. Ecarts des premières séries dus à la mise au point. Concordance plus satisfaisante des mesures à basse température.
95. Méthode de calculer l'ensemble des comparaisons effectuées sur les deux comparateurs. Introduction des deux séries supplémentaires.
96. Formule de calcul.
97. Formules pour calculer les erreurs moyennes de la différence de longueur à zéro, du coefficient de

Digitized by Google

dilatation et de la différence calculée pour une température quelconque. Calcul des équations faisant connaître l'erreur moyenne du résultat final de chacun des quatre observateurs.

98. Discussion du résultat final de toutes les séries. Influence insignifiante des observations à température ambiante sur l'équation relative à la température zéro.

99. Erreurs moyennes d'un pointé. Distinction à établir entre les pointés des traits et les pointés faits sur le milieu entre la pointe dont était muni le Mètre des Archives et l'image de cette pointe. Influence prépondérante de la mise au point sur les erreurs des résultats.

100. Détermination du coefficient de dilatation du métal des règles, effectuée par M. FIZEAU. Détails des mesures de ce physicien.

101. Calcul de la dilatation du Mètre des Archives à la température moyenne 9° C.

102. Equations exprimant le résultat final des observations de la Commission néerlandaise, complétées par celles de M. FIZEAU.

VI. NOUVELLE VÉRIFICATION DES ÉTALONS N°. 19, N°. 23 ET N°. 27.

103. Détails et calculs de 30 séries de comparaisons effectuées par deux Membres de la Commission néerlandaise et M. G. TRESCA en 1880.

104. Remarques sur le degré de précision des résultats de ces comparaisons. Cause probable des écarts située dans l'éclairage moins satisfaisant.

105. Résultats de six séries de comparaisons effectuées par M. G. TRESCA sur le comparateur longitudinal. Concordance des différences de longueur observées dans des positions identiques. Différence systématique selon la position des règles, de même sens et du même ordre de grandeur que celle observée en 1879.

106. Rapprochement des différences de longueur obtenues en 1879 et en 1880. Celle des étalons néerlandais restée invariable.

107. Remise définitive des étalons. Procès verbal. Transport et dépôt des nouveaux étalons.

108. Conclusion.

ANNEXES.

NOTE I.

ANALYSE DES ERREURS CAUSÉES, DANS LES MESURES MICROMÉTRIQUES, PAR UNE MISE AU POINT DÉFECTUEUSE. PAR J. BOSSCHA.

1. Manière générale de traiter le problème.

2. Simplifications. La considération de rayons croisant l'axe et l'introduction de leurs équations par rapport à deux plans coordonnés constitue une complication inutile.

3. Détermination d'un rayon situé dans un plan passant par l'axe. Divergence, amplitude. Relation simple entre les divergences et les amplitudes d'un rayon incident et du rayon émergent dans un système optique donné. Signification physique des quatre constantes qui déterminent un système.

4. Relations entre les constantes d'un système et celles de ses éléments. Constantes du système renversé.

5. Application des formules fondamentales. Relations entre les distances des plans conjugués aux surfaces terminales d'un système. Rapport d'agrandissement de l'image.

6. Distances des plans focaux antérieur et postérieur et du premier et du second point oculaire. Anneaux oculaires. Les foyers et les anneaux oculaires plus propres à déterminer un système que les points cardinaux.

Digitized by Google

7. Application des formules à l'œil, soit nu, soit armé. Simplification. Constante unique qui suffit pour déterminer le point d'incidence d'un rayon donné sur la rétine. Calcul des constantes de l'œil nu, et de l'œil armé.
8. Cas de vision non distincte. Déplacement du centre du cercle de diffusion. Déplacement apparent du point visé. Variation de la valeur des divisions du micromètre.
9. Effet d'un écran mobile à étroite ouverture. Déplacement apparent de l'objet visé. Expérience simple servant à vérifier la grandeur apparente du déplacement.
10. Diamètre du cercle de diffusion. Précision de la mise au point proportionnelle au grossissement.
11. Cas d'une obturation partielle de l'objectif. Centre d'éclairement, de l'objectif et de la rétine. Plan de mesure.
12. Calcul de l'erreur dans le cas général d'une inégale distribution de la lumière sur la surface de l'objectif.
13. Circonstances dans lesquelles la distribution non symétrique de la lumière incidente peut se présenter. Examen des divers modes d'éclairage de l'objet visé.
14. Effet produit par une mise au point défectueuse du fil micrométrique, de même nature que celui produit sur l'objet visé. Cas différents d'un éclairage séparé du réticule, et d'un réticule vu par projection sur le champ de vision.
15. Forme que, dans ce dernier cas, prend l'expression de l'erreur combinée du point visé et du fil micrométrique. Effet pseudo-parallactique produit par un diaphragme mobile, soit devant l'objectif, soit devant l'anneau. Même effet produit par le mouvement latéral de l'œil.
16. Moyen simple d'atténuer les erreurs dues à une mise au point défectueuse.

NOTE II.

ANALYSE DU MÉTAL DES RÈGLES. PAR A. C. OUDEMANS.

Densité du métal. Recherche du ruthénium d'après la méthode de CLAUS. Recherche du fer. Analyse quantitative du métal des mètres.

Digitized by Google

ERRATA.

RAPPORT.

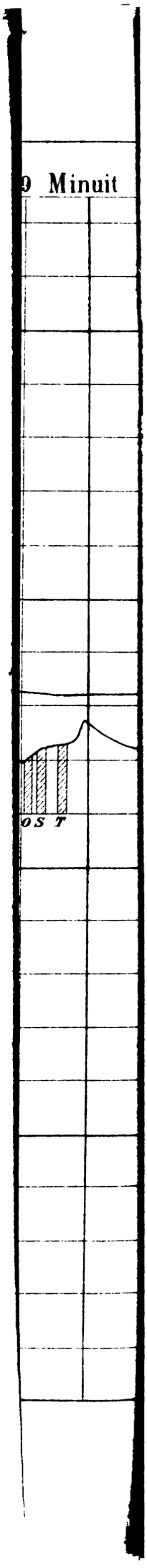
N°. 12, quatrième alinéa: ramenât *lisez* ramène.
En tête des nos 21—26: § 3 » § 4.
N°. 34 troisième alinéa: obtenu » obtenue.
» dernier alinéa: vous venons » nous venons.
N°. 58 Tableau XIII, quatrième colonne: — 13,97 *lisez* — 13,93.
» » » sixième » + 0,15 » — 0,15.
» » » 57,90 *lisez* — 57,90.
» » » 16,28 » — 16,28.
N°. 68, troisième alinéa: les dix premières *lisez* les six premières.
» septième alinéa: 4, 5, 6 et 7 » 4, 5, 6, 7 et 8.
N°. 71, quatrième alinéa: 15 Octobre » 16 Octobre.
N°. 103, Tableau XXVII, Série I 3me colonne: 35,2 *lisez* 32,5.
» » » » » 4me » 9,8 » 9,0.
» » » » II 7me » 51,0 » 52,0.
» » » » XIII 7me » 57,5 » 57,8.
» » » » XV 3me » 59,1 » 59,0.
» » » » XIX 6me » 3,0 » 2,0.
» » » » XXII 3me » 93,0 » 53,0.
» » » » » » » 93,5 » 53,5.

ANNEXES.

Note I.

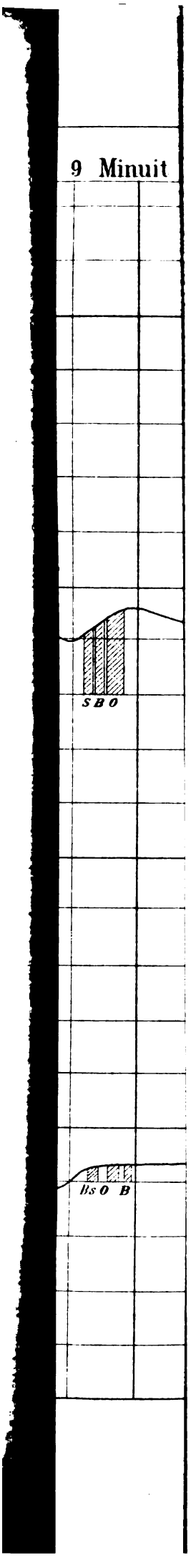
N°. 5: $A_f = A_e - y D_1$ *lisez* $A_f = A_e - y D_f$.

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Geology

ANNALES

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

DE

DELFT.



3me LIVRAISON.

THE LIBRARY OF THE
JUL 23 1973
UNIVERSITY OF ILLINOIS
AT URBANA-CHAMPAIGN

LEIDE. — E. J. BRILL.
1886.

GEOLOGY

Digitized by Google

Digitized by Google

THÉORIE DES ERREURS DANS LE PLAN ET DANS L'ESPACE [1]).

PAR

CH. M. SCHOLS.

I. INTRODUCTION.

§ 1. Lorsqu'on détermine d'une manière quelconque le lieu occupé par un point dans l'espace, on trouvera en général, par suite de différentes causes, une position qui diffère plus ou moins de la position vraie du point. On commet donc une erreur, déterminée en grandeur et en direction par la ligne qui relie la position vraie du point avec la position trouvée.

En répétant plusieurs fois cette détermination, on trouvera sans cesse d'autres positions pour le point, on commettra continuellement d'autres erreurs, différant tant en grandeur qu'en direction.

En répétant la détermination un grand nombre de fois, on trouvera que les points qu'on obtient de cette manière se répartissent d'une façon inégale autour de la position vraie du point, et lorsque ce nombre devient très grand, on verra que la répartition n'est pas arbitraire, mais qu'elle suit une certaine loi.

C'est de la recherche de cette loi et des propriétés qui en découlent que nous nous occuperons dans ce mémoire.

§ 2. Dans ce qui suit, la position vraie du point sera désignée comme: *origine des erreurs*, et les erreurs elles-mêmes seront déterminées par la position des extrémités des lignes qui les représentent. Par erreurs comprises dans un certain espace, on devra donc entendre toutes les erreurs déterminées par les lignes allant de l'origine à tous les points dans cet espace.

---

[1]) Ce mémoire a été présenté à l'Académie des Sciences à Amsterdam dans la séance du mois de novembre 1874 et publié en hollandais dans les: Verhandelingen van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Deel XV, Amsterdam 1875. Nous le reproduisons sans rien y changer. *La Rédaction.*

Digitized by Google

Lorsqu'on a fait un grand nombre de déterminations, le nombre des erreurs comprises dans l'intérieur d'un certain espace, divisé par le nombre total des déterminations, sera la probabilité que l'erreur tombe dans cet espace. En prenant cet espace très petit, ce quotient sera la probabilité de l'erreur déterminée par l'origine des erreurs et cet élément de l'espace. En divisant cette probabilité par le volume de l'élément, nous aurons la probabilité par unité d'espace ou la probabilité spécifique que nous nommerons *facilité* de l'erreur et que nous désignerons dorénavant par la lettre F.

Cette facilité de l'erreur sera en général une fonction de la grandeur de l'erreur et de ses deux coefficients de direction, ou de ses trois projections sur trois axes rectangulaires, en général de trois variables indépendantes.

Il se peut aussi qu'on ait à déterminer la position d'un point sur un plan; alors la facilité de l'erreur sera fonction de la grandeur de l'erreur et d'un coefficient de direction ou de ses deux projections sur deux axes rectangulaires, en général de deux variables indépendantes.

Enfin il peut s'agir de la détermination de la position d'un point sur une droite, la facilité de l'erreur sera alors fonction d'une seule variable.

On peut donc avoir des erreurs dans l'espace, des erreurs dans le plan et des erreurs linéaires.

L'erreur que nous commettons dans la détermination de la position d'un point est le plus souvent le résultat d'une multitude d'erreurs commises dans les différentes parties de la détermination. Chacune de ces erreurs suit une loi déterminée et peut être située dans l'espace, dans un plan ou sur une ligne.

Nous nous occuperons d'abord des propriétés qu'on retrouve dans toutes les erreurs, quelles que soient les lois qu'elles suivent, puis nous rechercherons comment plusieurs erreurs peuvent concourir pour former une erreur résultante et la manière dont on peut trouver la loi de cette erreur résultante; enfin nous examinerons ce que devient cette loi lorsque le nombre des erreurs composantes devient très grand, la „*loi limite*".

II. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES ERREURS.

§ 3. Quoique les erreurs puissent avoir des valeurs très différentes, il est pourtant évident qu'elles seront comprises en général dans un certain espace limité par une surface (par une courbe dans le plan ou par deux points sur la droite).

Digitized by Google

Cette limite est déjà exprimée par la facilité de l'erreur, parce que pour des points en dehors de cette limité la facilité F doit être zéro. La facilité de l'erreur sera donc en général une fonction discontinue. Pourtant il peut arriver que la forme de la fonction F soit continue, mais alors on doit indiquer entre quelles limites on doit employer cette forme; pour des points en dehors de cette limite la facilité sera exprimée par une autre fonction ou sera identiquement nulle.

Lors de la recherche de l'erreur résultante, nous verrons qu'il se présente des cas où l'on a un grand nombre de fonctions différentes, qui expriment la facilité de l'erreur, chacune dans ses limites particulières.

Lorsque dans la suite nous parlerons de la facilité de l'erreur en général, nous supposerons toujours que les limites sont exprimées explicitement dans la fonction qui représente cette facilité, de sorte que nous pouvons représenter partout cette fonction par le même signe, sans que nous ayons besoin de nous soucier de ces limites.

§ 4. Supposons que la partie de l'espace, du plan, ou de la droite dans laquelle se trouvent les erreurs, soit pourvue de masse, de manière que la densité en chaque point soit égale à la facilité de l'erreur en ce point, nous aurons alors un solide (plan massif, droite massive) qui nous donne une représentation de la loi de l'erreur.

Ce solide, que nous désignerons par le nom de *solide de probabilité*, réduit à des considérations géométriques une grande partie des questions qui nous occupent.

§ 5. Jusqu'à présent nous avons considéré les erreurs tant sous le point de vue de la grandeur que sous celui de la direction; nous pouvons les considérer aussi sous le seul point de vue de la grandeur indépendamment de la direction. Pour évaluer la probabilité que la valeur de l'erreur soit comprise entre ϱ et $\varrho + d\varrho$, il faut prendre la somme pour toutes les directions de la probabilité des erreurs comprises entre ϱ et $\varrho + d\varrho$. Cette probabilité divisée par $d\varrho$ nous donne la *facilité de l'erreur indépendante de la direction* que nous représenterons dans ce qui suit par F'.

De cette définition nous tirons de suite les trois relations qui se rapportent aux erreurs dans l'espace, dans le plan et sur la droite, lorsque φ et θ désignent les angles de direction:

$$F' = \int_{\varphi=o}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=-\frac{1}{2}\pi}^{\theta=+\frac{1}{2}\pi} F \varrho^2 \cos\theta \, d\varphi \, d\theta \quad \ldots \quad (1)$$

$$F' = \int_{\varphi=o}^{\varphi=2\pi} F \varrho \, d\varphi. \quad \ldots \quad (2)$$

$$F' = F(\varrho) + F(-\varrho). \quad \ldots \quad (3)$$

Digitized by Google

§ 6. Comme toutes les erreurs doivent être comprises dans le solide de probabilité, il faut que la masse totale de ce solide soit égale à l'unité, d'où il suit pour les erreurs dans l'espace, dans le plan et sur la droite:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F\,dX\,dY\,dZ=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} F\varrho^2\cos\theta\,d\varrho\,d\varphi\,d\theta=\int_{0}^{\infty} F'\,d\varrho=1 \quad . . \quad (4)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F\,dX\,dY=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} F\varrho\,d\varrho\,d\varphi=\int_{0}^{\infty} F'\,d\varrho=1 \quad . . . . . \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F\,dX=\int_{0}^{\infty} F'\,d\varrho=1 \quad . . . . . \quad (6)$$

§ 7. Afin de pouvoir comparer différentes séries d'erreurs il faut calculer une valeur moyenne de l'erreur. La moyenne la plus usitée et la plus propre est celle qu'on nomme la *valeur moyenne de l'erreur* ou simplement *l'erreur moyenne* [1]) et qui est la racine carrée de la moyenne arithmétique des carrés des erreurs. En représentant cette moyenne par la lettre M, nous tirons de suite de sa définition les expressions suivantes pour les erreurs dans l'espace, dans le plan et sur la droite:

$$M^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(X^2+Y^2+Z^2)\,F\,dX\,dY\,dZ=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\varrho^2 F\varrho^2\cos\theta\,d\varrho\,d\varphi\,d\theta=\int_{0}^{\infty}\varrho^2 F'\,d\varrho. \quad (7)$$

$$M^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(X^2+Y^2)\,F\,dX\,dY=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi}\varrho^2\,F\varrho\,d\varrho\,d\varphi=\int_{0}^{\infty}\varrho^2 F'\,d\varrho \quad . . . . \quad (8)$$

$$M^2=\int_{-\infty}^{+\infty} X^2 F\,dX=\int_{0}^{\infty}\varrho^2 F'\,d\varrho \quad . . . . . \quad (9)$$

Comparé au solide de probabilité le carré de l'erreur moyenne correspond au moment d'inertie polaire de ce solide par rapport à l'origine des erreurs.

§ 8. La probabilité μ que la valeur absolue de l'erreur n'excède pas une certaine valeur $\varrho=\lambda M$, est exprimée par la formule:

$$\mu=\int_{0}^{\lambda M} F'\,d\varrho \quad . . . . . \quad (10)$$

---

[1]) Il ne faut pas confondre *l'erreur moyenne* avec la *moyenne des erreurs*, par laquelle on désigne la moyenne arithmétique des valeurs absolues des erreurs, c'est-à-dire: $\int_{0}^{\infty}\rho F'\,d\rho$.

Digitized by Google

c'est-à-dire la masse d'une sphère (d'un cercle, d'une partie de la droite comprise entre deux points à égale distance de l'origine), décrite avec le rayon $\varrho = \lambda M$ de l'origine comme centre.

La relation entre μ et λ dépend de la facilité F' et par conséquence de la facilité F. Tant que celle-ci est inconnue, et c'est le cas le plus général, on ne peut pas déterminer cette relation. Pourtant il est possible de trouver une valeur limite, qui ne peut pas être excédée par λ pour une valeur déterminée de μ, ou une limite inférieure de μ pour une valeur déterminée de λ.

§ 9. A cette fin admettons une fonction quelconque pour la facilité de l'erreur et prenons pour ϱ une valeur telle que la probabilité des erreurs moindres que ϱ soit égale à μ.

En prenant pour ϱ une valeur constante, nous pouvons déterminer le maximum de $\lambda = \frac{\varrho}{M}$ en déterminant le minimum de M.

Remarquons pour cela qu'en diminuant d'une certaine valeur la probabilité d'une erreur entre les limites 0 et ϱ ou ϱ et ∞ et qu'en augmentant de la même valeur la probabilité d'une erreur plus petite, mais située entre les mêmes limites, μ et ϱ ne changeront pas, tandis que M deviendra plus petit et par conséquence λ deviendra plus grand. D'où il suit immédiatement qu'on aura la limite, lorsque la probabilité de toutes les erreurs plus grandes que ϱ est reduite à zéro et que la probabilité de l'erreur ϱ est augmentée de la somme de ces probabilités, et lorsque en même temps la probabilité des erreurs plus petites que ϱ est concentrée sur l'erreur zéro. La loi de l'erreur devient donc: une erreur zéro avec la probabilité μ et une erreur ϱ avec la probabilité $1-\mu$; d'où il suit pour l'erreur moyenne: $M = \varrho \sqrt{1-\mu}$, de sorte qu'on aura pour le maximum de λ:

$$\lambda = \frac{\varrho}{M} \leq \frac{1}{\sqrt{1-\mu}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

En renversant nous trouvons pour le minimum de μ, l'expression:

$$\mu \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

valable tant pour les erreurs dans l'espace que pour celles dans le plan ou sur la droite.

§ 10. Gauss a donné dans sa „Théorie de la combinaison des observations qui expose aux moindres erreurs" des relations analogues pour les limites de λ, mais avec la restriction que la facilité de l'erreur ne sera pas croissante avec la valeur absolue de l'erreur, et seulement pour des erreurs sur la droite [1]).

---

[1]) Voir: Ch. Fr. Gauss. Méthode des moindres carrés, par J. Bertrand. Paris 1855. page 11.

Digitized by Google

En étendant ces relations aux cas des erreurs dans le plan et dans l'espace, nous traiterons d'abord le cas des erreurs linéaires.

§ 11. Prenons en premier lieu les erreurs linéaires et déterminons le maximum de λ de la même manière que nous avons employée pour trouver le maximum absolu de λ. En désignant par h la facilité de l'erreur ϱ, la facilité d'une erreur plus petite que ϱ ne peut pas être plus petite que h; mais afin de rendre M un minimum il faut rendre cette facilité aussi petite que possible, c'est-à-dire égale à h. Le montant dont nous avons diminué la probabilité des erreurs plus petite que ϱ sera concentré sur l'erreur zéro et sera representé par la lettre A. Pour les erreurs plus grandes que ϱ, la facilité d'une erreur plus petite ne peut être augmentée aux dépens d'une erreur plus grande que jusqu'à la valeur de h.

A la limite nous aurons donc pour la loi des erreurs: une erreur zéro avec la probabilité A et puis jusqu'à une certaine limite, soit m, des erreurs avec la facilité constante h. En dehors de cette limite la facilité est égale à zéro.

Cette loi des erreurs donne pour la probabilité d'une erreur plus petite que ϱ, pour la probabilité totale et pour l'erreur moyenne:

$$\mu = A + h\varrho$$
$$1 = A + hm$$
$$M^2 = \int_0^m \varrho^2 h\, d\varrho = \tfrac{1}{3} h m^3$$

d'où il suit:

$$\lambda^2 = \frac{\varrho^2}{M^2} = \frac{3\varrho^2}{h m^3}.$$

En substituant les valeurs de ϱ et m, tirées des deux premières équations, on trouve pour λ^2:

$$\lambda^2 = 3\frac{(\mu - A)^2}{(1 - A)^3}.$$

Jusqu'ici nous avons laissé indéterminée la valeur de h, ou, ce qui est la même chose, la valeur de A. Nous pouvons en profiter pour faire de λ un maximum absolu. Différentions pour cela par rapport à A et égalons le quotient différentiel égal à zéro, nous trouvons:

$$2(\mu - A)(1 - A)^3 - 3(\mu - A)^2(1 - A)^2 = o$$

ou:

$$A = 3\mu - 2,$$

d'où nous tirons pour le maximum de λ:

$$\lambda = \frac{2}{3\sqrt{1 - \mu}}.$$

Digitized by Google

Pourtant cette expression est seulement applicable tant que A reste positif, c'est-à-dire tant qu'on a: $3\mu - 2 > o$ ou $\mu > \frac{2}{3}$. Pour des valeurs plus petites de μ, A deviendrait négatif, ce qui est impossible. Dans ce cas on doit rendre A aussi petite que possible, c'est-à-dire $A = o$, d'où il suit $\lambda^2 = 3\mu^2$ ou $\lambda = \mu\sqrt{3}$.

De sorte que nous trouvons:

$$\left.\begin{array}{ll} \mu < \frac{2}{3} = 0{,}666\ldots & \lambda \leqq \mu\sqrt{3} \quad = 1{,}7320508\,\mu \\ \mu > \frac{2}{3} = 0{,}666\ldots & \lambda \leqq \dfrac{2}{3\sqrt{1-\mu}} = \dfrac{0{,}666\ldots.}{\sqrt{1-\mu}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Et en retournant les formules:

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda < \frac{2}{3}\sqrt{3} = 1{,}1547005 & \mu \geqq \frac{1}{3}\lambda\sqrt{3} \quad = 0{,}5773503\,\lambda \\ \lambda > \frac{2}{3}\sqrt{3} = 1{,}1547005 & \mu \geqq 1 - \dfrac{4}{9\lambda^2} = 1 - \dfrac{0{,}444\ldots}{\lambda^2} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Ces formules sont applicables aux erreurs linéaires, quand la facilité n'est pas croissante avec la valeur absolue de l'erreur et aussi à toutes les erreurs en général, lorsque la facilité de l'erreur indépendante de la direction (F') n'est pas croissante avec la valeur de l'erreur.

§ 12. En passant aux erreurs dans le plan, nous commençons par répartir uniformément la probabilité des erreurs comprises dans un même anneau circulaire d'une largeur infiniment petite sur toutes les erreurs comprises dans cet anneau; par là nous ne changeons rien aux valeurs de ϱ, μ et M, et nous obtenons des erreurs qui ont la même probabilité dans toutes les directions. En appliquant à ces erreurs le même raisonnement que nous avons appliqué aux erreurs linéaires, nous trouvons à la limite la loi suivante: une erreur zéro avec la probabilité A et puis jusqu'à une certaine limite m des erreurs avec la facilité constante h; d'où nous tirons

$$\mu = A + h\varrho^2\pi$$
$$1 = A + h m^2 \pi$$

$$M^2 = \int_0^m \int_0^{2\pi} \varrho^2 h \varrho\, d\varrho\, d\varphi = \tfrac{1}{2}\pi h m^4.$$

Pour le maximum de λ^2 nous trouvons donc:

$$\lambda^2 = \frac{\varrho^2}{M^2} = \frac{2\varrho^2}{\pi h m^4}$$

ou, en substituant les valeurs de ϱ et m tirées des deux premières équations:

$$\lambda^2 = 2\,\frac{\mu - A}{(1-A)^2}.$$

Digitized by Google

Cette expression est un maximum pour $A = 2\mu - 1$ et devient alors:

$$\lambda^2 = \frac{1}{2(1-\mu)}$$

mais cette expression n'est applicable que pour le cas de $\mu > \frac{1}{2}$; pour $\mu < \frac{1}{2}$ la valeur de A deviendrait négative; en mettant pour ce cas $A = o$, on a:

$$\lambda^2 = 2\mu.$$

On trouve donc pour les erreurs dans le plan, lorsque la facilité n'est pas croissante avec l'erreur, les limites suivantes:

$$\left.\begin{array}{ll} \mu < \frac{1}{2} & \lambda \leqq \sqrt{2\mu} \quad = 1{,}4142136\sqrt{\mu} \\ \mu > \frac{1}{2} & \lambda \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2(1-\mu)}} = \dfrac{0{,}7071068}{\sqrt{1-\mu}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Et en retournant ces formules:

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda < 1 & \mu \geqq \frac{1}{2}\lambda^2 \\ \lambda > 1 & \mu \geqq 1 - \dfrac{1}{2\lambda^2} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

§ 13. En raisonnant d'une manière analogue pour les erreurs dans l'espace, on trouve encore la même loi, c'est-à-dire: une erreur zéro avec la probabilité A et puis jusqu'à une certaine limite m des erreurs avec la facilité constante h, d'où il suit:

$$\mu = A + \tfrac{4}{3}\pi h \varrho^3$$
$$1 = A + \tfrac{4}{3}\pi h m^3$$
$$M^2 = \int_o^m \int_o^{2\pi} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \varrho^2 h \varrho^2 \cos\theta \, d\varrho \, d\varphi \, d\theta = \tfrac{4}{5} m^5 h \pi.$$

De la dernière équation on tire:

$$\lambda^2 = \frac{\varrho^2}{M^2} = \frac{5\varrho^2}{4 m^5 h \pi}$$

ou, en éliminant ϱ et m à l'aide des deux premières:

$$\lambda^2 = \tfrac{5}{3}\sqrt[3]{\frac{(\mu - A)^2}{(1-A)^5}}.$$

Cette dernière expression est un maximum pour $A = \dfrac{5\mu - 2}{3}$ et devient alors:

$$\lambda^2 = \tfrac{5}{3}\sqrt[3]{\frac{[\frac{2}{3}(1-\mu)]^2}{[\frac{5}{3}(1-\mu)]^5}} = (\tfrac{2}{5})^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1-\mu}$$

qui n'est applicable que pour $\mu > \frac{2}{5}$. Pour $\mu < \frac{2}{5}$ on doit mettre $A = o$ et on obtient alors:

$$\lambda^2 = \tfrac{5}{3}\mu^{\frac{2}{3}}.$$

Digitized by Google

On a donc pour les erreurs dans l'espace, pour lesquelles la facilité n'est pas croissante avec la valeur de l'erreur, les limites suivantes:

$$\left.\begin{array}{ll} \mu < \frac{2}{5} = 0{,}4 & \lambda \leqq \sqrt{\frac{5}{3}}\ \sqrt[3]{\mu} = 1{,}290995\ \sqrt[3]{\mu} \\ \mu > \frac{2}{5} = 0{,}4 & \lambda \leqq \sqrt[3]{\frac{2}{5}}\ \frac{1}{\sqrt{1-\mu}} = \frac{0{,}7368063}{\sqrt{1-\mu}} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Et en retournant ces formules:

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda < \sqrt{\frac{5}{3}}\ \sqrt[3]{\frac{2}{5}} = 0{,}9512129 & \mu \geqq \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \lambda^3 = 0{,}464758\ \lambda^3 \\ \lambda > \sqrt{\frac{5}{3}}\ \sqrt[3]{\frac{2}{5}} = 0{,}9512129 & \mu \geqq 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\lambda^2} = 1 - \frac{0{,}5428835}{\lambda^2} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

§ 14. Afin de donner un aperçu des limites trouvées, nous donnons dans les colonnes 2, 3, 5 et 7 du tableau I les valeurs maximum de λ pour différentes valeurs de μ calculées d'après les formules (11), (13), (15) et (17) et dans les colonnes 2, 3, 5 et 7 du tableau II les valeurs minimum de μ pour differentes valeurs de λ calculées d'après les formules (12), (14), (16) et (18).

La première figure de la planche donne en outre dans la ligne A une représentation graphique des formules (11) et (12) et dans les lignes pointillées B', C' et D' des représentations graphiques des formules (13) et (14), (15) et (16) et (17) et (18).

§ 15. Par *erreur probable* on désigne une valeur telle qu'on a une probabilité égale de faire une erreur plus grande que de faire une erreur plus petite que cette valeur. C'est donc le rayon d'une sphère (cercle, moitié de la partie d'une ligne comprise entre deux points à égale distance de l'origine) décrite de l'origine comme centre et pour laquelle la masse est égale à un demi. C'est donc la valeur de λ M pour $\mu = \frac{1}{2}$.

En désignant l'erreur probable par R et la valeur correspondante de λ par r, on a:

$$R = r\,M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Comme on trouve facilement la valeur de M, il s'agit surtout de calculer la valeur de r. Cette valeur dépend de la facilité F' et ne peut pas être calculée, tant que celle-ci est inconnue. Pourtant il est facile de trouver une valeur maximum pour r; en mettant $\mu = \frac{1}{2}$ dans les formules (11), (13), (15) et (17), on trouve que r ne peut jamais devenir plus grande que:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142136\ ^1)$$

---

[1]) Dans un mémoire publié dans les: *Astr. Nachr.* XV, n°. 358—359, M. Bessel trouve dans un cas particulier pour le rapport de l'erreur probable à l'erreur moyenne la valeur $\sqrt{3} = 1{,}732$, ce qui serait en

Digitized by Google

et que, sous la restriction que la facilité F n'est pas croissante avec la valeur de l'erreur, r ne pourra devenir plus grande que:

$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}8660254$ pour les erreurs linéaires
$1 = 1{,}0000000$ » » » dans le plan
et $\sqrt[6]{\frac{3}{2}\frac{2}{5}} = 1{,}0420015$ » » » dans l'espace.

contradiction avec notre texte, où nous avons démontré que ce rapport ne peut jamais être plus grand que $\sqrt{2} = 1{,}4142$.

Le résultat obtenu par BESSEL repose en partie sur une erreur de calcul, en partie sur une formule erronée employée pour l'erreur probable.

L'erreur de calcul se trouve dans la dernière ligne de la colonne 373 où l'on trouve $m\,m = \frac{1}{2}\,a\,a$ au lieu de: $m\,m = \frac{1}{4}\,a\,a$; car en remplaçant dans (3), $f(\xi)$ par $a \sin \xi$ et α par la limite $\frac{1}{2}\pi$ on trouve:

$$m\,m = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} a^2 \sin^2 \xi\, d\xi = \frac{a^2}{\pi}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \frac{1-\cos 2\xi}{2}\, d\xi = \frac{a^2}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}a^2. \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

La formule erronée employée par BESSEL pour calculer l'erreur probable, c'est celle qui se trouve entre les formules (3) et (4).

L'erreur probable doit être calculée à l'aide de la formule:

$$\int_{-R}^{+R} F\,dx = \frac{1}{2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

ou, ce qui est la même chose, en représentant par $\pm a$ les limites des erreurs, en supposant l'erreur symétrique et en prenant en outre la notation de BESSEL:

$$\int_{o}^{m\,k} \phi_x\, dx = \frac{1}{2}\int_{o}^{a} \phi_x\, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

au lieu de celle-ci, BESSEL emploie la formule:

$$\int_{o}^{m\,k} x\,\phi_x\, dx = \frac{1}{2}\int_{o}^{a} x\,\phi_x\, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

On se convainct aisément que M. BESSEL désigne réellement par le nom d'erreur probable la valeur $R = m\,k$ tirée de (b) ou (c), en remarquant qu'il donne dans le paragraphe 2, au milieu de la colonne 374 pour l'erreur probable dans le cas de la loi exponentielle

$$\frac{1}{m\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x\,x}{2\,m\,m}}$$

la valeur: $R = m\,k = 0{,}6745\,m$, tandis que de (d) il résulterait: $R = m\sqrt{\log \text{nat}\, 4} = 1{,}177\,m$.

En partant de l'équation (c) on trouve au lieu de la formule (4) de BESSEL:

$$\int_{o}^{K} d\xi = \frac{1}{2}\int_{o}^{\alpha} d\xi$$

ou:

Digitized by Google

§ 16. Considérons les erreurs dans le plan et projetons-les sur une droite passant par l'origine, ces projections des erreurs suivront une certaine loi, qu'il est facile de trouver. En prenant cette droite comme axe des X, toutes les erreurs qui donnent naissance à des projections comprises entre X et $X + dX$ sont situées entre deux droites parallèles à l'axe des Y et à des distances X et $X + dX$ de cet axe, d'où il suit immédiatement pour la facilité F_x de cette erreur en projection sur l'axe des X:

$$F_x = \int_{-\infty}^{+\infty} F\, dY \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Le carré de la valeur moyenne (M_x) de l'erreur en projection est exprimé par:

$$M^2_x = \int_{-\infty}^{+\infty} X^2 F_x\, dX = \int_{-\infty}^{+\infty} X^2\, dX \int_{-\infty}^{+\infty} F\, dY = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X^2 F\, dX\, dY. \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

Cette expression représente le moment d'inertie du solide (plan massif) de probabilité par rapport à l'axe des Y.

Entre les valeurs moyennes des erreurs dans l'espace projetées sur des axes et les moments d'inertie du solide de probabilité par rapport à des plans, on trouve des relations analogues.

Toutes les propriétés démontrées pour les moments d'inertie peuvent donc être appliquées aux valeurs moyennes des erreurs en projection.

Pour autant que nous aurons besoin de ces propriétés, nous les donnons ici d'une manière succincte.

$$K = \tfrac{1}{2}\alpha$$

et par suite:

$$k\,m = f(\tfrac{1}{2}\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

Pour le premier des exemples traités dans le § 2 la formule (e) donne:

$$k\,m = a \sin \tfrac{1}{2}\pi = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

et comme on tire de la formule (a):

$$m = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

on trouve $k = 1$, au lieu de la valeur $k = \sqrt{3} = 1{,}732$ de Bessel.

Dans le second exemple donné dans le même paragraphe, on trouve d'une manière analogue: $k = \frac{1}{2}\sqrt{5} = 0{,}559$ au lieu de $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{4}} = 1{,}409$.

Heureusement les matières traitées dans les deux premiers paragraphes n'ont aucun rapport avec la suite du mémoire, de sorte que les erreurs signalées n'ont aucune influence sur cette dernière partie.

Digitized by Google

§ 17. Comme une des premières propriétés déduites de la théorie des moments d'inertie, nous mentionnons la suivante: le carré de l'erreur moyenne est égal à la somme des carrés des valeurs moyennes des erreurs projetées sur trois (deux dans le plan) axes rectangulaires.

En représentant ces valeurs moyennes par M_x M_y et M_z, on trouve la relation:

$$M^2 = M^2_x + M^2_y + M^2_z. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

§ 18. Comme on a dans un plan deux axes principaux d'inertie et dans l'espace trois de ces axes, on aura aussi deux et trois axes principaux pour les projections des erreurs dans le plan et dans l'espace. Ces axes seront désignés dorénavant comme *axes principaux de probabilité.*

En posant en général:

$$M^2_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X\,Y\,F\,dX\,dY\,dZ. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

ces axes seront déterminés pour les erreurs dans le plan par l'équation:

$$M_{xy} = o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

et pour celles dans l'espace par les trois équations:

$$M_{yz} = o \qquad M_{zx} = o \qquad M_{xy} = o \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

§ 19. Etant données les valeurs moyennes M_x, M_y et M_z des projections des erreurs sur les trois axes principaux, on peut en déduire la valeur moyenne $M_{\alpha\beta\gamma}$ des projections des erreurs sur une droite quelconque faisant avec ces axes les angles $\alpha\,\beta\,\gamma$; elle est donnée par la formule:

$$M^2_{\alpha\beta\gamma} = M^2_x \cos^2\alpha + M^2_y \cos^2\beta + M^2_z \cos^2\gamma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Dans le plan on a d'une manière analogue en désignant par φ l'angle de direction:

$$M^2_\varphi = M^2_x \cos^2\varphi + M^2_y \sin^2\varphi. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

En mettant sur les différentes directions des longueurs inversement proportionnelles à $M_{\alpha\beta\gamma}$ (M_φ), on obtient un ellipsoïde (ellipse) que nous désignerons comme *ellipsoïde* (*ellipse*) *des erreurs moyennes.*

§ 20. Lorsqu'on connaît les valeurs de M_x, M_y, M_z, M_{yz}, M_{zx}, et M_{xy} pour trois axes rectangulaires, on peut en déduire les coefficients de direction des axes principaux.

En désignant par a, b, c, a', b', c', a'', b'' et c'' ces coefficients, on a les relations:

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{l} aa'\ \mathrm{M}^2_x + bb'\ \mathrm{M}^2_y + cc'\ \mathrm{M}^2_z + (bc' + b'c)\ \mathrm{M}^2_{y\,z} + (ca' + c'a)\ \mathrm{M}^2_{z\,x} + (ab' + \\ \qquad + a'b)\ \mathrm{M}^2_{x\,y} = o \\ aa''\ \mathrm{M}^2_x + bb''\ \mathrm{M}^2_y + cc''\ \mathrm{M}^2_z + (bc'' + b''c)\ \mathrm{M}^2_{y\,z} + (ca'' + c''a)\ \mathrm{M}^2_{z\,x} + (ab'' + \\ \qquad + a''b)\ \mathrm{M}^2_{x\,y} = o \\ a'a''\ \mathrm{M}^2_x + b'b''\ \mathrm{M}^2_y + c'c''\ \mathrm{M}^2_z + (b'c'' + b''c')\ \mathrm{M}^2_{y\,z} + (c'a'' + c''a')\ \mathrm{M}^2_{z\,x} + (a'b'' + \\ \qquad + a''b')\ \mathrm{M}^2_{x\,y} = o \end{array}\right\} \quad (28)$$

Ayant déterminé ces neuf coefficients, on trouve pour les valeurs moyennes des projections des erreurs sur les trois axes principaux, lorsque nous désignons ces valeurs par $\mathrm{M}_{x'}$, $\mathrm{M}_{y'}$ et $\mathrm{M}_{z'}$, les expressions suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{M}^2_{x'} = a^2\,\mathrm{M}^2_x + b^2\,\mathrm{M}^2_y + c^2\,\mathrm{M}^2_z + 2\,b\,c\,\mathrm{M}^2_{y\,z} + 2\,c\,a\,\mathrm{M}^2_{z\,x} + 2\,a\,b\,\mathrm{M}^2_{x\,y} \\ \mathrm{M}^2_{y'} = a'^2\,\mathrm{M}^2_x + b'^2\,\mathrm{M}^2_y + c'^2\,\mathrm{M}^2_z + 2\,b'\,c'\,\mathrm{M}^2_{y\,z} + 2\,c'\,a'\,\mathrm{M}^2_{z\,x} + 2\,a'\,b'\,\mathrm{M}^2_{x\,y} \\ \mathrm{M}^2_{z'} = a''^2\,\mathrm{M}^2_x + b''^2\,\mathrm{M}^2_y + c''^2\,\mathrm{M}^2_z + 2\,b''\,c''\,\mathrm{M}^2_{y\,z} + 2\,c''\,a''\,\mathrm{M}^2_{z\,x} + 2\,a''\,b''\,\mathrm{M}^2_{x\,y} \end{array}\right\} \quad (29)$$

En désignant pour les erreurs dans le plan par ψ l'angle de direction d'un des axes principaux, les formules citées se simplifient et deviennent:

$$-\sin\psi\cos\psi\,\mathrm{M}^2_x + \sin\psi\cos\psi\,\mathrm{M}^2_y + (\cos^2\psi - \sin^2\psi)\,\mathrm{M}^2_{x\,y} = o$$

ou:

$$\operatorname{tang} 2\psi = \frac{2\,\mathrm{M}^2_{x\,y}}{\mathrm{M}^2_x - \mathrm{M}^2_y} \quad (30)$$

et:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{M}^2_{x'} = \mathrm{M}^2_x\cos^2\psi + \mathrm{M}^2_y\sin^2\psi + 2\sin\psi\cos\psi\,\mathrm{M}^2_{x\,y} \\ \mathrm{M}^2_{y'} = \mathrm{M}^2_x\sin^2\psi + \mathrm{M}^2_y\cos^2\psi - 2\sin\psi\cos\psi\,\mathrm{M}^2_{x\,y} \end{array}\right\} \quad (31)$$

§ 21. En prenant la moyenne arithmétique (N_x) des projections des erreurs sur une droite quelconque par exemple sur l'axe des X, on a:

$$\mathrm{N}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{X}\,\mathrm{F}_x\,d\,\mathrm{X} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{X}\,\mathrm{F}\,d\,\mathrm{X}\,d\,\mathrm{Y}\,d\,\mathrm{Z} \quad (32)$$

Cette expression peut être égale à zéro ou elle peut avoir une certaine valeur, soit positive soit négative.

Lorsque cette expression a par exemple une valeur positive, cela voudra dire que la projection à plus de tendance à être positive, qu'à être négative. Si les différentes erreurs en projection ne diffèrent que peu les unes des autres, elles se grouperont autour du point $\mathrm{X} = \mathrm{N}_x$; c'est pourquoi nous désignerons la quantité N_x comme *la partie constante de l'erreur en projection.*

Par l'équation (32) en rapport avec (4) on voit que N_x est la projection sur l'axe des X de la distance de l'origine au centre de gravité du solide de probabilité.

La ligne qui relie l'origine des erreurs au centre de gravité du solide de probabilité, est donc *la partie constante de l'erreur* et la projection de cette ligne sur un axe quelconque est *la partie constante des erreurs en projection* sur cet axe.

Digitized by Google

En représentant par N la partie constante de l'erreur et par N_x N_y et N_z les parties constantes des erreurs en projection sur trois axes rectangulaires, on a:

$$N^2 = N^2_x + N^2_y + N^2_z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

§ 22. Par rapport aux propriétés du centre de gravité, que nous venons de voir dans le paragraphe précédent, nous pouvons distinguer trois genres d'erreurs:

1°. *Erreurs constantes*, qui ont toujours la même valeur et la même direction; le solide de probabilité se réduit pour elles à un point massif avec une masse égale à l'unité.

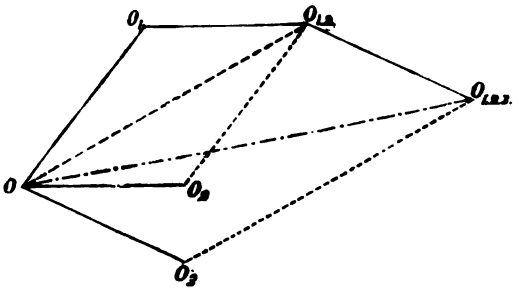
2°. *Erreurs fortuites*, qui ne possèdent point de partie constante; pour elles le centre de gravité coïncide avec l'origine.

3°. *Erreurs composées*, qui possèdent une partie constante et pour lesquelles par conséquent le centre de gravité ne coïncide pas avec l'origine. Nous les désignons par le nom d'erreurs composées, parce qu'on peut considérer toujours, comme nous le verrons tantôt (§ 24), une telle erreur comme étant composée d'une erreur constante correspondant à la partie constante et d'une erreur fortuite ayant le même solide de probabilité que l'erreur composée, mais ramenée avec son centre de gravité à l'origine.

III. L'ERREUR RÉSULTANTE.

§ 23. Dans les considérations suivantes nous emploierons en général les mêmes notations que jusqu'ici, seulement afin de distinguer les quantités qui se rapportent à l'erreur résultante de celles qui se rapportent aux erreurs composantes, nous exprimerons les premières par des majuscules, les dernières par des minuscules. Les quantités se rapportant à différentes erreurs composantes seront distinguées par des indices.

Fig. 1.



Afin de rechercher les lois de la composition des erreurs, considérons les trois erreurs $O\,O_1$, $O\,O_2$ et $O\,O_3$ (fig. 1). La première a pour effet de transporter le point O en O_1; la seconde de le transporter dans la direction $O\,O_2$ sur une distance égale à $O\,O_2$; le point O qui se trouve déjà en O_1 arrivera donc en $O_{1\,2}$. La troisième erreur transporte le point dans la direction $O\,O_3$ sur une distance égale à $O\,O_3$; de sorte que le point se trouvera enfin en $O_{1\,2\,3}$ et l'erreur résultante sera donc $O\,O_{1\,2\,3}$.

Digitized by Google

Le mode de déplacement du point O par suite des erreurs $O O_1$, $O O_2$ et $O O_3$ nous conduit à ce résultat que les erreurs doivent être composées de la même manière que les droites, les forces, les vitesses, les accélérations, etc.

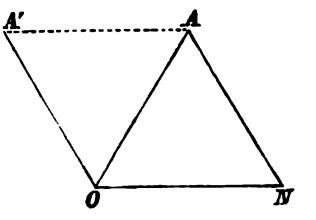
En désignant par X, Y et Z les projections de l'erreur résultante et par x, y et z les projections des erreurs composantes, nous aurons donc:

$$X = \Sigma x \qquad Y = \Sigma y \qquad Z = \Sigma z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

§ 24. Avec ce qui précède nous pouvons démontrer la propriété des erreurs composées mentionnée au paragraphe 22.

Soit O (Fig. 2) l'origine des erreurs, N le centre de gravité du solide de probabilité et O A une erreur quelconque avec la facilité F. Cette erreur O A peut toujours être considérée comme la résultante de l'erreur constante $O N = N$ et de l'erreur variable $O A' = N A$; la probabilité de la première erreur est égale à l'unité, parce que c'est une erreur constante, la facilité de la seconde est égale à celle de O A, parce que O A est la seule erreur qui donne par décomposition les deux erreurs O N et O A'. La facilité de l'erreur A' dans le second système est donc égale à la facilité de l'erreur A dans le premier. Le second système d'erreurs, dont O A' en est une, a donc le même solide de probabilité que le système original, mais déplacé avec son centre de gravité de N en O. C'est donc une erreur fortuite. Cette partie fortuite de l'erreur composée sera désignée dorénavant comme *erreur débarrassée de sa partie constante.*

Fig. 2.



Soient M la valeur moyenne de l'erreur composée (O A), $N = O N$ sa partie constante et M' la valeur moyenne de l'erreur débarrassée de sa partie constante, la théorie des moments d'inertie nous donne alors la relation:

$$M^2 = M'^2 + N^2 \qquad \text{ou} \qquad M'^2 = M^2 - N^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Cette même relation existe aussi entre les valeurs moyennes des erreurs en projection.

§ 25. Avant de nous occuper de la recherche de la loi ou de la facilité de l'erreur résultante, nous nous occuperons de sa partie constante et de sa valeur moyenne.

Considérons d'abord la partie constante de l'erreur en projection sur l'axe des X. La formule (32) du § 21 nous donne:

$$N_x = \int X F_x \, dX = \int\int\int X F \, dX \, dY \, dZ$$

où l'intégration doit s'étendre à toutes les valeurs de X, Y et Z.

Digitized by Google

Dans cette expression nous pouvons remplacer X par Σx d'après (34) et $F\,dX\,dY\,dZ$ par la probabilité:

$$f_1\,dx_1\,dy_1\,dz_1\,f_2\,dx_2\,dy_2\,dz_2\,f_3\,dx_3\,dy_3\,dz_3 \text{ etc.}$$

de la coïncidence des erreurs composantes $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$, etc., si nous étendons l'intégration sur toutes les valeurs possibles de $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$ etc.

En désignant dans la suite par $\Pi(a)$ le produit continu des quantités $a_1\,a_2\,a_3\ldots$. l'expression précédente devient:

$$N_x = \int\int\ldots\int\int \Sigma x\,\Pi(f\,dx\,dy\,dz) = \Sigma\int\int\ldots\int\int x_r\,\Pi(f\,dx\,dy\,dz) =$$

$$= \Sigma \frac{\Pi\left(\int\int\int f\,dx\,dy\,dz\right)\cdot\int\int\int x_r f_r\,dx_r\,dy_r\,dz_r}{\int\int\int f_r\,dx_r\,dy_r\,dz_r} = \Sigma\, n_r x = \Sigma\, n_x \ldots \quad (36)$$

car par suite de la formule (4) § 6, on a:

$$\int\int\int f\,dx\,dy\,dz = 1,$$

et par suite de (32) § 21:

$$\int\int\int x_r\,f_r\,dx_r\,dy_r\,dz_r = n_r\,x.$$

De l'équation (36) on voit que la partie constante de la projection de l'erreur résultante est égale à la somme des parties constantes des projections des erreurs composantes. En ayant égard au paragraphe 21, nous en tirons la propriété plus générale:

La partie constante de l'erreur résultante est égale à la résultante des parties constantes des erreurs composantes.

Lorsque les erreurs composantes ne contiennent pas de parties constantes, l'erreur résultante n'en contiendra non plus; ayant égard à la distinction faite au § 22, nous trouvons donc:

La résultante de plusieurs erreurs fortuites est encore une erreur fortuite.

§ 26. Passons à la valeur moyenne de l'erreur résultante et déterminons d'abord la valeur moyenne de l'erreur résultante en projection sur l'axe des X.

D'après (21) § 16 nous avons:

$$M^2_x = \int X^2\,F_x\,dX = \int\int\int X^2\,F\,dX\,dY\,dZ.$$

ou, en remplaçant comme au paragraphe précédent, X par Σx et $F\,dX\,dY\,dZ$ par $\Pi(f\,dx\,dy\,dz)$ et en intégrant pour toutes les valeurs de $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$ etc.:

$$M^2_x = \int\int\ldots\int\int (\Sigma x)^2\,\Pi(f\,dx\,dy\,dz).$$

Digitized by Google

En développant l'expression Σx et en distinguant deux des erreurs composantes par les indices r et t, nous trouvons:

$$M^2_x = \Sigma \frac{\Pi\left(\int\int\int f\,dx\,dy\,dz\right).\int\int\int x^2_r f_r\,dx_r\,dy_r\,dz_r}{\int\int\int f_r\,dx_r\,dy_r\,dz_r} +$$

$$+2\Sigma \frac{\Pi\left(\int\int\int f\,dx\,dy\,dz\right).\int\int\int x_r f_r\,dx_r\,dy_r\,dz_r.\int\int\int x_t f_t\,dx_t\,dy_t\,dz_t}{\int\int\int f_r\,dx_r\,dy_r\,dz_r \int\int\int f_t\,dx_t\,dy_t\,dz_t} =$$

$$= \Sigma m^2_{rx} + 2\Sigma n_{rx} n_{tx} = \Sigma m^2_x + (\Sigma n_x)^2 - \Sigma n^2_x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

parce que d'après (4) § 6, on a: $\int\int\int f\,dx\,dy\,dz = 1$

(32) § 21 $\int\int\int x f\,dx\,dy\,dz = n_x$

(21) § 16 $\int\int\int x^2 f\,dx\,dy\,dz = m^2_x.$

En remarquant que d'après (36) § 25, on a: $\Sigma n_x = N_x$ la formule (37) devient:

$$M^2_x - N^2_x = \Sigma m^2_x - \Sigma n^2_x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

Ajoutons encore les deux relations analogues par rapport aux axes des Y et des Z, c'est-à-dire:

$$\left.\begin{aligned} M^2_y - N^2_y &= \Sigma m^2_y - \Sigma n^2_y \\ M^2_z - N^2_z &= \Sigma m^2_z - \Sigma n^2_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

nous trouvons en prenant la somme et en observant les relations (22) § 17 et (33) § 21 l'expression tout à fait générale:

$$M^2 - N^2 = \Sigma m^2 - \Sigma n^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

ce qui veut dire que: *le carré de la valeur moyenne de l'erreur résultante diminué du carré de sa partie constante est égal à la somme des carrés des valeurs moyennes des erreurs composantes diminuée de la somme des carrés de leurs parties constantes.*

D'après form. (35) § 24 nous pouvons écrire aussi pour (40):

$$M'^2 = \Sigma m'^2. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

c'est-à-dire: *le carré de la valeur moyenne de l'erreur résultante débarrassée de sa partie constante est égal à la somme des carrés des valeurs moyennes des erreurs composantes débarrassées de leur partie constante.* Lorsque les erreurs composantes ne contiennent pas de parties constantes, c'est-à-dire lorsque ce sont des erreurs fortuites, les valeurs de n et N sont égales à zéro et la formule devient:

Digitized by Google

$$\mathrm{M}^2 = \Sigma m^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

c'est-à-dire: *Quand les erreurs ne contiennent pas de parties constantes, le carré de la valeur moyenne de l'erreur résultante est égal à la somme des carrés des valeurs moyennes des erreurs composantes.*

§ 27. Dans les deux paragraphes précédents, nous avons vu qu'il est possible de trouver la partie constante ainsi que la valeur moyenne de l'erreur résultante sans connaître la facilité de celle-ci. Il y a plus. On peut même déterminer les axes principaux de probabilité de cette erreur et les valeurs moyennes des projections de cette erreur sur ces axes. D'après les formules (28) et (29) du § 20 il suffit pour cela de connaître les quantités M_x, M_y, M_z, M_{yz}, M_{zx} et M_{xy}.

Les trois premières sont données par les équations (38) et (39) du paragraphe précédent, il nous reste donc à calculer les trois autres:

D'après (23) § 18 nous avons:

$$\mathrm{M}^2_{xy} = \int\int\int \mathrm{X\,Y\,F}\, d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y}\, d\mathrm{Z}$$

ou, en remplaçant X, Y et $\mathrm{F}\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}$ par $\Sigma x, \Sigma y$ et $\Pi(f\,dx\,dy\,dz)$ et en développant:

$$\mathrm{M}^2_{xy} = \int\int \ldots \int\int \Sigma x\, \Sigma y\, \Pi(f\,dx\,dy\,dz) = \Sigma \frac{\Pi\left(\int\int\int f\,dx\,dy\,dz\right) \cdot \int\int\int x_r\, y_r\, f_r\, dx_r\, dy_r\, dz_r}{\int\int\int f_r\, dx_r\, dy_r\, dz_r} +$$

$$+ \Sigma \frac{\Pi\left(\int\int\int f\,dx\,dy\,dz\right) \int\int\int x_r\, f_r\, dx_r\, dy_r\, dz_r \cdot \int\int\int y_t\, f_t\, dx_t\, dy_t\, dz_t}{\int\int\int f_r\, dx_r\, dy_r\, dz_r \cdot \int\int\int f_t\, dx_t\, dy_t\, dz_t} =$$

$$= \Sigma m^2_{r\,xy} + \Sigma n_{r\,x}\, n_{t\,y} = \Sigma m^2_{xy} + \Sigma n_x \Sigma n_y - \Sigma n_x n_y \quad \ldots\ldots \quad (43)$$

En ayant égard à (36) § 25 on peut écrire pour cette équation:

$$\mathrm{M}^2_{xy} - \mathrm{N}_x \mathrm{N}_y = \Sigma (m^2_{xy} - n_x n_y) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

et en permutant les lettres on trouve encore les deux relations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{M}^2_{yz} - \mathrm{N}_y \mathrm{N}_z &= \Sigma (m^2_{yz} - n_y n_z) \\ \mathrm{M}^2_{zx} - \mathrm{N}_z \mathrm{N}_x &= \Sigma (m^2_{zx} - n_z n_x) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

Lorsque les erreurs composantes ne contiennent pas de parties constantes, les formules (44) et (45) deviennent.

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{M}^2_{xy} &= \Sigma m^2_{xy} \\ \mathrm{M}^2_{yz} &= \Sigma m^2_{yz} \\ \mathrm{M}^2_{zx} &= \Sigma m^2_{zx} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

Digitized by Google

§ 25. Comme on a:

$$\int\int\int (X - N_x)(Y - N_y)\, F\, dX\, dY\, dZ = \int\int\int XY\, F\, dX\, dY\, dZ - N_x \int\int\int Y\, F\, dX\, dY\, dZ -$$

$$- N_y \int\int\int X\, F\, dX\, dY\, dZ + N_x N_y \int\int\int F\, dX\, dY\, dZ = M^2_{xy} - N_x N_y \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

les équations (44) et (45) peuvent être mises sous la forme:

$$\left.\begin{aligned} \int\int\int (X - N_x)(Y - N_y)\, F\, dX\, dY\, dZ &= \Sigma \int\int\int (x - n_x)(y - n_y)\, f\, dx\, dy\, dz \\ \int\int\int (Y - N_y)(Z - N_z)\, F\, dX\, dY\, dZ &= \Sigma \int\int\int (y - n_y)(z - n_z)\, f\, dx\, dy\, dz \\ \int\int\int (Z - N_z)(X - N_x)\, F\, dX\, dY\, dZ &= \Sigma \int\int\int (z - n_z)(x - n_x)\, f\, dx\, dy\, dz \end{aligned}\right\} \quad . \quad (48)$$

qui peuvent servir pour déterminer les axes principaux au centre de gravité.

§ 29. Les formules développées dans les paragraphes 21 à 28 ont toutes rapport aux erreurs dans l'espace; il est facile d'en déduire les formules pour les erreurs dans le plan, il suffit pour cela de supprimer tous les termes où entre la coordonnée z. Il sera donc superflu de les répéter ici.

IV. LA LOI DE L'ERREUR RÉSULTANTE.

§ 30. Passant maintenant à la recherche de la loi ou de la facilité de l'erreur résultante. Le moyen le plus simple d'y arriver, c'est de composer d'abord deux des erreurs composantes, de composer ensuite avec cette résultante une troisième des erreurs composantes et ainsi de suite. Il suffit donc de chercher la formule pour la facilité de la résultante de deux erreurs; en appliquant plusieurs fois cette même formule, on trouvera la facilité pour la résultante d'un nombre quelconque d'erreurs.

Composons donc les deux erreurs $x_1\, y_1\, z_1$ et $x_2\, y_2\, z_2$ avec les facilités $f_1(x_1\, y_1\, z_1)$ et $f_2(x_2\, y_2\, z_2)$, et soit X Y Z l'erreur résultante et F sa facilité. La formule (34) § 23 nous donne:

$$X = x_1 + x_2 \qquad Y = y_1 + y_2 \qquad Z = z_1 + z_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

La probabilité de la coïncidence de deux erreurs composantes comprises entre les limites $x_1\, y_1\, z_1$ et $x_1 + dx_1$, $y_1 + dy_1$, $z_1 + dz_1$, et entre les limites $x_2\, y_2\, z_2$ et $x_2 + dx_2$, $y_2 + dy_2$, $z_2 + dz_2$ est d'après le théorème de la probabilité composée:

$$f_1(x_1\, y_1\, z_1)\, f_2(x_2\, y_2\, z_2)\, dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

Digitized by Google

La probabilité que l'erreur résultante soit comprise entre X Y Z et $X+dX$, $Y+dY$, $Z+dZ$ s'obtiendra donc en intégrant cette expression pour toutes les valeurs de $x_1\,y_1\,z_1$ et de $x_2\,y_2\,z_2$ qui donnent d'après (49) des erreurs comprises entre X Y Z et $X+dX$, $Y+dY$ et $Z+dZ$.

En éliminant $x_2\,y_2\,z_2$ entre (49) et (50) nous trouvons:

$$f_1(x_1\,y_1\,z_1)\,f_2(X-x_1, Y-y_1, Z-z_1)\,dx_1\,dy_1\,dz_1\,dX\,dY\,dZ$$

laquelle expression doit être intégrée pour toutes les valeurs de $x_1\,y_1\,z_1$, qui donnent des valeurs réelles pour $f_1(x_1\,y_1\,z_1)$ et pour $f_2(X-x_1, Y-y_1, Z-z_1)$.

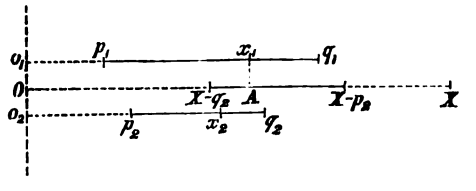
Lorsque pour les deux erreurs composantes les limites sont exprimées explicitement par les fonctions qui représentent les facilités de ces erreurs, on peut intégrer entre les limites $-\infty$ et $+\infty$; en divisant alors par $dX\,dY\,dZ$ nous trouvons pour ce cas:

$$F=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1\,y_1\,z_1)\,f_2(X-x_1, Y-y_1, Z-z_1)\,dx_1\,dy_1\,dz_1 \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

Lorsque ces limites ne sont pas exprimées explicitement, les limites de l'intégration ne sont plus $\pm\infty$; c'est donc de la recherche des limites de l'intégration et des limites de l'erreur résultante que nous devons nous occuper encore.

§ 31. Prenons d'abord des erreurs linéaires et soient $p_1\,q_1$ et $p_2\,q_2$ les limites des erreurs composantes; p_1 et p_2 les limites inférieures, q_1 et q_2 les limites supérieures. Représentons les lois de ces erreurs d'après le paragraphe 4 par des lignes massives, la première $f_1(x_1)$ par la ligne $o_1\,p_1\,q_1$ (Fig. 3), la seconde $f_2(x_2)$ par la ligne $o_2\,p_2\,q_2$; les erreurs réelles comme par exemple $o_1\,x_1$ et $o_2\,x_2$ seront alors situées sur les parties tirées entre les limites $o_1\,p_1=p_1$ et $o_1\,q_1=q_1$ pour la première et entre $o_2\,p_2=p_2$ et $o_2\,q_2=q_2$ pour la seconde. Représentons aussi l'expression $f_2(X-x_1)$ par la ligne O X avec x_1 comme variable; toutes les valeurs réelles de $f_2(X-x_1)$ seront alors situées sur la partie de cette ligne entre les limites $X-p_2$ et $X-q_2$; cette dernière ligne $(X-p_2)$, $(X-q_2)$ sera l'image réfléchie de la ligne $p_2\,q_2$.

Fig. 3.



Considérons maintenant deux points correspondants par exemple x_1 et A sur les lignes $o_1\,p_1\,q_1$ et O X; les distances $o_1\,x_1=x_1$ et $A\,X=o_2\,x_2=x_2$ représenteront alors deux erreurs composantes qui donnent l'erreur résultante $X=O\,X$. Donc tous les points qui correspondent sur les deux lignes $o_1\,q_1$ et O X donnent la même erreur résultante X, de sorte qu'il faudra prendre l'intégrale $F=\int f_1(x_1)$

Digitized by Google

$f_2(X - x_1)\, dx_1$ pour toutes les valeurs de x_1 qui sont situées sur les parties tirées de ces deux lignes; c'est-à-dire pour la valeur de $X = 0\,X$ représentée dans la figure, entre les limites $x_1 = X - q_2$ et $x_1 = q_1$.

Pour d'autres valeurs de X que celle représentée dans la figure, la ligne $(X - q_2)$, $(X - p_2)$, X restera la même comme étant l'image de $o_2\, p_2\, q_2$; seulement elle sera déplacée conformément à la valeur particulière de $X = 0\,X$, de sorte qu'il sera facile de trouver dans la figure les limites de l'intégration pour tous les cas qui peuvent se présenter.

§ 32. De la figure 3 on voit encore que, lorsqu'on fait croître la valeur de X jusqu'à ce que le point $X - q_2$ correspond au point q_1, il n'y aura plus de points correspondants pour des valeurs plus grandes de X, de sorte que cette valeur de X c'est-à-dire $X = q_1 + q_2$ est la plus grande valeur, la limite supérieure de l'erreur résultante X. D'une manière analogue on trouve pour la limite inférieure de X en faisant correspondre le point $X - p_2$ au point p_1 la valeur $X = p_1 + p_2$; ce sont donc les deux limites de l'erreur résultante.

Dans le cas représenté dans la figure, la limite supérieure de l'intégration est déterminée par le point q_1 de la première ligne; en prenant une valeur plus petite pour X, de sorte que le point $X - p_2$ tombe à gauche du point q_1, cette limite sera déterminée par le point $X - p_2$, de sorte que nous obtenons une autre fonction pour F; la limite à partir de laquelle on doit appliquer cette nouvelle fonction peut être trouvée en faisant correspondre le point $X - p_2$ au point q_1, d'où nous tirons pour cette limite $X - p_2 = q_1$ ou $X = p_2 + q_1$.

Un changement analogue de la fonction pour la facilité de l'erreur résultante est obtenu en faisant correspondre le point $X - q_2$ au point p_1 c'est-à-dire pour la valeur $X = p_1 + q_2$.

Nous trouvons donc pour les limites de l'erreur résultante $p_1 + p_2$ et $q_1 + q_2$, mais l'espace entre ces limites est divisé par $X = p_1 + q_2$ et $X = q_1 + p_2$ en trois parties, qui ont chacune une autre fonction pour la facilité de l'erreur.

En composant avec la résultante trouvée une troisième des erreurs composantes, on pourra trouver de la même manière les limites pour l'intégration; on verra en même temps que la facilité de l'erreur résultante sera exprimée alors par différentes fonctions, dont les limites peuvent être déterminées en faisant correspondre tantôt la limite supérieure tantôt la limite inférieure de cette troisième erreur avec les limites $p_1 + p_2$, $p_1 + q_2$, $p_2 + q_1$ et $q_1 + q_2$.

En composant de plus en plus d'erreurs, nous trouvons pour la facilité une multitude de fonctions différentes qui doivent être employées chacune dans des limites particulières (voir § 3). Bien que par là ces fonctions pour la facilité deviennent compliquées, il est pourtant possible de les exprimer par des formu-

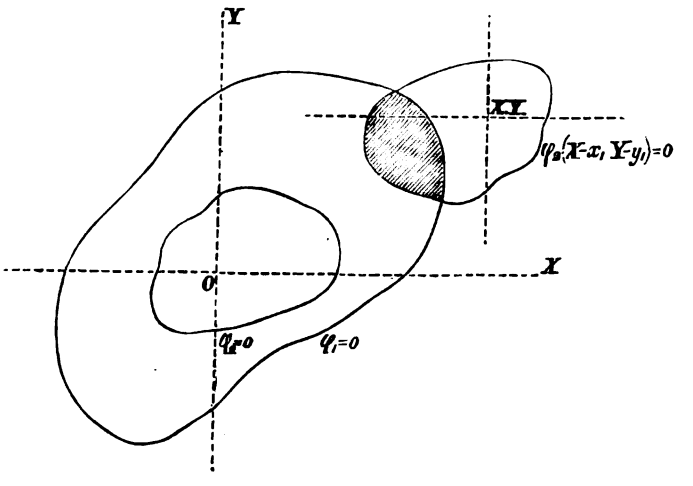
Digitized by Google

les générales. La recherche de ces formules nous mènerait trop loin, c'est pourquoi nous les passons ici.

§ 33. Prenons en second lieu les erreurs dans le plan et représentons par $f_1(x_1 y_1)$ et $f_2(x_2 y_2)$ les facilités des erreurs $x_1 y_1$ et $x_2 y_2$ et leurs limites par $\varphi_1(x_1 y_1) = o$ et $\varphi_2(x_2 y_2) = o$.

La figure 4 réprésente les facilités $f_1(x_1 y_1)$ et $f_2(x_2 y_2)$ limitées par les courbes $\varphi_1 = o$ et $\varphi_2 = o$. Représentons de même la quantité $f_2(X - x_1, Y - y_1)$ qui sera limitée par la courbe $\varphi_2(X - x_1, Y - y_1) = o$ avec $x_1 y_1$ comme variables. Cette dernière figure est la même que $f_2(x_2 y_2)$ dans les limites $\varphi_2(x_2 y_2) = o$, seulement l'origine O est transportée au point X Y et toute la figure a tournée de deux angles droits.

Fig. 4.



Tous les points des deux surfaces $f_1(x_1 y_1)$ et $f_2(X - x_1\ Y - y_1)$, qui se correspondent, donnent naissance à une erreur X Y de sorte que l'intégrale:

$$F = \int\int f_1(x_1 y_1) f_2(X - x_1, Y - y_1)\, d x_1\, d y_1$$

doit être intégrée pour la partie du plan qui est comprise entre les courbes $\varphi_1 = o$ et $\varphi_2(X - x_1\ Y - y_1) = o$, c'est la partie hachée de la figure.

§ 34. A l'aide de la figure nous pouvons aussi déterminer les limites de l'erreur résultante. Cette erreur ne peut dépasser la limite qu'on obtient, lorsque la courbe $\varphi_2(X - x_1, Y - y_1) = o$ est en contact extérieurement à la courbe $\varphi_1 = o$, car pour des valeurs en dehors de cette limite les deux figures n'auraient plus de points correspondants, de sorte que la facilité de l'erreur résultante deviendrait égale à zero.

Pour les valeurs de X et Y représentées dans la figure, les limites de l'intégration sont déterminées en partie par la courbe $\varphi_1 = o$ et en partie par $\varphi_2(X - x_1\ Y - y_1) = o$. Pour d'autres valeurs X et Y pour lesquelles la dernière courbe tombe tout à fait à l'intérieur de la première, les limites sont déterminées seulement par cette dernière courbe, de sorte que nous obtenons une autre fonction pour F; la limite de cette forme pour la facilité s'obtient en faisant toucher la courbe $\varphi_2(X - x_1, Y - y_1) = o$ intérieurement à la courbe $\varphi_1 = o$.

Digitized by Google

Ces deux limites sont exprimées par une même équation. Les deux courbes qui doivent être en contact ont pour équations:

$$\varphi_1(x_1\, y_1) = o \qquad \text{et} \qquad \varphi_2(X - x_1,\ Y - y_1) = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

d'où l'on tire en différentiant:

$$\frac{d\,y_1}{d\,x_1} = -\frac{D_x\varphi_1(x_1\, y_1)}{D_y\varphi_1(x_1\, y_1)} \qquad \text{et} \qquad \frac{d\,y_1}{d\,x_1} = -\frac{D_x\varphi_2(X - x_1,\ Y - y_1)}{D_y\varphi_2(X - x_1,\ Y - y_1)}$$

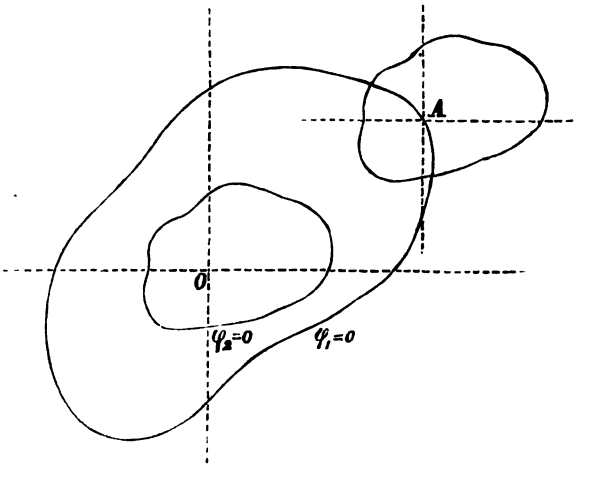
Comme les deux courbes doivent être en contact, le coefficient différentiel $\frac{d\,y_1}{d\,x_1}$ doit être le même pour les deux courbes, d'où il suit:

$$\frac{D_x\varphi_1(x_1\, y_1)}{D_y\varphi_1(x_1\, y_1)} = \frac{D_x\varphi_2(X - x_1\ \ Y - y_1)}{D_y\varphi_2(X - x_1\ \ Y - y_1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

En éliminant x_1 et y_1 entre (52) et (53), nous trouvons une équation qui contient seulement les variables X et Y et qui donne la limite de l'erreur résultante en même temps que la limite où il faut passer d'une forme de la fonction F à l'autre.

§ 35. L'équation trouvée pour les limites peut être démontrée d'une autre manière. Transportons la courbe $\varphi_2 = o$ (Fig. 5) avec l'origine en un point A de la courbe $\varphi_1 = o$. L'erreur O A composée avec une des erreurs situées à l'interieur de la courbe $\varphi_2 = o$ donnera des erreurs situées à l'intérieur de la courbe transportée en A. Comme on ne peut transporter cette origine en dehors de la courbe $\varphi_1 = o$, sans que la facilité f_1 et par conséquence la facilité F devienne nulle, la limite sera donnée par l'enveloppe extérieure de toutes les courbes qu'on obtient en transportant la courbe $\varphi_2 = o$ avec son origine sur tous les points de la courbe $\varphi_1 = o$. Il est facile de voir que l'enveloppe intérieure donnera la limite des différentes formes de la fontion F.

Fig. 5.



En désignant par X et Y les coordonnées de la courbe $\varphi_2 = o$ transportée en A et par x_1 et y_1 les coordonnées du point A, les coordonnées d'un point par rapport à A de la courbe transportée seront $X - x_1$ et $Y - y_1$; l'équation de cette courbe est donc:

$$\varphi_2(X - x_1\ \ Y - y_1) = o. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

Digitized by Google

où X et Y sont les variables et $x_1\, y_1$ deux paramètres qui doivent satisfaire à l'équation:

$$\varphi_1 (x_1\, y_1) = o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

Afin d'avoir l'enveloppe de (54), il faut différentier l'équation (54) par rapport au paramètre indépendant et éliminer ensuite ce paramètre entre cette équation et (54) en faisant usage de (55).

En différentiant les équations (54) et (55), nous trouvons:

$$D_x \varphi_2 (X - x_1,\ Y - y_1) + D_y \varphi_2 (X - x_1,\ Y - y_1) \frac{d\, y_1}{d\, x_1} = o$$

$$D_x \varphi_1 (x_1\, y_1) + D_y \varphi_1 (x_1\, y_1) \frac{d\, y_1}{d\, x_1} = o$$

et en éliminant $\frac{d\, y_1}{d\, x_1}$:

$$\frac{D_x \varphi_1 (x_1\, y_1)}{D_y \varphi_1 (x_1\, y_1)} = \frac{D_x \varphi_2 (X - x_1\ Y - y_1)}{D_y \varphi_2 (X - x_1\ Y - y_1)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

En éliminant x_1 et y_1 entre (54), (55) et (56), on trouve l'enveloppe demandée. Comme on voit, on arrive au même resultat que dans le paragraphe précédent.

§ 36. Pour les erreurs dans l'espace on pourra suivre le même chemin que pour les erreurs dans le plan, afin de trouver les limites de l'intégration et les limites de l'erreur résultante.

On trouvera deux solides limités par les surfaces $\varphi_1 (x_1\, y_1\, z_1) = o$ et $\varphi_2 (X - x_1\ Y - y_1\ Z - z_1) = o$ qui coïncident partiellement; l'intégration doit s'étendre alors sur la partie commune aux deux solides. Les limites de l'erreur seront déterminées par le lieu géometrique décrit par le point X Y Z du solide $\varphi_2 (X - x_1\ Y - y_1\ Z - z_1) = o$ en faisant glisser ce solide sur le solide $\varphi_1 (x_1\, y_1\, z_1) = o$; ou encore en promenant la surface $\varphi_2 (x_2\, y_2\, z_2) = o$ avec son origine sur la surface $\varphi_1 (x_1\, y_1\, z_1) = o$ et en cherchant l'enveloppe.

La seule différence consiste en ce que $f_2 (X - x_1\ Y - y_1\ Z - z_1)$ et $\varphi_2 (X - x_1\ Y - y_1\ Z - z_1) = o$ sont ici les images réfléchies de $f_2 (x_2\, y_2\, z_2)$ et de $\varphi_2 (x_2\, y_2\, z_2) = o$ en non plus ses figures elles-mêmes, comme pour les erreurs dans le plan [1]).

[1]) On a pour les erreurs linéaires et les erreurs dans l'espace des images réfléchies, pour les erreurs dans le plan au contraire la figure originale, cela vient de ce qu'on doit se figurer que ces images sont produites par une, deux et trois réflexions pour les erreurs sur une droite, dans le plan et dans l'espace. La réflexion sur deux miroirs donne la figure originale, tandis que la réflexion sur trois miroirs donne une figure constituée de la même manière que si elle avait été produite par une seule réflexion.

Digitized by Google

V. LA LOI LIMITE.

§ 37. Nous rechercherons dans ce chapitre ce que devient la loi de l'erreur résultante, lorsque le nombre des erreurs composantes devient très grand — la loi limite.

Ce problème a été résolu par plusieurs auteurs [1]) pour le cas des erreurs linéaires; il suit de leurs résolutions que la facilité de l'erreur résultante converge vers la forme:

$$F = \frac{1}{M\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2M^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

quelles que soient les facilités des erreurs composantes et quelles que soient leurs limites, pourvu que ces erreurs ne possèdent pas de parties constantes et qu'aucune d'entre elles ne possède une valeur moyenne qui soit de beaucoup plus grande que celle des autres.

Cette même expression représente naturellement aussi la facilité de la résultante d'un petit nombre d'erreurs, lorsque ces erreurs composantes suivent déjà la même loi.

En partant de cette expression, nous rechercherons ce que devient la loi de la résultante d'un grand nombre d'erreurs dans le plan et dans l'espace.

§ 38. Du paragraphe précédent il suit immédiatement que la résultante de deux erreurs sur la même droite qui suivent la loi (57) et dont les valeurs moyennes sont représentées par M′ et M″ aura pour facilité:

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2(M'^2+M''^2)}}}{\sqrt{2\pi(M'^2+M''^2)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

D'où il suit inversement qu'une erreur dont la facilité est exprimée par:

$$F = \frac{e^{-\frac{x^2}{2(M'^2+M''^2)}}}{\sqrt{2\pi(M'^2+M''^2)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

peut être considerée comme la résultante de deux erreurs indépendantes qui ont pour facilités:

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2M'^2}}}{M'\sqrt{2\pi}} \quad \text{et} \quad \frac{e^{-\frac{x^2}{2M''^2}}}{M''\sqrt{2\pi}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

§ 39. Pour avoir la loi limite des erreurs dans le plan et dans l'espace,

[1]) Voir entre autres: LAPLACE *Théorie analytique des probabilités*, Livre II. Chapitre IV et BESSEL *Theorie der Beobachtungsfehler*, Astr. Nachr. XV, N°. 358 et 359.

Digitized by Google

on pourrait chercher d'après le chapitre précédent la résultante d'un grand nombre d'erreurs. Il est à peine besoin de dire que ce calcul devient très long. Nous pouvons suivre une autre méthode, qui est aussi longue ou peut-être plus longue encore pour un petit nombre d'erreurs, mais qui donne immédiatement le résultat voulu pour le cas d'un grand nombre d'erreurs composantes.

Nous pouvons projeter d'abord suivant le paragraphe 16 toutes les erreurs sur une direction quelconque et composer ces projections suivant les paragraphes 30 à 32; il restera alors à chercher dans le plan ou dans l'espace une loi telle qu'elle donne pour la projection sur cette même direction, la même facilité.

§ 40. Considérons un grand nombre d'erreurs dans l'espace et supposons qu'elles ne possèdent pas de parties constantes, la résultante de leurs projections sur une droite quelconque suivra d'après le § 37 la loi (57), où **M** désigne la valeur moyenne de la projection de l'erreur résultante.

Prenons pour axes des coordonnées les axes principaux de l'erreur résultante, déterminés d'après les § 20, 26 et 27, et soient α, β et γ les angles de direction d'une droite quelconque; nous aurons alors d'après (26) § 19 pour la valeur moyenne de l'erreur en projection sur cette droite:

$$\sqrt{M^2_x \cos^2\alpha + M^2_y \cos^2\beta + M^2_z \cos^2\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

d'où il suit pour la facilité de l'erreur en projection:

$$\frac{e^{-\frac{X^2}{2(M^2_x \cos^2\alpha + M^2_y \cos^2\beta + M^2_z \cos^2\gamma)}}}{\sqrt{2\pi(M^2_x \cos^2\alpha + M^2_y \cos^2\beta + M^2_z \cos^2\gamma)}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

D'après le paragraphe 38 cette erreur peut être considérée comme la résultante de trois erreurs indépendantes qui ont pour valeurs moyennes:

$$M_x \cos\alpha, \qquad M_y \cos\beta \qquad \text{et} \qquad M_z \cos\gamma.$$

$M_x \cos\alpha$ représente la valeur moyenne de la projection d'une erreur, qui fait un angle α avec la droite considérée et qui a pour valeur moyenne M_x. Parmi les droites qui font un angle α avec la droite considérée, se trouve aussi l'axe des X. Donc l'erreur sur la droite qui fait avec les axes les angles α, β et γ et qui a pour valeur moyenne $M_x \cos\alpha$ peut-être considerée comme la projection sur cette droite d'une erreur suivant l'axe des X avec la valeur moyenne M_x.

Pour la même raison les deux autres erreurs peuvent être considerées comme des erreurs suivant les axes des Y et des Z avec les valeurs moyennes M_y et M_z.

La projection de l'erreur résultante sur une droite quelconque suit donc la même loi que la résultante des projections sur la même droite de trois erreurs indépendantes suivant les trois axes principaux avec les valeurs moyennes M_x, M_y et M_z, d'où suit immédiatement ce théorème:

Digitized by Google

La résultante d'un grand nombre d'erreurs suit la même loi que la résultante de ses trois projections sur les axes principaux, considerées comme indépendantes les unes des autres.

Il est à peine besoin de dire que ce théorème est sujet aux mêmes restrictions que nous avons mentionnées au paragraphe 37 pour la loi limite des erreurs linéaires.

§ 41. La probabilité que l'erreur en projection sur l'axe des X soit comprise entre X et $X + dX$ est exprimée d'après (57) § 37 par:

$$\frac{e^{-\frac{X^2}{2M_x^2}}}{M_x\sqrt{2\pi}}\,dX$$

de même les probabilités que les erreurs en projection sur les axes des Y et des Z soient comprises entre Y et $Y + dY$ et entre Z et $Z + dZ$ sont exprimées par:

$$\frac{e^{-\frac{Y^2}{2M_y^2}}}{M_y\sqrt{2\pi}}\,dY \qquad \text{et} \qquad \frac{e^{-\frac{Z^2}{2M_z^2}}}{M_z\sqrt{2\pi}}\,dZ$$

d'où il suit pour la probabilité de leur résultante entre X Y Z et $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$ et d'après le paragraphe précédent aussi pour la limite de la probabilité de la résultante d'un grand nombre d'erreurs:

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X^2}{M_x^2}+\frac{Y^2}{M_y^2}+\frac{Z^2}{M_z^2}\right)}}{M_x\sqrt{2\pi}\,M_y\sqrt{2\pi}\,M_z\sqrt{2\pi}}\,dX\,dY\,dZ,$$

et par suite pour la facilité de l'erreur dans la loi limite:

$$F = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X^2}{M_x^2}+\frac{Y^2}{M_y^2}+\frac{Z^2}{M_z^2}\right)}}{M_x\sqrt{2\pi}\,M_y\sqrt{2\pi}\,M_z\sqrt{2\pi}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (63)$$

Pour les erreurs dans le plan nous trouvons d'une manière analogue pour la limite de la facilité de l'erreur X Y:

$$F = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X^2}{M_x^2}+\frac{Y^2}{M_y^2}\right)}}{2\pi\,M_x\,M_y} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (64)$$

§ 42. Lorsque les erreurs composantes contiennent aussi des parties constantes, on peut décomposer d'abord ces erreurs d'après le § 24 en leurs parties constantes et leurs parties fortuites. On cherchera alors séparément les résultantes des parties constantes d'après le paragraphe 25 et des parties fortuites d'après le paragraphe précédent pour réunir ensuite ces deux résultantes en une seule d'après le paragraphe 24.

Digitized by Google

De cette manière on trouve immédiatement pour les facilités des résultantes sur la droite, dans le plan et dans l'espace:

$$F = \frac{e^{-\frac{(X-N)^2}{2(M^2-N^2)}}}{\sqrt{2\pi(M^2-N^2)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (65)$$

$$F = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(X-N_x)^2}{M^2_x-N^2_x}+\frac{(Y-N_y)^2}{M^2_y-N^2_y}\right)}}{\sqrt{2\pi(M^2_x-N^2_x)}\,\sqrt{2\pi(M^2_y-N^2_y)}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

$$F = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(X-N_x)^2}{M^2_x-N^2_x}+\frac{(Y-N_y)^2}{M^2_y-N^2_y}+\frac{(Z-N_z)^2}{M^2_z-N^2_z}\right)}}{\sqrt{2\pi(M^2_x-N^2_x)}\,\sqrt{2\pi(M^2_y-N^2_y)}\,\sqrt{2\pi(M^2_z-N^2_z)}} \quad \ldots\ldots \quad (67)$$

Pour les deux dernières formules on a pris comme axes des coordonnées les droites passant par l'origine des erreurs et parallèles aux axes principaux au centre de gravité.

§ 43. Gauss est arrivé d'une manière tout-à-fait différente à la loi exponentielle pour les erreurs linéaires; il prend comme point de départ que la moyenne arithmétique des valeurs trouvées pour une quantité observée plusieurs fois est la valeur la plus probable de cette quantité. En généralisant, nous pouvons dire que le lieu le plus probable d'un point cherché est le centre de gravité des différents points trouvés dans les différentes déterminations de ce point. En partant de ce principe, nous chercherons d'après une analyse analogue à celle de Gauss la loi des erreurs dans le plan et dans l'espace.

De ce principe il suit immédiatement que le produit continu $F(X_1\,Y_1\,Z_1)$, $F(X_2\,Y_2\,Z_2)$ etc. ou ce qui revient au même, que la somme $\Sigma \log F$ doit être un maximum pour:

$$\Sigma X = o \qquad \Sigma Y = o \qquad \Sigma Z = o \quad \ldots\ldots\ldots \quad (68)$$

Ce maximum est exprimé par les équations:

$$\Sigma D_x \log F = o \qquad \Sigma D_y \log F = o \quad \text{et} \quad \Sigma D_z \log F = o \quad \ldots\ldots \quad (69)$$

or, ces dernières équations sont incompatibles avec les équations (68), à moins que $D_x \log F$, $D_y \log F$ et $D_z \log F$ ne soient des fonctions linéaires de X, Y et Z sans termes constantes; on a donc:

$$\left.\begin{aligned} D_x \log F &= A\,X + C_1\,Y + B_2\,Z \\ D_y \log F &= B\,Y + A_1\,Z + C_2\,X \\ D_z \log F &= C\,Z + B_1\,X + A_2\,Y \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (70)$$

D'après un théorème bien connu d'analyse, on a dans ces équations $A_1 = A_2$ $B_1 = B_2$, $C_1 = C_2$, de sorte que les constantes sont au nombre de six.

Des équations (70) on tire pour la différentielle totale de $\log F$:

Digitized by Google

$$d \log F = (A X + C_1 Y + B_1 Z)\, d X + (B Y + A_1 Z + C_1 X)\, d Y + (C Z + B_1 X + A_1 Y)\, d Z$$

ce qui donne en intégrant:

$$\log \frac{F}{D} = \tfrac{1}{2} A X^2 + \tfrac{1}{2} B Y^2 + \tfrac{1}{2} C Z^2 + A_1 Y Z + B_1 Z X + C_1 X Y$$

où D est la constante d'intégration. En résolvant on a enfin pour F:

$$F = D\, e^{\frac{1}{2}(A X^2 + B Y^2 + C Z^2 + 2 A_1 Y Z + 2 B_1 Z X + 2 C_1 X Y)} \quad \ldots\ldots \quad (71)$$

§ 44. En faisant tourner les axes des coordonnées autour de l'origine, on peut toujours trouver un système d'axes, de manière que les termes en YZ, ZX et XY disparaissent de l'exposant de e; par cela l'existence des axes principaux est demontrée.

§ 45. En prenant les axes principaux comme axes des coordonnées, l'expression pour F devient:

$$F = D\, e^{\frac{1}{2}(A X^2 + B Y^2 + C Z^2)}.$$

Comme la somme $\Sigma \log F$ doit être un maximum, les quantités A, B et C doivent être négatives, nous les remplacerons donc par $-A^2$, $-B^2$ et $-C^2$, de sorte que F devient:

$$F = D\, e^{-\frac{1}{2}(A^2 X^2 + B^2 Y^2 + C^2 Z^2)}.$$

§ 46. Pour déterminer les constantes A, B, C et D, nous appliquons d'abord la formule (4) § 6 et nous trouvons:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} D\, e^{-\frac{1}{2}(A^2 X^2 + B^2 Y^2 + C^2 Z^2)}\, d X\, d Y\, d Z =$$

$$= D \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} A^2 X^2} d X \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} B^2 Y^2} d Y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} C^2 Z^2} d Z =$$

$$= D \cdot \frac{\sqrt{2}}{A} \cdot \frac{\sqrt{2}}{B} \cdot \frac{\sqrt{2}}{C} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} A^2 X^2} d \frac{A X}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} B^2 Y^2} d \frac{B Y}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} C^2 Z^2} d \frac{C Z}{\sqrt{2}} = \frac{D (\sqrt{2\pi})^3}{A B C}$$

d'où il suit:

$$D = \frac{A \cdot B \cdot C}{(\sqrt{2\pi})^3}$$

de sorte que F devient:

$$F = \frac{A \cdot B \cdot C}{(\sqrt{2\pi})^3}\, e^{-\frac{1}{2}(A^2 X^2 + B^2 Y^2 + C^2 Z^2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (73)$$

§ 46. Afin de déterminer les valeurs de A, B et C, nous chercherons les va-

Digitized by Google

leurs moyennes des projections des erreurs sur les axes principaux; nous trouvons de la sorte:

$$M_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} X^2 F\,dX\,dY\,dZ = \frac{ABC}{(\sqrt{2\pi})^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} X^2 e^{-\frac{1}{2}(A^2X^2+B^2Y^2+C^2Z^2)}\,dX\,dY\,dZ =$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} X^2 e^{-\frac{1}{2}A^2X^2}\,dX \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{1}{2}B^2Y^2}}{\sqrt{\pi}}\,d\frac{BY}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{1}{2}C^2Z^2}}{\sqrt{\pi}}\,d\frac{CZ}{\sqrt{2}} = \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} X^2 e^{-\frac{1}{2}A^2X^2}\,dX =$$

$$= \frac{2}{A^2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A^2X^2}{2} e^{-\frac{1}{2}A^2X^2}\,d\frac{AX}{\sqrt{2}} = \frac{2}{A^2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\,dt = \frac{-1\cdot}{A^2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t\,d\,e^{-t^2} = \frac{1}{A^2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{A^2}$$

d'où il suit que A est égale à $\frac{1}{M_x}$; d'une manière analogue on trouve pour B et C les valeurs $\frac{1}{M_y}$ et $\frac{1}{M_z}$, de sorte qu'on trouve enfin pour la facilité F:

$$F = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X^2}{M_x^2}+\frac{Y^2}{M_y^2}+\frac{Z^2}{M_z^2}\right)}}{M_x\sqrt{2\pi}\,M_y\sqrt{2\pi}\,M_z\sqrt{2\pi}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (74)$$

ce qui est la même expression pour F trouvée dans le § 41 (form. 63).

En opérant de la même manière pour les erreurs dans le plan, on retrouve pour F la formule (64).

VI. DISCUSSION DES LOIS LIMITES.

VI^a. LA LOI LIMITE POUR LES ERREURS LINÉAIRES.

$$F = \frac{e^{-\frac{X^2}{2M^2}}}{M\sqrt{2\pi}}.$$

§ 48. Dans ce chapitre nous rechercherons les propriétés des erreurs qui résultent des expressions trouvées pour la facilité dans le cas d'un grand nombre d'erreurs composantes. Dans cette recherche nous laisserons de côté la partie constante de l'erreur pour nous occuper seulement de la partie fortuite.

Pour les erreurs linéaires il suffira de rappeler les propriétés suivantes, afin de pouvoir les comparer avec celles des erreurs dans le plan et dans l'espace.

Digitized by Google

D'après la form. (3) § 5 nous trouvons pour la facilité de l'erreur indépendante de la direction:

$$F' = \frac{2}{M\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{X^2}{2M^2}}$$

ou, en posant $X = \lambda M$ et en prenant l'erreur moyenne comme unité:

$$F' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (75)$$

La table III donne dans la colonne 2 les valeurs de cette facilité pour différentes valeurs de λ et la seconde figure de la planche en donne dans la ligne A une représentation graphique. Comme on voit, la facilité indépendant de l'erreur a un maximum pour $\lambda = 0$.

La probabilité μ que l'erreur ne surpasse pas la valeur λM est représentée d'après form. (10) § 8 par:

$$\mu = \int_0^\lambda F' \, d\lambda = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\lambda e^{-\frac{1}{2}\lambda^2} \, d\lambda \quad \ldots \ldots \ldots \quad (76)$$

La table I donne dans la colonne 4 les valeurs de λ de cette expression pour différentes valeurs de μ et la table II dans la colonne 4 les valeurs de μ pour différentes valeurs de λ; la première figure de la planche donne dans la ligne B une représentation graphique de cette équation.

Pour $\mu = \frac{1}{2}$ on trouve $\lambda = r = 0{,}67449$ (voir le § 15), de sorte que l'erreur probable est égale à:

$$R = r M = 0{,}67449\, M \quad \ldots \ldots \ldots \quad (77)$$

VI^b. LA LOI LIMITE DANS LE PLAN.

$$F = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X^2}{M^2_x} + \frac{Y^2}{M^2_y}\right)}}{2\pi M_x M_y}.$$

§ 49. La propriété principale de ces erreurs, c'est celle dont nous avons déjà fait usage pour trouver l'expression de la fonction F, c'est-à-dire: que l'erreur peut être considérée comme la résultante de deux erreurs suivant les axes principaux de probabilité, qui sont indépendantes l'une de l'autre, et qui suivent la même loi que les projections des erreurs sur ces axes.

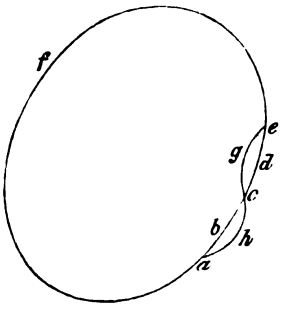
§ 50. En égalant à une constante la facilité de l'erreur, on trouve immédiatement:

$$\frac{X^2}{M^2_x} + \frac{Y^2}{M^2_y} = \text{const.} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (78)$$

Digitized by Google

ce qui veut dire que les erreurs situées sur une ellipse, dont les axes principaux sont parallèles aux axes principaux de probabilité et proportionnelles aux valeurs moyennes des projections des erreurs sur ces axes, ont la même facilité [1]).

Fig. 6.



Ces ellipses forment en même temps les courbes qui dans une aire donnée comprennent le plus grand nombre d'erreurs. Car $a\,b\,c\,d\,e\,f$ (Fig. 6) étant une de ces ellipses, si nous la remplaçons par la courbe $a\,h\,c\,g\,e\,f$ qui a la même aire, la probabilité que l'erreur tombe à l'intérieur de la courbe devient plus petite, parce que la facilité pour la partie $a\,b\,c\,h$ est plus petite que celle pour $g\,c\,d\,e$.

§ 51. Introduisons des coordonnées polaires, posons pour cela $X = \varrho \cos \varphi$ et $Y = \varrho \sin \varphi$, l'expression pour la facilité F devient alors:

$$F = \frac{e^{-\frac{1}{2}\rho^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{M^2_x} + \frac{\sin^2\varphi}{M^2_y}\right)}}{2\pi M_x M_y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (79)$$

La probabilité que l'erreur aura une certaine direction φ, c'est-à-dire qu'elle est comprise entre les directions φ et $\varphi + d\varphi$, sera exprimée alors par:

$$\int_0^\infty F\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}\rho^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{M^2_x} + \frac{\sin^2\varphi}{M^2_y}\right)}}{2\pi M_x M_y}\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi = \frac{d\varphi}{2\pi M_x M_y\left(\frac{\cos^2\varphi}{M^2_x} + \frac{\sin^2\varphi}{M^2_y}\right)} \quad \ldots \quad (80)$$

d'où il suit pour la *facilité* F_φ *de la direction* φ:

$$F_\varphi = \frac{1}{2\pi M_x M_y\left(\frac{\cos^2\varphi}{M^2_x} + \frac{\sin^2\varphi}{M^2_y}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (81)$$

pour laquelle nous pouvons écrire d'après form. (27):

---

[1]) Après avoir écrit ce mémoire, j'ai pris connaissance de l'ouvrage de M. HELMERT: *Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Leipzig* 1872. L'auteur développe dans cet ouvrage la loi exponentielle des erreurs dans le plan en partant de la théorie des moindres carrés et fixe surtout l'attention sur la relation entre les équations finales auxquelles conduit cette théorie et les axes conjugués de l'ellipse des erreurs (c'est l'ellipse qui a pour demi-axes les valeurs M_x et M_y).

De l'expression pour la facilité de l'erreur dans le plan dans la loi limite en rapport avec l'équation de l'ellipse sur des axes conjugués, on voit que dans la loi limite les erreurs dans le plan peuvent être considérées comme la résultante de deux erreurs indépendantes suivant des axes conjugués.

La figure que nous avons désignée dans le § 58 par le nom *d'ellipse probable* porte ici le nom *d'ellipse la plus probable* (voir HELMERT p. 236). Le nom ellipse probable n'exprime pas bien le sens qu'il faut y attacher; nous l'avons choisi en concordance avec l'expression erreur probable consacrée par l'usage. Le nom ellipse la plus probable exprime encore moins ce sens.

Digitized by Google

$$F_\varphi = \frac{M_x M_y}{2\pi (M^2_y \cos^2\varphi + M^2_x \sin^2\varphi)} = \frac{M_x M_y}{2\pi M^2_{90-\varphi}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (81')$$

L'équation (81) exprime que la probabilité d'une direction donnée est proportionelle au carré du rayon vecteur de l'ellipse décrite sur M_x et M_y comme demi-axes, propriété qu'on peut déduire aussi immédiatement de la figure.

L'équation (81') exprime que cette même probabilité est inversement proportionelle au carré de la valeur moyenne de la projection des erreurs sur une droite perpendiculaire à la direction considérée.

Des deux équations il suit que la direction la plus probable et la direction la moins probable coïncident avec les axes principaux.

§ 52. Pour la facilité de l'erreur indépendante de la direction, nous trouvons d'après la form. (2) § 5:

$$F' = \int_0^{2\pi} \varrho F d\varphi = \frac{\varrho}{2\pi M_x M_y} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\rho^2 \left(\frac{\cos^2\varphi}{M^2_x} + \frac{\sin^2\varphi}{M^2_y}\right)} d\varphi \quad \ldots\ldots \quad (82)$$

Comme la valeur de l'erreur apparaît ici comme facteur, la probabilité d'une erreur *zéro* n'est pas un maximum, mais un minimum [1]).

En posant $\frac{M^2_x - M^2_y}{M^2_x + M^2_y} = N$ et $\frac{\varrho}{M} = \lambda$ et en prenant comme unité la valeur moyenne $M = \sqrt{M^2_x + M^2_y}$, l'expression précédente devient:

$$F' = \frac{\lambda}{\pi\sqrt{1-N^2}} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{\lambda^2}{1-N^2}(1 - N^2\cos 2\varphi)} d\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (83)$$

c'est une expression qui ne peut être intégrée qu'après développement en série.

§ 53. La probabilité μ que l'erreur est plus petite que λM est exprimée suivant form. (10) § 8 par:

$$\mu = \int_0^{\lambda M} F' d\varrho = \int_0^{\lambda} F' d\lambda = \frac{1}{\pi\sqrt{1-N^2}} \int_0^{\lambda} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{\lambda^2}{1-N^2}(1 - N\cos 2\varphi)} \lambda\, d\lambda\, d\varphi =$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{1-N^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{1-N^2}(1 - N\cos 2\varphi)}}{1 - N\cos 2\varphi} d\varphi \quad \ldots \quad (84)$$

ce qui est aussi une expression n'étant calculable que par un développement en serie.

---

[1]) Cette probabilité de l'erreur zéro (indépendante de la direction) doit être distinguée de la densité à l'origine du solide de probabilité ou de la facilité F pour $X = o$ et $Y = o$, qui est un maximum.

Digitized by Google

§ 54. Afin de trouver l'erreur probable, il faut chercher la valeur r de λ pour $\mu = \frac{1}{2}$ (§ 15), c'est donc la racine de l'équation:

$$\frac{\sqrt{1-N^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-r^2 \frac{1-N\cos 2\varphi}{1-N^2}}}{1-N\cos 2\varphi} d\varphi = \tfrac{1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (85)$$

La valeur de r est donc une fonction de N. Pour $N = \pm 1$, M_x ou M_y devient égal à zéro, c'est-à-dire les erreurs sont situées sur une droite; pour ce cas on a $r = 0{,}67449$. Pour $N = o$ on a $M_x = M_y = \frac{M}{\sqrt{2}}$; toutes les directions ont alors la même facilité et l'équation (85) devient:

$$\frac{1}{2\pi} e^{-r^2} 2\pi = \tfrac{1}{2}$$

d'où il suit:

$$r = \sqrt{\log \text{nat } 2} = 0{,}83256.$$

Ce sont les deux valeurs extrêmes de r. Pour d'autres valeurs de N, on trouve pour r les valeurs suivantes [1]):

N	r	N	r	N	r
0,0	0,8326	0,4	0,8098	0,8	0,7289
0,1	0,8312	0,5	0,7962	0,9	0,6989
0,2	0,8271	0,6	0,7785	1,0	0,6745
0,3	0,8200	0,7	0,7562		

§ 55. Comme l'on voit dans les paragraphes précédents, la division des erreurs par anneaux circulaires donne des expressions compliquées tant pour μ que pour F', qui ne peuvent être calculées que par des séries et qui dépendent du rapport des valeurs de M_x et M_y.

Les erreurs peuvent être partagées aussi par anneaux elliptiques dont les axes sont proportionelles à M_x et M_y et qui coïncident avec les axes principaux de probabilité. Cette manière de considérer les erreurs, qui donne des expressions plus

---

[1]) Ces valeurs ont été trouvées en développant la form. (85) en série et en calculant les valeurs de r par approximations successives.

Pour des valeurs de N plus petites que 0,9, la formule empirique suivante donne la valeur de r jusqu'à 1% près:

$$r = 0{,}8326 - 0{,}1581\, N^2.$$

Pour des valeurs de N plus petites que 0,5 la formule:

$$r = 0{,}8326 - 0{,}14\, N^2 - 0{,}018\, N^4$$

donne cette valeur jusqu'à 0,3‰ près. Ces formules peuvent dans la pratique remplacer la form. (85).

Digitized by Google

simples, tout-à-fait indépendantes du rapport des valeurs de M_x et M_y, s'accorde mieux avec les propriétés des erreurs, parce qu'elle rassemble les erreurs qui ont la même facilité de se produire.

§ 56. En représentant les demi-axes de ces ellipses par $\lambda M_x \sqrt{2}$ et $\lambda M_y \sqrt{2}$, l'aire d'une des ellipses est exprimée par $2\pi\lambda^2 M_x M_y$ et par suite l'aire d'un des anneaux elliptiques par $4\pi\lambda M_x M_y d\lambda$.

Comme l'équation de l'ellipse est:

$$\frac{X^2}{2\lambda^2 M^2_x} + \frac{Y^2}{2\lambda^2 M^2_y} = 1$$

on a:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{X^2}{M^2_x} + \frac{Y^2}{M^2_y}\right) = \lambda^2$$

et par suite la facilité F devient:

$$F = \frac{e^{-\lambda^2}}{2\pi M_x M_y}.$$

La probabilité que l'erreur tombe dans l'anneau elliptique sera donc exprimée par:

$$F \cdot 4\pi\lambda M_x M_y d\lambda = 2\lambda e^{-\lambda^2} d\lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (86)$$

En divisant cette expression par $d\lambda$, on trouve pour la *facilité* F″ *de l'erreur dans l'anneau elliptique*:

$$F'' = 2\lambda e^{-\lambda^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (87)$$

Le tableau III donne dans la colonne 3 la valeur de F″ pour différentes valeurs de λ et la seconde figure de la planche donne dans la ligne B une représentation graphique de la formule (87).

§ 57. La probabilité que l'erreur tombe à l'intérieur de l'ellipse qui a pour demi-axes $M_x \lambda \sqrt{2}$ et $M_y \lambda \sqrt{2}$ est exprimée par:

$$\mu = \int_0^\lambda F'' d\lambda = \int_0^\lambda 2\lambda e^{-\lambda^2} d\lambda = 1 - e^{-\lambda^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (88)$$

Le tableau I donne dans la colonne 6 la valeur de λ pour différentes valeurs de μ et le tableau II dans la colonne 6 la valeur de μ pour différentes valeurs de λ, enfin la ligne C de la première figure de la planche donne une représentation graphique de la formule (88).

§ 58. En concordance avec l'expression „erreur probable" nous désignerons par le nom *d'ellipse probable*, l'ellipse dont les axes sont proportionelles à M_x et M_y et pour laquelle il y a autant de probabilité que l'erreur tombe en dehors de cette

Digitized by Google

ellipse qu'à l'intérieur de celle-ci. On obtient les demi-axes de cette ellipse en posant $\mu = \frac{1}{2}$ dans la form. (88), d'où il suit:

$$\lambda = \sqrt{\log \text{nat } 2} = 0{,}832555,$$

les demi-axes de l'ellipse probable sont donc:

$$\left.\begin{aligned} 0{,}832555\ \sqrt{2}\ \mathrm{M}_x &= 1{,}17741\ \mathrm{M}_x \\ 0{,}832555\ \sqrt{2}\ \mathrm{M}_y &= 1{,}17741\ \mathrm{M}_y \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (89)$$

§ 59. Considérons enfin le cas particulier où toutes les directions sont également probables, c'est-à-dire qu'on a $\mathrm{M}_x = \mathrm{M}_y = \frac{\mathrm{M}}{\sqrt{2}}$ et $\mathrm{N} = o$; les ellipses deviennent alors des cercles construits avec le rayon $\lambda\,\mathrm{M}$, d'où il suit:

$$\mathrm{F}' = \mathrm{F}'' = 2\,\lambda\,e^{-\lambda^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (90)$$

$$\mu = 1 - e^{-\lambda^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (91)$$

Les colonnes des tableaux et les lignes sur la planche qui représentent les formules (87) et (88), représentent en même temps les formules (90) et (91). Il en suit entre autre, ce que nous avons déjà vu en général, que pour l'erreur zéro la probabilité est un minimum. Pour $\varrho = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{M} = 0{,}7071068\ \mathrm{M}$, la facilité de l'erreur indépendante de la direction devient un maximum et cette valeur maximum est égale à $\mathrm{F}' = 0{,}857764$.

VI^c. LA LOI LIMITE DANS L'ESPACE.

$$\mathrm{F} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{X}^2}{\mathrm{M}^2_x} + \frac{\mathrm{Y}^2}{\mathrm{M}^2_y} + \frac{\mathrm{Z}^2}{\mathrm{M}^2_z}\right)}}{\mathrm{M}_x\sqrt{2\pi}\,\mathrm{M}_y\sqrt{2\pi}\,\mathrm{M}_z\sqrt{2\pi}}.$$

§ 60. La propriété principale de ces erreurs est analogue à celle des erreurs dans le plan, c'est-à-dire qu'on peut considérer l'erreur comme la résultante de trois erreurs indépendantes suivant les axes principaux de probabilité et qui suivent la même loi que les projections des erreurs sur ces axes.

§ 61. En égalant à une constante la facilité de l'erreur, nous obtenons:

$$\frac{\mathrm{X}^2}{\mathrm{M}^2_x} + \frac{\mathrm{Y}^2}{\mathrm{M}^2_y} + \frac{\mathrm{Z}^2}{\mathrm{M}^2_z} = \text{const} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (92)$$

c'est-à-dire: les erreurs situées sur la surface d'un ellipsoïde dont les axes sont parallèles aux axes principaux de probabilité et qui sont proportionelles aux valeurs moyennes des erreurs en projection sur ces axes, sont également probables.

D'une manière analogue à celle employée au § 50, nous pouvons démontrer

Digitized by Google

que ces ellipsoïdes sont en même temps les surfaces qui contiennent dans le même volume le plus grand nombre d'erreurs.

§ 62. Introduisons les angles de direction α, β et γ, posons pour cela $X = \varrho \cos\alpha$, $Y = \varrho \cos\beta$ et $Z = \varrho \cos\gamma$, la facilité de l'erreur devient alors:

$$F = \frac{e^{-\frac{1}{2}\rho^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{M^2_x} + \frac{\cos^2\beta}{M^2_y} + \frac{\cos^2\gamma}{M^2_z}\right)}}{M_x\sqrt{2\pi}\, M_y\sqrt{2\pi}\, M_z\sqrt{2\pi}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (93)$$

d'où il suit pour la probabilité d'une direction $\alpha\beta\gamma$ c'est-à-dire pour la probabilité que l'erreur est comprise dans un cône avec l'ouverture infiniment petite $d0$, dont l'axe a la direction $\alpha\beta\gamma$:

$$\int_0^\infty F\varrho^2\, d\varrho\, d0 = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\rho^2}{2}\left(\frac{\cos^2\alpha}{M^2_x} + \frac{\cos^2\beta}{M^2_y} + \frac{\cos^2\gamma}{M^2_z}\right)}}{M_x M_y M_z (\sqrt{2\pi})^3}\varrho^2\, d\varrho\, d0 =$$

$$= \frac{d0}{M_x M_y M_z (\sqrt{2\pi})^3} \frac{2\sqrt{2}\int_0^\infty t^2 e^{-t^2} dt}{\left(\frac{\cos^2\alpha}{M^2_x} + \frac{\cos^2\beta}{M^2_y} + \frac{\cos^2\gamma}{M^2_z}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d0}{4\pi M_x M_y M_z \left(\frac{\cos^2\alpha}{M^2_x} + \frac{\cos^2\beta}{M^2_y} + \frac{\cos^2\gamma}{M^2_z}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (94)$$

En divisant cette expression par $d0$, on trouve pour la *facilité* $F_{\alpha\beta\gamma}$ *de la direction* $\alpha\beta\gamma$:

$$F_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{4\pi M_x M_y M_z \left(\frac{\cos^2\alpha}{M^2_x} + \frac{\cos^2\beta}{M^2_y} + \frac{\cos^2\gamma}{M^2_z}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (95)$$

c'est-à-dire la facilité d'une direction déterminée est proportionelle à la 3e puissance du rayon vecteur de l'ellipsoïde qui a pour axes $M_x M_y M_z$ parallèles aux axes principaux de probabilité, d'où il suit encore que les directions les plus et les moins probables, coïncident avec les axes principaux de probabilité.

§ 63. Pour la facilité F′ indépendante de la direction nous trouvons d'après la form. (1) § 5:

$$F' = \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \varrho^2 F \cos\theta\, d\varphi\, d\theta = \frac{\varrho^2}{(\sqrt{2\pi})^3 M_x M_y M_z}\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} e^{-\frac{1}{2}\rho^2\left(\frac{\cos^2\theta\cos^2\varphi}{M^2_x} + \frac{\cos^2\theta\sin^2\varphi}{M^2_y} + \frac{\sin^2\theta}{M^2_z}\right)}\cos\theta\, d\varphi\, d\theta. \quad (96)$$

expression qui ne peut être intégrée qu'après réduction en série.

Puisque F′ contient ϱ^2 comme facteur la probabilité d'une erreur zéro, est un minimum [1]).

---

[1]) Voir la note du § 52.

Digitized by Google

§ 64. Pour la probabilité μ que l'erreur n'excède pas la valeur de λM, on trouve d'après (10) § 8:

$$\mu = \int_0^{\lambda M} F' d\varrho = \int_0^{\lambda M} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{e^{-\frac{1}{2}\rho^2 \left(\frac{\cos^2\theta\cos^2\varphi}{M^2_x} + \frac{\cos^2\theta\sin^2\varphi}{M^2_y} + \frac{\sin^2\theta}{M^2_z}\right)}}{(\sqrt{2\pi})^3 M_x M_y M_z} \varrho^2 \cos\theta \, d\varrho \, d\varphi \, d\theta. \quad (97)$$

expression qui n'est intégrable qu'après développement en série.

§ 65. L'erreur probable $R = r M$, est obtenue en posant dans la formule précédente $\mu = \frac{1}{2}$.

En différentiant cette formule par rapport à M_x, M_y et M_z, on voit que la valeur minimum et la valeur maximum se présentent lorsque deux de ces quantités sont égales à *zéro*, et lorsque toutes les trois sont égales entre elles.

Dans le premier cas les erreurs sont situées sur une droite et l'on a:

$$r = 0{,}67449. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (98)$$

dans le second cas la form. (97) devient:

$$\frac{1}{2} = \int_0^{R} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \frac{e^{-\frac{3}{2}\frac{\rho^2}{M^2}}}{M^3\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{\frac{3}{2}}} \varrho^2 \cos\theta \, d\varrho \, d\varphi \, d\theta = \frac{4\pi}{(\sqrt{\pi})^3} \int_0^{r} \tfrac{3}{2} r^2 e^{-\frac{3}{2}r^2} dr \sqrt{\tfrac{3}{2}} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{r\sqrt{\frac{3}{2}}} t^2 e^{-t^2} dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{r\sqrt{\frac{3}{2}}} e^{-t^2} dt - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}} r e^{-\frac{3}{2}r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (99)$$

d'où l'on tire:

$$r = 0{,}88807 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (100)$$

La valeur de R est donc comprise entre 0,67449 M et 0,88807 M.

§ 66. Partageons à présent les erreurs par des ellipsoïdes dont les demi-axes sont $\lambda M_x \sqrt{3}$, $\lambda M_y \sqrt{3}$ et $\lambda M_z \sqrt{3}$.

Le volume d'un tel ellipsoïde est:

$$\tfrac{4}{3}\pi \lambda M_x \sqrt{3} \, \lambda M_y \sqrt{3} \, \lambda M_z \sqrt{3} = 4\pi \sqrt{3} \, \lambda^3 M_x M_y M_z$$

d'où il suit pour le volume compris entre deux ellipsoïdes infiniment voisins:

$$12\pi \sqrt{3} \, \lambda^2 M_x M_y M_z \, d\lambda.$$

L'équation de l'ellipsoïde étant:

$$\frac{X^2}{3\lambda^2 M^2_x} + \frac{Y^2}{3\lambda^2 M^2_y} + \frac{Z^2}{3\lambda^2 M^2_z} = 1,$$

Digitized by Google

ou:

$$\frac{X^2}{M^2_x}+\frac{Y^2}{M^2_y}+\frac{Z^2}{M^2_z}=3\lambda^2$$

la facilité F pour un point de l'ellipsoïde devient:

$$F=\frac{e^{-\frac{3}{2}\lambda^2}}{(\sqrt{2\pi})^3 M_x M_y M_z}.$$

La probabilité que l'erreur est comprise entre deux ellipsoïdes infiniment voisins sera donc:

$$12\pi\sqrt{3}\,F\lambda^2 M_x M_y M_z\,d\lambda=3\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}}\lambda^2 e^{-\frac{3}{2}\lambda^2}d\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (101)$$

d'où il suit pour *la facilité* F″ *dans les couches ellipsoïdales*:

$$F''=3\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}}\lambda^2 e^{-\frac{3}{2}\lambda^2}=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{3}{2}\lambda^2\right)e^{-\frac{3}{2}\lambda^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (102)$$

La valeur de cette expression est donnée dans la colonne 4 du tableau III pour différentes valeurs de λ et la seconde figure de la planche en donne une représentation graphique dans la ligne C.

§ 67. La probabilité μ que l'erreur est située à l'intérieur d'un ellipsoïde donné sera exprimée par la formule:

$$\mu=\int_0^\lambda F''\,d\lambda=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\lambda\frac{3}{2}\lambda^2 e^{-\frac{3}{2}\lambda^2}d\lambda=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\lambda\sqrt{\frac{3}{2}}}t^2 e^{-t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\lambda\sqrt{\frac{3}{2}}}e^{-t^2}dt-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}}\lambda e^{-\frac{3}{2}\lambda^2}. \quad (103)$$

Dans les colonnes 8 des tableaux I et II on trouve les valeurs de cette expression et dans la ligne D de la première figure de la planche une représentation graphique.

§ 68. L'ellipsoïde probable, c'est-à-dire l'ellipsoïde pour lequel il y a égale probabilité, pour que l'erreur tombe à l'intérieur ou à l'extérieur, est obtenu en mettant dans (103) $\mu=\frac{1}{2}$, d'où il suit $\lambda=0{,}88807$.

Les demi-axes de cet ellipsoïde sont donc:

$$\left.\begin{aligned}0{,}88807\sqrt{3}\,M_x&=1{,}53818\,M_x\\0{,}88807\sqrt{3}\,M_y&=1{,}53818\,M_y\\0{,}88807\sqrt{3}\,M_z&=1{,}53818\,M_z\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

§ 69. Pour les erreurs qui sont également probables dans toutes les directions, c'est-à-dire lorsqu'on a $M_x=M_y=M_z=\frac{M}{\sqrt{3}}$, les ellipsoïdes deviennent des sphères avec le rayon λM et nous obtenons:

Digitized by Google

$$F = \frac{e^{-\frac{3}{2}\lambda^2}}{\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{\frac{3}{2}} M^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 105)$$

$$F' = F'' = 3\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}}\lambda^2 e^{-\frac{3}{2}\lambda^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (106)$$

$$\mu = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\lambda\sqrt{\frac{3}{2}}} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\lambda\sqrt{\frac{3}{2}}} e^{-t^2} dt - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}}\lambda e^{-\frac{3}{2}\lambda^2} \quad \ldots\ldots \quad (107)$$

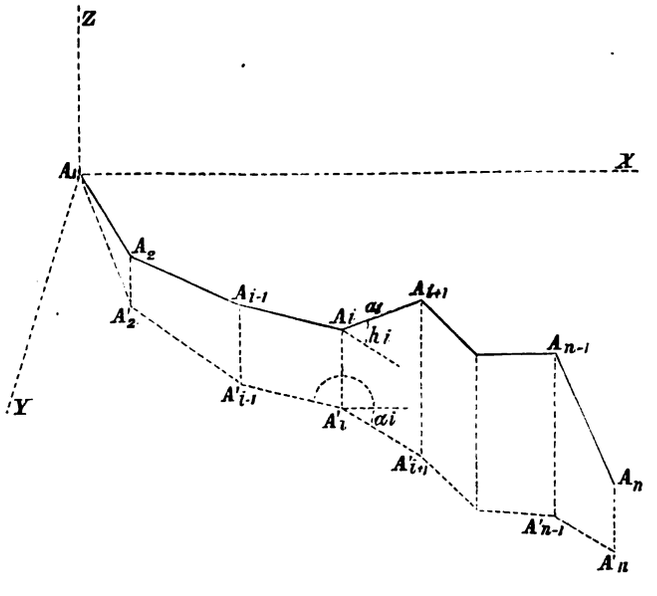
Pour les deux dernières formules les valeurs sont données dans les tableaux I, II et III et les représentations graphiques dans la ligne D de la première et la ligne C de la seconde figure de la planche.

On y voit que la probabilité d'une erreur *zéro* est un minimum, et que l'erreur qui a la plus grande probabilité est égale à $M\sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}8164966\ M$.

VII. APPLICATIONS.

§ 70. Comme application nous prendrons d'abord le relèvement d'un polygone gauche par la méthode de cheminement, et nous déterminerons l'erreur moyenne dans la situation d'un point quelconque.

Fig. 7.



Prenons comme axes des coordonnées X et Y (Fig. 7), deux axes horizontaux passant par l'origine du cheminement et comme axe des Z, la verticale.

Soit $A_1\ A_2\ A_3 \ldots A_i \ldots A_{n-1}\ A_n$ une partie du polygone oblique, $A'_1\ A'_2\ A'_3 \ldots A'_i \ldots A'_{n-1}\ A'_n$ sa projection sur le plan X Y; $X_i\ Y_i\ Z_i$ les coordonnées d'un point quelconque A_i. Supposons que dans chaque point A_i on ait déterminé l'angle horizontal $A'_{i-1}\ A'_i\ A'_{i+1} = A_i$, l'élévation h_i de la ligne $A_i A_{i+1}$ et la distance inclinée $A_i A_{i+1} = a_i$.

Nous commencerons par déterminer l'influence qu'ont les erreurs: ϱ_{hi}, ϱ_{ai} et

Digitized by Google

ϱ_{Ai} commises dans la mesure des quantités h_i, a_i et A_i, sur la situation du point A_n.

§ 71. L'erreur ϱ_{ai} donne une translation dans la direction $A_i A_{i+1}$ sur une longueur ϱ_{ai} à la partie $A_i A_n$ du polygone. C'est donc une erreur linéaire et l'influence de cette erreur sur les coordonnées du point A_n, que nous désignerons par ϱ_{xai}, ϱ_{yai} et ϱ_{zai}, sera donc donnée par les formules:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_{xa_i} &= \cos h_i \cos \alpha_i \varrho_{a_i} \\ \varrho_{ya_i} &= \cos h_i \sin \alpha_i \varrho_{a_i} \\ \varrho_{za_i} &= \sin h_i \varrho_{a_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (108)$$

où α_i est l'angle de la ligne $A'_i A'_{i+1}$ avec l'axe des X.

En désignant par m_{ai} la valeur moyenne de ϱ_{ai}, par m_{xai}, m_{yai} et m_{zai} les valeurs moyennes de ϱ_{xai}, ϱ_{yai} et ϱ_{zai} et par $m^2_{xya_i}$, $m^2_{yza_i}$ et $m^2_{xza_i}$ les valeurs moyennes des produits: $\varrho_{xai}\varrho_{yai}$, $\varrho_{yai}\varrho_{zai}$ et $\varrho_{xai}\varrho_{zai}$, ces équations nous donnent:

$$\left.\begin{aligned} m^2_{xa_i} &= \cos^2 h_i \cos^2 \alpha_i m^2_{a_i} \\ m^2_{ya_i} &= \cos^2 h_i \sin^2 \alpha_i m^2_{a_i} \\ m^2_{za_i} &= \sin^2 h_i m^2_{a_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (109)$$

$$\left.\begin{aligned} m^2_{xya_i} &= \cos^2 h_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i m^2_{a_i} \\ m^2_{yza_i} &= \sin\ h_i \cos h_i \sin \alpha_i m^2_{a_i} \\ m^2_{xza_i} &= \sin h_i \cos h_i \cos \alpha_i m^2_{a_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (110)$$

§ 72. Une erreur ϱ_{hi} dans la détermination de h_i produit une rotation du point A_{i+1} autour du point A_i, dans le plan $A_i A_{i+1}$ $A'_i A'_{i+1}$; cette erreur se propage sans changement sur les points suivants. L'influence de cette erreur sur la situation de A_n sera donc:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_{xh_i} &= -\, a_i \sin h_i \cos \alpha_i \varrho_{h_i} \\ \varrho_{yh_i} &= -\, a_i \sin h_i \sin \alpha_i \varrho_{h_i} \\ \varrho_{zh_i} &= +\, a_i \cos h_i \varrho_{h_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (111)$$

d'où il suit:

$$\left.\begin{aligned} m^2_{xh_i} &= a_i^2 \sin^2 h_i \cos^2 \alpha_i m^2_{h_i} \\ m^2_{yh_i} &= a_i^2 \sin^2 h_i \sin^2 \alpha_i m^2_{h_i} \\ m^2_{zh_i} &= a_i^2 \cos^2 h_i m^2_{h_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (112)$$

$$\left.\begin{aligned} m^2_{xyh_i} &= +\, a_i^2 \sin^2 h_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i m^2_{h_i} \\ m^2_{yzh_i} &= -\, a_i^2 \sin\ h_i \cos h_i \sin \alpha_i m^2_{h_i} \\ m^2_{xzh_i} &= -\, a_i^2 \sin h_i \cos h_i \cos \alpha_i m^2_{h_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (113)$$

§ 73. Une erreur ϱ_{Ai} dans la détermination de A_i produit une rotation de la partie $A_i A_n$ du polygone autour d'un axe vertical passant par A_i. Cette erreur n'aura donc aucune influence sur la coordonnée Z du point A_n, et nous trouvons:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} \varrho_{x A_i} &= +(Y_i - Y_n)\,\varrho_{A_i} \\ \varrho_{y A_i} &= -(X_i - X_n)\,\varrho_{A_i} \\ \varrho_{z A_i} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (114)$$

d'où il suit:

$$\left.\begin{aligned} m^2_{x A_i} &= (Y_i - Y_n)^2\, m^2_{A_i} \\ m^2_{y A_i} &= (X_i - X_n)^2\, m^2_{A_i} \\ m^2_{z A_i} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (115)$$

$$\left.\begin{aligned} m^2_{xy A_i} &= -(Y_i - Y_n)(X_i - X_n)\, m^2_{A_i} \\ m^2_{yz A_i} &= 0 \\ m^2_{xz A_i} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (116)$$

§ 74. Pour avoir la résultante de toutes les erreurs qui ont de l'influence sur la situation du point A_n par rapport au point A_1, il faut prendre la somme des expressions (108), (111) et (114) pour toutes les valeurs de i depuis l'origine A_1 jusqu'au point A_n, c'est-à-dire, pour les erreurs ϱ_{a_i} et ϱ_{h_i} depuis 1 jusqu'à $n-1$ et pour les erreurs ϱ_{A_i} depuis 2 jusqu'à $n-1$. L'erreur ϱ_{A_1} ne doit pas entrer en considération, parce que l'angle A_1, c'est-à-dire l'angle que fait $A'_1 A'_2$ avec le côté précédent ne sert pas à la détermination de la situation du point A_n par rapport au point A_1 et de la droite $A'_1 A'_2$ [1]).

En représentant les erreurs résultantes dans les coordonnées de A_n par ϱ_{Xn}, ϱ_{Yn} et ϱ_{Zn}, nous trouvons donc:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_{Xn} &= \sum_1^{n-1} \cos h_i \cos \alpha_i\, \varrho_{a_i} - \sum_1^{n-1} a_i \sin h_i \cos \alpha_i\, \varrho_{h_i} + \sum_2^{n-1} (Y_i - Y_n)\, \varrho_{A_i} \\ \varrho_{Yn} &= \sum_1^{n-1} \cos h_i \sin \alpha_i\, \varrho_{a_i} - \sum_1^{n-1} a_i \sin h_i \sin \alpha_i\, \varrho_{h_i} - \sum_2^{n-1} (X_i - X_n)\, \varrho_{A_i} \\ \varrho_{Zn} &= \sum_1^{n-1} \sin h_i\, \varrho_{A_i} \qquad + \sum_1^{n-1} a_i \cos h_i\, \varrho_{h_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (117)$$

§ 75. Pour les valeurs moyennes de ces erreurs nous trouvons d'après (42) § 26 par les form. (109), (112) et (115) en représentant ces valeurs moyennes par M_{Xn}, M_{Yn} et M_{Zn}:

---

[1]) Si l'on voulait déterminer la situation de A_n par rapport à des axes de coordonnées déterminées passant par A_1, par exemple par rapport aux directions S N et O E, une erreur ρ_{α_1} dans l'azimut de $A'_1 A'_2$ aurait une influence analogue à celle de l'erreur ρ_{A_1}.

Dans ce cas il faudrait sommer depuis $i = 1$ jusqu'à $i = n-1$ et remplacer ρ_{A_1} par ρ_{α_1}. Nous ne considérons pas ce cas, d'autant plus que cette erreur n'a pas d'influence sur la fermeture du polygone.

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} M_{Xn}^2 &= \sum_1^{n-1} \cos^2 h_i \cos^2 \alpha_i m_{a_i}^2 + \sum_1^{n-1} a_i^2 \sin^2 h_i \cos^2 \alpha_i m_{h_i}^2 + \sum_2^{n-1} (Y_i - Y_n)^2 m_{A_i}^2 \\ M_{Yn}^2 &= \sum_1^{n-1} \cos^2 h_i \sin^2 \alpha_i m_{a_i}^2 + \sum_1^{n-1} a_i^2 \sin^2 h_i \sin^2 \alpha_i m_{h_i}^2 + \sum_2^{n-1} (X_i - X_n)^2 m_{A_i}^2 \\ M_{Zn}^2 &= \sum_1^{n-1} \sin^2 h_i m_{a_i}^2 \qquad + \sum_1^{n-1} a_i^2 \cos^2 h_i m_{h_i}^2 \end{aligned}\right\} . \quad (118)$$

De ces formules nous tirons pour l'erreur moyenne M_n dans la situation du point A_n d'après form. (22) § 17 en désignant la distance horizontale des points A_i et A_n par: $L_{in} = \sqrt{(X_i - X_n)^2 + (Y_i - Y_n)^2}$:

$$M_n^2 = \sum_1^{n-1} m_{a_i}^2 + \sum_1^{n-1} a_i^2 m_{h_i}^2 + \sum_2^{n-1} L_{in}^2 m_{A_i}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (119)$$

En supposant que tous les angles sont mesurés avec la même précision (c'est-à-dire: $m_{h_1} = m_{h_2} = m_{h_3}$ etc. $= m_h$ et $m_{A2} = m_{A3} = m_{A4}$ etc. $= m_A$) et toutes les distances avec la même précision relative (c'est-à-dire $\frac{m_{a1}}{a_1} = \frac{m_{a2}}{a_2} =$ etc. $= m'_a$) cette formule devient:

$$M_n^2 = m'^2_a \sum_1^{n-1} a_i^2 + m_h^2 \sum_1^{n-1} a_i^2 + m_A^2 \sum_2^{n-1} L_{in}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (120)$$

§ 76. Pour déterminer les axes principaux de probabilité nous tirons des form. (110), (113) et (116) d'après form. (46) § 27:

$$\left.\begin{aligned} M_{XZn}^2 &= \sum_1^{n-1} \sin h_i \cos h_i \cos \alpha_i m_{a_i}^2 - \sum_1^{n-1} a_i^2 \sin h_i \cos h_i \cos \alpha_i m_{h_i}^2 \\ M_{YZn}^2 &= \sum_1^{n-1} \sin h_i \cos h_i \sin \alpha_i m_{a_i}^2 - \sum_1^{n-1} a_i^2 \sin h_i \cos h_i \sin \alpha_i m_{h_i}^2 \\ M_{XYn}^2 &= \sum_1^{n-1} \cos^2 h_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i m_{a_i}^2 + \sum_1^{n-1} a_i^2 \sin^2 h_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i m_{h_i}^2 - \sum_2^{n-1} (Y_i - Y_n)(X_i - X_n) m_{A_i}^2 \end{aligned}\right\} . \quad (121)$$

§ 77. Supposons que le relèvement a eu lieu dans un terrain peu accidenté, les angles h_i seront alors très petits, de sorte qu'on peut prendre $\sin h_i = o$ et $\cos h_i = 1$; les formules deviennent alors:

$$\left.\begin{aligned} M_{Xn}^2 &= \sum_1^{n-1} \cos^2 \alpha_i m_{a_i}^2 + \sum_2^{n-1} (Y_i - Y_n)^2 m_{A_i}^2 \\ M_{Yn}^2 &= \sum_1^{n-1} \sin^2 \alpha_i m_{a_i}^2 + \sum_2^{n-1} (X_i - X_n)^2 m_{A_i}^2 \\ M_{Zn}^2 &= \sum_1^{n-1} a_i^2 m_{h_i}^2 \end{aligned}\right\} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (122)$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} M^2_{XZn} &= o \\ M^2_{YZn} &= o \\ M^2_{XYn} &= \sum_1^{n-1} \sin \alpha_i \cos \alpha_i \, m^2_{a_i} - \sum_2^{n-1} (Y_i - Y_n)(X_i - X_n) \, m^2_{\Delta_i} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (123)$$

Des formules (123) il suit que l'axe des Z est dans ce cas un axe principal de probabilité. Les deux autres axes principaux sont situés dans le plan X Y, et leur direction est déterminée par la form. (30) § 20 d'où nous tirons pour l'angle ψ que fait un de ces axes avec l'axe des X:

$$\operatorname{tang} 2\psi = \frac{2 M^2_{XY}}{M^2_X - M^2_Y} = \frac{\sum_1^{n-1} \sin 2\alpha_i \, m^2_{a_i} - 2 \sum_2^{n-1} (Y_i - Y_n)(X_i - X_n) \, m_{\Delta_i}}{\sum_1^{n-1} \cos 2\alpha_i \, m^2_{a_i} + \sum_2^{n-1} [(Y_i - Y_n)^2 - (X_i - X_n)^2] \, m^2_{\Delta_i}} \quad . \quad . \quad (124)$$

§ 78. Lorsqu'on poursuit le polygone jusqu'à ce qu'on revient au point de départ, l'erreur de situation du dernier point, c'est-à-dire du point A_{p+1} ou A_1 d'un polygone de p côtés, devient alors l'erreur de fermeture du polygone. En mettant pour ce cas dans les formules (118), (119) et (121) $n = p+1$ et en observant que l'on a $X_n = X_{p+1} = X_1 = o$ et $Y_n = Y_{p+1} = Y_1 = o$, ces formules deviennent:

$$\left.\begin{aligned} M^2_{Xp+1} &= \sum_1^p \cos^2 h_i \cos^2 \alpha_i \, m^2_{a_i} + \sum_1^p a_i^2 \sin^2 h_i \cos^2 \alpha_i \, m^2_{h_i} + \sum_1^p Y_i^2 \, m^2_{\Delta_i} \\ M^2_{Yp+1} &= \sum_1^p \cos^2 h_i \sin^2 \alpha_i \, m^2_{a_i} + \sum_1^p a_i^2 \sin^2 h_i \sin^2 \alpha_i \, m^2_{h_i} + \sum_1^p X_i^2 \, m^2_{\Delta_i} \\ M^2_{Zp+1} &= \sum_1^p \sin^2 h_i \, m^2_{a_i} \qquad\qquad + \sum_1^p a_i^2 \cos^2 h_i \, m^2_{h_i} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (125)$$

$$M^2_{p+1} = \sum_1^p m^2_{a_i} + \sum_1^p a_i^2 \, m^2_{h_i} + \sum_1^p L_{i1} \, m^2_{\Delta_i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (126)$$

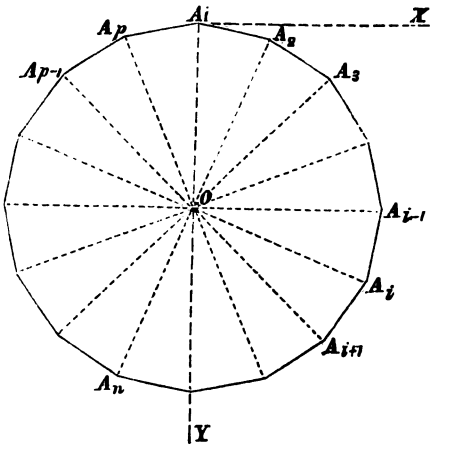
$$\left.\begin{aligned} M^2_{XZp+1} &= \sum_1^p \sin h_i \cos h_i \cos \alpha_i \, m^2_{a_i} - \sum_1^p a_i^2 \sin h_i \cos h_i \cos \alpha_i \, m^2_{h_i} \\ M^2_{YZp+1} &= \sum_1^p \sin h_i \cos h_i \sin \alpha_i \, m^2_{a_i} - \sum_1^p a_i^2 \sin h_i \cos h_i \sin \alpha_i \, m^2_{h_i} \\ \Sigma_{XYp+1} &= \sum_1^p \cos^2 h_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i \, m^2_{a_i} + \sum_1^p a_i^2 \sin^2 h_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i \, m^2_{h_i} - \sum_1^p Y_i \, X_i \, m^2_{\Delta_i} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (127)$$

Pour la régularité la limite inférieure $i = 2$ de la sommation des termes en $m^2_{\Delta_i}$ a été remplacée par $i = 1$, ce qui ne change rien à la valeur, vu que le terme sous le signe de sommation devient égal à *zéro* pour $i = 1$.

Digitized by Google

§ 79. Appliquons ces formules au cas que le polygone est à très peu près un polygone régulier de p côtés. En prenant les côtés égaux à a et en posant $m_{a1}^2 = m_{a2}^2 =$ etc. $= m_a^2$, $m_{h1}^2 = m_{h2}^2 =$ etc. $= m_h^2$, $m_{A1}^2 = m_{A2}^2 =$ etc. $= m_A^2$ et en prenant les axes de manière que l'axe des Y passe par le centre 0 du polygone (fig. 8), on aura:

Fig. 8.



$$\alpha_i = \frac{\pi}{p}(2i-1).$$

De la figure on tire en outre:

$$0A_1 = 0A_2 = 0A_i = \frac{\frac{1}{2}A_1A_2}{\sin\frac{1}{2}A_1 0 A_2} = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{p}}$$

$$X_i = 0A_i \sin A_1 0 A_i = \frac{a \sin\frac{2\pi}{p}(i-1)}{2\sin\frac{\pi}{p}}$$

et

$$Y_i = 0A_i\,(1-\cos A_1 0 A_i) = a\,\frac{1-\cos\frac{2\pi}{p}(i-1)}{2\sin\frac{\pi}{p}}$$

Supposons enfin que les angles d'élévation h sont petits, de sorte qu'on peut remplacer $\sin h$ par zéro et $\cos h$ par l'unité, les formules (125) à (127) deviennent alors:

$$\left.\begin{aligned} M_{Xp+1}^2 &= m_a^2 \sum_1^p \cos^2\frac{\pi}{p}(2i-1) + \frac{a^2 m_A^2}{4\sin^2\frac{\pi}{p}} \sum_1^p \left(1-\cos\frac{2\pi}{p}(i-1)\right)^2 = \tfrac{1}{2} p\, m_a^2 + \frac{3\,p\,a^2 m_A^2}{8\sin^2\frac{\pi}{p}} \\ M_{Yp+1}^2 &= m_a^2 \sum_1^p \sin^2\frac{\pi}{p}(2i-1) + \frac{a^2 m_A^2}{4\sin^2\frac{\pi}{p}} \sum_1^p \sin^2\frac{2\pi}{p}(i-1) = \tfrac{1}{2} p\, m_a^2 + \frac{p\,a^2 m_A^2}{8\sin^2\frac{\pi}{p}} \\ M_{Zp+1}^2 &= m_h^2 \sum_1^p a^2 = p\,a^2\, m_h^2 \end{aligned}\right\}. \quad (128)$$

$$M_{p+1}^2 = p\, m_a^2 + p\,a^2 m_h^2 + \frac{p\,a^2 m_A^2}{2\sin^2\frac{\pi}{p}}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (129)$$

$$\left.\begin{aligned} M_{XZp+1}^2 &= o \\ M_{YZp+1}^2 &= o \\ M_{XYp+1}^2 &= m_a^2 \sum_1^p \sin\frac{2\pi}{p} i \cos\frac{2\pi}{p} i - \frac{a^2 m_A^2}{4\sin^2\frac{\pi}{p}} \sum_1^p \sin\frac{2\pi}{p}(i-1)\left(1-\cos\frac{2\pi}{p}(i-1)\right) = o \end{aligned}\right\}. \quad (130)$$

Digitized by Google

Des équations (130) il suit que les axes des coordonnées sont des axes principaux.

§ 80. En ne considérant le relèvement que pour ce qui concerne la projection horizontale, on peut poser $m_A = o$; les erreurs deviennent alors des erreurs dans le plan, pour lesquelles on a les équations (118), (119) et (121) en laissant de côté les quantités M^2_{Zn}, M^2_{XZn} et M^2_{YZn}.

Pour ce cas les formules relatives à la fermeture du polygone deviennent:

$$\left.\begin{aligned} M^2_X &= \tfrac{1}{2} p\, m_a^2 + \frac{3\, p\, a^2\, m_A^2}{8 \sin^2 \frac{\pi}{p}} \\ M^2_Y &= \tfrac{1}{2} p\, m_a^2 + \frac{p\, a^2\, m_A^2}{8 \sin^2 \frac{\pi}{p}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (131)$$

$$M^2 = p\, m_a^2 + \frac{p\, a^2\, m_A^2}{2 \sin^2 \frac{\pi}{p}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (132)$$

$$M^2_{XY} = o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (133)$$

Comme les axes des X et des Y sont des axes principaux, nous trouvons d'après le § 52:

$$N = \frac{M^2_X - M^2_Y}{M^2_X + M^2_Y} = \frac{\dfrac{p\, a^2\, m_A^2}{4 \sin^2 \frac{\pi}{p}}}{p\, m_a^2 + \dfrac{p\, a^2\, m_A^2}{2 \sin^2 \frac{\pi}{p}}} = \frac{1}{2 + \left(\dfrac{2\, m_a}{a\, m_A} \sin \dfrac{\pi}{p}\right)^2} \quad \ldots\ldots \quad (134)$$

c'est-à-dire une valeur qui est toujours plus petite qu'un demi.

Pour l'erreur probable nous trouvons donc d'après § 54 que le facteur r est compris entre 0,7962 et 0,8326.

En représentant les erreurs probables dans a et A par r_a et r_A, on aura, puisque ce sont des erreurs linéaires:

$$m_a = \frac{r_a}{0{,}67449} \qquad m_A = \frac{r_A}{0{,}67449}$$

d'où il suit pour l'erreur probable de la fermeture du polygone:

$$R = \frac{0{,}7962 \text{ à } 0{,}8326}{0{,}6745} \sqrt{p\, r_a^2 + \frac{p\, a^2\, r_A^2}{2 \sin^2 \frac{\pi}{p}}} = 1{,}23434 \text{ à } 1{,}18043 \sqrt{p\, r_a^2 + \frac{p\, a^2\, r_A^2}{2 \sin^2 \frac{\pi}{p}}} \quad (135)$$

Les demi-axes de l'ellipse probable s'obtiennent en multipliant les valeurs de M_X et de M_Y d'après form. (131) avec le facteur 1,17741 (voir § 58).

§ 81. Lorsqu'on a mesuré au lieu des angles A_i, les azimuts α_i des lignes

Digitized by Google

$A_i A_{i+1}$ avec les erreurs ϱ_{α_i} et les valeurs moyennes de ces erreurs m_{α_i}, on doit remplacer $\varrho_{x A_i}$, $\varrho_{y A_i}$ et $\varrho_{z A_i}$ par:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_{x\alpha_i} &= (Y_i - Y_{i+1})\,\varrho_{\alpha_i} = a_i \sin\alpha_i\,\varrho_{\alpha_i} \\ \varrho_{y\alpha_i} &= -(X_i - X_{i+1})\,\varrho_{\alpha_i} = -a_i\cos\alpha_i\,\varrho_{\alpha_i} \\ \varrho_{z\alpha_i} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (136)$$

parce que l'erreur ϱ_{x_i} ne fait tourner que la ligne $A_i A_{i+1}$ et non pas la partie $A_i A_n$ du polygone.

De ces formules il suit:

$$\left.\begin{aligned} m^2_{x\alpha_i} &= a_i^2 \sin^2\alpha_i\, m^2_{\alpha_i} \\ m^2_{y\alpha_i} &= a_i^2 \cos^2\alpha_i\, m^2_{\alpha_i} \\ m^2_{z\alpha_i} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (137)$$

$$\left.\begin{aligned} m^2_{xz\alpha_i} &= 0 \\ m^2_{yz\alpha_i} &= 0 \\ m^2_{xy\alpha_i} &= -a_i^2 \sin\alpha_i\cos\alpha_i\, m^2_{\alpha_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (138)$$

Pour la sommation des erreurs ϱ_{z_i} il faut étendre la sommation depuis $i=1$ jusqu'à $i=n-1$ et non pas comme pour ϱ_{A_i} depuis $i=2$ jusqu'à $i=n-1$.

Les derniers termes de ϱ_{X_n} et ϱ_{Y_n} dans les form. (117) doivent donc être remplacés par:

$$\sum_1^{n-1} a_i \sin\alpha_i\,\varrho_{\alpha_i} \qquad \text{et} \qquad -\sum_1^{n-1} a_i\cos\alpha_i\,\varrho_{\alpha_i}$$

ceux de $M^2_{X_n}$ et $M^2_{Y_n}$ dans les form. (118) par:

$$\sum_1^{n-1} a_i^2 \sin^2\alpha_i\, m^2_{\alpha_i} \qquad \text{et} \qquad \sum_1^{n-1} a_i^2\cos^2\alpha_i\, m^2_{\alpha_i}$$

et le dernier terme de $M^2_{XY_n}$ dans les form. (121) par:

$$-\sum_1^{n-1} a_i^2 \sin\alpha_i\cos\alpha_i\, m^2_{\alpha_i}.$$

La formule (119) enfin devient:

$$M^2_n = \sum_1^{n-1} m^2_{a_i} + \sum_1^{n-1} a_i^2\, m^2_{h_i} + \sum_1^{n-1} a_i^2\, m^2_{\alpha_i} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (139)$$

ou, dans la supposition d'une égale précision dans la mesure des azimuts et des élévations et d'une égale précision rélative dans la mesure des distances:

$$M^2_n = (m'^2_a + m^2_h + m^2_\alpha) \sum_1^{n-1} a_i^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (140)$$

Digitized by Google

§ 82. Dans la supposition sus-mentionnée de la mesure des azimuts α au lieu des angles A, les formules (131) à (133) pour la fermeture d'un polygone régulier dans le plan deviennent:

$$\left.\begin{aligned} M_x^2 &= \tfrac{1}{2} p\, m_a^2 + \tfrac{1}{2} p\, a^2\, m_\alpha^2 \\ M_y^2 &= \tfrac{1}{2} p\, m_a^2 + \tfrac{1}{2} p\, a^2\, m_\alpha^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (141)$$

$$M^2 = p\, m_a^2 + p\, a^2\, m_\alpha^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (142)$$

$$M_{xy}^2 = o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (143)$$

Comme on a ici $M_{xy}^2 = o$ et $M_x = M_y$ toutes les directions sont également probables, d'où il suit pour l'erreur probable de la fermeture du polygone:

$$R = 0{,}83255 \sqrt{p\,(m_a^2 + a^2\, m_\alpha^2)} = 1{,}23434 \sqrt{p\,(r_a^2 + a^2\, r_\alpha^2)} \quad \ldots\ldots \quad (144)$$

§ 83. En mettant dans les formules (120) et (140) $n = p + 1$, on obtient pour l'erreur moyenne de la fermeture du polygone pour le cas du relèvement aux théodolite et à la boussole:

$$\left.\begin{aligned} M^2 &= m'^2_a \sum_1^p a^2 + m_h^2 \sum_1^p a^2 + m_A^2 \sum_1^p L_{il}^2 \\ M^2 &= m'^2_a \sum_1^p a^2 + m_h^2 \sum_1^p a^2 + m_\alpha^2 \sum_1^p a^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (145)$$

Les deux premiers termes sont égaux dans ces deux expressions; dans le dernier terme m_A est toujours plus petit que m_α, $\sum_1^p L^2$ au contraire est plus grand que $\sum_1^p a^2$, et la relation entre ces deux quantités est d'autant plus grande que le nombre p des côtés est plus grand. Pour de petites valeurs de p, c'est-à-dire pour un polygone avec un nombre restreint de côtés, l'emploi du théodolite, pour de grandes valeurs de p l'emploi de la boussole sera donc préférable pour ce qui concerne la fermeture du polygone. La limite s'obtient en égalant les deux valeurs de l'erreur moyenne, ce qui donne:

$$m_A^2 \sum_1^p L^2 = m_\alpha^2 \sum_1^p a^2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\sum L^2}{\sum a^2} = \frac{m_\alpha^2}{m_A^2} \quad \ldots\ldots \quad (146)$$

Tant que le rapport entre la somme des carrés des distances de tous les sommets du polygone à l'origine et la somme des carrés des côtés est plus petit que le carré du rapport des erreurs moyennes dans la mesure d'un azimut avec la boussole et d'un angle avec le théodolite, le relèvement au théodolite sera préférable, dans le cas contraire le relèvement à la boussole.

Pour le polygone régulier on a: $\sum_1^p L^2 = \sum_1^p \left(2\, A_1 0 \sin \frac{\pi}{p} i\right)^2 = 2\, p\, A_1 0^2$ et $\sum_1^p a^2 = p\, a^2$; l'équation précédente devient donc:

Digitized by Google

$$\frac{2\,A_1O^2}{a^2} = \frac{m_\alpha^2}{m_A^2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{A_1O}{a} = \frac{m_\alpha}{M_A\sqrt{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (147$$

ou, en remplaçant A_1O par sa valeur $\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{p}}$:

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{p}} = \frac{m_\alpha}{m_A}\sqrt{2} \qquad \text{ou} \qquad \sin\frac{\pi}{p} = \frac{m_A}{m_\alpha\sqrt{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (148)$$

d'où, par approximation:

$$p = \pi\sqrt{2}\,\frac{m_\alpha}{m_A} = 4{,}443\,\frac{m_\alpha}{m_A}.$$

Prenons par exemple $\frac{m_\alpha}{m_A} = 4$, nous trouvons alors:

$$\sin\frac{\pi}{p} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \tfrac{1}{8}\sqrt{2} = 0{,}1768$$

ou:

$$\frac{\pi}{p} = \frac{180^\circ}{p} = 10^\circ 11'$$

c'est-à-dire:

$$p = 18 \text{ à peu près.}$$

Dans ce cas on doit préférer le relèvement au théodolite pour un polygone avec moins de 18 côtés et le relèvement à la boussole pour un polygone avec plus de 18 côtés.

§ 84. Le calcul de la probabilité du tir des bouches à feu nous donnera un dernier exemple des erreurs dans le plan. Dans le tir on tâche d'atteindre avec le projectile le *point de mire*; par suite de différentes causes le projectile n'arrive pas au point de mire, mais dans un autre point, qu'on nomme *le point d'impact*; on fait donc une erreur déterminée en grandeur et en direction par la ligne qui relie le point de mire au point d'impact; c'est une erreur dans le plan à laquelle on peut appliquer tous les raisonnements contenus dans ce mémoire.

Le centre de gravité du solide de probabilité (plan massif) n'est autre chose que ce qu'on nomme le *point d'impact moyen*. La ligne qui relie le point de mire avec le point d'impact moyen forme la partie constante de l'erreur; c'est une déviation constante qu'on peut réduire à zéro par un changement convenable de la mire.

Pour ce qui suit, nous supposons que ce changement a eu lieu, de sorte que le point d'impact moyen coïncide avec le point de mire.

Digitized by Google

Comme les armes à feu peuvent être considérées comme symétriques par rapport au plan vertical passant par l'âme, la ligne horizontale et la ligne verticale passant par le point d'impact moyen seront des axes principaux de probabilité [1]). Dans ce qui suit, nous prendrons ces deux lignes comme axes des coordonnées et nous désignerons par les lettres X et Y les coordonnées des différents points d'impact.

§ 85. Pour *l'écart moyen en hauteur* et *en direction* correspondant avec les valeurs moyennes des projections des erreurs sur la verticale et l'horizontale, nous avons:

$$M_x = \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{n-1}} \qquad \text{et} \qquad M_y = \sqrt{\frac{\Sigma Y^2}{n-1}} \quad \ldots\ldots \quad (149)$$

lorsque n désigne le nombre des coups. (Dans ces formules nous mettons dans le dénominateur $n-1$ pour une raison bien connue de la théorie des moindres carrées).

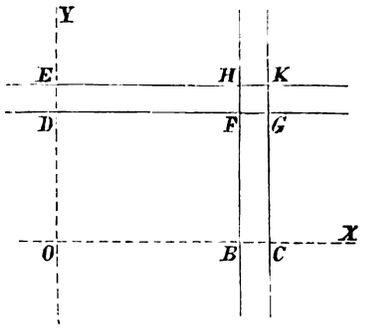
Au lieu des expressions *écart moyen en hauteur* et *en direction* on emploie aussi les expressions *écart moyen quadratique en hauteur* et *en direction*. Souvent on donne aussi *l'écart probable en hauteur* et *en direction* correspondant avec l'erreur probable en projection sur la verticale et l'horizontale, ou le double de ces quantités sous le nom de: *dispersion probable en hauteur* et *en direction*.

§ 86. Comme les écarts dans le tir sont le résultat d'un grand nombre de causes, ces écarts suivent la loi exponentielle.

De là il suit immédiatement d'après § 48, lorsque nous désignons les écarts probables par R_x et R_y et les dispersions probables par A_x et A_y:

$$\left.\begin{aligned} A_x &= 2\,R_x = 2 \times 0{,}67449\,M_x = 1{,}34898\,M_x \\ A_y &= 2\,R_y = 2 \times 0{,}67449\,M_y = 1{,}34898\,M_y \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (150)$$

Fig. 9.



Il en suit aussi pour la probabilité d'atteindre la bande comprise entre les deux verticales B H et C K (fig. 9) à une distance infiniment petite $BC = dX$, lorsqu'on désigne par X la distance O B:

$$\frac{e^{-\frac{X^2}{2M_x^2}}}{M_x\sqrt{2\pi}}\,dX, \quad \ldots\ldots \quad (151)$$

pour la probabilité d'atteindre la bande comprise entre les lignes horizontales D G et E K à une distance $DE = dY$, lorsqu'on a $OD = Y$:

[1]) Dans les armes rayées cette symétrie n'existe plus; pourtant les expériences faites avec ces armes semblent indiquer que l'*horizontale* et la *verticale* passant par le point d'impact moyen sont des axes principaux.

Digitized by Google

$$\frac{e^{-\frac{Y^2}{2M_y^2}}}{M_y\sqrt{2\pi}}dY \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (152)$$

et, enfin pour la probabilité d'atteindre le rectangle élémentaire F G H K:

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X^2}{M_x^2}+\frac{Y^2}{M_y^2}\right)}}{2\pi M_x M_y}dX\,dY \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (153)$$

§ 87. En représentant par $\Theta(t)$ la valeur de l'intégrale $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt$, nous tirons de la form. (151) pour la probabilité d'atteindre une bande verticale de la largeur b et dont le milieu passe par le point d'impact moyen:

$$\int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b}\frac{e^{-\frac{X^2}{2M_x^2}}}{M_x\sqrt{2\pi}}dX=\Theta\left(\frac{b}{2\sqrt{2}M_x}\right)=\Theta\left(\frac{1{,}34898}{2\sqrt{2}}\frac{b}{A_x}\right)=\Theta\left(0{,}47694\frac{b}{A_x}\right) \quad \ldots \quad (154)$$

D'une manière analogue on trouve pour la probabilité d'atteindre une bande horizontale de la hauteur h d'après (152):

$$\int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h}\frac{e^{-\frac{Y^2}{2M_y^2}}}{M_y\sqrt{2\pi}}=\Theta\left(\frac{h}{2\sqrt{2}M_y}\right)=\Theta\left(0{,}47694\frac{h}{A_y}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (155)$$

De la formule (153) on tire enfin pour la probabilité d'atteindre un rectangle de la hauteur h et de la largeur b et dont le milieu coïncide avec le point d'impact moyen:

$$\int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b}\int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h}\frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X^2}{M_x^2}+\frac{Y^2}{M_y^2}\right)}}{2\pi M_x M_y}dX\,dY=\int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b}\frac{e^{-\frac{X^2}{2M_x^2}}}{M_x\sqrt{2\pi}}dX\int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h}\frac{e^{-\frac{Y^2}{2M_y^2}}}{M_y\sqrt{2\pi}}dY=$$

$$=\Theta\left(0{,}47694\frac{b}{A_x}\right)\Theta\left(0{,}47694\frac{h}{A_y}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (156)$$

une relation qu'on peut déduire aussi de (154) et (155) à l'aide du théorème du paragraphe 40.

Pour le calcul de ces probabilités on peut faire usage des tables de la fonction Θ, ou d'autres tables qui sont déduites de celles-là et qui donnent immédiatement la valeur de Θ en fonction de $\frac{b}{A_x}$ et de $\frac{h}{A_y}$.

Digitized by Google

§ 88. Pour calculer la probabilité d'atteindre une figure limitée par une courbe quelconque on doit intégrer l'expression:

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X^2}{M^2_x}+\frac{Y^2}{M^2_y}\right)}}{2\pi M_x M_y} dX\,dY$$

pour la surface de cette figure.

Ce calcul est en général très compliqué et dans la plupart des cas il ne pourra se faire sans développement en série. On préfère alors décomposer la figure en un certain nombre de rectangles, dont on calcule la probabilité pour en prendre ensuite la somme.

§ 89. Afin de juger de la valeur d'une arme à feu, on donne souvent au lieu des quantités mentionnées le rayon du cercle qui contient la meilleure moitié des points d'impact. On voit facilement que c'est l'erreur probable dans le plan; ce rayon est donc donné par la formule:

$$R = r\sqrt{M^2_x + M^2_y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (157)$$

où r peut être pris de la table du § 54.

Il est manifeste que cette expression peut bien servir pour juger de la valeur de l'arme, mais qu'elle est insuffisante pour le calcul de la probabilité du tir sur une figure donnée.

§ 90. Dans les principaux ouvrages qui traitent de la probabilité du tir, les formules (153) et (156) sont établies à l'aide du théorème de la probabilité composée d'événements indépendants les uns des autres en multipliant les probabilités des déviations dans les deux directions. Dans cette déduction on n'a pas fait attention à ce que ces deux déviations ne sont pas indépendantes l'une de l'autre. Nous pouvons considérer comme indépendantes les déviations par rapport aux axes principaux, non pas parce qu'elles sont en réalité indépendantes, mais par suite de la multitude des causes qui les produisent (voir § 40). Les formules qu'on trouve dans ces ouvrages sont donc exactes, mais la démonstration contient une lacune.

Les quelques auteurs qui fixent l'attention sur la non-indépendance des deux déviations se désistent immédiatement de cette circonstance et ne font pas avancer la question, comme on peut le voir dans les lignes suivantes tirées d'un Mémoire de M. Jouffret [1]).

„La probabilité que le projectile tombe au point (δ, δ'), ou, en termes plus „exacts, dans le rectangle infiniment petit déterminé par les deux lignes (δ, δ')

[1]) *Étude sur l'effet utile du tir* par E. Jouffret, capitaine d'artillerie. Revue maritime et coloniale. Tome 35. Paris 1872. Page 220.

Digitized by Google

„et $(\delta + d\delta,\ \delta' + d\delta')$ est de la forme $F(\delta, \delta')\, d\delta\, d\delta'$, où F désigne une fonction „dont la détermination rigoureuse résulterait d'un principe encore inconnu. „Nous tournerons la difficulté et nous obtiendrons un résultat qui semble suffi- „samment approché en appliquant le théorème des probabilités composées, comme „si les causes des écarts en déviation étaient complètement indépendantes de „celles des écarts en portée. Vraie pour quelques-unes, cette hypothèse est évi- „demment fausse pour d'autres, mais nous pouvons dire en sa faveur, d'abord „qu'elle est la plus simple, ensuite que c'est celle qui assigne la moindre valeur „aux probabilités d'atteindre, par conséquent, celle qu'on peut admettre avec „le plus de sécurité dans le cas du tir qu'on exécute soi-même; on devra peut „être s'en méfier, s'il s'agit au contraire du tir qu'exécute l'ennemi et duquel on „a à se garer".

Ce que dit M. DIDION ne peut non plus servir à justifier cette manière d'agir [1]):

„Nous supposons ici que la probabilité d'un écart dans le sens vertical est „indépendant de l'écart dans le sens latéral; c'est ce que permet d'admettre „l'inspection des points d'impact sur une surface; l'on n'y aperçoit aucune dé- „pendance".

Sans explications plus précises on ne saurait comprendre comment conclure à cette indépendance par la simple inspection de la distribution des points d'impact, indépendance, qui, il est à peine besoin de le dire, n'existe pas.

Lorsqu'on veut appliquer le théorème de la probabilité d'événements indépendants, on ne peut le faire qu'après avoir démontré que les écarts *peuvent* être considérés comme indépendants, bien qu'ils ne le soient pas en réalité, démonstration que nous avons donnée dans le paragraphe 40.

Breda, Novembre 1874.

NOTE ADDITIONNELLE.

Après avoir présenté ce mémoire à l'académie, j'ai rencontré encore deux mémoires qui traitent de la théorie des erreurs dans le plan et dans l'espace, et que je veux citer ici.

Le premier de M. F. R. HELMERT: *Studien über rationelle Vermessungen* se trouve dans *Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik* 1868, l'autre de M. A. BRAVAIS *Analyse mathématique sur les probabilités des erreurs de situation d'un point* se trouve

[1]) *Calcul des probabilités appliqué au tir des projectiles*, par Is. DIDION, colonel d'artillerie. Paris 1858. Page 35.

Digitized by Google

dans le Tome IX des *Mémoires* présentés par divers savants à l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France 1846. C'est par le rapport de MM. Cohen Stuart et Baehr que mon attention fut fixée sur le premier de ces mémoires; le second paraît être très peu connu, puisque même les auteurs français qui traitent de la probabilité du tir n'en font pas mention.

M. Helmert traite seulement des erreurs dans le plan, M. Bravais considère aussi les erreurs dans l'espace, mais ces deux mémoires diffèrent du mien en ce qu'ils introduisent dès le commencement ces deux hypothèses que les erreurs composantes sont linéaires et qu'elles sont le résultat d'un grand nombre de causes, de sorte qu'elles suivent déjà la loi exponentielle. De ces deux hypothèses j'ai absolument fait abstraction, même en passant à la loi limite pour laquelle je suppose seulement *le grand nombre des erreurs composantes* sans faire la moindre restriction, ni quant à la loi que suivent les erreurs composantes, ni sur la situation de ces erreurs sur une droite.

Les résultats auxquels arrivent les deux auteurs s'accordent avec ce que j'ai dit sur les erreurs dans le cas limite (seulement pour l'erreur probable dans le plan M. Helmert arrive à un résultat un peu différent, qui est à mon avis, moins correct); ces mémoires traitent aussi des propriétés des erreurs moyennes, mais par suite des hypothèses restrictives mentionnées plus haut, ces propriétés n'ont pas la généralité avec laquelle elles se trouvent dans mon mémoire.

Breda, Mai 1875.

TABLEAU I.

λ en fonction de μ.

μ	Maximum absolu.	Erreurs linéaires.		Erreurs dans le plan.		Erreurs dans l'espace.	
		Maximum.	Loi limite.	Maximum.	Loi limite.	Maximum.	Loi limite.
Formules	11	13	76	15	88	17	103
0,0	1,0000	0,0000	0.0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,1	1,0541	0,1732	0,1257	0,4472	0.3246	0,5992	0,4414
0,2	1,1180	0,3464	0,2533	0,6325	0,4724	0,7550	0,5788
0,3	1,1952	0,5196	0,3853	0,7746	0,5972	0,8642	0,6889
0,4	1.2910	0,6928	0,5244	0,8944	0,7147	0,9512	0,7893
0,5	1,4142	0,8660	0,6745	1,0000	0,8326	1,0420	0,8881
0,6	1,5811	1,0392	0,8416	1,1180	0,9572	1,1650	0,9910
0,7	1,8257	1,2172	1,0364	1,2910	1,0973	1,3452	1,1053
0,8	2,2361	1,4908	1,2816	1,5811	1,2686	1,6475	1,2439
0,9	3,1623	2,1082	1.6449	2,2361	1,5174	2,3300	1,4435
0,99	10,0000	6,6667	2,5758	7,0711	2,1460	7,3681	1,9446
0,999	31,6228	21,0819	3,2906	22,3607	2,6283	23,3000	2,3285
0,9999	100,0000	66,6667	3,8906	70,7107	3,0349	73,6806	2,6525

Digitized by Google

TABLEAU II.

μ en fonction de λ.

λ.	Minimum absolu.	Erreurs linéaires.		Erreurs dans le plan.		Erreurs dans l'espace.	
		Minimum.	Loi limite.	Minimum.	Loi limite.	Minimum.	Loi limite.
Formules.	12	14	76	16	88	18	130
0,0		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,1		0,0577	0,0797	0,0050	0,0099	0,0005	0,0014
0,2		0,1155	0,1585	0,0200	0,0392	0,0037	0,0107
0,3		0,1732	0,2358	0,0450	0,0861	0,0125	0,0344
0,4		0,2309	0,3108	0,0800	0,1479	0,0297	0,0767
0,5		0,2887	0,3829	0,1250	0,2212	0,0581	0,1384
0,6		0,3464	0,4515	0,1800	0,3023	0,1004	0,2181
0,7		0,4041	0,5161	0,2450	0,3874	0,1594	0,3108
0,8		0,4619	0,5763	0,3200	0,4727	0,2384	0,4108
0,9		0,5196	0,6319	0,4050	0,5551	0,3388	0,5119
1,0	0,0000	0,5774	0,6827	0,5000	0,6321	0,4571	0,6084
1,1	0,1736	0,6351	0,7287	0,5868	0,7018	0,5513	0,6957
1,2	0,3056	0,6914	0,7699	0,6528	0,7631	0,6230	0,7711
1,3	0,4083	0,7370	0,8064	0,7041	0,8155	0,6788	0,8333
1,4	0,4898	0,7732	0,8385	0,7449	0,8591	0,7230	0,8824
1,5	0,5556	0,8025	0,8664	0,7778	0,8946	0,7587	0,9197
1,6	0,6094	0,8264	0,8904	0,8047	0,9227	0,7879	0,9469
1,7	0,6540	0,8462	0,9109	0,8270	0,9444	0,8122	0,9659
1,8	0,6914	0,8628	0,9281	0,8457	0,9608	0,8324	0,9790
1,9	0,7230	0,8769	0,9426	0,8615	0,9729	0,8496	0,9873
2,0	0,7500	0,8889	0,9545	0,8750	0,9817	0,8643	0,9926
2,1	0,7732	0,8992	0,9643	0,8866	0,9878	0,8769	0,9958
2,2	0,7934	0,9082	0,9722	0,8967	0,9921	0,8878	0,9977
2,3	0,8110	0,9160	0,9786	0,9055	0,9950	0,8974	0,9988
2,4	0,8264	0,9228	0,9836	0,9132	0,9968	0,9057	0,9994
2,5	0,8400	0,9289	0,9876	0,9200	0,9981	0,9131	0,9997
2,6	0,8521	0,9343	0,9907	0,9260	0,9988	0,9197	0,9999
2,7	0,8628	0,9390	0,9931	0,9314	0,9993	0,9255	0,9999
2,8	0,8725	0,9433	0,9949	0,9362	0,9996	0,9308	1,0000
2,9	0,8811	0,9472	0,9963	0,9405	0,9998	0,9354	1,0000
3,0	0,8889	0,9506	0,9973	0,9444	0,9999	0,9397	1,0000

Digitized by Google

TABLEAU III.

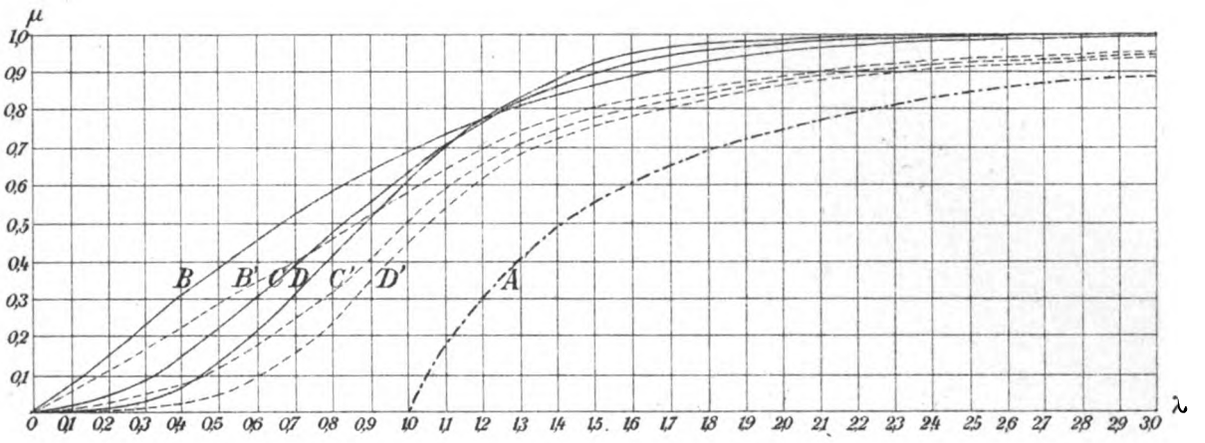
Facilité de l'erreur indépendante de la direction dans la loi limite.

λ	Erreurs linéaires.	Erreurs dans le plan.	Erreurs dans l'espace.
	Facilité indépendante de la direction.	Facilité par anneaux elliptiques.	Facilité par couches ellipsoïdales.
Formules.	75	87	102
0,0	0,79788	0,00000	0,00000
0,1	0,79391	0,19801	0,04084
0,2	0,78209	0,38432	0,15618
0,3	0,76278	0,54836	0,32601
0,4	0,73654	0,68171	0,52181
0,5	0,70413	0,77880	0,71236
0,6	0,66645	0,83721	0,86977
0,7	0,62451	0,85768	0,97412
0,8	0,57938	0,84367	1,01597
0,9	0,53217	0,80074	0,99641
1,0	0,48394	0,73576	0,92508
1,1	0 43570	0,65621	0 81689
1,2	0,38837	0,56863	0,68851
1,3	0,34274	0,47975	0,55536
1,4	0,29946	0,39440	0,42959
1,5	0,25904	0,31620	0,31920
1,6	0,22184	0,24737	0,22812
1,7	0,18810	0,18896	0,15698
1,8	0,15790	0,14099	0,10411
1,9	0,13123	0,10280	0,06659
2,0	0,10798	0,07326	0,04111
2,1	0,08797	0,05105	0,02450
2,2	0,07095	0,03479	0 01411
2,3	0,05665	0,02319	0,00785
2,4	0,04479	0,01513	0,00422
2,5	0,03506	0,00965	0,00220
2,6	0,02717	0,00603	0,00110
2,7	0,02084	0,00368	0,00054
2,8	0,01583	0,00220	0,00025
2,9	0,01191	0,00129	0,00012
3,0	0,00886	0,00074	0,00005

Digitized by Google

Minimum de μ *Maximum de λ.* *μ en fonction de λ dans les lois exponentielles*

A ----------	$0 < \lambda$	$\mu = 1 - \frac{1}{\lambda^2}$ (12)		
B' ----- $\mu = 0{,}577350\,\lambda$	$\lambda < 1{,}1547 < \lambda$	$\mu = 1 - \frac{0{,}444444}{\lambda^2}$ (14)	*B* ————	*sur la droite.* (76)
C' ---- $\mu = 0{,}500000\,\lambda^2$	$\lambda < 1{,}0000 < \lambda$	$\mu = 1 - \frac{0{,}500000}{\lambda^2}$ (16)	*C* ————	*dans le plan.* (88)
D' ---- $\mu = 0{,}404758\,\lambda^3$	$\lambda < 0{,}9512 < \lambda$	$\mu = 1 - \frac{0{,}542883}{\lambda^2}$ (18)	*D* ————	*dans l'espace.* (103)

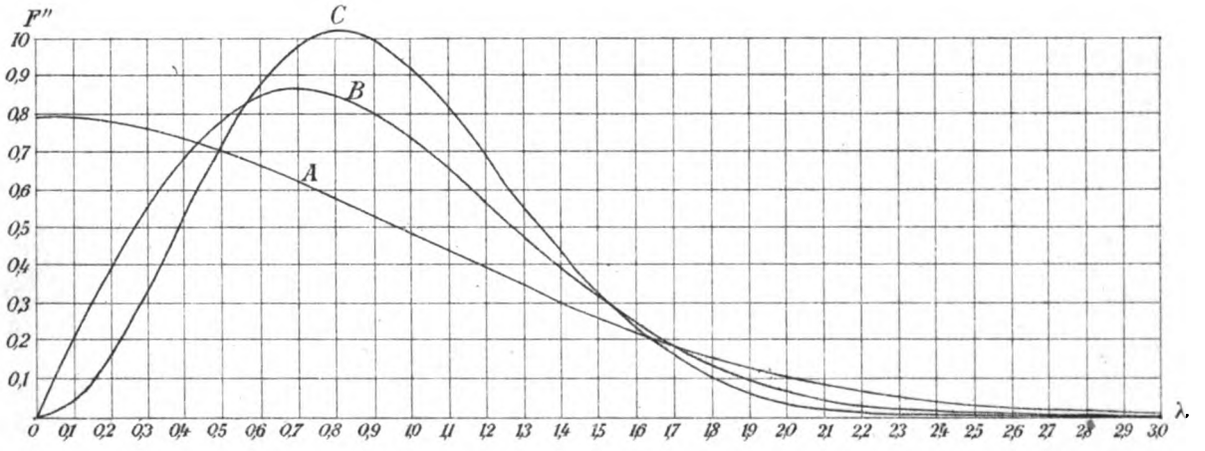


Facilité des erreurs dans les lois exponentielles

A. ———— *sur la droite.* (75)

B. ———— *dans le plan.* (87)

C. ———— *dans l'espace.* (102)



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Geology

ANNALES

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

DE

DELFT.

TOME II. 1886.

4me LIVRAISON.

THE LIBRARY OF THE
JUL 23 1973
UNIVERSITY OF ILLINOIS
AT URBANA-CHAMPAIGN

LEIDE. — E. J. BRILL.
1886.

GEOLOGY

Digitized by Google

Digitized by Google

LA COURBURE DE LA PROJECTION DE LA LIGNE GÉODÉSIQUE.

PAR

CH. M. SCHOLS.

I. FORMULES GÉNÉRALES.

§ 1. La surface terrestre n'étant pas développable sur un plan, toutes les projections des cartes géographiques présentent des déformations. Ces déformations se font sentir en premier lieu dans l'altération des angles et dans la variation de la longueur des lignes. Les lois que suivent ces déformations ont été étudiées en détail, surtout par M. Tissot [1]).

Il y a une autre déformation qu'on n'a pas encore, pour autant que je sais, étudiée dans ses détails, c'est la courbure de la projection des lignes qui, sur la surface terrestre, doivent être considérées comme droites, c'est-à-dire des lignes géodésiques. Pour les projections conformes ou orthomorphes les lois de la courbure de la projection de la ligne géodésique sont connues. Comme on sait la courbure de cette projection est égale au quotient différentiel du logarithme du rapport d'agrandissement, par rapport à une ligne perpendiculaire à la direction considérée dans la carte; c'est-à-dire:

$$\frac{d \log \mathrm{M}}{d z} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

en désignant par M le rapport d'agrandissement d'une ligne quelconque passant par le point considéré et par z une ligne perpendiculaire à la direction considérée. De cette expression il suit que pour un même point la courbure varie proportionnellement au cosinus de l'angle que fait la ligne avec la courbe pour laquelle le rapport d'agrandissement est constant.

En désignant par A' l'angle que fait la ligne avec l'axe des Y d'un système

[1]) A. Tissot. Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques. Paris, 1881.

Digitized by Google

d'axes rectangulaires sur la carte, l'expression (1) pour la courbure peut être mise sous la forme:

$$\frac{d \log M}{d Y} \sin A' - \frac{d \log M}{d X} \cos A' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

c'est-à-dire, la courbure de la projection de la ligne géodésique, est une fonction homogène et linéaire du sinus et du cosinus de l'angle que fait la ligne sur la carte avec une direction quelconque.

Dans ce mémoire nous aborderons l'étude de la courbure de la projection de la ligne géodésique pour une projection quelconque et nous démontrerons qu'en général la courbure peut être exprimée par une expression de la forme:

$$B_1 \sin^3 A' + B_2 \sin^2 A' \cos A' + B_3 \sin A' \cos^2 A' + B_4 \cos^3 A' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

où B_1, B_2, B_3, B_4 dépendent uniquement de la position du point considéré; de sorte que la courbure est en général une fonction homogène et entière du troisième dégré du sinus et du consinus de l'angle que fait la ligne avec une direction quelconque dans le plan de la carte. Pour les projections conformes les coefficients B_1 et B_3 et les coefficients B_2 et B_4 deviennent égaux et l'expression (3) se réduit donc à:

$$B_1 \sin A' + B_3 \cos A'$$

d'où l'on voit que l'expression (2) n'est qu'un cas particulier de (3).

Dans les paragraphes suivants nous donnerons d'abord une démonstration analytique de l'expression (3) pour le cas d'une surface de révolution, ensuite nous établirons cette formule à l'aide de considérations géométriques, analogues à celles que nous avons données dans le premier volume de ces Annales[1]) pour la formule (1); considérations qui sont indépendantes de la nature de la surface projetée. Les formules trouvées seront appliquées alors à l'étude de quelques groupes de projections, et à la recherche des projections dans lesquelles les lignes géodésiques sont représentées par des droites ou par des cercles.

§ 2. Dans ce qui suit nous désignerons par φ et λ la latitude et la longitude du point considéré sur la surface terrestre; par X et Y les coordonnées rectangulaires de la projection de ce point sur la carte; par ds et A la longueur et l'azimut d'une ligne passant par ce point et située sur la surface terrestre, par ds' et A' la longueur de la ligne sur la carte et l'angle de cette ligne avec l'axe des Y. Par R et r nous désignerons enfin le rayon de courbure du méridien et le rayon du parallèle sur la terre.

Entre les quantités nommées existent les relations:

---

[1]) Annales de l'école polytechnique de Delft. Tome I, p. 10.

Digitized by Google

$$r\,d\lambda = ds\sin A \qquad R\,d\varphi = ds\cos A \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$
$$dX = ds'\sin A' \qquad dY = ds'\cos A' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

et comme φ et λ peuvent être considérés comme fonctions de X et de Y, on a:

$$d\lambda = \frac{d\lambda}{dX}dX + \frac{d\lambda}{dY}dY \qquad d\varphi = \frac{d\varphi}{dX}dX + \frac{d\varphi}{dY}dY$$

d'où il suit en multipliant par r et R:

$$ds\sin A = r\frac{d\lambda}{dX}ds'\sin A' + r\frac{d\lambda}{dY}ds'\cos A'$$
$$ds\cos A = R\frac{d\varphi}{dX}ds'\sin A' + R\frac{d\varphi}{dY}ds'\cos A'$$

En posant maintenant pour abréger:

$$\left.\begin{aligned} r\frac{d\lambda}{dX}\sin A' + r\frac{d\lambda}{dY}\cos A' &= V \\ R\frac{d\varphi}{dX}\sin A' + R\frac{d\varphi}{dY}\cos A' &= W \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

et en désignant par M le rapport d'agrandissement:

$$M = \frac{ds'}{ds} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

on trouve:

$$\sin A = MV \qquad \cos A = MW. \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

d'où il suit:

$$M^2 = \frac{1}{V^2 + W^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin A &= \frac{V}{\sqrt{V^2 + W^2}} \\ \cos A &= \frac{W}{\sqrt{V^2 + W^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Comme la ligne géodésique est donnée par la relation

$$r\sin A = \text{const.},$$

on trouve pour la projection de cette ligne:

$$\frac{Vr}{\sqrt{V^2 + W^2}} = \text{const} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

§ 3. Pour avoir la courbure de cette ligne, qui est exprimée par le quotient différentiel $\frac{dA'}{ds'}$, on n'a qu'à différentier l'expression (11) par rapport à s'; mais il vaut mieux la mettre auparavant sous la forme:

$$\frac{1}{r^2}\left(1 + \frac{W^2}{V^2}\right) = \text{const.}$$

Digitized by Google

Cette différentiation donne en ayant égard aux relations (5):

$$\frac{2R\sin\varphi}{r^3}\left(\frac{d\varphi}{dX}\sin A'+\frac{d\varphi}{dY}\cos A'\right)\left(1+\frac{W^2}{V^2}\right)+\frac{2}{r^2}\frac{W}{V}\left[\frac{V\frac{dW}{dX}-W\frac{dV}{dX}}{V^2}\sin A'+\frac{V\frac{dW}{dY}-W\frac{dV}{dY}}{V^2}\cos A'+\right.$$
$$\left.+\frac{V\frac{dW}{dA'}-W\frac{dV}{dA'}}{V^2}\frac{dA'}{ds'}\right]=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Pour l'expression $V\frac{dW}{dA'}-W\frac{dV}{dA'}$ on trouve à l'aide des expressions (6):

$$V\frac{dW}{dA'}-W\frac{dV}{dA'}=-Rr\left[\frac{d\lambda}{dX}\frac{d\varphi}{dY}-\frac{d\lambda}{dY}\frac{d\varphi}{dX}\right]=-\frac{1}{m^2}$$

en désignant par m^2 le rapport d'agrandissement des *surfaces*.

En mettant cette valeur dans l'équation (12) et en observant que:

$$\frac{d\varphi}{dX}\sin A'+\frac{d\varphi}{dY}\cos A'$$

est égale à $\frac{W}{R}$, on trouve en résolvant:

$$\frac{dA'}{ds'}=m^2\frac{\sin\varphi}{r}V(V^2+W^2)+m^2\left(V\frac{dW}{dX}-W\frac{dV}{dX}\right)\sin A'+m^2\left(V\frac{dW}{dY}-W\frac{dV}{dY}\right)\cos A' \quad . \quad (13)$$

Comme V et W sont des fonctions linéaires et homogènes du sinus et du cosinus de A' et que m^2 ainsi que r et φ sont indépendantes de A', on voit que la courbure peut être mise sous la forme:

$$\frac{dA'}{ds'}=B_1\sin^3A'+B_2\sin^2A'\cos A'+B_3\sin A'\cos^2A'+B_4\cos^3A' \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

où B_1, B_2, B_3 et B_4 dépendent uniquement de la position du point considéré. C'est la formule (3) qu'il fallait démontrer.

Comme la courbure peut être mise sous la forme:

$$\frac{dA'}{ds'}=-\frac{d^2Y}{dX^2}\sin^3A'$$

et comme on a $\cot A'=\frac{dY}{dX}$, on voit que l'équation différentielle de la projection de la ligne géodésique peut être mise sous la forme:

$$\frac{d^2Y}{dX^2}+B_1+B_2\frac{dY}{dX}+B_3\left(\frac{dY}{dX}\right)^2+B_4\left(\frac{dY}{dX}\right)^3=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

où B_1, B_2, B_3 et B_4 sont des fonctions de X et de Y.

§ 4. Avant de développer les expressions pour les coefficients B_1, B_2, B_3 et B_4 nous donnerons une autre démonstration de la formule (14) reposant sur des considérations géométriques, mais auparavant nous devons rappeler quelques formules ayant rapport aux variations des angles et des longueurs des lignes.

Digitized by Google

Comme on sait, le rapport d'agrandissement M d'une ligne, qui fait avec l'axe des Y sur la carte l'angle A', peut toujours être mise sous la forme:

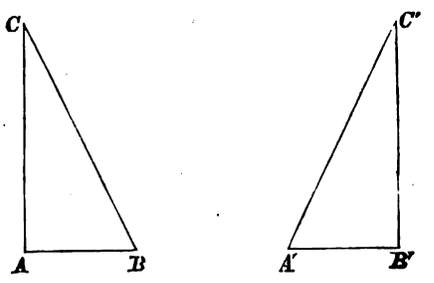
$$\frac{1}{M^2} = P \sin^2 A' + 2\,T \sin A' \cos A' + Q \cos^2 A' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

où P, Q et T dépendent uniquement de la position du point. Le rapport d'agrandissement M_1 de la ligne qui sur la carte est perpendiculaire à celle-ci est obtenu en remplaçant A' par A' — 90°, ce qui donne:

$$\frac{1}{M_1^2} = P \cos^2 A' - 2\,T \sin A' \cos A' + Q \sin^2 A' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Considérons maintenant deux lignes AB et AC fig. 1 qui sont perpendiculaires sur la surface terrestre. Ces lignes ne seront plus perpendiculaires sur la carte, mais elle comprendront un angle $B'A'C' = 90° - \psi$. Il s'agit maintenant de déterminer l'angle ψ, qui est la variation de l'angle BAC.

Fig. 1.



Pour cela abaissons du point C' une perpendiculaire C'B' sur A'B' et prenons sur la ligne AB le point B, de manière qu'il corresponde au point B' de la carte; nous aurons alors deux triangles rectangles ABC et A'B'C'. Dans le premier de ces triangles on a:

$$AC^2 = BC^2 - AB^2$$

et comme les rapports d'agrandissement de AB et de BC sont:

$$\frac{A'B'}{AB} = M \text{ et } \frac{B'C'}{BC} = M_1$$

on trouve:

$$AC^2 = \frac{B'C'^2}{M_1^2} - \frac{A'B'^2}{M^2}.$$

Dans le second triangle, l'angle B'A'C' étant égale à $90° - \psi$, on a:

$$B'C' = A'C' \cos \psi \qquad A'B' = A'C' \sin \psi$$

et par suite:

$$AC^2 = A'C'^2 \left[\frac{\cos^2 \psi}{M_1^2} - \frac{\sin^2 \psi}{M^2}\right]$$

d'où il suit pour le rapport d'agrandissement $M' = \frac{A'C'}{AC}$ de la ligne AC:

$$\frac{1}{M'^2} = \frac{\cos^2 \psi}{M_1^2} - \frac{\sin^2 \psi}{M^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Digitized by Google

Ce rapport d'agrandissement M′ peut être exprimé d'une autre manière. La ligne A′C′ faisant sur la carte l'angle $B'A'C' = 90° - \psi$ avec la ligne A′B′, fait un angle $A' - 90° + \psi$ avec l'axe des Y. En mettant cette valeur au lieu de A′ dans (16), on trouve pour ce rapport:

$$\frac{1}{M'^2} = P\cos^2(A' + \psi) - 2T\sin(A' + \psi)\cos(A' + \psi) + Q\sin^2(A' + \psi)$$

En développant et en mettant pour abréger:

$$P\sin A'\cos A' + T(\cos^2 A' - \sin^2 A') + Q\sin A'\cos A' = L, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

cette expression peut être mise sous la forme:

$$\frac{1}{M'^2} = \frac{\cos^2\psi}{M_1^2} - 2L\sin\psi\cos\psi + \frac{\sin^2\psi}{M^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Égalons maintenant les deux expressions pour $\frac{1}{M'^2}$, nous trouvons

$$\frac{\cos^2\psi}{M_1^2} - \frac{\sin^2\psi}{M^2} = \frac{\cos^2\psi}{M_1^2} - 2L\sin\psi\cos\psi + \frac{\sin^2\psi}{M^2}$$

d'où il suit en résolvant:

$$\operatorname{tang}\psi = M^2 L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Dans ce qui suit nous aurons besoin des valeurs de $M'\sin\psi$ et de $M'\cos\psi$. On pourrait les trouver en éliminant au moyen de (21) l'angle ψ des formules (18) ou (20), mais on y parvient plus facilement de la manière suivante. Le rapport d'agrandissement des surfaces, que nous avons représenté déjà par m^2, est égale à $M\,M'\cos\psi$; nous en tirons immédiatement:

$$M'\cos\psi = \frac{m^2}{M} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

et en multipliant par (21):

$$M'\sin\psi = m^2 M L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Il nous faut encore les quotients différentiels de M, de $M'\cos\psi$ et de $M'\sin\psi$ par rapport à A′.

En différentiant la formule (16), on trouve:

$$-\frac{2}{M^3}\frac{dM}{dA'} = 2[P\sin A'\cos A' + T(\cos^2 A' - \sin^2 A') + Q\sin A'\cos A'] = 2L$$

d'où il suit:

$$\frac{dM}{dA'} = -M^3 L = -M\operatorname{tang}\psi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24$$

et en différentiant (22) on a:

Digitized by Google

$$\frac{d\,M'\cos\psi}{d\,A'} = -\frac{m^2}{M^2}\frac{d\,M}{d\,A'} = m^2\,M\,L = M'\sin\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

La différentiation de (23) nous donne:

$$\frac{d\,M'\sin\psi}{d\,A'} = m^2\,L\frac{d\,M}{d\,A'} + m^2\,M\frac{d\,L}{d\,A'};$$

et pour avoir $\frac{d\,L}{d\,A'}$ nous différentions la formule (19) par rapport à A′ ce qui donne:

$$\frac{d\,L}{d\,A'} = P(\cos^2 A' - \sin^2 A') - 4\,T\sin A'\cos A' + Q(\cos^2 A' - \sin^2 A') = \frac{1}{M_1^2} - \frac{1}{M^2}.$$

En mettant cette valeur ainsi que la valeur de $\frac{d\,M}{d\,A'}$ dans $\frac{d\,M'\sin\psi}{d\,A'}$, on trouve:

$$\frac{d\,M'\sin\psi}{d\,A'} = -m^2\,M^3\,L^2 + m^2\,M\left(\frac{1}{M_1^2} - \frac{1}{M^2}\right) = m^2\,M^3\left(\frac{1}{M^2\,M_1^2} - L^2\right) - \frac{m^2}{M},$$

et comme des formules (16), (17) et (19) on tire:

$$\frac{1}{M^2}\cdot\frac{1}{M_1^2} - L^2 = P\,Q - T^2 = \frac{1}{m^4},$$

on a enfin:

$$\frac{d\,M'\sin\psi}{d\,A'} = \frac{M^3}{m^2} - \frac{m^2}{M} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

§ 5. Considérons maintenant un rectangle ABCD (Fig. 2) sur la surface terrestre composé des lignes géodésiques $AB = CD = d\,s$ et $AC = BD = d\,\sigma$. Sur la carte ce rectangle sera le quadrilatère A′B′C′D′. En tirant par A′ et B′ des perpendiculaires sur A′B′, leur intersection déterminera le centre de courbure O; de sorte que la courbure de la ligne A′B′ est exprimée par $\frac{1}{OA'}$.

En menant par le point E, intersection des lignes C′D′ et OA′, une courbe EG parallèle à A′B′ on a:

$$\frac{EG}{OA' + A'E} = \frac{A'B'}{OA'}$$

d'où il suit:

$$OA' \,.\, EG = OA' \,.\, A'B' + A'E \,.\, A'B'$$

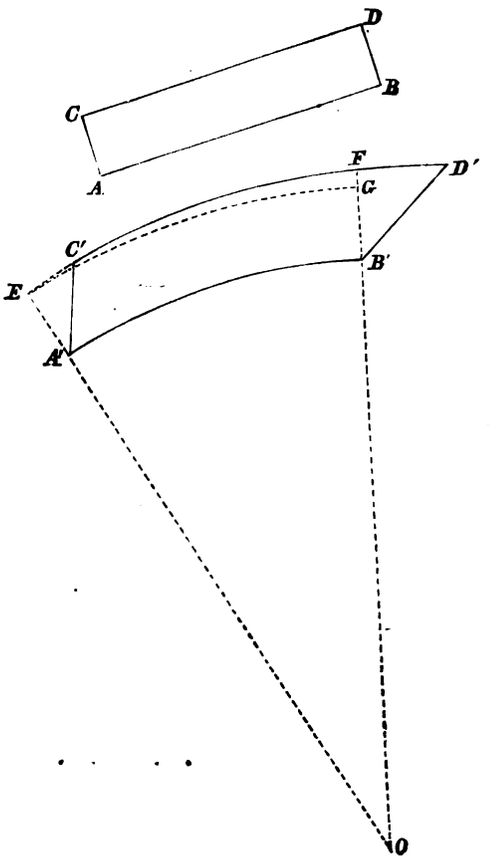
ou:

$$\frac{A'E \,.\, A'B'}{OA'} = EG - A'B'$$

Digitized by Google

ou, en observant que EG et EF ont entre eux un angle infiniment petit, de sorte que la différence de EF et EG est un infiniment petit du second ordre:

Fig. 2.



$$\frac{A'E \cdot A'B'}{0A'} = EF - A'B' = (C'D' - A'B') - \\ - (FD' - EC').$$

Comme le rapport d'agrandissement de la ligne A'B' est M et de la ligne A'C' M' et que A'C' fait avec A'E l'angle ψ, on a:

$$A'B' = M\,ds$$

$$A'E = M' \cos\psi\, d\sigma$$

d'où il suit:

$$ds \cdot d\sigma \cdot \frac{M\,M' \cos\psi}{0A'} = (C'D' - A'B') - (FD' - EC')$$

ou en observant que $M\,M' \cos\psi$ est égale à m^2 et que $\frac{1}{0A'}$ est égale à la courbure $\frac{dA'}{ds'}$, on trouve:

$$m^2 \frac{dA'}{ds'} \cdot ds \cdot d\sigma = (C'D' - A'B') - (FD' - EC'), \quad (27)$$

de sorte qu'il s'agit seulement de déterminer les deux différences: (C'D' — A'B') et (FD' — EC').

Comme on a:

$$EC' = A'C' \sin\psi = M' \sin\psi\, d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

on trouve en allant du point A' au point B':

$$FD' = \left[M' \sin\psi + \frac{d\,M' \sin\psi}{ds'} ds' + \frac{d\,M' \sin\psi}{dA'} \cdot \frac{dA'}{ds'} \cdot ds'\right] d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

en désignant par $\frac{d\,M' \sin\psi}{ds'}$ le quotient différentiel pour A' constant.

En prenant la différence de (28) et de (29) et en remplaçant ds' par $M\,ds$, on trouve:

$$FD' - EC' = \left[M \frac{d\,M' \sin\psi}{ds'} + M \frac{d\,M' \sin\psi}{dA'} \frac{dA'}{ds'}\right] ds\, d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

D'une manière analogue on trouve:

$$A'E = M' \cos\psi\, d\sigma$$

Digitized by Google

$$B'F = \left[M' \cos\psi + \frac{d M' \cos\psi}{d s'} d s' + \frac{d M' \cos\psi}{d A'} \frac{d A'}{d s'} d s' \right] d\sigma$$

et en prenant la différence:

$$FG = B'F - A'E = \left[\frac{d M' \cos\psi}{d s'} + \frac{d M' \cos\psi}{d A'} \frac{d A'}{d s'} \right] d s' \, d\sigma.$$

En divisant cette ligne par la ligne EG qui est, à un infiniment petit près, égale à ds', on trouve pour l'angle FEG:

$$FEG = \frac{FG}{EG} = \left[\frac{d M' \cos\psi}{d s'} + \frac{d M' \cos\psi}{d A'} \cdot \frac{d A'}{d s'} \right] d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

En prenant pour A'B' la valeur $M\,ds$, où M désigne le rapport d'agrandissement de la ligne A'B' au point A', on doit prendre pour C'D' la valeur de ds multipliée par le rapport d'agrandissement de la ligne C'D' au point C'.

Ce rapport diffère de M d'abord par suite de la position variée du point et ensuite par la variation qu'a subie l'angle que fait la ligne avec l'axe des Y. La variation de l'angle avec l'axe des Y se compose de deux parties. En allant du point A' au point E, cet angle diminue de l'angle FEG que nous venons de calculer; en allant de E en C', il augmente de l'angle qui correspond à la courbure de la ligne EC' c'est-à-dire:

$$EC' \frac{d A'}{d s'} = M' \sin\psi \, d\sigma \; \frac{d A'}{d s'}.$$

L'accroissement total de l'angle A' sera donc:

$$-\left[\frac{d M' \cos\psi}{d s'} + \frac{d M' \cos\psi}{d A'} \cdot \frac{d A'}{d s'} \right] d\sigma + M' \sin\psi \frac{d A'}{d s'} d\sigma$$

ou, d'après (25):

$$-\frac{d M' \cos\psi}{d s'} d\sigma.$$

Le rapport d'agrandissement de la ligne C'D' au point C' sera donc:

$$M + \frac{d M}{d \sigma'} d\sigma' - \frac{d M}{d A'} \cdot \frac{d M' \cos\psi}{d s'} d\sigma$$

en désignant par $d\sigma'$ la longueur de la ligne A'C'. En remplaçant cette valeur par $M'\,d\sigma$ et en multipliant par ds, on trouve:

$$C'D' = \left[M + \frac{d M}{d \sigma'} M' \, d\sigma - \frac{d M}{d A'} \frac{d M' \cos\psi}{d s'} d\sigma \right] d s$$

ou en retranchant:

$$A'B' = M \, d s.$$

$$C'D' - A'B' = \left[\frac{d M}{d \sigma'} M' - \frac{d M}{d A'} \frac{d M' \cos\psi}{d s'} \right] d\sigma \, d s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Digitized by Google

Substituons maintenant les valeurs (30) et (31) dans (27), nous aurons en divisant par $d\sigma\, ds$:

$$m^2 \frac{d\,A'}{d\,s'} = \frac{d\,M}{d\,\sigma'} M' - \frac{d\,M}{d\,A'} \frac{d\,M' \cos\psi}{d\,s'} - M \frac{d\,M' \sin\psi}{d\,s'} - M \frac{d\,M' \sin\psi}{d\,A'} \frac{d\,A'}{d\,s'}$$

ou, en transportant le dernier terme dans le premier membre et en substituant pour $\frac{d\,M}{d\,A'}$ et $\frac{d\,M' \sin\psi}{d\,A'}$ leurs valeurs d'après (24) et (26):

$$\frac{M^4}{m^2} \frac{d\,A'}{d\,s'} = M' \frac{d\,M}{d\,\sigma'} + M \operatorname{tang}\psi \frac{d\,M' \cos\psi}{d\,s'} - M \frac{d\,M' \sin\psi}{d\,s'}$$

Remplaçons enfin dans le dernier terme $M' \sin\psi$ par $M' \cos\psi \operatorname{tang}\psi$, et différentions par parties, nous trouvons en résolvant et en remplaçant M' par sa valeur:

$$\frac{d\,A'}{d\,s'} = \frac{m^4}{M^4}\left[\frac{1}{M\cos\psi}\frac{d\,M}{d\,\sigma'} - \frac{d\operatorname{tang}\psi}{d\,s'}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

§ 6. L'expression trouvée pour la courbure $\frac{d\,A'}{d\,s'}$ peut être mise sous d'autres formes, qui peuvent être d'un usage commode.

On peut d'abord introduire le logarithme du rapport d'agrandissement et écrire:

$$\frac{d\,A'}{d\,s'} = \frac{m^4}{M^4}\left[\frac{1}{\cos\psi}\cdot\frac{d\log M}{d\,\sigma'} - \frac{d\operatorname{tang}\psi}{d\,s'}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

La différentiation d'après la ligne $A'C' = d\sigma'$ peut être exprimée par la différentiation d'après la ligne $A'B' = ds'$ et la perpendiculaire que nous désignerons par dz. On a alors:

$$\frac{d\,M}{d\,\sigma'} = \frac{d\,M}{d\,z}\cos\psi + \frac{d\,M}{d\,s'}\sin\psi$$

et la formule (33) devient:

$$\frac{d\,A'}{d\,s'} = \frac{m^4}{M^4}\left[\frac{1}{M}\frac{d\,M}{d\,z} + \frac{\operatorname{tang}\psi}{M}\frac{d\,M}{d\,s'} - \frac{d\operatorname{tang}\psi}{d\,s'}\right] \quad \ldots\ldots \quad (35)$$

ou, en prenant ensemble les deux derniers termes:

$$\frac{d\,A'}{d\,s'} = \frac{m^4}{M^4}\left[\frac{1}{M}\frac{d\,M}{d\,z} - M\frac{d}{d\,s'}\left(\frac{\operatorname{tang}\psi}{M}\right)\right] = \frac{m^4}{M^4}\left[\frac{d\log M}{d\,z} - M\frac{d}{d\,s'}\left(\frac{\operatorname{tang}\psi}{M}\right)\right] \quad \ldots \quad (36)$$

De cette dernière expression on déduit immédiatement l'expression (1) pour les projections orthomorphes en remarquant que pour ces projections on a $M = m$ et $\psi = o$.

Une autre forme très commode pour le calcul est obtenue en introduisant

Digitized by Google

la valeur de $\frac{1}{M^2}$ que nous représenterons par K, et la valeur de L d'après (19) qui est égale à $\frac{1}{2}\frac{dK}{dA'}$. Remplaçons donc dans (35) M par $\frac{1}{\sqrt{K}}$ et tang ψ par $\frac{L}{K}$, nous trouvons:

$$\frac{dA'}{ds'} = m^4\left[-\tfrac{1}{2}K\frac{dK}{dz} + \tfrac{1}{2}L\frac{dK}{ds'} - K\frac{dL}{ds'}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

En remplaçant les différentiations par rapport à dz et ds' par les différentiations par rapport aux coordonnées X et Y, on trouve encore:

$$\frac{dA'}{ds'} = m^4\left[\begin{matrix}\sin A'\left(-\tfrac{1}{2}K\frac{dK}{dY} + \tfrac{1}{2}L\frac{dK}{dX} - K\frac{dL}{dX}\right)\\ \cos A'\left(+\tfrac{1}{2}K\frac{dK}{dX} + \tfrac{1}{2}L\frac{dK}{dY} - K\frac{dL}{dY}\right)\end{matrix}\right] \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

Comme on a:

$$K = P\sin^2 A' + 2T\sin A'\cos A' + Q\cos^2 A'$$

$$L = \tfrac{1}{2}\frac{dK}{dA'} = P\sin A'\cos A' + T(\cos^2 A' - \sin^2 A') + Q\sin A'\cos A'$$

il paraît que la courbure est une fonction entière et homogène du cinquième degré du sinus et du cosinus de A'; mais en effectuant la substitution, on remarque qu'en vertu de la relation $\sin^2 A' + \cos^2 A' = 1$ elle se réduit au troisième degré, de sorte qu'on a:

$$\frac{dA'}{ds'} = B_1\sin^3 A' + B_2\sin^2 A'\cos A' + B_3\sin A'\cos^2 A' + B_4\cos^3 A' \quad \ldots\ldots \quad (39)$$

dans laquelle:

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= m^4\left[-\tfrac{1}{2}T\frac{dP}{dX} + P\frac{dT}{dX} - \tfrac{1}{2}P\frac{dP}{dY}\right]\\ B_2 &= m^4\left[-\tfrac{1}{2}Q\frac{dP}{dX} + T\frac{dT}{dX} + P\frac{dQ}{dX} - \tfrac{3}{2}T\frac{dP}{dY}\right]\\ B_3 &= m^4\left[+\tfrac{3}{2}T\frac{dQ}{dX} - Q\frac{dP}{dY} - T\frac{dT}{dY} + \tfrac{1}{2}P\frac{dQ}{dY}\right]\\ B_4 &= m^4\left[+\tfrac{1}{2}Q\frac{dQ}{dX} - Q\frac{dT}{dY} + \tfrac{1}{2}T\frac{dQ}{dY}\right]\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (40)$$

§ 7. Les formules que nous venons de développer dans les paragraphes 4 à 6 sont tout à fait générales. En retournant au cas spécial d'une surface de révolution, nous remarquons que nous avons d'après (9):

$$K = \frac{1}{M^2} = V^2 + W^2 = \left[r^2\left(\frac{d\lambda}{dX}\right)^2 + R^2\left(\frac{d\varphi}{dX}\right)^2\right]\sin^2 A' + 2\left[r^2\frac{d\lambda}{dX}\frac{d\lambda}{dY} + R^2\frac{d\varphi}{dX}\frac{d\varphi}{dY}\right]\sin A'\cos A' +$$
$$+\left[r^2\left(\frac{d\lambda}{dY}\right)^2 + R^2\left(\frac{d\varphi}{dY}\right)^2\right]\cos^2 A'$$

Digitized by Google

d'où il suit:

$$\left.\begin{aligned} P &= r^2\left(\frac{d\lambda}{dX}\right)^2 + R^2\left(\frac{d\varphi}{dX}\right)^2 \\ T &= r^2\frac{d\lambda}{dX}\frac{d\lambda}{dY} + R^2\frac{d\varphi}{dX}\frac{d\varphi}{dY} \\ Q &= r^2\left(\frac{d\lambda}{dY}\right)^2 + R^2\left(\frac{d\varphi}{dY}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

En substituant ces valeurs dans (40) et en séparant le facteur:

$$R^2 r^2\left(\frac{d\lambda}{dX}\cdot\frac{d\varphi}{dY} - \frac{d\varphi}{dX}\cdot\frac{d\lambda}{dY}\right)$$

qui est égale à $\frac{Rr}{m^2}$, on trouve:

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= Rrm^2\left[\frac{d\lambda}{dX}\frac{d^2\varphi}{dX^2} - \frac{d\varphi}{dX}\frac{d^2\lambda}{dX^2} + \frac{r\sin\varphi}{R}\left(\frac{d\lambda}{dX}\right)^3 + \left(\frac{R'}{R} + 2\frac{R\sin\varphi}{r}\right)\left(\frac{d\varphi}{dX}\right)^2\frac{d\lambda}{dX}\right] \\ B_2 &= Rrm^2\left[\left\{\frac{d\lambda}{dY}\frac{d^2\varphi}{dX^2} - \frac{d\varphi}{dY}\frac{d^2\lambda}{dX^2} + \frac{r\sin\varphi}{R}\left(\frac{d\lambda}{dX}\right)^2\frac{d\lambda}{dY} + \left(\frac{R'}{R} + 2\frac{R\sin\varphi}{r}\right)\left(\frac{d\varphi}{dX}\right)^2\frac{d\lambda}{dY}\right\}\right. \\ &\quad \left. 2\left\{\frac{d\lambda}{dX}\frac{d^2\varphi}{dX\,dY} - \frac{d\varphi}{dX}\frac{d^2\lambda}{dX\,dY} + \frac{r\sin\varphi}{R}\left(\frac{d\lambda}{dX}\right)^2\frac{d\lambda}{dY} + \left(\frac{R'}{R} + 2\frac{R\sin\varphi}{r}\right)\frac{d\varphi}{dX}\frac{d\varphi}{dY}\frac{d\lambda}{dX}\right\}\right] \\ B_3 &= Rrm^2\left[2\left\{\frac{d\lambda}{dY}\frac{d^2\varphi}{dX\,dY} - \frac{d\varphi}{dY}\frac{d^2\lambda}{dX\,dY} + \frac{r\sin\varphi}{R}\frac{d\lambda}{dX}\left(\frac{d\lambda}{dY}\right)^2 + \left(\frac{R'}{R} + 2\frac{R\sin\varphi}{r}\right)\frac{d\varphi}{dX}\frac{d\varphi}{dY}\frac{d\lambda}{dY}\right\}\right. \\ &\quad \left. + \left\{\frac{d\lambda}{dX}\frac{d^2\varphi}{dY^2} - \frac{d\varphi}{dX}\frac{d^2\lambda}{dY^2} + \frac{r\sin\varphi}{R}\frac{d\lambda}{dX}\left(\frac{d\lambda}{dY}\right)^2 + \left(\frac{R'}{R} + 2\frac{R\sin\varphi}{r}\right)\frac{d\lambda}{dX}\left(\frac{d\varphi}{dY}\right)^2\right\}\right] \\ B_4 &= Rrm^2\left[\frac{d\lambda}{dY}\frac{d^2\varphi}{dY^2} - \frac{d\varphi}{dY}\frac{d^2\lambda}{dY^2} + \frac{r\sin\varphi}{R}\left(\frac{d\lambda}{dY}\right)^3 + \left(\frac{R'}{R} + 2\frac{R\sin\varphi}{r}\right)\frac{d\lambda}{dY}\left(\frac{d\varphi}{dY}\right)^2\right] \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Ce sont précisément les mêmes expressions qu'on trouve en développant la formule (13) du paragraphe 3.

§ 8. Les expressions (42) donnent les valeurs de B_1, B_2, B_3 et B_4 à l'aide des quotients différentiels de φ et λ par rapport à X et Y. Comme les projections sont données ordinairement par les formules qui expriment X et Y en fonction de φ et de λ, on peut demander d'exprimer les coefficients B_1, B_2, B_3 et B_4 à l'aide des quotients différentiels de X et Y par rapport à φ et λ.

Pour cela remarquons qu'on a:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dX}\cdot\frac{dX}{d\lambda} + \frac{d\lambda}{dY}\cdot\frac{dY}{d\lambda} &= 1 \\ \frac{d\lambda}{dX}\cdot\frac{dX}{d\varphi} + \frac{d\lambda}{dY}\cdot\frac{dY}{d\varphi} &= 0 \\ \frac{d\varphi}{dX}\cdot\frac{dX}{d\varphi} + \frac{d\varphi}{dY}\cdot\frac{dY}{d\varphi} &= 1 \\ \frac{d\varphi}{dX}\cdot\frac{dX}{d\lambda} + \frac{d\varphi}{dY}\cdot\frac{dY}{d\lambda} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

Digitized by Google

d'où l'on tire:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dX} &= \frac{\frac{dY}{d\varphi}}{\frac{dX}{d\lambda}\cdot\frac{dY}{d\varphi} - \frac{dY}{d\lambda}\cdot\frac{dX}{d\varphi}} & \frac{d\varphi}{dX} &= \frac{-\frac{dY}{d\lambda}}{\frac{dX}{d\lambda}\cdot\frac{dY}{d\varphi} - \frac{dY}{d\lambda}\cdot\frac{dX}{d\varphi}} \\ \frac{d\lambda}{dY} &= \frac{-\frac{dX}{d\varphi}}{\frac{dX}{d\lambda}\cdot\frac{dY}{d\varphi} - \frac{dY}{d\lambda}\cdot\frac{dX}{d\varphi}} & \frac{d\varphi}{dY} &= \frac{\frac{dX}{d\lambda}}{\frac{dX}{d\lambda}\cdot\frac{dY}{d\varphi} - \frac{dY}{d\lambda}\cdot\frac{dX}{d\varphi}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (44)$$

ou, en remarquant qu'on a:

$$\frac{dX}{d\lambda}\cdot\frac{dY}{d\varphi} - \frac{dY}{d\lambda}\cdot\frac{dX}{d\varphi} = R\,r\,m^2$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dX} &= \frac{1}{R\,r\,m^2}\cdot\frac{dY}{d\varphi} & \frac{d\varphi}{dX} &= \frac{-1}{R\,r\,m^2}\,\frac{dY}{d\lambda} \\ \frac{d\lambda}{dY} &= \frac{-1}{R\,r\,m^2}\,\frac{dX}{d\varphi} & \frac{d\varphi}{dY} &= \frac{1}{R\,r\,m^2}\,\frac{dX}{d\lambda} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (45)$$

En substituant ces valeurs dans (42), on trouve:

$$\left.\begin{aligned}
&= \frac{-1}{R^2 r^2 m^4}\left\{ \frac{d^2Y}{d\lambda^2}\left(\frac{dY}{d\varphi}\right)^2 + \frac{d^2Y}{d\varphi^2}\left(\frac{dY}{d\lambda}\right)^2 - 2\frac{d^2Y}{d\varphi\,d\lambda}\frac{dY}{d\varphi}\frac{dY}{d\lambda} - \frac{r\sin\varphi}{R}\left(\frac{dY}{d\varphi}\right)^3 - \left(\frac{R'}{R} + 2\frac{R\sin\varphi}{r}\right)\frac{dY}{d\varphi}\left(\frac{dY}{d\lambda}\right)^2 \right\} \\
&= \frac{+1}{R^2 r^2 m^4}\left\{ \begin{aligned} &\left\{\frac{d^2X}{d\lambda^2}\left(\frac{dY}{d\varphi}\right)^2 + \frac{d^2X}{d\varphi^2}\left(\frac{dY}{d\lambda}\right)^2 - 2\frac{d^2X}{d\varphi\,d\lambda}\frac{dY}{d\varphi}\frac{dY}{d\lambda} - \frac{r\sin\varphi}{R}\left(\frac{dY}{d\varphi}\right)^2\frac{dX}{d\varphi} - \left(\frac{R'}{R} + 2\frac{R\sin\varphi}{r}\right)\frac{dX}{d\varphi}\left(\frac{dY}{d\lambda}\right)^2\right\} \\ &2\left\{\frac{d^2Y}{d\lambda^2}\frac{dX}{d\varphi}\frac{dY}{d\varphi} + \frac{d^2Y}{d\varphi^2}\frac{dX}{d\lambda}\frac{dY}{d\lambda} - \frac{d^2Y}{d\varphi\,d\lambda}\left(\frac{dX}{d\lambda}\frac{dY}{d\varphi} + \frac{dY}{d\lambda}\frac{dX}{d\varphi}\right) - \frac{r\sin\varphi}{R}\left(\frac{dY}{d\varphi}\right)^2\frac{dX}{d\varphi} - \left(\frac{R'}{R} + 2\frac{R\sin\varphi}{r}\right)\frac{dY}{d\varphi}\frac{dY}{d\lambda}\frac{dX}{d\lambda}\right\} \end{aligned} \right. \\
&= \frac{-1}{R^2 r^2 m^4}\left\{ \begin{aligned} &2\left\{\frac{d^2X}{d\lambda^2}\frac{dX}{d\varphi}\frac{dY}{d\varphi} + \frac{d^2X}{d\varphi^2}\frac{dX}{d\lambda}\frac{dY}{d\lambda} - \frac{d^2X}{d\varphi\,d\lambda}\left(\frac{dX}{d\lambda}\frac{dY}{d\varphi} + \frac{dY}{d\lambda}\frac{dX}{d\varphi}\right) - \frac{r\sin\varphi}{R}\frac{dY}{d\varphi}\left(\frac{dX}{d\varphi}\right)^2 - \left(\frac{R'}{R} + 2\frac{R\sin\varphi}{r}\right)\frac{dX}{d\varphi}\frac{dY}{d\lambda}\frac{dX}{d\lambda}\right\} \\ &+\left\{\frac{d^2Y}{d\lambda^2}\left(\frac{dX}{d\varphi}\right)^2 + \frac{d^2Y}{d\varphi^2}\left(\frac{dX}{d\lambda}\right)^2 - 2\frac{d^2Y}{d\varphi\,d\lambda}\frac{dX}{d\varphi}\frac{dX}{d\lambda} - \frac{r\sin\varphi}{R}\frac{dY}{d\varphi}\left(\frac{dX}{d\varphi}\right)^2 - \left(\frac{R'}{R} + 2\frac{R\sin\varphi}{r}\right)\frac{dY}{d\varphi}\left(\frac{dX}{d\lambda}\right)^2\right\} \end{aligned} \right. \\
&= \frac{+1}{R^2 r^2 m^4}\left\{ \frac{d^2X}{d\lambda^2}\left(\frac{dX}{d\varphi}\right)^2 + \frac{d^2X}{d\varphi^2}\left(\frac{dX}{d\lambda}\right)^2 - 2\frac{d^2X}{d\varphi\,d\lambda}\frac{dX}{d\varphi}\frac{dX}{d\lambda} - \frac{r\sin\varphi}{R}\left(\frac{dX}{d\varphi}\right)^3 - \left(\frac{R'}{R} + 2\frac{R\sin\varphi}{r}\right)\frac{dX}{d\varphi}\left(\frac{dX^2}{d\lambda}\right) \right\}
\end{aligned}\right\} \quad (46)$$

II. APPLICATIONS À DIVERSES PROJECTIONS.

§ 9. Appliquons maintenant les relations trouvées à quelques groupes de projections.

Pour les projections conformes on a les deux relations:

$$\frac{d\lambda}{dX} = \frac{R\,d\varphi}{r\,dY} \qquad \text{et} \qquad \frac{d\lambda}{dY} = -\frac{R\,d\varphi}{r\,dX} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

ou:

Digitized by Google

$$\frac{dY}{d\varphi} = \frac{R}{r}\frac{dX}{d\lambda} \qquad \text{et} \qquad \frac{dX}{d\varphi} = -\frac{R}{r}\frac{dY}{d\lambda} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

A l'aide de ces relations on déduit des formules (42) aussi bien que des formules (46), les deux relations suivantes:

$$B_1 = B_3 \qquad \text{et} \qquad B_2 = B_4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

de sorte que la formule (14) se réduit à:

$$\frac{dA'}{ds'} = B_1 \sin A' + B_2 \cos A' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Par suite des relations (1) ou (2) les expressions pour les coefficients B peuvent être mises sous des formes plus simples dont voici quelques-unes:

$$\left.\begin{aligned} B_1 = B_3 &= -R^2 m^2\left[\frac{d\varphi}{dX}\frac{d^2\varphi}{dX\,dY} + \frac{d\varphi}{dY}\frac{d^2\varphi}{dY^2}\right] - \frac{R'}{R}\frac{d\varphi}{dY} \\ B_2 = B_4 &= +R^2 m^2\left[\frac{d\varphi}{dX}\frac{d^2\varphi}{dX^2} + \frac{d\varphi}{dY}\frac{d^2\varphi}{dX\,dY}\right] + \frac{R'}{R}\frac{d\varphi}{dX} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

et:

$$\left.\begin{aligned} B_1 = B_3 &= \frac{1}{r^4 m^4}\left[2\frac{d^2X}{d\lambda^2}\frac{dX}{d\lambda}\frac{dY}{d\lambda} - \frac{d^2Y}{d\lambda^2}\left\{\left(\frac{dX}{d\lambda}\right)^2 - \left(\frac{dY}{d\lambda}\right)^2\right\}\right] + \frac{\sin\varphi}{r^2 m^2}\frac{dX}{d\lambda} \\ B_2 = B_4 &= \frac{-1}{r^4 m^4}\left[2\frac{d^2Y}{d\lambda^2}\frac{dX}{d\lambda}\frac{dY}{d\lambda} + \frac{d^2X}{d\lambda^2}\left\{\left(\frac{dX}{d\lambda}\right)^2 - \left(\frac{dY}{d\lambda}\right)^2\right\}\right] + \frac{\sin\varphi}{r^2 m^2}\frac{dY}{d\lambda} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6)$$

En remarquant qu'on a en outre pour les projections conformes:

$$\frac{1}{m^2} = R^2\left[\left(\frac{d\varphi}{dX}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dY}\right)^2\right] \qquad \text{ou} \qquad m^2 = \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{dX}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\lambda}\right)^2\right]$$

on voit facilement que les expressions pour les coefficients B peuvent être mises sous la forme:

$$B_1 = B_3 = \frac{d\log m}{dY} \qquad B_2 = B_4 = -\frac{d\log m}{dX} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

de sorte que l'expression pour la courbure peut être mise sous la forme:

$$\frac{dA'}{ds'} = \frac{d\log m}{dY}\sin A' - \frac{d\log m}{dX}\cos A',$$

c'est la formule (2) du premier paragraphe.

§ 10. Pour les projections équivalentes on n'a qu'une seule relation entre les quotients différentiels de λ et φ par rapport à X et Y ou de X et Y par rapport à λ et φ, c'est la relation qu'on déduit de la condition:

$$m = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Cette relation peut être écrite sous la forme:

Digitized by Google

$$\frac{d\lambda}{dX}\frac{d\varphi}{dY} - \frac{d\lambda}{dY}\frac{d\varphi}{dX} = \frac{1}{Rr} \quad \ldots \quad (9)$$

ou sous cette autre forme:

$$\frac{dX}{d\lambda}\frac{dY}{d\varphi} - \frac{dX}{d\varphi}\frac{dY}{d\lambda} = Rr. \quad \ldots \quad (10)$$

Ces relations peuvent servir pour mettre les expressions (42) et (46) sous une forme plus simple. En différentiant (9) par rapport à X et à Y, on obtient:

$$\frac{d\lambda}{dX}\frac{d^2\varphi}{dX\,dY} - \frac{d\varphi}{dX}\frac{d^2\lambda}{dX\,dY} = \frac{d\lambda}{dY}\frac{d^2\varphi}{dX^2} - \frac{d\varphi}{dY}\frac{d^2\lambda}{dX^2} - \left[\frac{R'}{R^2 r} - \frac{\sin\varphi}{r^2}\right]\frac{d\varphi}{dX}$$

$$\frac{d\varphi}{dY}\frac{d^2\lambda}{dX\,dY} - \frac{d\lambda}{dY}\frac{d^2\varphi}{dX\,dY} = \frac{d\varphi}{dX}\frac{d^2\lambda}{dY^2} - \frac{d\lambda}{dX}\frac{d^2\varphi}{dY^2} - \left[\frac{R'}{R^2 r} - \frac{\sin\varphi}{r^2}\right]\frac{d\varphi}{dY}$$

En substituant ces expressions ainsi que (8) dans B_2 et B_3 form. (42) on trouve:

$$\left.\begin{aligned}
B_1 &= Rr\left[\frac{d\lambda}{dX}\frac{d^2\varphi}{dX^2} - \frac{d\varphi}{dX}\frac{d^2\lambda}{dX^2} + \frac{r\sin\varphi}{R}\left(\frac{d\lambda}{dX}\right)^3 + \frac{R'}{R}\frac{d\lambda}{dX}\left(\frac{d\varphi}{dX}\right)^2 + 2\frac{R\sin\varphi}{r}\frac{d\lambda}{dX}\left(\frac{d\varphi}{dX}\right)^2\right]\\
B_2 &= 3Rr\left[\frac{d\lambda}{dY}\frac{d^2\varphi}{dX^2} - \frac{d\varphi}{dY}\frac{d^2\lambda}{dX^2} + \frac{r\sin\varphi}{R}\left(\frac{d\lambda}{dX}\right)^2\frac{d\lambda}{dY} + \frac{R'}{R}\frac{d\lambda}{dY}\left(\frac{d\varphi}{dX}\right)^2 + 2\frac{R\sin\varphi}{r}\frac{d\lambda}{dX}\frac{d\varphi}{dX}\frac{d\varphi}{dY}\right]\\
B_3 &= 3Rr\left[\frac{d\lambda}{dX}\frac{d^2\varphi}{dY^2} - \frac{d\varphi}{dX}\frac{d^2\lambda}{dY^2} + \frac{r\sin\varphi}{R}\frac{d\lambda}{dX}\left(\frac{d\lambda}{dY}\right)^2 + \frac{R'}{R}\frac{d\lambda}{dX}\left(\frac{d\varphi}{dY}\right)^2 + 2\frac{R\sin\varphi}{r}\frac{d\lambda}{dY}\frac{d\varphi}{dX}\frac{d\varphi}{dY}\right]\\
B_4 &= Rr\left[\frac{d\lambda}{dY}\frac{d^2\varphi}{dY^2} - \frac{d\varphi}{dY}\frac{d^2\lambda}{dY^2} + \frac{r\sin\varphi}{R}\left(\frac{d\lambda}{dY}\right)^3 + \frac{R'}{R}\frac{d\lambda}{dY}\left(\frac{d\varphi}{dY}\right)^2 + 2\frac{R\sin\varphi}{r}\frac{d\lambda}{dY}\left(\frac{d\varphi}{dY}\right)^2\right]
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

D'une manière analogue on peut, en partant de la relation sous la forme (10), mettre les expressions (46) sous la forme suivante:

$$\left.\begin{aligned}
&= \frac{-1}{R^2 r^2}\left[\left(\frac{dY}{d\varphi}\right)^2\frac{d^2Y}{d\lambda^2} - 2\frac{dY}{d\varphi}\frac{dY}{d\lambda}\frac{d^2Y}{d\varphi\,d\lambda} + \left(\frac{dY}{d\lambda}\right)^2\frac{d^2Y}{d\varphi^2} - \frac{r\sin\varphi}{R}\left(\frac{dY}{d\varphi}\right)^3 - \frac{R'}{R}\frac{dY}{d\varphi}\left(\frac{dY}{d\lambda}\right)^2 - 2\frac{R\sin\varphi}{r}\frac{dY}{d\varphi}\left(\frac{dY}{d\lambda}\right)^2\right]\\
&= \frac{3}{R^2 r^2}\left[\left(\frac{dY}{d\varphi}\right)^2\frac{d^2X}{d\lambda^2} - 2\frac{dY}{d\varphi}\frac{dY}{d\lambda}\frac{d^2X}{d\varphi\,d\lambda} + \left(\frac{dY}{d\lambda}\right)^2\frac{d^2X}{d\varphi^2} - \frac{r\sin\varphi}{R}\left(\frac{dY}{d\varphi}\right)^2\frac{dX}{d\varphi} - \frac{R'}{R}\frac{dX}{d\varphi}\left(\frac{dY}{d\lambda}\right)^2 - 2\frac{R\sin\varphi}{r}\frac{dY}{d\varphi}\frac{dY}{d\lambda}\frac{dX}{d\lambda}\right]\\
&= \frac{-3}{R^2 r^2}\left[\left(\frac{dX}{d\varphi}\right)^2\frac{d^2Y}{d\lambda^2} - 2\frac{dX}{d\varphi}\frac{dX}{d\lambda}\frac{d^2Y}{d\varphi\,d\lambda} + \left(\frac{dX}{d\lambda}\right)^2\frac{d^2Y}{d\varphi^2} - \frac{r\sin\varphi}{R}\frac{dY}{d\varphi}\left(\frac{dX}{d\varphi}\right)^2 - \frac{R'}{R}\frac{dY}{d\varphi}\left(\frac{dX}{d\lambda}\right)^2 - 2\frac{R\sin\varphi}{r}\frac{dX}{d\varphi}\frac{dY}{d\lambda}\frac{dX}{d\lambda}\right]\\
&= \frac{1}{R^2 r^2}\left[\left(\frac{dX}{d\varphi}\right)^2\frac{d^2X}{d\lambda^2} - 2\frac{dX}{d\varphi}\frac{dX}{d\lambda}\frac{d^2X}{d\varphi\,d\lambda} + \left(\frac{dX}{d\lambda}\right)^2\frac{d^2X}{d\varphi^2} - \frac{r\sin\varphi}{R}\left(\frac{dX}{d\varphi}\right)^3 - \frac{R'}{R}\frac{dX}{d\varphi}\left(\frac{dX}{d\lambda}\right)^2 - 2\frac{R\sin\varphi}{r}\frac{dX}{d\varphi}\left(\frac{dX}{d\lambda}\right)^2\right]
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

§ 11. Prenons maintenant quelques autres groupes de projections. Les projections qui ont les formules les plus simples, ce sont les projections cylindriques. Prenons ceux qu'on obtient en développant le cylindre tangent le long de l'équateur. Pour ces projections on a:

$$X = a\lambda \qquad \frac{dY}{d\lambda} = o. \quad \ldots \quad (13)$$

en désignant par a le rayon de l'équateur. De ces relations on déduit immédiatement:

Digitized by Google

$$R\,r\,m^2 = a\frac{dY}{d\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

A l'aide de (13) et (14) les formules (46) donnent:

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= \frac{r\sin\varphi}{R\,a^2}\frac{dY}{d\varphi} \\ B_2 &= o \\ B_3 &= \frac{\frac{R'}{R} + 2\frac{R\sin\varphi}{r}}{\frac{dY}{d\varphi}} - \frac{\frac{d^2Y}{d\varphi^2}}{\left(\frac{dY}{d\varphi}\right)^2} \\ B_4 &= o \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Comme on a ici $B_2 = B_4 = o$ l'expression pour la courbure se réduit à:

$$\frac{dA'}{ds'} = B_1 \sin^3 A' + B_3 \sin A' \cos^2 A'. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

c'est ce qu'on aurait pu prévoir immédiatement à cause de la symétrie par rapport aux méridiens.

Prenons quelques cas particuliers:

I. Pour la projection conforme c'est-à-dire pour la projection de Mercator on a:

$$\frac{dY}{d\varphi} = a\frac{R}{r}$$

d'où l'on déduit:

$$B_1 = B_3 = \frac{\sin\varphi}{a}$$

de sorte qu'on a pour cette projection:

$$\frac{dA'}{ds'} = \frac{\sin\varphi}{a}\sin A'$$

c'est la formule que nous avons démontrée directement pour ce cas au § 9 du mémoire, „*Sur l'emploi de la projection de Mercator pour le calcul d'une triangulation dans le voisinage de l'équateur* (voir le tome I de ces Annales, p. 9)."

La valeur maximum de la courbure pour un point donné est dans ce cas:

$$\frac{\sin\varphi}{a}.$$

II. Pour la projection équivalente on a:

$$\frac{dY}{d\varphi} = \frac{R\,r}{a}$$

d'où l'on tire:

$$B_1 = \frac{r^2\sin\varphi}{a^3} \qquad B_3 = 3\frac{a\sin\varphi}{r^2}$$

Digitized by Google

de sorte que l'expression pour la courbure devient:

$$\frac{d\,A'}{d\,s'} = \frac{\sin\varphi}{a^3\,r^2}\,[r^4 \sin^3 A' + 3\,a^4 \sin A' \cos^2 A'].$$

La valeur maximum s'obtient ici pour:

$$\sin^2 A' = \frac{a^4}{3\,a^4 - r^4} \qquad \cos^2 A' = \frac{2\,a^4 - r^4}{3\,a^4 - r^4}$$

et est égale à:

$$\frac{2\,a^3 \sin\varphi}{r^2\,\sqrt{3\,a^4 - r^4}}.$$

III. Pour la projection plate carrée on a:

$$\frac{d\,Y}{d\,\varphi} = R$$

ce qui donne:

$$B_1 = \frac{r \sin\varphi}{a^2} \qquad B_3 = 2\,\frac{\sin\varphi}{r}$$

d'où il suit pour la courbure:

$$\frac{d\,A'}{d\,s'} = \frac{\sin\varphi}{a^2 r}\,[r^2 \sin^3 A' + 2\,a^2 \sin A' \cos^2 A']$$

Cette expression devient un maximum par rapport à A' pour:

$$\sin^2 A' = \frac{2\,a^2}{6\,a^2 - 3\,r^2} \qquad \cos^2 A' = \frac{4\,a^2 - 3\,r^2}{6\,a^2 - 3\,r^2}$$

et ce maximum est égal à:

$$\frac{4\,\sqrt{2}\,a \sin\varphi}{3\,r\,\sqrt{6\,a^2 - 3\,r^2}}$$

§ 12. Prenons en second lieu les projections coniques obtenues en développant le cône tangent le long du parallèle moyen, pour lequel nous désignerons la latitude par φ_o. Pour ces projections on a:

$$X = (T - S) \sin c\lambda \qquad Y = T - (T - S) \cos c\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

où T et c sont deux constantes savoir:

$$T = N_o \cot\varphi_o \qquad c = \sin\varphi_o$$

et S une fonction de la latitude φ.

Ici encore on a la même symétrie par rapport aux méridiens, de sorte qu'en développant la valeur de la courbure, non pas suivant le sinus et le cosinus de A', mais suivant ceux de $A' + c\,\lambda$, les termes avec les puissances paires du sinus

Digitized by Google

doivent disparaître; en développant les formules (46) on trouve en effet après réduction une expression de la forme:

$$\frac{d\,A'}{d\,s'} = D_1 \sin^3 (A' + c\,\lambda) + D_2 \sin (A' + c\,\lambda) \cos^2 (A' + c\,\lambda).$$

Mais ce développement est obtenu plus facilement à l'aide de la formule (37). Le rapport d'agrandissement le long du méridien est ici:

$$m_1 = \frac{S'}{R}$$

où S' désigne le quotient différentiel de S par rapport à φ. Ce même rapport le long du parallèle est égal à:

$$m_2 = \frac{c\,(T - S)}{r}$$

On aura donc:

$$K = \frac{1}{M^2} = \frac{\cos^2 (A' + c\,\lambda)}{m_1^2} + \frac{\sin^2 (A' + c\,\lambda)}{m_2^2} = \left(\frac{R}{S'}\right)^2 \cos^2 (A' + c\,\lambda) + \left(\frac{r}{c\,(T - S)}\right)^2 \sin^2 (A' + c\,\lambda)$$

pour laquelle nous écrirons pour abréger:

$$K = P \cos^2 (A' + c\,\lambda) + Q \sin^2 (A' + c\,\lambda)$$

et d'où l'on trouve en différentiant par rapport à A':

$$L = \tfrac{1}{2} \frac{d\,K}{d\,A'} = -(P - Q) \sin (A' + c\,\lambda) \cos (A' + c\,\lambda).$$

De ces expressions on tire, en désignant par P' et Q' les quotients différentiels par rapport à S:

$$\frac{d\,K}{d\,z} = \frac{d\,K}{d\,S} \sin (A' + c\,\lambda) - \frac{d\,K}{d\,c\lambda} \frac{\cos (A' + c\,\lambda)}{T - S} = Q' \sin^3 (A' + c\,\lambda) + \left[P' + 2\frac{P - Q}{T - S}\right] \sin (A' + c\,\lambda) \cos^2 (A + c\,\lambda)$$

$$\frac{d\,K}{d\,s'} = \frac{d\,K}{d\,S} \cos (A' + c\,\lambda) + \frac{d\,K}{d\,c\lambda} \frac{\sin (A' + c\,\lambda)}{T - S} = \left[Q' - 2\frac{P - Q}{T - S}\right] \sin^2 (A' + c\,\lambda) \cos (A' + c\,\lambda) + P' \cos^3 (A' + c\,\lambda)$$

$$\frac{d\,L}{d\,s'} = \frac{d\,L}{d\,S} \cos (A' + c\,\lambda) + \frac{d\,L}{d\,c\lambda} \frac{\sin (A' + c\,\lambda)}{T - S} = \frac{P - Q}{T - S} \sin^3 (A' + c\,\lambda) - \left[P' - Q' + \frac{P - Q}{T - S}\right] \sin (A' + c\,\lambda) \cos^2 (A' + c\,\lambda)$$

En mettant ces valeurs dans (37) et en remarquant qu'on a: $m^4 = m_1^2\, m_2^2 = \dfrac{1}{P \cdot Q}$, on trouve après une réduction facile:

$$\frac{d\,A'}{d\,s'} = D_1 \sin^3 (A' + c\,\lambda) + D_3 \sin (A' + c\,\lambda) \cos^2 (A' + c\,\lambda). \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

où:

$$D_1 = -\frac{1}{T - S} + \frac{1}{T - S}\frac{Q}{P} - \frac{Q'}{2\,P}$$

$$D_3 = -\frac{Q'}{Q} + 2\frac{P'}{P}$$

Digitized by Google

ou en remettant pour P et Q leurs valeurs:

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= -\frac{1}{T-S} + \frac{r\,S'\sin\varphi}{R\,c^2\,(T-S)^2} \\ D_3 &= \frac{2\,R\sin\varphi}{r\,S'} - \frac{2}{T-S} + \frac{R'}{R\,S'} - \frac{S''}{S'^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

I. Pour la projection conforme on a:

$$S = T\,(1 - e^{-c\,U})$$

en désignant par U la valeur de l'intégrale:

$$U = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{R}{r}\,d\varphi\,.$$

Avec cette valeur de S on trouve:

$$D_1 = D_3 = \frac{e^{cU}}{T\,c}\,(\sin\varphi - c) = \frac{e^{U\sin\varphi_0}}{r_0}\,(\sin\varphi - \sin\varphi_0).$$

II. Pour la projection équivalente on a:

$$S = T - \sqrt{T^2 - 2\,\frac{V}{c}}$$

en désignant par V la valeur de l'intégrale:

$$V = \int_{\varphi_0}^{\varphi} R\,r\,d\varphi$$

Avec cette valeur de S on trouve:

$$D_1 = \frac{r^2\sin\varphi}{(r_0^2 - 2\,V\,c)^{\frac{1}{2}}} - \frac{c}{(r_0^2 - 2\,V\,c)^{\frac{1}{2}}} = \frac{r^2\sin\varphi - r_0^2\sin\varphi_0 + 2\,V\sin^2\varphi_0}{(r_0^2 - 2\,V\sin\varphi_0)^{\frac{1}{2}}}$$

$$D_3 = 3\left[\frac{\sin\varphi}{r^2}\,\sqrt{r_0^2 - 2\,V\,c} - \frac{c}{\sqrt{r_0^2 - 2\,V\,c}}\right] = 3\,\frac{r_0^2\sin\varphi - 2\,V\sin\varphi\sin\varphi_0 - r^2\sin\varphi_0}{r^2\,\sqrt{r_0^2 - 2\,V\sin\varphi_0}}$$

Pour la sphère on a: $r = a\cos\varphi$, $V = a^2(\sin\varphi - \sin\varphi_0)$; pour ce cas les valeurs de D_1 et D_3 deviennent:

$$D_1 = \frac{\sin\varphi\cos^2\varphi - \sin\varphi_0\cos^2\varphi_0 + 2\sin^2\varphi_0(\sin\varphi - \sin\varphi_0)}{a\,[\cos^2\varphi_0 - 2\sin\varphi_0(\sin\varphi - \sin\varphi_0)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\cos^2\varphi - \sin\varphi\sin\varphi_0 + \sin^2\varphi_0}{[\cos^2\varphi_0 - 2\sin\varphi\sin\varphi_0 + 2\sin^2\varphi_0]^{\frac{1}{2}}}\,\frac{\sin\varphi - \sin\varphi_0}{a}$$

$$D_3 = 3\,\frac{\sin\varphi\cos^2\varphi_0 - \sin\varphi_0\cos^2\varphi - 2\sin\varphi\sin\varphi_0(\sin\varphi - \sin\varphi_0)}{a\cos^2\varphi\,[\cos^2\varphi_0 - 2\sin\varphi_0(\sin\varphi - \sin\varphi_0)]^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= 3\,\frac{\cos^2\varphi - \sin\varphi\sin\varphi_0 + \sin^2\varphi_0}{\cos^2\varphi\,[\cos^2\varphi_0 - 2\sin\varphi\sin\varphi_0 + 2\sin^2\varphi_0]^{\frac{1}{2}}}\,\frac{\sin\varphi - \sin\varphi_0}{a}$$

III. Pour la projection conique équidistante on a:

$$S' = R$$

d'où il suit:

Digitized by Google

$$D_1 = \frac{r \sin \varphi}{c^2 (T - S)^2} - \frac{1}{T - S} = \frac{r \sin \varphi - c^2 (T - S)}{c^2 (T - S)^2}$$

$$D_3 = 2 \frac{\sin \varphi}{r} - \frac{2}{T - S} = 2 \frac{\sin \varphi (T - S) - r}{r (T - S)}$$

En prenant un terrain s'étendant le long du parallèle moyen, on peut développer les valeurs de D_1 et de D_3 suivant les puissances de la différence en latitude $\beta = \varphi - \varphi_o$.

En ne prenant que la première puissance de β, on a:

I. Pour la projection conforme:

$$D_1 = D_3 = \frac{\beta}{N_o} \qquad \frac{d A'}{d s'} = \frac{\beta}{N_o} \sin (A' + c \lambda)$$

II. Pour la projection équivalente:

$$D_1 = \frac{\beta}{N_o} \qquad D_3 = 3 \frac{\beta}{N_o} \qquad \frac{d A'}{d s'} = \frac{\beta}{N_o} \left[\sin^3 (A' + c \lambda) + 3 \sin (A' + c \lambda) \cos^2 (A' + c \lambda) \right]$$

III. Pour la projection équidistante:

$$D_1 = \frac{\beta}{N_o} \qquad D_3 = 2 \frac{\beta}{N_o} \qquad \frac{d A'}{d s'} = \frac{\beta}{N_o} \left[\sin^3 (A' + c \lambda) + 2 \sin (A' + c \lambda) \cos^2 (A' + c \lambda) \right]$$

La première valeur de la courbure est un maximum pour $A' = 90°$ et cette valeur maximum est:

$$\frac{\beta}{N_o}$$

La seconde a ce maximum pour $A' = 45°$ et ce maximum est égal à:

$$\frac{\beta}{N_o} \sqrt{2} = 1{,}4142 \frac{\beta}{N_o}.$$

La troisième enfin donne le maximum pour $\sin^2 A' = \frac{2}{3}$, $\cos^2 A' = \frac{1}{3}$ c'est-à-dire pour $A' + c \lambda = 54°44'$ et ce maximum est égal à:

$$\frac{\beta}{N_o} \frac{4 \sqrt{2}}{3 \sqrt{3}} = 1{,}0887 \frac{\beta}{N_o}.$$

Comme on voit, la valeur maximum de la courbure pour les deux dernières projections est plus grande que pour la projection conforme. On peut démontrer qu'en général pour toutes les projections coniques dans le voisinage du parallèle moyen, le maximum de la courbure est au moins égal, jamais inférieur à la courbure maximum pour la projection conforme.

En effet pour toute projection conique qui ne donne pas de déviation pour les points du parallèle moyen, on peut mettre pour S en le développant suivant les puissances de la différence de latitude β:

$$S = R_o \beta + \tfrac{1}{2} R_o' \beta^2 + \tfrac{1}{6} \left(R_o'' + A \frac{R_o^2}{N_o} \right) \beta^3$$

Digitized by Google

Avec cette expression pour S les formules (19) deviennent:

$$D_1 = \frac{\beta}{N_o} \qquad D_3 = (2 - A)\frac{\beta}{N_o}$$

d'où il suit pour la courbure:

$$\frac{d\,A'}{d\,s'} = \frac{\beta}{N_o}\left[\sin^3(A' + c\,\lambda) + (2 - A)\sin(A' + c\,\lambda)\cos^2(A' + c\,\lambda)\right]$$

Pour la projection conforme on a $A = 1$ d'où il suit:

$$\frac{d\,A'}{d\,s'} = \frac{\beta}{N_o}\sin(A' + c\,\lambda)$$

dont le maximum est:

$$\frac{\beta}{N_o}.$$

Pour toute autre projection on a pour $A' + c\,\lambda = 90°$ la même valeur:

$$\frac{\beta}{N_o}$$

de sorte que pour toutes les projections il y a au moins une direction pour laquelle la courbure est égale à la valeur maximum de la courbure pour la projection conforme. Pour les autres directions la courbure peut être plus grande; c'est ce qui a lieu en effet pour $A > 5$ et pour $A < \frac{1}{2}$. Pour ces cas auxquels appartiennent les deux projections citées plus haut, le maximum de la courbure est égal à:

$$\pm\frac{2(A-2)\sqrt{A-2}}{3\sqrt{3(A-1)}}\frac{\beta}{N_o}$$

Pour la projection équivalente on a $A = -1$ et pour la projection équidistante on a $A = 0$; avec ces valeurs on trouve les expressions données plus haut:

$$\frac{\beta}{N_o}\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\beta}{N_o}\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$$

Pour les valeurs de A comprises entre $\frac{1}{2}$ et 5 le maximum de la courbure est égal à:

$$\frac{\beta}{N_o}.$$

§ 13. Prenons encore les projections à parallèles circulaires données par les formules:

$$X = (T - S)\sin\alpha \qquad \text{et} \qquad Y = T - (T - S)\cos\alpha$$

où T est la même constante que pour les projections coniques, où S est une fonction de φ et α une fonction de φ et de λ.

Digitized by Google

Dans ces projections, dont les projections coniques forment un cas particulier, on n'a plus en général la symétrie dont il était question plus haut. Pourtant il est avantageux de développer ici encore suivant les sinus et cosinus de $(A'+\alpha)$ au lieu de A' et de mettre l'expression pour la courbure sous la forme:

$$\frac{dA'}{ds'} = D_1 \sin^3(A'+\alpha) + D_2 \sin^2(A'+\alpha)\cos(A'+\alpha) + D_3 \sin(A'+\alpha)\cos^2(A'+\alpha) + D_4 \cos^3(A'+\alpha).$$

En partant des expressions (46), on trouve pour ce cas:

$$\left.\begin{aligned}
D_1 &= +\frac{r\,S'\sin\varphi}{R\,(T-S)^2\left(\frac{d\alpha}{d\lambda}\right)^2} - \frac{1}{T-S}\\
D_2 &= -3\frac{r\sin\varphi\frac{d\alpha}{d\varphi}}{R\,(T-S)\left(\frac{d\alpha}{d\lambda}\right)^2} + \frac{\frac{d^2\alpha}{d\lambda^2}}{(T-S)\left(\frac{d\alpha}{d\lambda}\right)^2}\\
D_3 &= +3\frac{r\sin\varphi\left(\frac{d\alpha}{d\varphi}\right)^2}{R\,S'\left(\frac{d\alpha}{d\lambda}\right)^2} + \frac{R'}{R\,S'} + 2\frac{R\sin\varphi}{r\,S'} - \frac{S''}{S'^2} - 2\frac{\frac{d^2\alpha}{d\lambda^2}\frac{d\alpha}{d\varphi}}{S'\left(\frac{d\alpha}{d\lambda}\right)^2} + 2\frac{\frac{d^2\alpha}{d\varphi\,d\lambda}}{S'\frac{d\alpha}{d\lambda}} - \frac{2}{T-S}\\
D_4 &= -\frac{r\sin\varphi\,(T-S)\left(\frac{d\alpha}{d\varphi}\right)^3}{R\,S'^2\left(\frac{d\alpha}{d\lambda}\right)^2} - \frac{R'\,(T-S)\frac{d\alpha}{d\varphi}}{R\,S'^2} - 2\frac{R\sin\varphi\,(T-S)\frac{d\alpha}{d\varphi}}{r\,S'^2} + \frac{(T-S)\frac{d^2\alpha}{d\lambda^2}\left(\frac{d\alpha}{d\varphi}\right)^2}{S'^2\left(\frac{d\alpha}{d\lambda}\right)^2} -\\
&\qquad -2\frac{(T-S)\frac{d^2\alpha}{d\varphi\,d\lambda}\frac{d\alpha}{d\varphi}}{S'^2\frac{d\alpha}{d\lambda}} + \frac{(T-S)\frac{d^2\alpha}{d\varphi^2}}{S'^2}
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

De ces formules on peut déduire facilement les formules du paragraphe précédent en mettant:

$$\alpha = c\,\lambda = \lambda\sin\varphi_0.$$

Pour le cas des projections équivalentes on a ici la relation:

$$\alpha = \frac{R\,r}{S'\,(T-S)}\,\lambda.$$

à l'aide de laquelle les expressions pour D_1, D_2, D_3 et D_4 peuvent être simplifiées un peu.

Prenons seulement le cas spécial de la projection de Bonne; on a alors $S' = R$, d'où l'on tire:

$$\alpha = \frac{r}{T-S}\,\lambda.$$

Avec ces expressions les formules (20) deviennent:

Digitized by Google

$$D_1 = \frac{1}{r}\left(\sin\varphi - \frac{r}{T-S}\right) = \frac{\sin\varphi}{r} - \frac{1}{T-S}$$

$$D_2 = 3\lambda\frac{\sin\varphi}{r}\left(\sin\varphi - \frac{r}{T-S}\right)$$

$$D_3 = 3\lambda^2\frac{\sin\varphi}{r}\left(\sin\varphi - \frac{r}{T-S}\right)^2$$

$$D_4 = \lambda^3\frac{\sin\varphi}{r}\left(\sin\varphi - \frac{r}{T-S}\right)^3 - \frac{\cos\varphi}{R}\lambda,$$

de sorte qu'on trouve pour la projection de Bonne:

$$\frac{d\,A'}{d\,s'} = \frac{\sin\varphi}{r}\left[\sin(A'+\alpha) + \lambda\left(\sin\varphi - \frac{r}{T-S}\right)\cos(A'+\alpha)\right]^2 - \frac{1}{T-S}\sin^3(A'+\alpha) - \frac{\lambda\cos\varphi}{R}\cos^3(A'+\alpha).$$

Pour le méridien central on a: $\lambda = 0$, d'où il suit pour la courbure:

$$\left(\frac{\sin\varphi}{r} - \frac{1}{T-S}\right)\sin^3 A'$$

et pour le parallèle moyen on a: $\sin\varphi = \frac{r}{T-S}$, d'où l'on tire pour la courbure:

$$\frac{\lambda\cos\varphi}{R}\cos^3(A'+\alpha).$$

Pour ces deux lignes la projection de Bonne ne donne pas de déformations pour les angles, mais la courbure des lignes ne disparaît pas.

Pour le cas d'un terrain d'une étendue restreinte on peut développer suivant les puissances de λ et de β; en ne retenant que les termes du premier ordre, on obtient:

$$\frac{d\,A'}{d\,s'} = \frac{\beta}{N_o}\sin^3 A' - \frac{\lambda\cos\varphi_o}{R_o}\cos^3 A'$$

ou en observant qu'on a avec la même approximation $Y = R_o\beta$ et $X = r_o\lambda$:

$$\frac{d\,A'}{d\,s'} = \frac{Y\sin^3 A' - X\cos^3 A'}{N_o R_o}.$$

La valeur maximum de cette expression est obtenue pour $A' = 90°$ ou pour $A' = 0$ suivant que Y ou X est le plus grand. Ce maximum est donc la plus grande des deux valeurs:

$$\frac{Y}{N_o R_o} \text{ et } \frac{X}{N_o R_o}$$

§ 14. Traitons encore le cas des projections zénithales de la sphère. Ici encore nous trouvons pour tous les points une ligne de symétrie, c'est la ligne qui va du point central au point considéré. En désignant par B l'angle que fait cette ligne avec la direction de l'axe des Y, on doit trouver:

Digitized by Google

$$\frac{d\,A'}{d\,s'} = E_1 \sin^3 (A' - B) + E_2 \sin (A' - B) \cos^2 (A' - B)$$

c'est ce qu'on trouve en effet en partant des formules (46); mais ici encore il est plus facile de prendre la formule (37).

En désignant par ϱ la distance du point considéré au point central sur la carte et par α l'angle formé au centre de la sphère par les deux lignes qui vont au point central et au point considéré et enfin par ϱ' et ϱ'' les dérivés de ϱ par rapport à α, on a pour le rapport d'agrandissement le long de la ligne ϱ: $m_1 = \frac{\varrho'}{R}$ et le long de la perpendiculaire sur cette ligne: $m_2 = \frac{\varrho}{R \sin \alpha}$; d'où l'on tire:

$$K = \frac{1}{M^2} = \frac{\cos^2 (A' - B)}{m_1^2} + \frac{\sin^2 (A' - B)}{m_2^2} = \left(\frac{R}{\varrho'}\right)^2 \cos^2 (A' - B) + \left(\frac{R \sin \alpha}{\varrho}\right)^2 \sin^2 (A' - B)$$

ou par abréviation:

$$K = P \cos^2 (A' - B) + Q \sin^2 (A' - B).$$

En différentiant par rapport à A', on trouve:

$$L = \tfrac{1}{2} \frac{d\,K}{d\,A'} = -(P - Q) \sin (A' - B) \cos (A' - B).$$

De ces deux expressions on tire en désignant par P' et Q' les dérivés de P et de Q par rapport à ϱ:

$$\frac{dK}{dz} = \frac{dK}{d\varrho} \sin (A'-B) - \frac{dK}{dB} \frac{\cos (A'-B)}{\varrho} = Q' \sin^3 (A'-B) + \left(P' - 2\frac{P-Q}{\varrho}\right) \sin (A'-B) \cos^2 (A'-B)$$

$$\frac{dK}{ds'} = \frac{dK}{d\varrho} \cos (A'-B) + \frac{dK}{dB} \frac{\sin (A'-B)}{\varrho} = \left(Q' + 2\frac{P-Q}{\varrho}\right) \sin^2 (A'-B) \cos (A'-B) + P' \cos^3 (A'-B)$$

$$\frac{dL}{ds'} = \frac{dL}{d\varrho} \cos (A'-B) + \frac{dL}{dB} \frac{\sin (A'-B)}{\varrho} = -\frac{P-Q}{\varrho} \sin^3 (A'-B) - \left(P'-Q' + \frac{P-Q}{\varrho}\right) \sin (A'-B) \cos^2 (A'-B).$$

En mettant ces valeurs dans (37) et en remarquant qu'on a:

$$m^4 = m_1^2 m_2^2 = \frac{1}{P\,Q}$$

on trouve après réduction:

$$\frac{d\,A'}{d\,s'} = \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{Q}{P\,\varrho} - \frac{Q'}{2\,P}\right) \sin^3 (A' - B) + \left(\frac{P'}{2\,P} - \frac{Q'}{Q}\right) \sin (A' - B) \cos^2 (A' - B) \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Remettons enfin pour P et Q leurs valeurs $\left(\frac{R}{\varrho'}\right)^2$ et $\left(\frac{R \sin \alpha}{\varrho}\right)^2$ nous trouvons:

$$\frac{d\,A'}{d\,s'} = E_1 \sin^3 (A' - B) + E_2 \sin (A' - B) \cos^2 (A' - B)$$

Digitized by Google

où:

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{\varrho} - \frac{\varrho' \sin\alpha\cos\alpha}{\varrho^2} \\ E_3 &= \frac{2}{\varrho} - 2\frac{\cot\alpha}{\varrho'} - \frac{\varrho''}{\varrho'^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

I. Comme cas particulier nous prenons en premier lieu la projection centrale pour laquelle les arcs de grand cercle se projettent comme des lignes droites. On doit donc trouver pour la courbure une valeur nulle. C'est ce qu'on trouve en effet. Pour cette projection on a:

$$\varrho = R \operatorname{tang} \alpha$$

en mettant cette valeur dans (22) on trouve:

$$E_1 = E_3 = 0.$$

II. Prenons en second lieu la projection stéréographique pour laquelle on a:

$$\varrho = 2R \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha$$

Cette projection étant conforme, on doit trouver $E_1 = E_3$. La substitution nous donne en effet:

$$E_1 = E_3 = \frac{\sin\alpha}{2R}.$$

III. Pour la projection équivalente on a:

$$\varrho = 2R \sin \tfrac{1}{2}\alpha$$

ce qui donne:

$$E_1 = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{2R}(3 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha)$$

$$E_3 = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{2R}\frac{3}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}$$

IV. Pour la projection équidistante on a:

$$\varrho = R\alpha$$

d'où il suit:

$$E_1 = \frac{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{R\alpha^2}$$

$$E_3 = \frac{2(\operatorname{tang}\alpha - \alpha)}{R\alpha\operatorname{tang}\alpha}$$

V. La projection orthogonale a pour équation:

$$\varrho = R \sin\alpha.$$

Digitized by Google

Elle donne pour la courbure:

$$E_1 = \frac{\sin \alpha}{R}$$

$$E_3 = \frac{\sin \alpha}{R \cos^2 \alpha}$$

VI. Pour les projections perspectives on a enfin:

$$\varrho = R \sin \alpha \frac{F + R}{F + R \cos \alpha}$$

où F désigne la distance du point de vue au centre de la sphère.

Avec cette valeur de ϱ on trouve:

$$E_1 = \frac{F \sin \alpha}{R (F + R)}$$

$$E_3 = \frac{F (F + R \cos \alpha)^2 \sin \alpha}{R (F + R) (F \cos \alpha + R)^2}$$

A ce dernier groupe appartiennent les projections centrale, stéréographique et orthogonale traitées aux numéros I, II et V. En mettant dans les dernières formules pour F les valeurs:

$$R, \quad 0 \quad \text{et} \quad \infty$$

on retrouve en effet les formules de ces numéros.

Dans le voisinage du point central toutes ces projections présentent une particularité remarquable, c'est que les valeurs de E_1 et E_3 deviennent égales, de sorte que toutes les projections zénithales suivent dans le voisinage de ce point la même loi que les projections conformes, seulement la valeur absolue de la courbure est différente d'une projection à l'autre.

Pour toute projection zénithale on peut poser en développant suivant les puissances de α et en négligeant les termes à partir du cinquième ordre:

$$\varrho = R (\alpha + A \alpha^3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Avec cette valeur de ϱ on trouve:

$$E_1 = E_3 = \frac{\alpha}{R} \left(\frac{2}{3} - 2 A \right)$$

de sorte qu'on a pour la courbure dans le voisinage du point central:

$$\frac{d A'}{d s'} = \frac{\alpha}{R} \left(\frac{2}{3} - 2 A \right) \sin (A' - B) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Dans le voisinage de ce point la courbure de la projection de la ligne géodésique ne diffère donc que par le facteur $(\frac{2}{3} - 2 A)$.

Voici pour les cas traités plus haut les valeurs de ce facteur:

Digitized by Google

I.	Pr.	centrale	$A = \frac{1}{3}$	$\frac{2}{3} - 2A = 0$
II.	»	stéréographique	$A = \frac{1}{12}$	$\frac{2}{3} - 2A = \frac{1}{2}$
III.	»	équivalente	$A = -\frac{1}{24}$	$\frac{2}{3} - 2A = \frac{3}{4}$
IV.	»	équidistante	$A = 0$	$\frac{2}{3} - 2A = \frac{2}{3}$
V.	»	orthogonale	$A = -\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3} - 2A = 1$
VI.	»	perspective	$A = \frac{2R - F}{6(F + R)}$	$\frac{2}{3} - 2A = \frac{F}{F + R}$

§ 15. Prenons en dernier lieu le cas général des projections qui ont un point central sans déformations et qui sont symétriques par rapport au méridien passant par ce point. En développant suivant les puissances de λ et de β, on peut écrire en supprimant les termes à partir du quatrième ordre:

$$\left.\begin{aligned} X &= r_o\lambda - R_o \sin\varphi_o \lambda\beta + \tfrac{1}{2}\left[B\frac{R_o^2 r_o}{N_o R_o} - R_o' \sin\varphi_o - R_o\cos\varphi_o\right]\lambda\beta^2 + \tfrac{1}{6}\left[D\frac{r_o^3}{N_o R_o} - r_o\sin^2\varphi_o\right]\lambda^3 \\ Y &= R_o\beta + \tfrac{1}{2}R_o'\beta^2 + \tfrac{1}{2}r_o\sin\varphi_o\lambda^2 + \tfrac{1}{6}\left[A\frac{R_o^2}{N_o R_o} + R_o''\right]\beta^3 + \tfrac{1}{2}\left[C\frac{R_o r_o^2}{N_o R_o} - R_o\sin^2\varphi_o\right]\beta\lambda^2 \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

où A, B, C et D sont des coefficients qui diffèrent d'une projection à l'autre. A l'aide de ces formules on trouve:

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= (1 - C)\frac{\beta}{N_o} = (1 - C)\frac{Y}{N_o R_o} \\ B_2 &= (D - 2C)\frac{\lambda\cos\varphi_o}{R_o} = (D - 2C)\frac{X}{N_o R_o} \\ B_3 &= (2B - A)\frac{\beta}{N_o} = (2B - A)\frac{Y}{N_o R_o} \\ B_4 &= (B - 1)\frac{\lambda\cos\varphi_o}{R_o} = (B - 1)\frac{X}{N_o R_o} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

de sorte qu'on a pour la courbure de la projection de la ligne géodésique dans le voisinage du point central:

$$\frac{dA'}{ds'} = \frac{1}{N_o R_o}\left[(1-C)\,Y\sin^3 A' + (D-2C)\,X\sin^2 A'\cos A' + (2B-A)\,Y\sin A'\cos^2 A' + (B-1)\,X\cos^3 A'\right]. \quad (27)$$

Rappelons encore que le rapport d'agrandissement des surfaces est donné par:

$$m^2 = \frac{1}{Rr}\left[\frac{dX}{d\lambda}\cdot\frac{dY}{d\varphi} - \frac{dX}{d\varphi}\cdot\frac{dY}{d\lambda}\right]$$

et qu'on trouve pour la plus grande déformation des angles la valeur 2ω en calculant ω par la formule:

$$4\,\mathrm{tang}^2\,\omega = \frac{1}{m^2}\left[\frac{1}{R}\frac{dY}{d\varphi} - \frac{1}{r}\frac{dX}{d\lambda}\right]^2 + \frac{1}{m^2}\left[\frac{1}{R}\frac{dX}{d\varphi} + \frac{1}{r}\frac{dY}{d\lambda}\right]^2.$$

En mettant dans ces formules les valeurs (26) on trouve avec la même approximation:

Digitized by Google

$$m^2 = 1 + \frac{(A+B)\,Y^2 + (C+D)\,X^2}{2\,N_o R_o} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

$$(2\,\omega)^2 = \left[\frac{(A-B)\,Y^2 + (C-D)\,X^2}{2\,N_o R_o}\right]^2 + \left[\frac{(B+C-1)\,X\,Y}{N_o R_o}\right]^2 \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

Pour les projections conformes on doit avoir $\omega = 0$. De la formule (29) nous tirons pour ce cas trois relations entre les quatre coefficients A, B, C et D, savoir:

$$A = B \qquad C = D \qquad B + C = 1.$$

Par suite de ces relations les formules (27) et (28) se reduisent à:

$$\frac{d\,A'}{d\,s'} = \frac{B\,Y \sin A' - C\,X \cos A'}{2\,N_o R_o}$$

$$m^2 = 1 + \frac{B\,Y^2 + C\,X^2}{N_o R_o}$$

Pour les projections équivalentes on doit avoir $m = 1$. La formule (28) donne ici deux relations entre les quatre coefficients, savoir:

$$A + B = 0 \qquad C + D = 0$$

d'où l'on tire en éliminant A et D de (27) et de (29):

$$\frac{d\,A'}{d\,s'} = \frac{1}{N_o R_o}\left[(1-C)\,Y \sin^3 A' - 3\,C\,X \sin^2 A' \cos A' + 3\,B\,Y \sin A' \cos^2 A' + (B-1)\,X \cos^3 A'\right]$$

$$(2\,\omega)^2 = \left[\frac{B\,Y^2 - C\,X^2}{N_o R_o}\right]^2 + \left[\frac{(B+C-1)\,X\,Y}{N_o R_o}\right]^2$$

Pour la projection de Bonne par exemple on a: $B = C = 0$, d'où l'on tire:

$$\frac{d\,A'}{d\,s'} = \frac{Y \sin^3 A' - X \cos^3 A'}{N_o R_o}$$

$$2\,\omega = \frac{X\,Y}{N_o R_o}$$

III. RECHERCHE DES PROJECTIONS DANS LESQUELLES LES LIGNES GÉODÉSIQUES SONT REPRÉSENTÉES PAR DES DROITES.

§ 16. Appliquons maintenant les formules développées à la recherche des projections pour lesquelles la courbure de la projection de la ligne géodésique est nulle; c'est à dire que les lignes géodésiques sont représentées par des droites. Pour la sphère nous savons que la projection centrale ou gnomonique jouit de cette propriété; notre recherche aura donc pour but de savoir d'abord, s'il existe pour les surfaces de révolution une projection analogue et ensuite s'il existe pour la sphère d'autres projections ayant la même propriété.

Digitized by Google

Pour avoir ces projections il suffit d'égaler à zéro la valeur (39) § 6 de la courbure de la projection de la ligne géodésique. Comme cette valeur doit être nulle pour toutes les valeurs de l'angle A', on en tire les quatre équations:

$$B_1 = 0 \qquad B_2 = 0 \qquad B_3 = 0 \qquad B_4 = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

qu'il s'agit d'intégrer. En prenant les valeurs (46) § 8 des quatre quantités B on a des équations trop compliquées pour les intégrer directement. Il faudra commencer par en déduire d'autres plus simples.

Pour obtenir ces nouvelles équations de la manière la plus simple, nous donnerons d'abord une autre expression pour la courbure en l'exprimant au moyen de l'azimut A au lieu de l'angle A' de la carte.

Comme on a:

$$\begin{aligned} \sin A' &= \frac{dX}{d\varphi}\frac{\cos A}{R\,M} + \frac{dX}{d\lambda}\frac{\sin A}{r\,M} \\ \cos A' &= \frac{dY}{d\varphi}\frac{\cos A}{R\,M} + \frac{dY}{d\lambda}\frac{\sin A}{r\,M} \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

où:

$$M = \sqrt{\left\{\left(\frac{dX}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\varphi}\right)^2\right\}\frac{\cos^2 A}{R^2} + 2\left\{\frac{dX}{d\varphi}\cdot\frac{dX}{d\lambda} + \frac{dY}{d\varphi}\cdot\frac{dY}{d\lambda}\right\}\frac{\sin A\cos A}{Rr} + \left\{\left(\frac{dX}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\lambda}\right)^2\right\}\frac{\sin^2 A}{r^2}}$$

exprime le rapport d'agrandissement de la ligne considérée, on peut obtenir cette expression en substituant ces valeurs dans (39), ce qui donne une expression de la forme:

$$\frac{dA'}{ds'} = C_1\frac{\cos^3 A}{R^3 M^3} + C_2\frac{\sin A\cos^2 A}{R^2 r\,M^3} + C_3\frac{\sin^2 A\cos A}{R r^2 M^3} + C_4\frac{\sin A\cos^2 A}{r^3 M^3} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

dans laquelle on a:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= B_1\left(\frac{dX}{d\varphi}\right)^3 + B_2\left(\frac{dX}{d\varphi}\right)^2\frac{dY}{d\varphi} + B_3\frac{dX}{d\varphi}\left(\frac{dY}{d\varphi}\right)^2 + B_4\left(\frac{dY}{d\varphi}\right)^3 \\ C_2 &= 3B_1\left(\frac{dX}{d\varphi}\right)^2\frac{dX}{d\lambda} + B_2\left\{2\frac{dX}{d\varphi}\frac{dY}{d\varphi}\frac{dX}{d\lambda} + \left(\frac{dX}{d\varphi}\right)^2\frac{dY}{d\lambda}\right\} + B_3\left\{\left(\frac{dY}{d\varphi}\right)^2\frac{dX}{d\lambda} + 2\frac{dX}{d\varphi}\frac{dY}{d\varphi}\frac{dY}{d\lambda}\right\} + 3B_4\left(\frac{dY}{d\varphi}\right)^2\frac{dY}{d\lambda} \\ C_3 &= 3B_1\frac{dX}{d\varphi}\left(\frac{dX}{d\lambda}\right)^2 + B_2\left\{2\frac{dX}{d\varphi}\frac{dX}{d\lambda}\frac{dY}{d\lambda} + \frac{dY}{d\varphi}\left(\frac{dX}{d\lambda}\right)^2\right\} + B_3\left\{\frac{dX}{d\varphi}\left(\frac{dY}{d\lambda}\right)^2 + 2\frac{dY}{d\varphi}\frac{dX}{d\lambda}\frac{dY}{d\lambda}\right\} + 3B_3\frac{dY}{d\varphi}\left(\frac{dY}{d\lambda}\right)^2 \\ C_4 &= B_1\left(\frac{dX}{d\lambda}\right)^3 + B_2\left(\frac{dX}{d\lambda}\right)^2\frac{dY}{d\lambda} + B_3\frac{dX}{d\lambda}\left(\frac{dY}{d\lambda}\right)^2 + B_4\left(\frac{dY}{d\lambda}\right)^3 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

ou, en mettant pour B_1, B_2, B_3 et B_4 leurs valeurs d'après (46), on trouve après réduction:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \left[\frac{dY}{d\varphi}\frac{d^2X}{d\varphi^2} - \frac{dX}{d\varphi}\frac{d^2Y}{d\varphi^2}\right] \\ C_2 &= 2\left[\frac{dY}{d\varphi}\frac{d^2X}{d\varphi d\lambda} - \frac{dX}{d\varphi}\frac{d^2Y}{d\varphi d\lambda}\right] + \left[\frac{dY}{d\lambda}\frac{d^2X}{d\varphi^2} - \frac{dX}{d\lambda}\frac{d^2Y}{d\varphi^2}\right] + \left[\frac{R'}{R} + 2\frac{R\sin\varphi}{r}\right]\left[\frac{dY}{d\varphi}\frac{dX}{d\lambda} - \frac{dX}{d\varphi}\frac{dY}{d\lambda}\right] \\ C_3 &= \left[\frac{dY}{d\varphi}\frac{d^2X}{d\lambda^2} - \frac{dX}{d\varphi}\frac{d^2Y}{d\lambda^2}\right] + 2\left[\frac{dY}{d\lambda}\frac{d^2X}{d\varphi d\lambda} - \frac{dX}{d\lambda}\frac{d^2Y}{d\varphi d\lambda}\right] \\ C_4 &= \left[\frac{dY}{d\lambda}\frac{d^2X}{d\lambda^2} - \frac{dX}{d\lambda}\frac{d^2Y}{d\lambda^2}\right] + \frac{r\sin\varphi}{R}\left[\frac{dY}{d\varphi}\frac{dX}{d\lambda} - \frac{dX}{d\varphi}\frac{dY}{d\lambda}\right] \end{aligned}\right\}. \quad (5)$$

Digitized by Google

§ 17. En égalant à zéro l'expression (3) de la courbure, on trouve les quatre équations:

$$C_1 = 0 \qquad C_2 = 0 \qquad C_3 = 0 \qquad C_4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

qui se trouvent maintenant sous une forme plus propre à l'intégration.

La première équation:

$$C_1 = 0$$

peut être mise sous la forme:

$$\frac{\frac{d^2Y}{d\varphi^2}}{\frac{dY}{d\varphi}} = \frac{\frac{d^2X}{d\varphi^2}}{\frac{dX}{d\varphi}}$$

d'où l'on tire en intégrant, d'abord:

$$\frac{dY}{d\varphi} = L\frac{dX}{d\varphi}$$

et puis:

$$Y = K + LX \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

K et L étant deux fonctions de la longitude λ.

Cette relation a une signification très simple, savoir: dans la carte les méridiens sont des droites, ce qui est tout naturel, vu que les méridiens sont des lignes géodésiques.

En différentiant l'équation (7) et en représentant par K', L', K'' et L'' les dérivées de K et de L par rapport à λ, on trouve les relations:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dY}{d\varphi} &= L\frac{dX}{d\varphi} \\
\frac{dY}{d\lambda} &= K' + L'X + L\frac{dX}{d\lambda} \\
\frac{d^2Y}{d\varphi^2} &= L\frac{d^2X}{d\varphi^2} \\
\frac{d^2Y}{d\varphi\, d\lambda} &= L'\frac{dX}{d\varphi} + L\frac{d^2X}{d\varphi\, d\lambda} \\
\frac{d^2Y}{d\lambda^2} &= K'' + L''X + 2L'\frac{dX}{d\lambda} + L\frac{d^2X}{d\lambda^2}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

à l'aide desquelles on peut éliminer l'inconnue Y des trois dernières équations (6).

§ 18. En mettant ces valeurs dans la seconde équation: $C_2 = 0$ elle se reduit à:

$$-2L'\left(\frac{dX}{d\varphi}\right)^2 + (K' + L'X)\frac{d^2X}{d\varphi^2} - \left[\frac{R'}{R} + 2\frac{R\sin\varphi}{r}\right](K' + L'X)\frac{dX}{d\varphi} = 0$$

pour laquelle nous pouvons écrire:

Digitized by Google

$$\frac{\frac{d^2X}{d\varphi^2}}{\frac{dX}{d\varphi}} = 2\frac{L'\frac{dX}{d\varphi}}{K'+L'X} + \frac{R'}{R} + 2\frac{R\sin\varphi}{r}$$

ou en intégrant par rapport à φ:

$$\log\frac{dX}{d\varphi} = 2\log(K'+L'X) + \log R - 2\log r + 3\log F \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

F désignant une fonction de λ.

De cette équation on tire:

$$\frac{dX}{d\varphi} = F^3\frac{R}{r^2}(K'+L'X)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

ou:

$$\frac{\frac{dX}{d\varphi}}{F^3(K'+L'X)^2} = \frac{R}{r^2}$$

ce qui donne en intégrant:

$$\frac{-1}{F^3L'(K'+L'X)} = \int_o^\varphi \frac{R}{r^2}d\varphi - G = S - G \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

G désignant encore une fonction de λ et S la valeur de l'intégrale:

$$S = \int_o^\varphi \frac{R}{r^2}d\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

En résolvant nous trouvons pour X l'expression:

$$X = \frac{1}{F^3L'^2(G-S)} - \frac{K'}{L'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

En la mettant dans (7), on trouve aussi la valeur de Y; mais auparavant nous devons déterminer les quatre fonctions de λ savoir F, G, K et L à l'aide des deux dernières équations (6).

§ 19. En mettant dans l'équation $C_3 = 0$ les valeurs (8), on trouve d'abord:

$$-\left(K''+L''X+2L'\frac{dX}{d\lambda}\right)\frac{dX}{d\varphi} + 2(K'+L'X)\frac{d^2X}{d\varphi\,d\lambda} - 2L'\frac{dX}{d\varphi}\frac{dX}{d\lambda} = 0. \quad \ldots \quad (14)$$

En différentiant par rapport à λ, on tire de (9):

$$\frac{\frac{d^2X}{d\varphi\,d\lambda}}{\frac{dX}{d\varphi}} = 2\frac{K''+L''X+L'\frac{dX}{d\lambda}}{K'+L'X} + 3\frac{F'}{F}$$

Digitized by Google

et en mettant cette valeur de $\frac{d^2X}{d\varphi\, d\lambda}$ dans (14), on a, après réduction:

$$F(K'' + L'' X) + 2F'(K' + L' X) = 0$$

d'où l'on tire:

$$X = -\frac{F K'' + 2F' K'}{F L'' + 2F' L'}.$$

Comme X est en général une fonction de φ et de λ et comme le second membre de l'équation ne contient pas φ, cette valeur de X doit prendre la forme $\frac{0}{0}$ d'où l'on tire:

$$F K'' + 2F' K' = 0 \quad \text{et} \quad F L'' + 2F' L' = 0$$

ou encore:

$$\frac{K''}{K'} + 2\frac{F'}{F} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{L''}{L'} + 2\frac{F'}{F} = 0$$

ce qui donne en intégrant par rapport à λ:

$$K' = \frac{C}{F^2} \qquad L' = \frac{D}{F^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

C et D étant deux constantes.

A l'aide de ces relations l'équation (11) devient:

$$\frac{-F}{D(C + D X)} = S - G \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

d'où l'on tire pour X la valeur:

$$X = \frac{F}{D^2(G - S)} - \frac{C}{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

§ 20. La quatrième équation $C_4 = 0$ donne à l'aide des relations (8):

$$(K' + L' X)\frac{d^2 X}{d\lambda^2} - \left(K'' + L'' X + 2L'\frac{dX}{d\lambda}\right)\frac{dX}{d\lambda} - \frac{r \sin\varphi}{R}(K' + L' X)\frac{dX}{d\varphi} = 0$$

ou en mettant pour $\frac{dX}{d\varphi}$ et pour K' et L' leurs valeurs d'après (10) et (15) et en divisant par le coefficient de $\frac{r \sin\varphi}{R}$:

$$\frac{F\frac{d^2X}{d\lambda^2}}{(C + D X)^2} + 2\frac{F'\frac{dX}{d\lambda}}{(C + D X)^2} - 2\frac{D F\left(\frac{dX}{d\lambda}\right)^2}{(C + D X)^3} - \frac{\sin\varphi}{r} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

La différentiation de (16) deux fois par rapport à λ donne:

Digitized by Google

$$\frac{F\frac{d^2X}{d\lambda^2}}{(C+DX)^2}+2\frac{F'\frac{dX}{d\lambda}}{(C+DX)^2}-2\frac{DF\left(\frac{dX}{d\lambda}\right)^2}{(C+DX)^3}-\frac{F''}{D(C+DX)}=-G''$$

de sorte que (18) se reduit à:

$$\frac{F''}{D(C+DX)}-G''-\frac{\sin\varphi}{r}=0$$

ou en mettant pour $D(C+DX)$ sa valeur tirée de (16):

$$F''S+F\frac{\sin\varphi}{r}=F''G-FG'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Comme le second membre de cette équation ne dépend pas de φ et que le premier s'évanouit pour $\varphi=0$, il doit s'évanouir pour toutes les valeurs de φ; d'où il suit:

$$F''S+F\frac{\sin\varphi}{r}=0 \qquad \text{et} \qquad F''G-FG''=0$$

ou:

$$S\frac{r}{\sin\varphi}=-\frac{F}{F''}=-\frac{G}{G''}$$

Le premier membre de cette équation dépendant seulement de φ, les deux autres de λ, il en suit que les trois membres sont égaux à une même constante que nous représenterons par k^2. Nous trouvons donc:

$$S\frac{r}{\sin\varphi}=k^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

$$F''=-\frac{F}{k^2} \qquad G''=-\frac{G}{k^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

§ 21. L'équation (20) nous donne la condition qui doit être remplie pour que les lignes géodésiques soient représentées par des droites. En remplaçant S par sa valeur (12), on trouve:

$$\int_0^{\varphi}\frac{R}{r^2}d\varphi=k^2\frac{\sin\varphi}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Pour la sphère on a: $R=\text{const}$, $r=R\cos\varphi$ de sorte que dans ce cas il est satisfait à la condition et que la constante k devient égale à l'unité.

L'ellipsoïde ne satisfait pas à cette condition, d'où il suit qu'il n'est pas possible de la projeter, de manière que les lignes géodésiques deviennent des droites.

Il n'y a qu'un seul groupe de surfaces de révolution pour lesquelles il soit possible de trouver une telle projection. Pour obtenir les équations de ces surfaces

Digitized by Google

il faut intégrer l'équation (22). A cette fin différentions cette équation, ce qui nous donne:

$$\frac{R}{r^2} = k^2 \frac{\cos\varphi}{r} - k^2 \frac{r' \sin\varphi}{r^2}$$

ou, en multipliant par $\sin\varphi$ et en remarquant qu'on a:

$$-R \sin\varphi = r'$$

on trouve:

$$\frac{r'}{r} = -k^2 \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{1 - k^2 \sin^2\varphi}$$

ce qui donne en intégrant:

$$r = a\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Pour avoir l'équation du méridien, prenons l'axe de rotation pour l'axe des y et la perpendiculaire pour l'axe des x. On a alors:

$$x = r = a\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

$$dy = -\cot\varphi\, dx = \frac{a k^2 \cos^2\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}\, d\varphi$$

d'où l'on tire:

$$y = a k^2 \int_0^{\varphi} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Cette dernière intégrale ne peut être exprimée qu'à l'aide d'intégrales elliptiques. Pour $k < 1$ on trouve facilement:

$$y = a\,[E(k, \varphi) - (1 - k^2)\, F(k, \varphi)].$$

Pour $k > 1$ on doit poser:

$$k \sin\varphi = \sin\psi$$

et l'on trouve alors:

$$x = a \cos\psi \qquad y = a k\, E\left(\frac{1}{k}, \psi\right).$$

§ 22. Revenons maintenant à la sphère, qui forme un cas particulier des surfaces de révolution trouvées dans le paragraphe précédent. Pour ce cas on a:

$$k = 1 \qquad S = \int \frac{R}{r^2}\, d\varphi = \frac{\sin\varphi}{r} = \frac{\operatorname{tang}\varphi}{R} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Les équations (21) deviennent à présent:

Digitized by Google

$$F'' = -F \qquad G'' = -G$$

d'où l'on tire en intégrant:

$$F = A \sin(\lambda + \alpha) \qquad G = B \sin(\lambda + \beta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 27)$$

A, B, α et β étant quatre constantes.

En mettant cette valeur de F dans (15), on trouve:

$$K' = \frac{C}{A^2 \sin^2(\lambda + \alpha)} \qquad L' = \frac{D}{A^2 \sin^2(\lambda + \alpha)}$$

ou, en intégrant:

$$K = C' - \frac{C}{A^2} \cot(\lambda + \alpha) \qquad L = D' - \frac{D}{A^2} \cot(\lambda + \alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

C' et D' étant des constantes nouvelles.

En mettant les valeurs de F et G dans (17), on trouve pour X:

$$X = \frac{A \sin(\lambda + \alpha)}{D^2 [B \sin(\lambda + \beta) - S]} - \frac{C}{D}$$

et en mettant cette valeur, ainsi que les valeurs de K et de L d'après (28) dans (7), on trouve pour Y:

$$Y = \frac{D\,C' - C\,D'}{D} + \frac{A^2 D' \sin(\lambda + \alpha) - D \cos(\lambda + \alpha)}{A\,D^2 [B \sin(\lambda + \beta) - S]}$$

Afin de pouvoir comparer les valeurs de X et Y avec les formules pour les coordonnées dans la projection centrale, nous prendrons pour β la valeur $-90°$, ce qui n'implique rien à la généralité de la solution et nous mettrons la constante B sous la forme:

$$B = \frac{\cot \varphi_0}{R}$$

où φ_0 est une constante nouvelle. En mettant encore pour S sa valeur (26) nous trouvons enfin:

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{C}{D} - \frac{R}{D^2} \frac{\sin(\lambda + \alpha)}{\cot \varphi_0 \cos \lambda + \operatorname{tang} \varphi} \\ Y &= \frac{D\,C' - C\,D'}{D} - \frac{R}{A\,D^2} \frac{A^2 D' \sin(\lambda + \alpha) - D \cos(\lambda + \alpha)}{\cot \varphi_0 \cos \lambda + \operatorname{tang} \varphi} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Pour la projection centrale, on a, en prenant la projection du pôle comme origine des coordonnées:

$$\left.\begin{aligned} x &= +\frac{R}{\sin \varphi_0} \cdot \frac{\sin \lambda}{\cot \varphi_0 \cos \lambda + \operatorname{tang} \varphi} \\ y &= -\frac{R}{\sin^2 \varphi_0} \cdot \frac{\cos \lambda}{\cot \varphi_0 \cos \lambda + \operatorname{tang} \varphi} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

En comparant les expressions (30) avec (29), on voit que ces dernières peuvent être exprimées par les équations:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} X &= a_1 + b_1 x + c_1 y \\ Y &= a_2 + b_2 x + c_2 y \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

où $a_1\, b_1\, c_1$, $a_2\, b_2\, c_2$ sont six constantes nouvelles qui remplacent les six constantes A, α, C, C', D et D'.

Des équations (31) qui contiennent la solution générale du problème pour le cas de la sphère, on tire immédiatement cette conclusion:

Pour la sphère il n'existe point d'autres projections dans lesquelles les arcs de grand cercle soient représentés par des droites, que la projection centrale et les projections qui en dérivent par une transformation linéaire.

IV. RECHERCHE DES PROJECTIONS DANS LESQUELLES LES LIGNES GÉODÉSIQUES SONT REPRÉSENTÉES PAR DES CERCLES.

§ 23. Prenons encore un cas plus général et cherchons les projections dans lesquelles les lignes géodésiques sont représentées par des cercles.

Lorsque la ligne géodésique est représentée par un cercle la projection de la ligne géodésique aura une courbure constante le long de la projection. Cette propriété est donc exprimée par l'équation:

$$\frac{d^2 A'}{d s'^2} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Pour les projections conformes l'expression de la courbure a la forme la plus simple, savoir:

$$\frac{d A'}{d s'} = \frac{d \log m}{d Y} \sin A' - \frac{d \log m}{d X} \cos A' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

c'est pour cela que nous commencerons notre recherche par ce cas particulier. En différentiant par rapport à s', nous trouvons:

$$\frac{d^2 A'}{d s'^2} = \left(\frac{d^2 \log m}{dX\, dY} \sin A' - \frac{d^2 \log m}{dX^2} \cos A'\right)\frac{d X}{d s'} + \left(\frac{d^2 \log m}{d Y^2} \sin A' - \frac{d^2 \log m}{dX\, dY} \cos A'\right)\frac{d Y}{d s'} + \\ + \left(\frac{d \log m}{dY} \cos A' + \frac{d \log m}{dX} \sin A'\right)\frac{d A'}{d s'}$$

ou en remplaçant $\frac{dX}{ds'}$ et $\frac{dX}{ds'}$ par $\sin A'$ et $\cos A'$ et $\frac{d A'}{d s'}$ par la valeur (2) nous trouvons:

$$\frac{d^2 A'}{d s'^2} = \left[\frac{d^2 \log m}{dX\, dY} + \frac{d \log m}{dX} \cdot \frac{d \log m}{dY}\right] \sin^2 A' - \left[\frac{d^2 \log m}{dX^2} - \frac{d^2 \log m}{dY^2} + \left(\frac{d \log m}{dX}\right)^2 - \left(\frac{d \log m}{dY}\right)^2\right] \sin A' \cos A' - \\ - \left[\frac{d^2 \log m}{dX\, dY} + \frac{d \log m}{dX} \cdot \frac{d \log m}{dY}\right] \cos^2 A'.$$

Digitized by Google

En égalant à zéro cette expression, nous trouvons les deux équations:

$$\frac{d^2\log m}{dX\,dY}+\frac{d\log m}{dX}\cdot\frac{d\log m}{dY}=0$$

et:

$$\frac{d^2\log m}{dX^2}+\left(\frac{d\log m}{dX}\right)^2=\frac{d^2\log m}{dY^2}+\left(\frac{d\log m}{dY}\right)^2$$

qui donnent par intégration:

$$m=\frac{a^2+(X-b)^2+(Y-c)^2}{P^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

a, b, c et P étant des constantes.

Cette relation peut être mise sous la forme plus simple:

$$m=\frac{a^2+X^2+Y^2}{P^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

en prenant pour origine des coordonnées le point central de la carte.

Comme les méridiens sont des lignes géodésiques, les projections dont nous nous occupons ici doivent appartenir au groupe désigné comme *projection de Lagrange*. En prenant le point central comme origine et le méridien par ce point comme axe des Y ces projections sont données par [1]):

$$X=A\,\frac{\mathrm{Ch}\,\theta\sin c\,\lambda}{\mathrm{Ch}\,(2\,\theta+c\,U)+\cos c\,\lambda}$$

$$Y=A\,\frac{\mathrm{Sh}\,(\theta+c\,U)-\mathrm{Sh}\,\theta\cos c\,\lambda}{\mathrm{Ch}\,(2\,\theta+c\,U)+\cos c\,\lambda}$$

et il nous reste à examiner sous quelles conditions ces équations satisfont à la relation (4).

A l'aide de ces formules nous trouvons:

$$m=\frac{1}{r}\sqrt{\left(\frac{dX}{d\lambda}\right)^2+\left(\frac{dY}{d\lambda}\right)^2}=\frac{A\,c\,\mathrm{Ch}\,\theta}{r\,[\mathrm{Ch}\,(2\,\theta+c\,U)+\cos c\,\lambda]}$$

et:

$$m=\frac{a^2+X^2+Y^2}{P^2}=\frac{a^2}{P^2}+\frac{A^2}{P^2}\cdot\frac{\mathrm{Sh}^2\,(\theta+c\,U)-2\,\mathrm{Sh}\,(\theta+c\,U)\,\mathrm{Sh}\,\theta\cos c\,\lambda+\mathrm{Ch}^2\theta-\cos^2 c\,\lambda}{[\mathrm{Ch}\,(2\,\theta+c\,U)+\cos c\,\lambda]^2}$$

ou, en égalant ces deux formes pour le rapport d'agrandissement, en chassant les dénominateurs et en rangeant par rapport aux puissances de $\cos c\,\lambda$:

---

[1]) Ces formules sont obtenues en éliminant α entre les équations (20') et (29) au chapitre III de mes études sur les projections des cartes géographiques et en remplaçant $\frac{2\,r_0\,\mathrm{Ch}\,\theta}{c}$ par A. (Voir: Studiën over Kaartprojectiën, Nieuw Archief voor wiskunde. Deel VIII. Amsterdam 1882).

Digitized by Google

$$\left[\frac{A\,c\,\mathrm{Ch}\,\theta}{r}\,\mathrm{Ch}\,(2\theta+c\,U)-\frac{a^2}{P^2}\,\mathrm{Ch}^2\,(2\theta+c\,U)-\frac{A^2}{P^2}\left\{\mathrm{Sh}^2\,(\theta+c\,U)+\mathrm{Ch}^2\,\theta\right\}\right]+$$
$$+\left[\frac{A\,c\,\mathrm{Ch}\,\theta}{r}-2\,\frac{a^2}{P^2}\,\mathrm{Ch}\,(2\theta+c\,U)+2\,\frac{A^2}{P^2}\,\mathrm{Sh}\,(\theta+c\,U)\,\mathrm{Sh}\,\theta\right]\cos c\,\lambda-\left[\frac{a^2}{P^2}-\frac{A^2}{P^2}\right]\cos^2 c\,\lambda=0.$$

Comme toutes les valeurs de λ doivent satisfaire à cette équation, les trois expressions entre les crochets carrés doivent être égales à zéro, d'où l'on trouve trois relations, qui se reduisent facilement aux deux suivantes:

$$a=A$$

et:

$$r\,\mathrm{Ch}\,(\theta+c\,U)=\frac{P^2 c}{2\,A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

La première détermine la constante a et la seconde donne une condition qui doit être remplie, pour que la projection jouisse de la propriété que les lignes géodésiques sont représentées par des cercles.

En différentiant cette équation par rapport à φ, on trouve:

$$-R\sin\varphi\,\mathrm{Ch}\,(\theta+c\,U)+r\,c\,\mathrm{Sh}\,(\theta+c\,U)\frac{R}{r}=0$$

d'où l'on tire:

$$r\,\mathrm{Sh}\,(\theta+c\,U)=\frac{r}{c}\,\mathrm{Ch}\,(\theta+c\,U)\sin\varphi=\frac{P^2}{2A}\sin\varphi$$

ou en éliminant U entre cette équation et (5):

$$r=\frac{P^2}{2A}\sqrt{c^2-\sin^2\varphi}$$

ce qui est la même relation que nous avons trouvée dans le paragraphe 21. Donc: *pour les surfaces de révolution il n'est pas possible de trouver une projection qui soit conforme et pour laquelle les lignes géodésiques soient représentées par des cercles qu'à condition qu'elle satisfasse à la relation:*

$$r=\frac{P^2}{2A}\sqrt{c^2-\sin^2\varphi}.$$

L'ellipsoïde de révolution n'y satisfait pas, mais la sphère en est un cas particulier. Elle est obtenue en prenant $c=1$, ce qui correspond à la projection stéréographique.

Donc: *parmi les projections conformes de la sphère il n'y a que la projection stéréographique pour laquelle les arcs de grand cercle soient représentés par des cercles.*

§ 24. Prenons maintenant la formule générale pour une projection quelconque savoir:

$$\frac{d\,A'}{d\,s'}=B_1\sin^3A'+B_2\sin^2A'\cos A'+B_3\sin A'\cos^2A'+B_4\cos^3A' \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Digitized by Google

en la différentiant par rapport à s' on trouve:

$$\frac{d^2A'}{ds'^2}=\left[\frac{dB_1}{dX}\sin^3A'+\frac{dB_2}{dX}\sin^2A'\cos A'+\frac{dB_3}{dX}\sin A'\cos^2A'+\frac{dB_4}{dX}\cos^3A'\right]\frac{dX}{ds'}+$$
$$+\left[\frac{dB_1}{dY}\sin^3A'+\frac{dB_2}{dY}\sin^2A'\cos A'+\frac{dB_3}{dY}\sin A'\cos^2A'+\frac{dB_4}{dY}\cos^3A'\right]\frac{dY}{ds'}+$$
$$+\left[-B_2\sin^3A'+(3B_1-2B_3)\sin^2A'\cos A'+(2B_2-3B_4)\sin A'\cos^2A'+B_3\cos^3A'\right]\frac{dA'}{ds'}$$

ou, en remplaçant $\frac{dX}{ds'}$ et $\frac{dY}{ds'}$ par leurs valeurs $\sin A'$ et $\cos A'$ et $\frac{dA'}{ds'}$ par la valeur (6) et en ordonnant suivant les puissances de $\sin A'$:

$$\frac{d^2A'}{ds'^2}=\left[\frac{dB_1}{dX}-B_1B_2\right]\sin^6A'+\left[\frac{dB_2}{dX}+\frac{dB_1}{dY}+3B_1^2-B_2^2-2B_1B_3\right]\sin^5A'\cos A'+$$
$$+\left[\frac{dB_1}{dX}+\frac{dB_3}{dX}+\frac{dB_2}{dY}+5B_1B_2-3B_2B_3-3B_1B_4\right]\sin^4A'\cos^2A'+$$
$$+\left[\frac{dB_2}{dX}+\frac{dB_4}{dX}+\frac{dB_1}{dY}+\frac{dB_3}{dY}+4B_1B_3+2B_2^2-2B_3^2-4B_2B_4\right]\sin^3A'\cos^3A'+$$
$$+\left[\frac{dB_3}{dX}+\frac{dB_2}{dY}+\frac{dB_4}{dY}+3B_1B_4+3B_2B_3-5B_3B_4\right]\sin^2A'\cos^4A'+$$
$$+\left[\frac{dB_4}{dX}+\frac{dB_3}{dY}+2B_2B_4+B_3^2-3B_4^2\right]\sin A'\cos^5A'+\left[\frac{dB_4}{dY}+B_3B_4\right]\cos^6A'$$

Pour avoir une projection dans laquelle les lignes géodésiques sont représentées par des cercles, il faut que cette expression soit égale à zéro pour toutes les valeurs de A', d'où il suit que les 7 coefficients des différentes puissances de $\sin A'$ et $\cos A'$ doivent être égaux à zéro. De cette manière on obtient 7 équations, qui se réduisent facilement aux 5 suivantes:

$$\left.\begin{aligned}B_1&=B_3\\B_2&=B_4\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(7)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dB_1}{dX}&=+B_1B_2\\\frac{dB_2}{dY}&=-B_1B_2\\\frac{dB_2}{dX}+\frac{dB_1}{dY}&=B_2^2-B_1^2\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(8)$$

Les deux premières montrent que dans ce cas la courbure suit la même loi très simple des projections conformes, savoir:

$$\frac{dA'}{ds'}=B_1\sin A'+B_2\cos A'.$$

Les trois autres donnent par intégration:

Digitized by Google

$$B_1 = \frac{2(Y-c)}{a^2+(X-b)^2+(X-c)^2}$$
$$B_2 = \frac{-2(X-b)}{a^2+(X-b)^2+(X-c)^2}$$

où a, b et c sont trois constantes.

Les deux dernières de ces constantes peuvent être égalées à zéro en faisant un choix déterminé pour l'origine des coordonnées de la carte, de sorte que les équations à intégrer deviennent:

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= \frac{2Y}{a^2+X^2+Y^2} \\ B_2 &= \frac{-2X}{a^2+X^2+Y^2} \\ B_3 &= \frac{2Y}{a^2+X^2+Y^2} \\ B_4 &= \frac{-2X}{a^2+X^2+Y^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

où B_1, B_2, B_3 et B_4 représentent les valeurs (42) § 7 ou (46) § 8.

§ 25. Les équations (9) ont une forme très compliquée, qui rend l'intégration difficile sinon impossible. Pour en déduire d'autres équations plus simples nous suivrons le même chemin qu'au paragraphe 16. Pour cela substituons dans les formules (4) de ce paragraphe les valeurs trouvées pour B_1, B_2, B_3 et B_4; nous trouvons alors:

$$C_1 = 2\frac{Y\frac{dX}{d\varphi} - X\frac{dY}{d\varphi}}{a^2+X^2+Y^2}\left[\left(\frac{dX}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dY}{d\varphi}\right)^2\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$C_2 = 4\frac{Y\frac{dX}{d\varphi} - X\frac{dY}{d\varphi}}{a^2+X^2+Y^2}\left[\frac{dX}{d\varphi}\frac{dX}{d\lambda}+\frac{dY}{d\varphi}\frac{dY}{d\lambda}\right] + 2\frac{Y\frac{dX}{d\lambda} - X\frac{dY}{d\lambda}}{a^2+X^2+Y^2}\left[\left(\frac{dX}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dY}{d\varphi}\right)^2\right] \quad \ldots \quad (11)$$

$$C_3 = 2\frac{Y\frac{dX}{d\varphi} - X\frac{dY}{d\varphi}}{a^2+X^2+Y^2}\left[\left(\frac{dX}{d\lambda}\right)^2+\left(\frac{dY}{d\lambda}\right)^2\right] + 4\frac{Y\frac{dX}{d\lambda} - X\frac{dY}{d\lambda}}{a^2+X^2+Y^2}\left[\frac{dX}{d\varphi}\frac{dX}{d\lambda}+\frac{dY}{d\varphi}\frac{dY}{d\lambda}\right] \quad \ldots \quad (12)$$

$$C_4 = 2\frac{Y\frac{dX}{d\lambda} - X\frac{dY}{d\lambda}}{a^2+X^2+Y^2}\left[\left(\frac{dX}{d\lambda}\right)^2+\left(\frac{dY}{d\lambda}\right)^2\right] \quad \ldots \quad (13)$$

où C_1, C_2, C_3 et C_4 désignent les expressions (5) du paragraphe 16.

Ces quatre équations ont encore une forme trop compliquée pour l'intégration directe; mais elles peuvent être intégrées en remarquant que les méridiens étant des lignes géodésiques doivent être représentés par des cercles.

En désignant par ϱ le rayon, par $-p$ et $-q$ les coordonnées du centre d'un de ces cercles et par α l'angle que fait le rayon avec l'axe des X pour un point quelconque du méridien, nous aurons pour les coordonnées de ce point:

Digitized by Google

$$X = \varrho \cos \alpha - p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

$$Y = \varrho \sin \alpha - q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

où p, q et ϱ sont des fonctions de λ seul, et α une fonction de φ et de λ, et le problème est réduit à la recherche des expressions pour ϱ, p, q et α qui satisfont aux équations (10)—(13).

§ 26. La substitution de (14) et (15) dans l'équation (10) donne immédiatement ce résultat très simple:

$$\varrho^2 = a^2 + p^2 + q^2 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

d'où l'on tire en différentiant par rapport à λ et en désignant les dérivées par des accents:

$$\varrho \varrho' = p p' + q q' . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

§ 27. L'équation (11) donne maintenant après réduction:

$$\frac{\frac{d^2\alpha}{d\varphi^2}}{\frac{d\alpha}{d\varphi}} - \frac{R'}{R} - 2\frac{R \sin \varphi}{r} = \left[2 \frac{p' \sin \alpha - q' \cos \alpha}{\varrho' - p' \cos \alpha - q' \sin \alpha} - \frac{p \sin \alpha - q \cos \alpha}{\varrho - p \cos \alpha - q \sin \alpha} \right] \frac{d\alpha}{d\varphi}$$

d'où l'on tire en intégrant:

$$\log \frac{d\alpha}{d\varphi} - \log R + 2 \log r = 2 \log (\varrho' - p' \cos \alpha - q' \sin \alpha) - \log (\varrho - p \cos \alpha - q \sin \alpha) + \text{const.}$$

En mettant la constante qui est fonction de λ sous la forme: $\log H^3\varrho$ nous trouvons en résolvant:

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{(\varrho' - p' \cos \alpha - q' \sin \alpha)^2}{\varrho - p \cos \alpha - q \sin \alpha} \cdot \frac{R}{r^2} H^3\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

En mettant cette équation sous la forme:

$$\frac{\varrho - p \cos \alpha - q \sin \alpha}{(\varrho' - p' \cos \alpha - q' \sin \alpha)^2} \cdot \frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{R}{r^2} H^3\varrho$$

nous pouvons, en tenant compte de la relation (17), intégrer une seconde fois par rapport à φ, ce qui donne:

$$\frac{(\varrho + p) \sin \alpha - q (1 + \cos \alpha)}{(p' + \varrho') (p' \cos \alpha + q' \sin \alpha - p')} = H^3\varrho \int_0^{\varphi} \frac{R}{r^2} d\varphi + \text{const.}$$

En mettant la constante qui est fonction de λ sous la forme: $-G H^3\varrho$ et en désignant comme au paragraphe 18 par S l'intégrale:

$$S = \int_0^{\varphi} \frac{R}{r^2} d\varphi . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Digitized by Google

cette équation peut être mise sous la forme:

$$\frac{(\varrho + p)\sin\alpha - q(1+\cos\alpha)}{(p'+\varrho')(p'\cos\alpha + q'\sin\alpha - p')} = H^3\varrho(S - G) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

par laquelle α est exprimé au moyen d'une fonction connue de φ et par cinq fonctions inconnues de λ savoir: ϱ, p, q, H et G. Pour déterminer ces fonctions nous avons les équations (12) et (13) avec l'expression (16) pour ϱ.

§ 27. L'équation (12) se réduit maintenant à l'aide des relations (14)—(18) à:

$$\frac{p\,p'' + q\,q'' - \varrho\,p''\cos\alpha - \varrho\,q''\sin\alpha}{\varrho' - p'\cos\alpha - q'\sin\alpha} + 2\varrho\frac{H'}{H} = 0$$

d'où l'on tire, en tenant compte des relations (14)—(17):

$$\frac{p\cos\alpha - p}{\varrho\sin\alpha - q} = \frac{X}{Y} = -\frac{q'' + 2\frac{H'}{H}q'}{p'' + 2\frac{H'}{H}p'}.$$

Comme le dernier membre ne contient que λ, cette valeur de $\frac{X}{Y}$ doit se mettre sous la forme $\frac{0}{0}$, d'où l'on tire:

$$p'' + 2\frac{H'}{H}p' = 0 \qquad \text{et} \qquad q'' + 2\frac{H'}{H}q' = 0.$$

L'intégration de ces deux équations donne:

$$p' = \frac{C}{H^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

$$q' = \frac{D}{H^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

C et D étant deux constantes.

En divisant ces deux équations l'une par l'autre on trouve:

$$\frac{p'}{q'} = \frac{C}{D} = \text{const.}$$

ce qui veut dire que les centres des cercles qui représentent les méridiens sont tous situés sur une même droite. On peut profiter de cette circonstance pour simplifier les formules. En prenant l'axe des X parallel à cette droite, la valeur de q devient constante; de sorte qu'on a:

$$q' = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

et que l'équation (17) se reduit à:

$$\varrho\,\varrho' = p\,p' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Digitized by Google

§ 28. En tenant compte des relations trouvées jusqu'ici, l'équation (13) se reduit à:

$$-H''(S-G)-HG''+\frac{q}{H^2\varrho^3}-H\frac{\sin\varphi}{r}=0.$$

En l'écrivant sous la forme:

$$H''G-HG''+\frac{q}{H^2\varrho^3}=\frac{\sin\varphi}{r}H+SH''$$

le premier membre dépend de λ seul, tandis que le second dépend aussi de φ; comme il est égal à zéro pour $\varphi=0$, il doit l'être pour toutes les valeurs de φ, d'où:

$$H''G-HG''+\frac{q}{H^2\varrho^3}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

et:

$$\frac{\sin\varphi}{r}H+SH''=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

En mettant cette dernière équation sous la forme:

$$\frac{r}{\sin\varphi}S=\frac{r}{\sin\varphi}\int_0^{\varphi}\frac{R}{r^2}\,d\varphi=-\frac{H}{H''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

le premier membre est fonction de φ, le second de λ; ils doivent donc être tous les deux égaux à une même constante. Nous trouvons donc la même relation qu'au paragraphe 21, de sorte qu'*il n'est pas possible de trouver pour une surface de révolution quelconque une projection dans laquelle les lignes géodésiques soient représentées par des cercles;* ce n'est possible que pour les surfaces qui satisfont aux relations trouvées dans le paragraphe 21.

La sphère satisfait à ces relations et c'est pour cette surface que nous poursuivrons l'intégration.

Dans ce cas l'équation (26) devient:

$$H+H''=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

et l'équation (25) se réduit maintenant à:

$$G+G''=\frac{q}{H^3\varrho^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

L'équation (28) donne par intégration:

$$H=A\sin(\lambda+\beta)$$

où A et β sont des constantes, mais la seconde de ces constantes peut être égalée à zéro en fixant le choix du premier méridien, de sorte qu'on peut écrire:

$$H=A\sin\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Digitized by Google

En mettant cette valeur dans (21), on trouve:

$$p' = \frac{C}{A^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \lambda}$$

ou, en intégrant:

$$p = B - \frac{C}{A^2} \cot \lambda. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (31)$$

B étant une constante.

L'équation (16) donne maintenant pour ϱ:

$$\varrho = \sqrt{a^2 + p^2 + q^2} = \sqrt{a^2 + q^2 + B^2 - 2\frac{BC}{A^2}\cot \lambda + \frac{C^2}{A^4}\cot^2 \lambda}. \quad \ldots \quad (32)$$

En mettant cette valeur de ϱ ainsi que la valeur de H dans (29), on trouve:

$$G + G'' = \frac{q}{\left[(a^2 + q^2 + B^2) A^2 \sin^2 \lambda - 2 B C \sin \lambda \cos \lambda + \frac{C^2}{A^2} \cos^2 \lambda\right]^{\frac{3}{2}}}$$

ce qui donne en intégrant:

$$G = E \sin \lambda + F \cos \lambda + q \frac{\sqrt{(a^2 + q^2 + B^2) A^2 \sin^2 \lambda - 2 B C \sin \lambda \cos \lambda + \frac{C^2}{A^2} \cos^2 \lambda}}{C^2 (a^2 + q^2)} =$$

$$= E \sin \lambda + F \cos \lambda + q \frac{A}{C^2} \frac{\varrho \sin \lambda}{a^2 + q^2}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (33)$$

E et F étant deux constantes.

§ 29. Toutes les équations étant intégrées, il ne s'agit plus que de réunir les résultats obtenus et de les mettre sous une forme convenable. Pour cela nous nous laisserons guider par les formules pour la projection stéréographique, pour laquelle on a:

$$\varrho = \frac{2R}{\cos \varphi_0 \sin \lambda} \qquad p = \frac{2R}{\cos \varphi} \cot \lambda \qquad q = 2R \operatorname{tang} \varphi_0 \qquad a = 2R$$

$$X = 2R \frac{\cos \varphi \sin \lambda}{1 + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \lambda}$$

$$Y = 2R \frac{\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \lambda}{1 + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \lambda}$$

Pour q, qui est une constante, on peut mettre, en désignant par ψ_0 une nouvelle constante:

$$q = a \operatorname{tang} \psi_0. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

En faisant $\frac{C}{A^2} = -\frac{a c}{\cos \psi_0}$ et $B = \frac{a b}{\cos \psi_0}$ l'équation (31) donne:

$$p = \frac{a}{\cos \psi_0} (b + c \cot \lambda)$$

Digitized by Google

ANNALES

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

DE

DELFT.

TOME II

1886

LEIDE. — E. J. BRILL.
1886.

Digitized by Google

COMITÉ DE RÉDACTION:

A. C. OUDEMANS Jr. *Président.*
Th. H. BEHRENS.
G. J. MORRE.
Ch. M. SCHOLS.
J. A. SNIJDERS C.Jz.

MEMBRE HONORAIRE:

J. BOSSCHA.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

J. BOSSCHA. Relation des expériences qui ont servi à la construction de deux mètres étalons en platine iridié, comparés directement avec le Mètre des Archives. Seconde Partie.

V. Comparaisons des mètres n°. 19, n°. 23 et n°. 27 entre eux et avec le Mètre des Archives. 1.
VI. Nouvelle vérification des étalons n°. 19, n°. 23 et n°. 27 . . . . . 67.

Annexes.

Note I. J. BOSSCHA. Analyse des erreurs causées, dans les mesures micrométriques, par une mise au point défectueuse . . . . . 89.
Note II. A. C. OUDEMANS. Analyse du métal des règles . . . . . 112.
Sommaire . . . . . 116.

CH. M. SCHOLS. Théorie des erreurs dans le plan et dans 'espace.

I. Introduction . . . . . 123.
II. Propriétés générales des erreurs . . . . . 124.
III. L'erreur résultante . . . . . 136.
IV. La loi de l'erreur résultante . . . . . 141.
V. La loi limite. . . . . 147.
VI. Discussion des lois limites . . . . . 152.
VII. Applications . . . . . 162.
Note additionnelle . . . . . 175.

CH. M. SCHOLS. La courbure de la projection de la ligne géodésique.

I. Formules générales . . . . . 179.
II. Applications à diverses projections . . . . . 191.
III. Recherche des projections dans lesquelles les lignes géodésiques sont représentées par des droites. . . . . 206.
IV. Recherche des projections dans lesquelles les lignes géodésiques sont représentées par des cercles . . . . . 214.

Digitized by Google

Digitized by Google

ou, en posant:

$$b + c \cot \lambda = \cot \omega \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (35)$$

où ω est une fonction auxiliaire:

$$p = \frac{a}{\cos \psi_o} \cot \omega \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (36)$$

Avec ces expressions (32) donne:

$$\varrho = \frac{a}{\cos \psi_o \sin \omega} \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (37)$$

En mettant dans (20) les valeurs de ϱ', p', q' et H d'après (21), (23), (24) et (30) on trouve:

$$\frac{\varrho}{\varrho + p} \cdot \frac{(\varrho + p) \sin \alpha - q (1 + \cos \alpha)}{\varrho \cos \alpha - p} = \frac{C^2}{A \sin \lambda} \left[S - G \right]$$

et en remplaçant S et G par leurs valeurs d'après (19) et (33):

$$\frac{\varrho}{\varrho + p} \frac{(\varrho + p) \sin \alpha - q (1 + \cos \alpha)}{\varrho \cos \alpha - p} = \frac{C^2}{A \sin \lambda} \left[\frac{\operatorname{tang} \varphi}{R} - E \sin \lambda - F \cos \lambda \right] - \frac{\varrho q}{a^2 + q^2}.$$

Si maintenant nous mettons au lieu de $\frac{C^2}{A}$, de E et de F:

$$\frac{C^2}{A} = R g \cos \psi_o$$

$$E = - \frac{A}{C^2} e \cos \psi_o = - \frac{e}{R g}$$

$$F = - \frac{A}{C^2} f \cos \psi_o = - \frac{f}{R g}$$

et si nous posons:

$$g \frac{\operatorname{tang} \varphi}{\sin \lambda} + e + f \cot \lambda = \frac{\operatorname{tang} \psi}{\sin \omega} \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (38)$$

où e, f et g sont de nouvelles constantes et où ψ est une nouvelle fonction auxiliaire, la dernière équation devient:

$$\frac{\varrho}{\varrho + p} \cdot \frac{(\varrho + p) \sin \alpha - q (1 + \cos \alpha)}{\varrho \cos \alpha - p} = \frac{\operatorname{tang} \psi}{\sin \omega} \cos \psi_o - \frac{\varrho q}{a^2 + q^2} \ldots \ldots \quad (39)$$

De cette équation on peut trouver la valeur de α et en la mettant dans (14) et (15), les valeurs de X et Y. Mais il est plus facile d'éliminer entre ces trois équations l'angle α et de résoudre ensuite par rapport à X et à Y. Des équations (14) et (15) on tire:

$$\sin \alpha = \frac{Y + q}{\varrho} \qquad \cos \alpha = \frac{X + p}{\varrho}$$

en les mettant dans (39) on trouve:

$$\frac{Y}{X} - \frac{\varrho}{\varrho + p} = \frac{\operatorname{tang} \psi}{\sin \omega} \cos \psi_o - \frac{q \varrho}{a^2 + q^2}$$

Digitized by Google

ou en mettant pour p, q et ϱ les valeurs (34), (36) et (37):

$$\frac{Y}{X} = \frac{\operatorname{tang}\psi}{\sin\omega}\cos\varphi_0 - \cot\omega\sin\psi_0 = \frac{\sin\psi\cos\psi_0 - \cos\psi\sin\psi_0\cos\omega}{\cos\psi\sin\omega} \quad \ldots\ldots \quad (40)$$

En éliminant α de (14) et (15) on a:

$$X^2 + 2pX + Y^2 + 2qY = \varrho^2 - p^2 - q^2 = a^2$$

en y mettant pour p et q leurs valeurs et en éliminant Y au moyen de (40) on trouve après réduction:

$$\frac{1 - (\sin\psi\sin\psi_0 + \cos\psi\cos\psi_0\cos\omega)^2}{\sin^2\omega\cos^2\psi} X^2 + 2\frac{\sin\psi\sin\psi_0 + \cos\psi\cos\psi_0\cos\omega}{\sin\omega\cos\psi} aX = a^2$$

d'où l'on tire en résolvant:

$$X = a\frac{\cos\psi\sin\omega}{1 + \sin\psi\sin\psi_0 + \cos\psi\cos\psi_0\cos\omega} \quad \ldots\ldots \quad (41)$$

et en multipliant par (40):

$$Y = a\frac{\sin\psi\cos\psi_0 - \cos\psi\sin\psi_0\cos\omega}{1 + \sin\psi\sin\psi_0 + \cos\psi\cos\psi_0\cos\omega} \quad \ldots\ldots \quad (42)$$

Ces formules sont identiques avec celles de la projection stéréographique, lorsqu'on désigne par ψ la latitude et par ω la longitude; d'où nous voyons que *pour avoir les projections dans lesquelles les arcs de grand cercle sont représentés par des cercles, il suffit de transformer les figures sur la sphère à l'aide des deux formules:*

$$\left.\begin{aligned} b + c\cot\lambda &= \cot\omega \\ g\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\sin\lambda} + e + f\cot\lambda &= \frac{\operatorname{tang}\psi}{\sin\omega} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (43)$$

où b, c, e, f et g sont des constantes, et de la projeter ensuite suivant la projection stéréographique.

Il y a pourtant un groupe de projections qui nous échappent de cette manière, ce sont les projections dans lesquelles les arcs de grand cercle sont représentés par des droites, parce que dans ce cas plusieurs des constantes deviennent infiniment grandes, de sorte que les équations prennent une forme indéterminée. Nous retrouverons ces projections après avoir mises sous une autre forme les équations générales.

§ 30. La transformation à l'aide des formules (43) a une signification très simple L'équation d'un grand cercle de la sphère est:

$$A\sin\varphi + B\cos\varphi\sin\lambda + C\cos\varphi\cos\lambda = 0 \quad \ldots\ldots \quad (44)$$

En éliminant entre cette équation et les équations (43) les variables φ et λ, on trouve:

$$Ac\sin\psi + (Bgc - Cgb + Abf - Ace)\cos\psi\sin\omega + (Cg - Af)\cos\psi\cos\omega = 0$$

ce qui est encore l'équation d'un grand cercle.

Donc, par suite de la transformation, les arcs de grand cercle restent des arcs

Digitized by Google

de grand cercle; et comme la projection stéréographique les projette comme des cercles, les arcs de grand cercle primitifs sont projetés comme des cercles.

Si par suite de la transformation les arcs de petit cercle restaient aussi des cercles, soit grands, soit petits, on aurait des projections dans lesquelles tous les cercles sont projetés comme des cercles. Mais cela n'a pas lieu. En effet l'équation d'un petit cercle de la sphère est:

$$A \sin \varphi + B \cos \varphi \sin \lambda + C \cos \varphi \cos \lambda = D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

d'où l'on tire en éliminant φ et λ:

$$A\,c \sin \psi + (B\,g\,c - C\,g\,b + A\,b\,f - A\,c\,e) \cos \psi \sin \omega + (C\,g - A\,f) \cos \psi \cos \omega = D \sqrt{Z} \; . \quad (46)$$

où Z représente l'expression:

$$Z = c^2 \sin^2 \psi + (b^2 f^2 - 2\,b\,f\,e\,c + e^2 c^2 + g^2 c^2 + b^2 g^2) \cos^2 \psi \sin^2 \omega + (g^2 + f^2) \cos^2 \psi \cos^2 \omega +$$
$$+ 2\,(b\,c\,f - e\,c^2) \sin \psi \cos \psi \sin \omega - 2\,c\,f \sin \psi \cos \psi \cos \omega - 2\,(b\,g^2 + b\,f^2 - e\,f\,c) \cos^2 \psi \sin \omega \cos \omega. \quad (47)$$

Pour que la figure transformée soit un cercle, il faut que la valeur de Z se réduise au carré d'un polynome de la forme:

$$K + L \sin \psi + M \cos \psi \sin \omega + N \cos \psi \cos \omega$$

ce qui n'a lieu que pour $b = e = f = 0$ et $c = g = 1$; mais avec ces valeurs on a:

$$\omega = \lambda \qquad \psi = \varphi$$

de sorte que la figure n'a subi aucun changement.

On peut en tirer cette conclusion, que *la projection stéréographique est la seule dans laquelle un cercle quelconque de la sphère est représenté par un cercle.*

C'est le même résultat auquel M. M. Du Chatenet [1]) est arrivé en traitant ce cas directement.

§ 31. Afin d'exprimer plus directement les coordonnées X et Y au moyen de la latitude et de la longitude, tirons des équations (43) les valeurs de ω et de ψ et substituons-les dans (41) et (42).

De la première nous tirons:

$$\text{tang } \omega = \frac{\sin \lambda}{b \sin \lambda + c \cos \lambda}$$

ou en posant pour abréger:

$$\sin \lambda = A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$
$$b \sin \lambda + c \cos \lambda = B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

nous avons:

---

[1]) Voir. Nouvelles Annales de Mathématiques rédigées par MM. Gerono et Brisse. Troisième Série. Avril 1886, p. 168. Détermination des systèmes de cartes de géographie dans lesquels tous les cercles de la sphère sont représentés par des cercles.

Digitized by Google

$$\text{tang } \omega = \frac{A}{B}$$

et par suite:

$$\sin \omega = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \ldots \quad (50)$$

$$\cos \omega = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \ldots \quad (51)$$

De la seconde on tire:

$$\text{tang } \psi = \frac{\sin \omega}{\sin \lambda} (g \text{ tang } \varphi + e \sin \lambda + f \cos \lambda)$$

ou en posant:

$$g \text{ tang } \varphi + e \sin \lambda + f \cos \lambda = C \quad \ldots \quad (52)$$

et en mettant pour $\sin \omega$ et $\sin \lambda$ les valeurs (48) et (50):

$$\text{tang } \psi = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

d'où l'on tire:

$$\sin \psi = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \ldots \quad (53)$$

$$\cos \psi = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \ldots \quad (54)$$

En multipliant la dernière équation par (50) et par (51), on trouve encore:

$$\cos \psi \sin \omega = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \ldots \quad (55)$$

$$\cos \psi \cos \omega = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \ldots \quad (56)$$

Avec les valeurs (53), (55) et (56) les équations (41) et (42) deviennent:

$$\left.\begin{aligned} X &= a \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} + C \sin \psi_o + B \cos \psi_o} \\ Y &= a \frac{C \cos \psi_o - B \sin \psi_o}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} + C \sin \psi_o + B \cos \psi_o} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (57)$$

Ces équations peuvent encore être mises sous une forme plus élégante; en mettant:

$$\begin{array}{lll} g \cos \psi_o = g_1 & e \cos \psi_o - b \sin \psi_o = e_1 & f \cos \psi_o - c \sin \psi_o = f_1 \\ g \sin \psi_o = g_2 & e \sin \psi_o + b \cos \psi_o = e_2 & f \cos \psi_o + c \cos \psi_o = f_2 \end{array}$$

on trouve:

$$\begin{aligned} C \cos \psi_o - B \sin \psi_o &= g_1 \text{ tang } \varphi + e_1 \sin \lambda + f_1 \cos \lambda \\ C \sin \psi_o + B \cos \psi_o &= g_2 \text{ tang } \varphi + e_2 \sin \lambda + f_2 \cos \lambda \end{aligned}$$

en multipliant ces expressions ainsi que A par $\cos \varphi$ et en posant:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi \sin\lambda &= D \\ g_1 \sin\varphi + e_1 \cos\varphi \sin\lambda + f_1 \cos\varphi \cos\lambda &= E \\ g_2 \sin\varphi + e_2 \cos\varphi \sin\lambda + f_2 \cos\varphi \cos\lambda &= F \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

on trouve enfin:

$$\left.\begin{aligned} X &= a \frac{D}{F + \sqrt{D^2 + E^2 + F^2}} \\ Y &= a \frac{E}{F + \sqrt{D^2 + E^2 + F^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

§ 32. Les formules (58) et (59) donnent la solution générale du problème de la représentation des arcs de grand cercle par des cercles. Elles contiennent sept constantes, savoir a, e_1, e_2, f_1, f_2, g_1 et g_2. En outre nous avons disposé encore dans le cours du développement de quatre constantes, de sorte qu'il y a en tout onze constantes arbitraires. Ces quatre dernières constantes ont servi à fixer la position des axes des coordonnées et du premier méridien et la constante a sert à déterminer l'échelle de la carte, de sorte que nous avons six constantes, savoir e_1, e_2, f_1, f_2, g_1, g_2 dont nous pouvons disposer pour trouver diverses projections.

Voyons d'abord sous quelles conditions les cercles deviennent des droites. Comme dans ce cas les coefficients B_1, B_2, B_3, B_4 de l'équation (6) § 24 doivent être égaux à zéro, nous tirons de (9) que a doit devenir infiniment grand. De (59) nous voyons que dans ce cas il faut que les dénominateurs de X et Y deviennent infiniment grands, tandis que D et E restent finis; donc F doit être infiniment grand, mais fini par rapport à a et en observant la formule (58) pour F, nous voyons que g_2, e_2 et f_2 doivent devenir infiniment grands, mais finis par rapport à a. En désignant les rapports $\frac{g_2}{a}$, $\frac{e_2}{a}$, $\frac{f_2}{a}$ par $\frac{g_3}{2R}$, $\frac{e_3}{2R}$, $\frac{f_3}{2R}$, nous trouvons pour les coordonnées les formules:

$$\left.\begin{aligned} X &= a \frac{D}{2F} = R \frac{\cos\varphi \sin\lambda}{g_3 \sin\varphi + e_3 \cos\varphi \sin\lambda + f_3 \cos\varphi \cos\lambda} \\ Y &= a \frac{E}{2F} = R \frac{g_1 \sin\varphi + e_1 \cos\varphi \sin\lambda + f_1 \cos\varphi \cos\lambda}{g_3 \sin\varphi + e_3 \cos\varphi \sin\lambda + f_3 \cos\varphi \cos\lambda} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

qui représentent toutes les projections dans lesquelles les arcs de grand cercle sont représentés par des droites.

Par un choix convenable des constantes, ainsi que des axes des coordonnées et du premier méridien, ces équations peuvent être mises sous la forme que nous avons trouvée dans le paragraphe 22 où ce cas a été traité directement.

§ 33. Pour les projections conformes de la sphère on a:

$$\frac{dX}{d\lambda} = \frac{dY}{d\varphi} \cos\varphi \qquad \frac{dY}{d\lambda} = -\frac{dX}{d\varphi} \cos\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

Digitized by Google

En y substituant les valeurs trouvées pour X et Y, on voit qu'on ne peut y satisfaire qu'en prenant:

$$g_1 = \cos\varphi_0 \qquad e_1 = 0 \qquad f_1 = -\sin\varphi_0 \qquad g_2 = \sin\varphi_0 \qquad e_2 = 0 \qquad f_2 = \cos\varphi_0$$

où φ_0 désigne la latitude correspondant à l'origine des axes de la carte. Avec ces valeurs des constantes on trouve:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\cos\varphi \sin\lambda}{1 + \sin\varphi \sin\varphi_0 + \cos\varphi \cos\varphi_0 \cos\lambda} \\ Y &= \frac{\sin\varphi \cos\varphi_0 - \cos\varphi \sin\varphi_0 \cos\lambda}{1 + \sin\varphi \sin\varphi_0 + \cos\varphi \cos\varphi_0 \cos\lambda} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

qui sont les formules pour la projection stéréographique. Donc *parmi les projections conformes de la sphère il n'y a que la projection stéréographique pour laquelle les arcs de grand cercle soient représentés par des cercles.* C'est le résultat que nous avons obtenu directement au paragraphe 23.

Pour les projections équivalentes on doit avoir:

$$m^2 = \frac{1}{R^2 \cos\varphi}\left(\frac{dX}{d\lambda}\frac{dY}{d\varphi} - \frac{dX}{d\varphi}\frac{dY}{d\lambda}\right) = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (63)$$

En substituant dans cette équation les valeurs de X et de Y on trouve:

$$\frac{a^2 (g_1 f_2 - g_2 f_1)}{R^2 (F + \sqrt{D^2 + E^2 + F^2})^2 \sqrt{D^2 + E^2 + F^2}} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (64)$$

d'où l'on tire que:

$$(F + \sqrt{D^2 + E^2 + F^2})^2 \sqrt{D^2 + E^2 + F^2}$$

doit être indépendant de φ et de λ. Comme cela est impossible, on voit, qu'*il n'existe pas de projection équivalente dans laquelle les arcs de grand cercle sont représentés par des cercles.*

§ 34. Pour que les déformations de la carte soient aussi petites que possible dans le voisinage du point central, il faut qu'on ait pour ce point:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{dX}{d\lambda}\right)_0 = R\cos\varphi_0 \quad \left(\frac{dX}{d\varphi}\right)_0 = 0 \quad \left(\frac{d^2X}{d\lambda^2}\right)_0 = 0 \quad \left(\frac{d^2X}{d\varphi\, d\lambda}\right)_0 = -R\sin\varphi_0 \quad \left(\frac{d^2X}{d\varphi^2}\right)_0 = 0 \\ &\left(\frac{dY}{d\lambda}\right)_0 = 0 \quad \left(\frac{dY}{d\varphi}\right)_0 = R \quad \left(\frac{d^2Y}{d\lambda^2}\right)_0 = R\sin\varphi_0\cos\varphi_0 \quad \left(\frac{d^2Y}{d\varphi\, d\lambda}\right)_0 = 0 \quad \left(\frac{d^2Y}{d\varphi^2}\right)_0 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (65)$$

Pour que les équations (59) satisfassent à ces conditions il faut prendre:

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= 0 & e_2 &= 0 \\ f_1 &= -\sin\varphi_0 & f_2 &= \frac{a}{2R}\cos\varphi_0 = k\cos\varphi_0 \\ g_1 &= \cos\varphi_0 & g_2 &= \frac{a}{2R}\sin\varphi_0 = k\sin\varphi_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

en désignant par k le rapport $\frac{a}{2R}$. Avec ces valeurs les équations (58) déviennent:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} D &= \cos\varphi \sin\lambda && = \sin\alpha \sin B \\ E &= \sin\varphi \cos\varphi_o - \cos\varphi \sin\varphi_o \cos\lambda && = \sin\alpha \cos B \\ F &= k\,(\sin\varphi \sin\varphi_o + \cos\varphi \cos\varphi_o \cos\lambda) && = k \cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (67)$$

où α et B sont les angles désignés par ces lettres au paragraphe 14.

En substituant ces valeurs pour D, E et F dans (59), on trouve:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{a \sin\alpha \sin B}{k\cos\alpha + \sqrt{(k\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha}} = \frac{2\,R\,k \operatorname{tang}\alpha}{k + \sqrt{k^2 + \operatorname{tang}^2\alpha}} \sin B \\ Y &= \frac{a \sin\alpha \cos B}{k\cos\alpha + \sqrt{(k\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha}} = \frac{2\,R\,k \operatorname{tang}\alpha}{k + \sqrt{k^2 + \operatorname{tang}^2\alpha}} \cos B \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (68)$$

Comme on voit, ce sont des projections zénithales, pour lesquelles le rayon vecteur du § 14 est:

$$\varrho = \frac{a \operatorname{tang}\alpha}{k + \sqrt{k^2 + \operatorname{tang}^2\alpha}} = \frac{2\,R\,k \operatorname{tang}\alpha}{k + \sqrt{k^2 + \operatorname{tang}^2\alpha}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (69)$$

En prenant pour k différentes valeurs, on trouve diverses projections. Pour $k = 1$ on a:

$$\varrho = \frac{2\,R \operatorname{tang}\alpha}{1 + \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\alpha}} = 2\,R \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = 2\,R \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha;$$

c'est la projection stéréographique.

Pour $k = \infty$ on trouve:

$$\varrho = \frac{2\,R \operatorname{tang}\alpha}{1 + \sqrt{1}} = R \operatorname{tang}\alpha$$

ce qui est la projection centrale.

§ 35. Pour avoir les projections zénithales qui représentent par des cercles les arcs de grand cercle de la sphère, il n'est pas nécessaire de recourir à la solution générale donnée par les formules (58) et (59). On voit facilement que pour satisfaire aux relations (9) § 24, les valeurs de E_1 et E_3 du paragraphe 14 doivent satisfaire à la relation:

$$E_1 = E_3 = \frac{2\varrho}{a^2 + \varrho^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (70)$$

En mettant pour E_1 et E_3 les valeurs (22) § 14 on a:

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{\varrho' \sin\alpha \cos\alpha}{\varrho^2} = \frac{2\varrho}{a^2 + \varrho^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (71)$$

et

$$\frac{2}{\varrho} - 2\frac{\cot\alpha}{\varrho'} - \frac{\varrho''}{\varrho'^2} = \frac{2\varrho}{a^2 + \varrho^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (72)$$

En multipliant la dernière par ϱ', on trouve:

Digitized by Google

$$2\frac{\varrho'}{\varrho} - 2\cot\alpha - \frac{\varrho''}{\varrho'} = \frac{2\varrho\varrho'}{a^2+\varrho^2}$$

ce qui donne en intégrant:

$$2\log\varrho - 2\log\sin\alpha - \log\varrho' = \log\frac{a^2+\varrho^2}{a^2} + \log\frac{a}{2k}$$

ou:

$$\varrho' = \frac{2akq^2}{(a^2+\varrho^2)\sin^2\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (73)$$

et en substituant dans (71):

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{2ak\cot\alpha}{(a^2+\varrho^2)} = \frac{2\varrho}{a^2+\varrho^2}$$

En chassant les dénominateurs et en réduisant, on trouve:

$$\varrho^2 + 2ak\varrho\cot\alpha - a^2 = 0$$

d'où l'on tire en résolvant:

$$\varrho = -ak\cot\alpha + \sqrt{a^2k^2\cot^2\alpha + a^2} = \frac{a\,\mathrm{tang}\,\alpha}{k+\sqrt{k^2+\mathrm{tang}^2\alpha}} \quad \ldots\ldots \quad (74)$$

ce qui est identique avec (69).

Voici encore une autre solution pour ce cas tout-à-fait indépendante des développements que nous venons de voir.

L'équation d'un grand cercle peut s'écrire de la manière suivante:

$$P\sin\alpha\sin B + Q\sin\alpha\cos B + \cos\alpha = 0$$

d'où l'on tire en multipliant par ϱ sur $\sin\alpha$ et en remplaçant $\varrho\sin B$ et $\varrho\cos B$ par X et par Y:

$$PX + QY + \varrho\cot\alpha = 0$$

pour que cette équation représente un cercle il faut que $\varrho\cot\alpha$ soit proportionnel à $a^2 - X^2 - Y^2 = a^2 - \varrho^2$ où a est une constante arbitraire. Posons donc:

$$\frac{\varrho\cot\alpha}{a^2-\varrho^2} = \frac{1}{2ak}$$

et résolvons par rapport à ϱ; nous trouvons alors:

$$\varrho = -ak\cot\alpha + \sqrt{a^2k^2\cot^2\alpha + a^2} = \frac{a\,\mathrm{tang}\,\alpha}{k+\sqrt{k^2+\mathrm{tang}^2\alpha}} \quad \ldots\ldots \quad (75)$$

ce qui est encore la même équation.

Delft, Octobre 1886.

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

CH. M. SCHOLS. La courbure de la projection de la ligne géodésique.

I. Formules générales . . . . . 179.
II. Applications à diverses projections . . . . . 191.
III. Recherche des projections dans lesquelles les lignes géodésiques sont représentées par des droites. . . . . 206.
IV. Recherche des projections dans lesquelles les lignes géodésiques sont représentées par des cercles . . . . . 214.

Digitized by Google

Geology

ANNALES

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

DE

DELFT.

TOME III. 1887.

1re LIVRAISON.

JUL 26 1973

THE LIBRARY OF THE
JUL 23 1973
UNIVERSITY OF ILLINOIS
AT URBANA-CHAMPAIGN

LEIDE. — E. J. BRILL.
1887.

GEOLOGY

Digitized by Google

Digitized by Google

SUR LA DENSITÉ, LE COEFFICIENT DE DILATATION ET L'INDICE DE RÉFRACTION DE L'ÉTHER ÉTHYLIQUE.

PAR

A. C. OUDEMANS Jr. [1])

Vingt et un ans se sont écoulés depuis la publication d'un travail que j'avais entrepris avec mon ami M. Hoek et qui portait: „Recherches sur la quantité d'éther contenue dans les liquides" (La Haye, Mart. Nijhoff. 1864).

Une partie de ce travail traitait de la détermination des indices de réfraction de quelques liquides (eau, acétate éthylique, benzoate éthylique, oxalate éthylique et alcool isoamylique) à des températures situées entre 10° C et le point d'ébullition.

Notre but était de décider, si ces liquides avaient un pouvoir réfringent constant à des températures très différentes ou en d'autres termes, si en se basant sur la formule de Newton $v = \sqrt{\frac{E}{D}}$, la valeur de l'expression $\frac{n^2-1}{d}$ serait la même pour chaque température.

Le résultat de nos recherches fut négatif, et M. Hoek attribua les écarts entre les valeurs trouvées et calculées à l'expulsion d'une partie de l'éther.

Après que j'eus quitté la ville d'Utrecht pour entrer en fonction à l'école polytechnique de Delft, je résolus de poursuivre seul les recherches entreprises avec mon ami; mais tandis que la détermination de l'indice de réfraction des liquides mentionnés se rapportait à la raie D, je désirais le déterminer dans la suite pour plusieurs raies du spectre solaire. En même temps je croyais utile de m'assurer, par l'expérience, de la justesse des données concernant la densité des liquides à examiner.

---

[1]) Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Afdeeling Natuurkunde. 3e Reeks. Deel I. p. 426 et suiv.

Digitized by Google

Bientôt je pus me convaincre que le travail que j'avais l'intention d'exécuter sans l'aide d'un collaborateur avait trop d'étendue et exigerait trop de temps. En effet l'examen d'une seule substance, l'éther éthylique, me coûta six mois de travail continu. Je résolus donc de cesser mes expériences pour ne pas donner un temps précieux à des recherches d'un genre trop restreint.

La raison qui m'a fait tarder si longtemps à publier les résultats obtenus, c'est que moi-même je n'étais pas très satisfait de mon travail. C'est la conviction seule que je m'acquitte d'un devoir envers la science, qui me pousse après vingt et un ans d'attente à livrer ces résultats au public.

I. SUR LA DENSITÉ ET LE COEFFICIENT DE DILATATION DE L'ÉTHER ÉTHYLIQUE.

Les appareils qui me servaient à déterminer la densité de l'éther étaient de petits flacons de GAY-LUSSAC à fond plat, ayant une capacité d'environ 17—22 c. c.

Le corps cylindrique de ces instruments était séparé, par un tube très étroit, du réservoir destiné à recevoir le liquide qui se déversait chaque fois que la densité était déterminée à une température inférieure à celle de l'air ambiant. Il va sans dire que le col des flacons était pourvu d'un trait marquant le volume.

La raison qui m'a porté à préférer ces simples instruments aux dilatomètres, dont se sont servis MM. PIERRE et KOPP, est la même qui m'a poussé à les employer dans mes recherches sur la densité de la diéthylamine [1]).

En outre la volatilité extrême de l'éther éthylique me détourna de l'emploi des dilatomètres et des pycnomètres, armés d'un bouchon-thermomètre. L'expérience me prouva qu'il était impossible de peser avec la précision requise un excellent pycnomètre de GEISSLER rempli d'éther; à chaque oscillation de la balance on voyait baisser de plus en plus le plateau, contenant les poids et l'odeur de l'éther ne tarda pas à devenir de plus en plus intense.

Au début de mes expériences le même inconvénient se faisait sentir pour les flacons de GAY-LUSSAC. Un bouchon en verre usé à l'éméri ne suffisait pas pour éviter la perte de vapeur d'éther; enfin j'ai trouvé le moyen de subvenir à l'inconvénient indiqué en employant comme bouchon un tampon en verre entouré d'un anneau en caoutchouc. Si la durée des pesées ne se prolonge pas trop, on

) Recueil des travaux chimiques des Pays-Bas T. I. p. 56.

Digitized by Google

n'éprouve point de perte sensible, parce que l'éther qui s'évapore se condense dans la masse du caoutchouc. En tout cas on peut, en connaissant approximativement le poids de l'appareil par un essai antérieur, réitérer l'expérience à la même température et raccourcir ainsi le temps nécessaire au pesage.

Quant à la méthode d'opérer et au changement de volume capricieux qu'on observe parfois avec ces flacons, je n'ai rien à ajouter à ce qui a été dit là-dessus dans mon mémoire sur la densité de la diéthylamine.

Il va sans dire que la valeur réelle des divisions du thermomètre, (en cinquièmes de degré), était parfaitement connue, et qu'on avait eu soin de vérifier le point de zéro avant chaque série d'expériences.

Je me permets maintenant de donner quelques détails concernant la préparation de l'éther éthylique employé dans mes premières expériences (1867—1868).

L'éther ordinaire du commerce était agité 15—20 fois avec des quantités nouvelles d'eau, afin d'éliminer autant que possible l'alcool, et les autres substances solubles qu'il pouvait contenir; on transportait ensuite la liqueur surnageante dans des flacons contenant de la chaux vive en ayant soin de les remplir presque entièrement. Après un laps de temps assez considérable on soumettait la liqueur à la distillation fractionnée. Un tiers du liquide, formant la partie moyenne, était mis à part, chauffé avec du sodium métallique, puis distillé de nouveau.

Le premier huitième passant à la distillation, fut mis de côté, et on n'employait pour l'expérience que les $\frac{5}{8}$ suivants.

Comme l'on verra dans la suite, il est presque impossible, malgré ces précautions, d'obtenir de l'éther parfaitement pur. Ce liquide absorbe de l'oxygène aussitôt qu'il vient en contact avec l'air et s'oxyde ensuite; voilà pourquoi plusieurs échantillons d'éther, qui devaient être identiques d'après les précautions prises, offraient cependant des différences assez sensibles quant à leur densité.

C'est ce qui me porta dans mes recherches entreprises en 1881 à distiller encore une fois l'éther purifié comme je l'ai décrit, sur le sodium *et dans le vide* et de n'employer que le tiers moyen passant à la distillation.

On comprendra aisément que les petites différences observées dans les densités des échantillons d'éther à une *même température* n'ont aucune influence sur le coefficient de dilatation ou sur l'indice de réfraction. Aussi n'ai je pas hésité à appliquer aux nombres représentant la densité à des températures différentes une correction constante, dont la grandeur fut déterminée par des expériences de précision à la température de 0° C. Il en est de même pour l'indice de réfraction.

Digitized by Google

Afin de mettre le lecteur en état de juger du degré d'exactitude que j'ai pu atteindre dans le jaugeage des flacons de GAY-LUSSAC, je communique ici les détails d'une de mes séries d'observations [1]).

Flacon A.

Formule pour le Volume:

$$V^t = 23{,}1247 \text{ c.c} + 0{,}0005325\, t$$

déduite des observations à $\pm 0°$, 30°.1, 35°.7 et 40°.35.

t	V Observé.	V Calculé.	Différence.
0°.0 C.	23,1250 C.C.	23,1247 C.C.	+ 0,0003 C.C.
0°.1 »	23,1236 »	23,1248 »	— 0,0012 »
0°.2 »	23,1259 »	23,1248 »	+ 0,0011 »
5°.6 »	23,1286 »	23,1277 »	+ 0,0009 »
7°.7 »	23,1278 »	23,1288 »	— 0,0010 »
13°.3 »	23,1322 »	23,1318 »	+ 0,0004 »
14°.0 »	23,1315 »	23,1322 »	— 0,0007 »
20°.2 »	23,1354 »	23,1355 »	— 0,0001 »
24°.6 »	23,1367 »	23,1378 »	— 0,0011 »
29°.85 »	23,1406 »	23,1406 »	0
35°.7 »	23,1438 »	23,1437 »	+ 0,0001 »
40°.35 »	23,1461 »	23,1462 »	— 0,0001 »

J'obtins de la même manière pour le volume des autres flacons employés les valeurs suivantes exprimées en centimètres cubes:

Flacon B: $V^t = 23{,}5520 + 0{,}0005805\, t$

» C: $V^t = 23{,}1243 + 0{,}000575\, t$

» D: $V^t = 17{,}5860 + 0{,}0003825\, t$

Voici maintenant un aperçu des résultats de mes expériences concernant la densité de l'éther.

PREMIÈRE SÉRIE.

On employa le flacon C et le tiers moyen, obtenu dans la distillation fractionnée d'un échantillon d'éther purifié et fraîchement distillé sur le sodium métallique.

Formule pour le volume de l'éther:

$$V^t = V^o(1 + 0{,}00150455\, t + 0{,}000004136\, t^2 - 0{,}0000000169\, t^3)$$

déduite des observations à 0°, 11°, 22° et 33°.

---

[1]) Tous les chiffres paraissant dans ce Mémoire ont été réduits au vide.

Digitized by Google

t	Densité observée.	Densité calculée.	Différence.
0° C.	0,73648	0,73644	+ 0,00004
0° »	0,73630	0,73644	— 0,00014
0° »	0,73649	0,73644	+ 0,00005
0° »	0,73649	0,73644	+ 0,00005
5° 1 »	0,73079	0,73072	+ 0,00007
7°.6 »	0,72781	0,72792	— 0,00011
10°.8 »	0,72427	0,72433	— 0,00006
11°.0 »	0,72425	0,72411	+ 0,00014
11°.2 »	0,72393	0,72389	+ 0,00004
11°.4 »	0,72353	0,72366	— 0,00013
15°.0 »	0,71967	0,71959	+ 0,00008
21°.6 »	0,71214	0,71205	+ 0,00009
21°.9 »	0,71165	0,71171	— 0,00006
22°.0 »	0,71163	0,71159	+ 0,00004
22°.2 »	0,71134	0,71136	— 0,00002
22°.3 »	0,71119	0,71124	— 0,00005
24° 0 »	0,70937	0,70927	+ 0,00011
26°.9 »	0,70581	0,70589	— 0,00008
28°.0 »	0,70474	0,70462	+ 0,00012
32° 8 »	0,69933	0,69925	+ 0,00008
33°.0 »	0,69904	0,69901	+ 0,00003
33°.2 »	0,69865	0,69877	— 0,00012
33°.3 »	0,69865	0,69865	0

A l'aide de la formule on calcule les valeurs suivantes pour les densités et les volumes de l'éther à des températures situées entre 0° et 35° C.

t	*d*	Δ	*t*	V	Δ
0° C.	0,73644		0° C.	1,00000	
		557			762
5° »	0,73087		5° »	1,00762	
		563			782
10° »	0,72524		10° »	1,01544	
		567			800
15° »	0,71957		15° »	1,02344	
		570			817
20° »	0,71387		20° »	1,03161	
		571			832
25° »	0,70816		25° »	1,03993	
		572			847
30° »	0,70244		30° »	1,04840	
		571			860
35° »	0,69673		35° »	1,05700	

Digitized by Google

DEUXIÈME SÉRIE.

Flacon C. L'éther de la première série d'expériences fut bouilli, puis distillé de nouveau sur le sodium métallique; les dernières portions du distillat furent rejetées.

Formule pour le volume de l'éther:

$$V^t = V^o(1 + 0{,}0014973\,t + 0{,}0000038\,t^2 - 0{,}0000000075\,t^3)$$

déduites des observations à 0°, 11°, 22° et 33°.

t	Densité observée.	Densité calculée.	Différence.
0° C.	0,73684	0,73672	+ 0,00012
0° »	0,73663	0,73672	— 0,00009
0° »	0,73669	0,73672	— 0,00003
4°.8 »	0,73156	0,73140	+ 0,00016
7°.25 »	0,72850	0,72868	— 0,00018
10°.8 »	0,72485	0,72469	+ 0,00016
11° 2 »	0,72414	0,72423	— 0,00009
11° 4 »	0,72394	0,72401	— 0,00007
15°.1 »	0,72007	0,71984	+ 0,00023
19°.7 »	0,71458	0,71469	— 0,00011
21°.4 »	0,71268	0,71269	— 0,00001
21°.6 »	0,71255	0,71246	+ 0,00009
22°.0 »	0,71204	0,71201	+ 0,00003
22°.3 »	0,71262	0,71167	— 0,00005
22°.7 »	0,71116	0,71122	— 0,00006
25°.1 »	0,70907	0,70894	+ 0,00013
28°.1 »	0,70512	0,70506	+ 0,00006
32°.6 »	0,69980	0,69991	— 0,00011
33°.0 »	0,69947	0,69945	+ 0,00002
33°.4 »	0,69908	0,69899	+ 0,00009

A l'aide de la formule on calcule les valeurs suivantes pour les densités et les volumes de l'éther à des températures situées entre 0° et 35° C.

t	d	Δ	t	V	Δ
0° C.	0,73672		0° C.	1,00000	
		554			758
5° »	0,73118		5° »	1,00758	
		560			777
10° »	0,72558		10° »	1,01535	
		563			795
15° »	0,71995		15° »	1,02330	
		566			810
20° »	0,71429		20° »	1,03140	
		569			829
25° »	0,70860		25° »	1,03969	
		571			845
30° »	0,70289		30° »	1,04814	
		573			860
35° »	0,69716		35° »	1,05674	

Digitized by Google

TROISIÈME SÉRIE.

Flacon C. L'éther fraîchement distillé fut rectifié encore une fois sur le sodium; on employa sans retard le tiers moyen passant à la distillation à la détermination de la densité.

Formule pour le volume de l'éther:

$$V^t = V^0 (1 + 0{,}0014432\, t + 0{,}00000802\, t^2 - 0{,}000000064\, t^3)$$

déduite des observations à 0°, 11°, 22° et 33°.

t	Densité observée.	Densité calculée.	Différence.
0° C.	0,73661	0,73651	+ 0,00010
0° »	0,73665	0,73651	+ 0,00014
0° »	0,73636	0,73651	— 0,00015
0° »	0,73642	0,73651	— 0,00009
10°.8 »	0,72462	0,72450	+ 0,00012
11°.0 »	0,72431	0,72437	— 0,00006
11°.3 »	0,72397	0,72403	— 0,00006
21°.7 »	0,71193	0,71199	— 0,00006
22°.0 »	0,71177	0,71164	+ 0,00013
22°.3 »	0,71122	0,71128	— 0,00006
32°.6 »	0,69933	0,69923	+ 0,00010
33°.1 »	0,69863	0,69863	0
33°.1 »	0,69853	0,69863	— 0,00010

A l'aide de la formule on calcule les valeurs suivantes pour les densités et les volumes de l'éther à des températures situées entre 0° et 35° C.

t	d	Δ	t	d	Δ
0° C.	0,73651		0° C.	1,00000	
		542			741
5° »	0,73109		5° »	1,00741	
		559			776
10° »	0,72550		10° »	1,01517	
		571			805
15° »	0,71979		15° »	1,02322	
		581			833
20° »	0,71398		20° »	1,03155	
		586			854
25° »	0,70812		25° »	1,04009	
		585			870
30° »	0,70227		30° »	1,04879	
		587			881
35° »	0,69640		35° »	1,05760	

Digitized by Google

QUATRIÈME SÉRIE.

Flacon B. Le même échantillon d'éther, qui avait été employé dans la troisième série, fut rectifié de nouveau sur le sodium et soumis à la distillation fractionnée. La première moitié du distillat a servi aux expériences.

Formule pour le volume de l'éther:

$$V^t = V^o (1 + 0{,}001489\, t + 0{,}00000455\, t^2 + 0{,}0000000125\, t^3)$$

déduite des observations à 0°, 11°, 22° et 33°.

t	Densité observée.	Densité calculée.	Différence.
0° C.	0,73640	0,73645	— 0,00005
0° »	0,73653	0,73645	+ 0,00008
0° »	0,73641	0,73645	— 0,00004
0° »	0,73655	0,73645	+ 0,00010
0° »	0,73636	0,73645	— 0,00009
10°.6 »	0,72475	0,72464	+ 0,00011
10°.7 »	0,72460	0,72452	+ 0,00008
11° 0 »	0,72410	0,72419	— 0,00009
11°.4 »	0,72364	0,72374	— 0,00010
21°.8 »	0,71198	0,71180	+ 0,00018
22°.0 »	0,71144	0,71157	— 0,00013
22°.0 »	0,71152	0,71157	— 0,00005
22°.2 »	0,71122	0,71134	— 0,00012
23°.3 »	0,71133	0,71122	+ 0,00011
32°.6 »	0,69923	0,69911	+ 0,00012
32°.7 »	0,69900	0,69898	+ 0,00002
32°.9 »	0,69861	0,69875	— 0,00014
33°.0 »	0,69849	0,69863	— 0,00014
33°.3 »	0,69842	0,69828	+ 0,00014

A l'aide de la formule on calcule les valeurs suivantes pour les densités et les volumes de l'éther à des températures situées entre 0° et 35° C.

t	d	Δ	t	V	Δ
0° C.	0,73645		0° C.	1,00000	
		552			756
5° »	0,73093		5° »	1,00756	
		560			778
10° »	0,72533		10° »	1,01534	
		569			802
15° »	0,71964		15° »	1,02336	
		575			825
20° »	0,71389		20° »	1,03161	
		582			847
25° »	0,70807		25° »	1,04008	
		588			871
30° »	0,70219		30° »	1,04879	
		593			894
35° »	0,69626		35° »	1,05773	

Digitized by Google

CINQUIÈME SÉRIE.

Flacon A. L'éther purifié fut soumis à la distillation fractionnée sur le sodium métallique: on recueillit quatre distillats à peu près égaux en volume. La première partie fut rejetée et on employa aux déterminations la deuxième partie. La densité du n°. 3 était 0,73680 à 0°. C. et celle du n°. 4 0,73721 à la même température. On procéda aux expériences immédiatement après la préparation du liquide à examiner.

Formule pour le volume de l'éther:

$$V^t = V^o (1 + 0{,}0015002\, t + 0{,}00000392\, t^2 + 0{,}00000000113\, t^3)$$

déduite des observations à 0°, 11°, 22° et 33°.

t	Densité observée.	Densité calculée	Différence.
0° C	0,73668	0,73667	+ 0,00001
0° »	0,73651	0,73667	— 0,00016
0° »	0,73666	0,73667	— 0,00001
0° »	0,73682	0,73667	+ 0,00015
6°.2 »	0,72971	0,72979	— 0,00008
10°.8 »	0,72479	0,72460	+ 0,00019
11°.0 »	0,72423	0,72437	— 0,00014
11°.3 »	0,72387	0,72403	— 0,00016
11°.5 »	0,72391	0,72380	+ 0,00011
14°.0 »	0,72093	0,72099	— 0,00006
14°.9 »	0,71996	0,71996	0
17°.2 »	0,71747	0,71734	+ 0,00013
21°.6 »	0,71249	0,71228	+ 0,00021
22°.1 »	0,71164	0,71170	— 0,00006
22°.4 »	0,71128	0,71136	— 0,00008
22°.6 »	0,71106	0,71113	— 0,00007
24°.4 »	0,70938	0,70952	— 0,00014
29°.0 »	0,70375	0,70372	+ 0,00003
32°.7 »	0,69949	0,69940	+ 0,00009
33°.2 »	0,69871	0,69882	— 0,00011
33° 5 »	0,69833	0,69846	— 0,00013
33°.7 »	0,69838	0,69823	+ 0,00015

À l'aide de la formule on calcule les valeurs suivantes pour les densités et les volumes de l'éther à des températures situées entre 0° et 35° C.

t	d	Δ	t	V	Δ
0° C.	0,73667	556	0° C.	1,00000	760
5° »	0,73111	560	5° »	1,00760	778
10° »	0,72551	566	10° »	1,01538	799
15° »	0,71985	572	15° »	1,02337	819
20° »	0,71413	577	20° »	1,03156	840
25° »	0,70836	580	25° »	1,03996	859
30° »	0,70256	585	30° »	1,04855	880
35° »	0,69671		35° »	1,05735	

Digitized by Google

Flacon A. L'éther purifié fut rectifié à diverses reprises sur le sodium métallique et puis soumis à la distillation fractionnée dans le vide sur une quantité nouvelle du métal alcalin. On recueillit trois portions de liquide presque'égales; la partie moyenne fut employée aux déterminations de la densité.

Formule pour le volume de l'éther:

$$V^t = V^o (1 + 0{,}0014644\, t + 0{,}000005781\, t^2 - 0{,}0000000233\, t^3)$$

déduite des observations à 0°, 11°, 22° et 33° C.

t	Densité observée	Densité calculée	Différence.
0° C	0,73589	0,73593	— 0,00004
0° »	0,73619	0,73593	+ 0,00026
0° »	0,73589	0,73593	— 0,00004
0° »	0,73579	0,73593	— 0,00014
0° »	0,73590	0,73593	— 0,00003
4°.1 »	0,73134	0,73149	— 0,00015
6°.7 »	0,72854	0,72870	— 0,00016
8°.8 »	0,72609	0,72625	— 0,00016
10°.8 »	0,72385	0,72401	— 0,00016
11°.1 »	0,72371	0,72367	+ 0,00004
11°.25 »	0,72351	0,72350	+ 0,00001
11°.4 »	0,72338	0,72333	+ 0,00005
12°.0 »	0,72269	0,72265	+ 0,00004
15°.6 »	0,71866	0,71866	0
22°.0 »	0,71125	0,71120	+ 0,00005
22°.35 »	0,71069	0,71077	— 0,00008
22°.55 »	0,71059	0,71056	+ 0,00003
22°.65 »	0,71057	0,71045	+ 0,00012
22°.7 »	0,71047	0,71059	— 0,00012
25°.9 »	0,70685	0,70767	+ 0,00008
28°.9 »	0,70303	0,70317	— 0,00014
33°.0 »	0,69835	0,69836	— 0,00001
33°.1 »	0,69826	0,69848	— 0,00022
33°.5 »	0,69784	0,69768	+ 0,00016
33°.6 »	0,69762	0,69756	+ 0,00006
35°.5 »	0,69558	0,69544	+ 0,00014

A l'aide de la formule on calcule les valeurs suivantes pour les densités et les volumes de l'éther à des températures situées entre 0° et 35° C.

t	d	Δ	t	V	Δ
0° C.	0,73593	544	0° C.	1,00000	745
5° »	0,73049	558	5° »	1,00745	775
10° »	0,72491	566	10° »	1,01520	799
15° »	0,71925	573	15° »	1,02319	822
20° »	0,71352	580	20° »	1,03141	845
25° »	0,70772	584	25° »	1,03986	865
30° »	0,70188	586	30° »	1,04851	883
35° »	0,69602		35° »	1,05731	

Digitized by Google

Il ressort des résultats communiqués qu'en général les valeurs obtenues pour le coefficient de dilatation s'accordent très bien entre elles, mais que les chiffres qu'on a trouvés pour la densité à la même température offrent quelquefois des différences assez sensibles. Ce fait doit probablement être attribué à la tendance que montre l'éther de s'oxyder sous formation d'aldehyde et d'acide acétique. Par suite de cette transformation la densité du liquide s'accroît à mesure qu'il a été exposé plus longtemps à l'influence de l'air.

C'est pourquoi dans mes dernières expériences, faites en 1881, j'ai soigneusement distillé l'éther dans le vide et employé pour la détermination de la densité à 0° C. divers échantillons d'éther aussi pur que possible et distillé dans le vide sur du sodium métallique. Il va sans dire que ces déterminations furent constatées immédiatement après que les divers produits avaient été préparés.

Voici les résultats que j'obtins de cette manière.

Densité à 0° (corrigée pour le vide).

N°. 1	0,73600
» 2	0,73591
» 3	0,73586
» 4	0,73590
Moyenne:	0,73592

En calculant la densité de l'éther au moyen des six formules données, en adoptant pour 0° C. le chiffre 0,7359, on obtient les résultats suivants:

	I	II	III	IV	V	VI
0° C.	0,7359	0,7359	0,7359	0,7359	0,7359	0,7359
5° »	0,7304	0,7304	0,7305	0,7303	0,7303	0,7305
10° »	0,7247	0,7248	0,7249	0,7247	0,7247	0,7249
15° »	0,7191	0,7192	0,7192	0,7190	0,7191	0,7193
20° »	0,7134	0,7135	0,7134	0,7133	0,7133	0,7135
25° »	0,7077	0,7078	0,7075	0,7075	0,7076	0,7077
30° »	0,7019	0,7021	0,7017	0,7016	0,7018	0,7019
35° »	0,6962	0,6964	0,6958	0,6957	0,6959	0,6960

de sorte que nous pouvons adopter comme moyennes les valeurs suivantes:

Digitized by Google

t	d	Δ	t	V	Δ
0° C.	0,7359	55	0° C.	1,0000	75
5° »	0,7304	56	5° »	1,0075	78
10° »	0,7248	56	10° »	1,0153	79
15° »	0,7192	57	15° »	1,0232	82
20° »	0,7135	58	20° »	1,0314	84
25° »	0,7077	58	25° »	1,0398	86
30° »	0,7019	59	30° »	1,0484	89
35° »	0,6960		35° »	1,0573	

Comparons maintenant ces résultats à ceux qui ont été obtenus par d'autres chimistes ou physiciens.

M. Muncke [1]) donne la formule suivante pour le volume de l'éther:

$$V^t = V^o(1 + 0{,}00150268\,t + 0{,}00000255214\,t^2 - 0{,}00000015783\,t^3 + 0{,}000000004166\,t^4).$$

Si à l'aide de cette formule, on calcule la densité et le volume de l'éther pour des températures situées entre 0° C. et 35° C. (la densité du liquide à 0° C. étant = 0,7359), on obtient les résultats suivants:

t	d	Δ	t	V	Δ
0° C.	0,7359	55	0° C.	1.00000	758
5° »	0,7304	55	5° »	1,00758	760
10° »	0,7249	54	10° »	1,01518	761
15° »	0,7195	54	15° »	1,02279	769
20° »	0,7141	54	20° »	1,03048	784
25° »	0,7087	55	25° »	1,03832	817
30° »	0,7032	58	30° »	1,04649	872
35° »	0,6974		35° »	1,05521	

M. Isidore Pierre [2]) trouva pour la densité à 0° C. les valeurs suivantes:

N°. 1. 0,73769
» 2. 0,73787
» 3. 0,73568
» 4. 0,73581

[1]) Gehler, Physikalisches Wörterbuch. 10. 925.

[2]) Annales de chimie et de physique [3]. 15. 260 et suiv.

Digitized by Google

Les substances indiquées par les n°. 1 et n°. 2 étaient deux produits distincts qui furent de temps en temps agités continuellement avec du chlorure de calcium sec et puis distillés au bain-marie de 40—50° C. Le n°. 3 était obtenu en mélangeant les n°. 1 et 2 et en distillant de nouveau sur le chlorure de calcium et le n°. 4 était le même liquide soumis encore une fois à la dessiccation. M. Pierre ne dit pas lequel de ces échantillons servait à la détermination du coefficient de dilatation; je présume que c'était le n°. 4.

M. Pierre fit deux séries d'expériences concernant la densité de l'éther à des températures différentes et y employa *deux dilatomètres divers*. La première série a rapport aux déterminations faites entre — 15°.36 et — 5°.54, la seconde à celles qui furent exécutées entre + 7°.71 et + 38°.14. En se basant sur trois observations de la première série (se rapportant à — 15°.36, — 10°.11 et — 5°.54) et six observations de la seconde (faites à + 7°.71, 10°.26, 15°.09, 34°.07, 35°.85 et 38°.14) il calcula la formule suivante pour la dilatation. (J'omets quelques chiffres décimaux superflus):

$$1 + \Delta x = 1 + 0{,}0015132\, x + 0{,}00000236\, x^2 + 0{,}00000004\, x^3.$$

En adoptant pour la densité de l'éther à 0° C. le chiffre 0,7359, on trouve à l'aide de cette formule pour la densité et le volume de l'éther à des températures situées entre 0° et 35° C. les valeurs suivantes:

t	d	Δ	t	V	Δ
0° C.	0,7359		0° C.	1,00000	
		56			763
5° »	0,7303		5° »	1,00763	
		56			778
10° »	0,7247		10° »	1,01541	
		56			795
15° »	0,7191		15° »	1,02336	
		57			817
20° »	0,7134		20° »	1,03153	
		58			841
25° »	0,7076		25° »	1,03994	
		58			866
30° »	0,7018		30° »	1,04860	
		60			896
35° »	0,6958		35° »	1,05756	

M. Hermann Kopp [1]) dans ses recherches sur la densité et la dilatation de l'éther, employa lui aussi des dilatomètres. Il purifia la matière à examiner (éther du commerce) en l'agitant à diverses reprises avec le lait de chaux et puis avec de l'eau, en desséchant l'éther sur le chlorure calcique et en soumet-

[1]) Annales de Poggendorff 72. 228 et suiv.

Digitized by Google

tant le liquide à une rectification. Il trouva pour le point d'ébullition 34°.9 C. (température réduite à 760 mm., le thermomètre était entièrement plongé dans la vapeur).

Une détermination de la densité de l'éther à 6°.9 lui donna à l'aide de deux instruments distincts les valeurs 0,7289 et 0,7290, d'où il obtint pour la densité à 0° C. le chiffre 0,7366.

M. Kopp déduisit de deux séries d'expériences les formules suivantes pour le volume de l'éther:

$$V\,t = V^{o}(1 + 0{,}001447\,t + 0{,}00000667\,t^{2} - 0{,}000000039\,t^{3})$$
$$V\,t = V^{o}(1 + 0{,}001513\,t + 0{,}000000356\,t^{2} + 0{,}000000093\,t^{3})$$

A l'aide de ces formules on obtient les valeurs suivantes pour la densité et le volume de l'éther pour des températures situées entre 0° C. et 35° C.

1re FORMULE.

t	d	Δ	t	V	Δ
0° C.	0,7366		0° C.	1,00000	
		54			740
5° »	0,7312		5° »	1,00740	
		56			770
10° »	0,7256		10° »	1,01510	
		56			797
15° »	0,7200		15° »	1,02307	
		58			823
20° »	0,7142		20° »	1,03130	
		58			843
25° »	0,7084		25° »	1,03973	
		58			863
30° »	0,7026		30° »	1,04836	
		59			878
35° »	0,6967		35° »	1,05714	

2me FORMULE.

t	d	Δ	t	V	Δ
0° C.	0,7366		0° C.	1,00000	
		56			759
5° »	0,7310		5° »	1,00759	
		55			767
10° »	0,7255		10° »	1,01526	
		55			783
15° »	0,7200		15° »	1,02309	
		57			806
20° »	0,7143		20° »	1,03115	
		57			835
25° »	0,7086		25° »	1,03950	
		59			872
30° »	0,7027		30° »	1,04822	
		61			916
35° »	0,6966		35° »	1,05738	

Digitized by Google

Si l'on compare maintenant les résultats obtenus par MM. MUNCKE, PIERRE et KOPP aux miens, en modifiant tous les chiffres, de sorte qu'ils correspondent à une densité de 0,7359 pour la température de zéro, on obtient les valeurs suivantes pour les densités:

t	MUNCKE.	PIERRE.	KOPP. 1re série.	KOPP. 2me série.	OUDEMANS. (moyenne des 6 séries).
0°	0,7359	0,7359	0,7359	0,7359	0,7359
5°	0,7304	0,7303	0,7305	0,7303	0,7304
10°	0,7249	0,7247	0,7249	0,7248	0,7248
15°	0,7195	0,7191	0,7193	0,7193	0,7192
20°	0,7141	0,7134	0,7135	0,7136	0,7135
25°	0,7087	0,7076	0,7077	0,7079	0,7077
30°	0,7032	0,7018	0,7019	0,7020	0,7019
35°	0,6974	0,6958	0,6960	0,6959	0,6960

On voit par ce tableau, que mes résultats s'accordent parfaitement avec ceux de M. KOPP et de M. PIERRE, mais qu'ils s'écartent sensiblement de ceux qui ont été obtenus par M. MUNCKE.

NOTE. Ce mémoire a été publié *in extenso* dans les: Verhandelingen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Afdeeling Natuurkunde. 3e Reeks. Deel I, p. 426 et suiv. J'en ai donné un extrait dans le Recueil des travaux chimiques des Pays-Bas. T. IV, p. 264 et suiv. En faisant la révision de mon travail je me suis aperçu qu'il contenait plusieurs erreurs de calcul, dont la plupart n'ont pas d'importance réelle, puisqu'elles n'exercent aucune influence sensible sur le résultat final. Cependant à mon grand regret le calcul fautif des résultats obtenus par M. PIERRE m'a porté à formuler un jugement erroné quant à l'exactitude de ses résultats et à la valeur de sa méthode d'opérer. Je me hâte d'en faire amende honorable à cette occasion.

II. SUR L'INDICE DE RÉFRACTION DE L'ÉTHER ÉTHYLIQUE.

La détermination de l'indice de réfraction de l'éther éthylique fut exécutée par le même procédé que nous avons appliqué, mon ami M. HOEK et moi, dans nos recherches sur cinq liquides divers (l'eau, l'acétate d'éthyle, l'alcool

Digitized by Google

isoamylique, le benzoate éthylique et l'oxalate éthylique [1]). Pour les expériences à des températures situées entre 15° et 35° C., j'employai le même appareil qui nous avait servi dans nos recherches antérieures. Les déterminations à des températures situées au-dessous de 15° C., furent exécutées pendant l'hiver dans une chambre non chauffée. Afin d'éliminer l'influence des moindres variations de température, les observations étaient faites, soit à des températures croissantes soit à des températures décroissantes dans l'ordre suivant:

1°. Mesure de la déviation double à droite ou à gauche,
2°. „ „ „ „ „ „ gauche ou à droite,
3°. „ „ „ „ „ „ gauche ou à droite,
4°. „ „ „ „ „ „ droite ou à gauche.

En prenant la moyenne des températures et des déviations observées, on obtenait par ce moyen le résultat final.

Je dois remarquer que l'indice de réfraction de l'éther à des températures différentes fut déterminé pour les raies du spectre Li_α, Na_α, Ca_β et Sr_δ. Parce qu'une recherche préliminaire avait prouvé que la différence observée entre les indices pour deux raies voisines était à peu près la même à 0° C. qu'à 35° C., j'ai tâché de déterminer l'indice à la température moyenne de l'atmosphère pour d'autres raies du spectre (K_α, Tl_α, Rb_α, H_α, H_β et H_γ); par une interpolation on pouvait aisément parvenir à calculer l'indice pour d'autres températures plus ou moins élevées.

L'observation de la raie Tl_α s'exécutait facilement à l'aide d'une flamme incolore de gaz d'éclairage où l'on avait introduit un peu de chlorure thalleux, mais pour arriver à apercevoir les raies K_α et Rb_α j'étais forcé d'injecter une solution des chlorures dans la flamme incolore de l'hydrogène ou du gaz d'éclairage.

Les raies H_α, H_β et H_γ furent observées au moyen d'un tube de Geissler à hydrogène attaché par les deux bouts aux électrodes d'une bobine de Rühmkorff.

Il me reste encore à entrer dans quelques détails sur les déterminations normales des indices à la température moyenne et sur la manière dont je me suis assuré que le prisme employé avait la position requise et qu'on évitait ainsi l'effet nuisible des rayons marginaux. Les recherches minutieuses de plusieurs physiciens ont prouvé que l'indice de réfraction de l'eau, pour la raie Na_α et pour la température de 15° C., est $= 1{,}3335$; puisque l'eau est un liquide qu'on peut se procurer facilement à l'état de pureté parfaite, j'ai toujours, avant de commencer mes expériences, déterminé l'indice de cette substance à 15° C. à

[1]) Recherches sur la quantité d'éther contenue dans les liquides. p. 32—36.

Digitized by Google

l'aide du prisme placé sur la table du goniomètre. Si l'indice trouvé ne concordait pas avec la valeur 1,3335, je déplaçais le prisme ou j'en prenais un autre, jusqu'à ce que la concordance désirée fût obtenue.

Je procédais après à la détermination de l'indice pour toutes les raies du spectre nommées en prenant le même échantillon d'éther pur. Puisque la température ne restait pas invariable, je réduisais les valeurs obtenues à la température de 15° en y apportant de petites corrections, dont la valeur était déduite d'expériences antérieures.

Dans mes recherches avec M. Hoek, nous avons déterminé la grandeur de l'angle réfringent du prisme non seulement pour la température ordinaire mais aussi pour une ou deux températures plus élevées. Cette mesure était superflue pour l'éther, vu le petit intervalle situé entre la température la plus basse et la plus élevée où se faisaient les observations.

Je vais maintenant communiquer les détails des diverses séries d'observations exécutées par moi et pour cela je suivrai la même manière d'exposer que nous avons suivie, M. Hoek et moi, dans nos recherches antérieures.

PREMIÈRE SÉRIE.

Éther A. Raie Na_α.

Angle réfringent du prisme = 79°41'.4.

Formule pour la déviation :

$$2d = 82°34'.8 - 9'.968\,(t - 11) - 0'.0838\,(t - 11)^2.$$

t	$2d$		Différence.	t	Indice de réfraction relatif.	Δ
	Valeur trouvée.	Valeur calculée.				
4°.7	83°34'.8	83°34'.3	+ 0'.5	5° C.	1,3615	
7°.5	83° 9'.4	83° 8'.7	+ 0'.7			27
10°.9	82°39'.0	82°35'.8	+ 3'.2	10° »	1,3588	
11°.1	82°30'.6	82°33'.8	— 3'.2			28
12°.9	82° 9'.6	82°15'.6	— 6'.0	15° »	1,3559	
14°.4	81°55'.0	81°59'.9	— 4'.9			30
16°.6	81°35'.0	81°36'.5	— 1'.5	20° »	1,3529	
19°.8	81° 2'.0	81° 0'.6	+ 1'.4			31
22°.0	80°35'.0	80°35'.0	0	25° »	1,3498	

Digitized by Google

DEUXIÈME SÉRIE.

Éther A. Raie Na_α.

Angle réfringent du prisme = 79°41′.4.

Formule pour la déviation:

$$2d = 80°49'.3 - 10'.618\,(t-21) + 0'.00357\,(t-21)^2.$$

t	$2d$		Différence.	t	Indice de réfraction relatif.	Δ
	Valeur trouvée.	Valeur calculée.				
7°	83°18′.7	83°18′.7	0	5° C.	1,3619	
11°	82°34′.5	82°35′.8	— 1′.3			30
14°.8	81°55′	81°55′.3	— 0′.3	10° »	1,3589	
17°.6	81°25′.5	81°25′.4	+ 0′.1			29
23°.3	80°24′.5	80°25′.0	— 0′.5	15° »	1,3560	
26°.2	79°55′	79°54′.2	+ 0′.8			31
28°.3	79°35′	79°32′	+ 3′.0	20° »	1,3529	
29°.9	79°15′.5	79°15′.1	+ 0′.4			30
31°.6	79°0′	78°57′.2	+ 2′.8	25° »	1,3499	
35°.2	78°22′.5	78°21′.3	+ 1′.2			30
				30° »	1,3469	
						30
				35° »	1,3439	

TROISIÈME SÉRIE.

Éther A. Raies Li_α, Na_α et Ca_β.

Angle réfringent du prisme = 66°31′.

Raie Li_α.

Formule pour la déviation:

$$2d = 58°6'.1 - 6'.647\,(t-20) - 0'.0071\,(t-20)^2.$$

t	$2d$		Différence.	t	Indice de réfraction relatif.	Δ
	Valeur trouvée.	Valeur calculée.				
5°.4	59°41′.5	59°41′.6	— 0′.1	5° C.	1,3592	
13°.1	58°53′	58°51′.6	+ 1′.4			29
19°.4	58°10′	58°10′.1	0	10° »	1,3563	
24°.0	57°41′	57°39′.4	+ 1′.6			29
34°.7	56°27′	56°26′.7	+ 0′.3	15° »	1,3534	
35°.5	56°21′	56°21′.3	— 0′.3			29
				20° »	1,3505	
						30
				25° »	1,3475	
						31
				30° »	1,3444	
						30
				35° »	1,3414	

Digitized by Google

Raie Na_α.

Formule pour la déviation:

$$2d = 58°30'.3 - 6'.62\,(t-20) - 0'.003\,(t-20)^2.$$

t	$2d$		Différence.	t	Indice de réfraction relatif.	Δ
	Valeur trouvée.	Valeur calculée.				
5°.2	60° 7'.5	60° 7'.5	0	5° C.	1,3613	
13°.0	59°15'.5	59°16'.5	— 1'.0	10° »	1,3585	28
14°.0	59°11'	59°10'.0	+ 2'.0	15° »	1,3556	29
15°.2	59° 0'.5	59° 2'.0	— 1'.5	20° »	1,3526	30
18°.9	58°38'	58°37'.6	+ 0'.4	25° »	1,3496	30
24°.3	58° 4'.5	58° 1'.8	+ 2'.7	30° »	1,3466	30
35°.0	56°49'.5	56°49'.5	0	35° »	1,3436	30

Raie Ca_β.

Formule pour la déviation:

$$2d = 58°42'.3 - 6'.803\,(t-20) - 0'.007\,(t-20)^2.$$

t	$2d$		Différence.	t	Indice de réfraction relatif.	Δ
	Valeur trouvée.	Valeur calculée.				
6°.3	60°14'	60°14'.1	+ 0'.1	5° C.	1,3626	
13°.0	59°29'	59°29'.9	— 0'.9	10° »	1,3597	29
19°.9	58°43'	58°43'	0	15° »	1,3567	30
35°.4	56°56'	56°56'	0	20° »	1,3537	30
				25° »	1,3507	30
				30° »	1,3476	31
				35° »	1,3445	31

Digitized by Google

QUATRIÈME SÉRIE.

Éther B. Raies Li_α, Na_α et Ca_β.

Angle réfringent du prisme = 66°31′.

Raie Li_α.

Formule pour la déviation:

$$2d = 57°57'.7 - 6'.618\,(t-21) + 0'.000765\,(t-21)^2.$$

t	$2d$		Différence.	t	Indice de réfraction relatif.	Δ
	Valeur trouvée.	Valeur calculée.				
8°.0	59°24′.0	62°23′.8	+ 0′.2	5° C.	1,3591	29
8°.4	59°21′.5	58°21′.3	+ 0′.2	10° »	1,3562	29
12°.9	58°52′.5	58°51′.3	+ 1′.2	15° »	1,3533	30
19°.3	58° 8′	58° 8′.9	— 0′.9	20° »	1,3503	30
24°.0	57°38′.5	57°37′.8	+ 0′.7	25° »	1,3473	29
28°.7	56° 6′.5	57° 6′.8	— 0′.3	30° »	1,3444	30
34°.4	56°29′	56°29′	0	35° »	1,3414	

Raie Na_α.

Formule pour la déviation:

$$2d = 58°21'.7 - 6'.773\,(t-21) - 0'.0074\,(t-21)^2.$$

t	$2d$		Différence.	t	Indice de réfraction relatif.	Δ
	Valeur trouvée.	Valeur calculée.				
8°.3	59°45′.5	59°46′.5	— 1′.0	5° C.	1,3613	29
8°.3	59°47′.5	59°46′.5	+ 1′.0	10° »	1,3584	30
12°.4	59°18′	59°19′.4	— 1′.4	15° »	1,3554	30
19°.4	58°31′	58°32′.5	— 1′.5	20° »	1,3524	30
23°.1	58° 7′	58° 7′.5	— 0′.5	25° »	1,3494	31
30°.4	57°20′	57°17′.5	+ 2′.5	30° »	1,3463	31
35° 9	56°39′.5	56°39′.2	+ 0′.3	35° »	1,3432	

Digitized by Google

Raie Ca_β.

Formule pour la déviation:

$$2d = 58°34'.8 - 6'.87\,(t-21) - 0'.006\,(t-21)^2.$$

t	$2d$		Différence.	t	Indice de réfraction relatif.	Δ
	Valeur trouvée.	Valeur calculée.				
7°.9	60° 4′	60° 3′.8	+0′.2	5° C.	1,3626	
						29
8°.9	59°57′	59°57′.1	−0′.1	10° »	1,3597	
						30
18°.2	58°53′	58°54′.0	−1′.0	15° »	1,3567	
						31
19°.2	58°47′	58°47′.1	+0′.1	20° »	1,3536	
						30
24°.2	58°13′.5	58°12′.7	+0′.8	25° »	1,3506	
						31
31°.5	57°20′	57°22′.7	−2′.7	30° »	1,3475	
						31
35°.2	56°58′.3	56°58′.2	+0′.1	35° »	1,3444	

CINQUIÈME SÉRIE.

Éther B. Raie Sr_δ.

Angle réfringent du prisme = 66°28′.

Formule pour la déviation:

$$2d = 59°33'.5 - 6'.873\,(t-20) - 0'.0133\,(t-20)^2.$$

t	$2d$		Différence.	t	Indice de réfraction relatif.	Δ
	Valeur trouvée.	Valeur calculée.				
5°.25	61°11′.5	61°12′.0	−0′.5	5° C.	1,3673	
						28
6°.6	61° 4′.5	61° 3′.2	+1′.3	10° »	1,3645	
						29
8°.1	60°53′.5	60°53′.5	0	15° »	1,3616	
						30
15°.7	60° 2′	60° 2′.7	−0′.7	20° »	1,3586	
						31
16°.1	60° 0′	60° 0′	0	25° »	1,3555	
						32
20°.9	59°27′.3	59°27′.3	0	30° »	1,3523	
						31
33°.2	57° 0′.5	57° 0′.6	−0′.1	35° »	1,3492	

Digitized by Google

SIXIÈME SÉRIE.

Éther C. Raies Li_α, Na_α, Ca_β et Sr_β.

Angle réfringent du prisme $= 66°29'$.

Raie Li_α.

Formule pour la déviation :

$$2d = 57°57'.3 - 6'.682\,(t-21) - 0'.000827\,(t-21)^2.$$

t	$2d$		Différence.	t	Indice de réfraction relatif.	Δ
	Valeur trouvée.	Valeur calculée.				
9°.5	59°14′	59°14′	0	5° C.	1,3594	
13°.25	58°48′.5	58°49′	— 0′.5	10° »	1,3564	30
17°.3	58°22′	58°22′	0	15° »	1,3535	29
20°.9	57°58′	57°58′	0	20° »	1,3505	30
24°.0	57°36′.5	57°37′.2	— 0′.7	25° »	1,3475	30
31°.1	56°51′.5	56°49′.9	+ 1′.6	30° »	1,3445	30
32°.1	56°41′.5	56°43′.2	— 1′.7	35° »	1,3415	

Raie Na_α.

Formule pour la déviation :

$$2d = 58°19'.6 - 6'.682\,(t-21) + 0'.0157\,(t-21)^2.$$

t	$2d$		Différence.	t	Indice de réfraction relatif.	Δ
	Valeur trouvée.	Valeur calculée.				
9°.5	59°38′.5	59°38′.7	— 0′.2	5° C.	1,3617	
13°.1	59°12′	59°13′.4	— 1′.4	10° »	1,3586	31
17°.2	58°43′.5	58°45′.2	— 1′.7	15° »	1,3555	31
20°.8	58°21′	58°20′.9	— 0′.1	20° »	1,3525	30
24°.0	57°58′.5	57°59′.7	+ 1′.2	25° »	1,3495	30
31°.85	57° 9′	57° 9′ 1	— 0′.1	30° »	1,3466	29
				35° »	1,3438	28

Digitized by Google

Raie Ca_β.

Formule pour la déviation :

$$2d = 58°32' - 6'.63\,(t-21) + 0'.0107\,(t-21)^2.$$

t	$2d$		Différence.	t	Indice de réfraction relatif.	Δ
	Valeur trouvée	Valeur calculée.				
9°.6	59°49′	59°49′	0	5° C.	1,3626	31
12°.9	59°26′	58°26′ 6	— 0′.6	10° »	1,3595	29
17°.1	58°59′	58°58′	+ 1′.0	15° »	1,3566	30
20°.7	58°34′	58°34′	0	20° »	1,3536	30
23°.3	58°18′	58°16′.8	+ 1′ 2	25° »	1,3506	29
31°.9	57°21′	57°21′	0	30° »	1,3477	28
				35° »	1,3449	

Raie Sr_β.

Formule pour la déviation :

$$2d = 59°25' - 6'.85\,(t-21) - 0'.0045\,(t-21)^2.$$

t	$2d$		Différence.	t	Indice de réfraction relatif.	Δ
	Valeur trouvée.	Valeur calculée.				
9°.9	60°40′.5	60°40′.5	0	5° C.	1,3672	29
12°.45	60°22′	60°23′.2	— 1′.2	10° »	1,3643	30
17°.0	59°55′.5	59°52′.3	+ 3′.2	15° »	1,3613	30
20°.7	59°27′.2	59°27′.1	+ 0′.1	20° »	1,3583	30
32°.2	58° 8′	58° 7′.8	+ 0′.2	25° »	1,3553	31
				30° »	1,3522	30
				35° »	1,3492	

Digitized by Google

SEPTIÈME SÉRIE.

Éther D. Raies Li_α, Na_α, Ca_β et Sr_β.

Angle réfringent du prisme = 73°18′.

Raie Li_α.

Formule pour la déviation:

$$2d = 68°40'.5 - 8'.1853\,(t-17) - 0'.0091\,(t-17)^2.$$

t	$2d$		Différence.	t	Indice de réfraction relatif.	Δ
	Valeur trouvée.	Valeur calculée.				
— 0°.25	70°59′	70°59′.1	— 0′.1	0° C.	1,3619	28
0°	70°57′	70°57′.1	— 0′.1	5° »	1,3591	29
2°.9	70°32′.5	70°34′ 2	— 1′.7	10° »	1,3563	29
5°.0	70°17′	70°17′.4	— 0′.4	15° »	1,3534	30
11°.8	69°23′.3	69°23′.4	— 0′.1	20° »	1,3504	30
16°.9	68°40′.5	68°39′.6	+ 0′.9	25° »	1,3474	30
20°.95	68° 6′	68° 8′.0	— 2′.0	30° »	1,3444	31
26°.5	67°23′.5	67°21′.9	+ 1′.6	35° »	1,3413	
33°.6	66°22′.5	66°22′.2	+ 0′.3			

Raie Na_α.

Formule pour la déviation:

$$2d = 69°8'.4 - 8'.2265\,(t-17) - 0'.01125\,(t-17)^2.$$

t	$2d$		Différence.	t	Indice de réfraction relatif.	Δ
	Valeur trouvée.	Valeur calculée.				
0°.3	71°23′.5	71°22′.6	+ 0′.9	0° C.	1,3639	28
3°.55	70°55′.5	70°57′.1	— 1′.6	5° »	1,3611	28
6°.4	70°34′ 5	70°34′.4	+ 0′.1	10° »	1,3583	29
10°.8	69°58′	69°59′.0	— 1′.0	15° »	1,3554	30
16°.8	69°10	69°10′	0	20° »	1,3524	30
21°.9	68°24′	68°27′.7	— 3′.7	25° »	1,3494	31
26°.55	67°48′.5	68°48′.8	— 0′.3	30° »	1,3463	31
33°.2	66°52′	68°52′.3	— 0′.3	35° »	1,3432	

Digitized by Google

Raie Ca_β.

Formule pour la déviation:

$$2d = 69°27'.3 - 8'.291\,(t-17) - 0'.01367\,(t-17)^2.$$

t	$2d$		Différence	t	Indice de réfraction relatif.	Δ
	Valeur trouvée.	Valeur calculée.				
1°.5	71°32'.5	71°32'.7	— 0'.2	0° C.	1,3653	28
3°.35	71°17'.5	71°17'.9	— 0'.4	5° »	1,3625	29
5°.45	71° 1'	71° 1'.2	— 0'.2	10° »	1,3596	29
12°.4	70° 3'.5	70° 5'.1	— 1'.6	15° »	1,3567	30
16°.85	69°28'.5	69°28'.4	+ 0'.1	20° »	1,3537	30
20°.3	68°54'	68°59'.5	— 5'.5	25° »	1,3507	31
26°.4	68° 6'.5	68° 8'.1	— 1'.6	30° »	1,3476	31
33°.5	67° 6'.5	67° 6'.8	— 0'.3	35° »	1,3445	

Raie Sr_β.

Formule pour la déviation:

$$2d = 70°3'.7 - 8'.406\,(t-20) + 0.0062\,(t-20)^2.$$

t	$2d$		Différence.	t	Indice de réfraction relatif.	Δ
	Valeur trouvée.	Valeur calculée.				
5°.2	72° 9'.5	72° 9'.5	0	0° C.	1,3701	30
5°.7	72° 7'.0	72° 6'.9	+ 0'.1	5° »	1,3671	30
13°.3	71° 2'.5	71° 0'.2	+ 2'.3	10° »	1,3641	30
16°.4	70°35'.5	70°34'.0	+ 1'.5	15° »	1,3611	30
20°.8	69°57'.2	69°57'.4	— 0'.2	20° »	1,3581	30
27°.3	69° 2'.5	69° 2'.6	— 0'.1	25° »	1,3551	29
34°.35	68° 4'	68° 4'.1	— 0'.1	30° »	1,3522	30
				35° »	1,3492	

Digitized by Google

HUITIÈME SÉRIE.

Détermination simultanée de l'indice de réfraction de l'éther pour les raies Li_α, Na_α, Ca_β, Sr_δ, H_α, H_β et H_γ, exécutée à la température ambiante et en employant le même échantillon d'éther E. On avait pris le plus grand soin de purifier la matière à examiner, mais elle était rectifiée sur le sodium sans faire le vide.

Angle réfringent du prisme $= 73°18'$.

Valeurs trouvées pour $2d$.

t	Li_α	t	H_α	t	Na_α	t	Ca_β	t	H_β	t	Sr_δ	t	H_γ
11°.5	69°29′			12°.3	69°57′	12°.8	70° 6′						
13°.2	69°15′			13°.8	69°40′.5	14°.5	69°51′.5			15°.6	70°50′		
16°.2	68°51′.5	16°.3	68°55′.5	16°.3	69°19′	16°.7	69°33′.5	16°.4	70°20′.5	17°.4	70°34′	16°.3	68°55′.5

Si l'on réduit ces chiffres à la température de 15° C. et que l'on calcule ensuite les valeurs des indices de réfraction pour cette température, on obtient le résultat suivant:

	Li_α	H_α	Na_α	Ca_β	H_β	Sr_δ	H_γ
	1,3536		1,3560	1,3570			
	1,3535		1,3558	1,3570		1,3618	
	1,3536		1,3557	1,3570		1,3617	
Moyenne:	1,3536	1,3540	1,3558	1,3570	1,3602	1,3618	1,3640 [1]

NEUVIÈME SÉRIE.

Détermination, à la température ambiante, des indices de réfraction pour les raies Li_α, Na_α, Ca_β et Sr_δ. L'éther qui a servi à ces recherches était le même que celui dont je déterminai la densité et le coefficient de dilatation dans la quatrième série de mes expériences.

Angle réfringent du prisme $= 66°56'$.

Valeurs trouvées pour $2d$.

t	Li_α	t	Na_α	t	Ca_β	t	Sr_δ
11°.7	59°36′					12°	61° 8′
13°.2	59°27′	13°.9	59°48′.5	13°	60° 5′	12°.8	61° 2′.5
16°.8	59° 2′	17°.2	59°23′.5	17°.4	59°35′	17°.9	60°27′.5
19°.0	58°47′	19°.2	59° 9′.5	18°.9	59°25′	19°.25	60°19′.5

[1]) M. LANDOLT (Annales de LIEBIG. Supplementband IV. 21) trouva à la température de 20° C. les indices suivants pour les raies H_α, H_β et H_γ: 1,3511, 1,3572 et 1,3607, nombres qui correspondent à 1.3540, 1,3602 et 1,3637 pour 15° C.

Digitized by Google

On déduit de ces résultats les valeurs suivantes pour l'indice de réfraction à 15° C.

	Li_α	Na_α	Ca_β	Sr_δ
	1,3534	1,3557	1,3567	1,3616
	1,3535	1,3557	1,3567	1,3617
	1,3535	1,3557	1,3567	1,3616
	1,3535	—	—	1,3615
Moyenne :	1,3535	1,3557	1,3567	1,3616

DIXIÈME SÉRIE.

Ether D. Détermination de l'indice de réfraction pour les raies Li_α, Na_α, Ca_β et Sr_δ à la température ambiante.

Angle réfringent du prisme = 66°17′.

Valeurs trouvées pour 2 *d*.

t	Li_α	*t*	Na_α	*t*	Ca_β	*t*	Sr_δ
13°.0	58°33′ 5	12°.5	59° 0′	12°.7	59°12′.5	11°.1	60°14′.5
13°.0	58°35′	12°.9	58°57′.5	14°.1	59° 1′	15°.5	59°54′
13°.9	58°28′	14°.1	58°49′	15°.4	58°55′	15°.0	59°52′
15°.0	58°20′	15°.0	58°43′				

En réduisant ces chiffres à une température de 15° C., on obtient les valeurs suivantes pour l'indice de réfraction :

	Li_α	Na_α	Ca_β	Sr_δ
	1,3534	1,3555	1,3567	1,3614
	1,3535	1,3555	1,3566	1,3615
	1,3534	1,3555	1,3567	1,3616
	1,3534	1,3555	—	—
Moyenne :	1,3534	1,3555	1,3567	1,3615

ONZIÈME SÉRIE.

Ether D. Détermination de l'indice de réfraction pour les raies H_α, H_β et H_γ, à la température ambiante.

Angle réfringent du prisme = 66°17′.

Digitized by Google

Valeurs trouvées pour 2 *d*.

t	H_α	*t*	H_β	*t*	H_γ
12°.6	58°43′	12°.7	59°52′	12°.9	60°33′
13°.8	58°34′.5	14° 8	59°38′.5	15° 4	60°12′
15°.8	58°22′	15°.6	59°30′	16°.2	60°10′.5

On déduit de ces résultats les valeurs suivantes pour les indices de réfraction à 15° C.

	H_α	H_β	H_γ
	1,3541	1,3602	1,3639
	1,3540	1,3603	1,3636
	1,3541	1.3600	1,3640
Moyenne:	1,3541	1,3602	1,3638

DOUZIÈME SÉRIE.

Détermination simultanée de l'indice de réfraction pour les raies K_α, Li_α, Na_α, Tl_α et Sr_β à la température ambiante.

Éther E. Angle réfringent du prisme = 78°24′.

Valeurs trouvées pour 2 *d* [1]).

t	K_α	*t*	Li_α	*t*	Na_α	*t*	Tl_α	*t*	Sr_β
14°.2	77°54′	14°.5	78°22′	14°.25	78°59′	14°.9	79°26′	15°	80°32′

Par le calcul on obtient pour *n* des valeurs qui étant réduites à 15° C. forment la série suivante:

K_α	1,3512
Li_α	1,3529
Na_α	1,3549
Tl_α	1,3571
Sr_β	1,3609

TREIZIÈME SÉRIE.

Détermination simultanée de l'indice de réfraction pour les raies Ka_α, Li_α, Na_α, Tl_α, Sr_β et Rb_α à la température ambiante.

Éther F. Angle réfringent du prisme = 56°9′.

[1]) Les nombres contenus dans cet aperçu sont les moyennes de plusieurs observations. Il en est de même des séries suivantes.

Digitized by Google

Valeurs trouvées pour 2 *d*.

	K_α	*t*	Li_α	*t*	Na_α	*t*	Tl_α	*t*	Sr_β	*t*	Rb_α
17°.8	45°29′	17°.2	45°46′.5	17°.7	46°2′	17°.4	46°20′.5	18°.1	46°49′.5	18°.2	47°16′

Par le calcul on obtient pour *n* des valeurs qui étant réduites à 15° C. offrent la série suivante:

K_α	1,3517
Li_α	1,3534
Na_α	1,3555
Tl_α	1,3575
Sr_β	1,3615
Rb_α	1,3647

QUATORZIÈME SÉRIE.

Détermination simultanée de l'indice de réfraction pour les raies Ka_α, Li_α, Na_α, Tl_α, Sr_β et Rb_α à la température ambiante.

Éther F. Angle réfringent du prisme = 54°51′.8

Valeurs trouvées pour 2 *d*.

t	Ka_α	*t*	Li_α	*t*	Na_α	*t*	Tl_α	*t*	Sr_β	*t*	Rb_α
17°.9	44°7′	14°.2	44°39′	12°.8	45°2′	16°.3	45°3′.5	19°.8	45°18′.5	17°.0	45°57′.2

Par le calcul on obtient pour *n* des valeurs qui étant réduites à 15° C. offrent la série suivante:

Ka_α	1,3518
Li_α	1,3536
Na_α	1,3556
Tl_α	1,3579
Sr_β	1,3619
Rb_α	1,3649

QUINZIÈME SÉRIE.

Détermination simultanée de l'indice de réfraction pour les raies K_α, H_α, Na_α, Tl_α, H_β, H_γ et Rb_α à la température ambiante.

Éther G. Angle réfringent du prisme = 62°1′.

Valeurs trouvées pour 2 *d*.

t	K_α	*t*	H_α	*t*	Na_α	*t*	Tl_α	*t*	H_β	*t*	H_γ	*t*	Rb_α
18°.9	52°11′	19°.9	52°27′	18°.25	52°51′	18°.5	53°10′	19°.6	53°26′	19°.6	54°3′	18°.5	54°20′

Digitized by Google

Par le calcul on obtient pour n des valeurs qui réduites à 20° C. offrent la série suivante:

K_α	1,3490
H_α	1,3514
Na_α	1,3527
Tl_α	1,3548
H_β	1,3571
H_γ	1,3609
Rb_α	1,3619

Si maintenant on combine les valeurs diverses, obtenues pour les indices de réfraction, on a le résultat contenu dans le tableau suivant. Remarquons que nous avons adopté pour base l'indice de réfraction pour la raie Na_α à 15° C. 1,3555. Quant au degré d'exactitude que j'ai pu atteindre, on se convainct aisément que les quatrièmes décimales laissent tout au plus une incertitude d'une à deux unités.

t	K_α	Li_α	H_α	Na_α	Ca_β	Tl_α	H_β	Sr_β	H_γ	Rb_α
0° C.	1,3604	1,3622	1,3629	1,3644	1,3656	1,3664	1,3690	1,3705	1,3729	1,3739
5° »	1,3575	1,3593	1,3600	1,3614	1,3626	1,3634	1,3660	1,3675	1,3699	1,3708
10° »	1,3545	1,3563	1,3570	1,3585	1,3597	1,3605	1,3631	1,3645	1,3668	1,3677
15° »	1,3516	1,3534	1,3541	1,3555	1,3567	1,3575	1,3601	1,3615	1,3638	1,3647
20° »	1,3486	1,3504	1,3511	1,3525	1,3537	1,3545	1,3571	1,3585	1,3608	1,3617
25° »	1,3457	1,3575	1,3481	1,3495	1,3507	1,3515	1,3541	1,3555	1,3578	1,3586
30° »	1,3427	1,3445	1,3451	1,3466	1,3478	1,3486	1,3512	1,3525	1,3547	1,3555
35° »	1,3398	1,3416	1,3422	1,3437	1,3448	1,3456	1,3482	1,3495	1,3517	1,3525

De ces valeurs, on déduit l'indice de réfraction absolu en les multipliant par l'indice absolu de l'air représenté par l'expression:

$$1{,}000286 - 0{,}00000079\,(t - 10).$$

On obtient de cette manière des chiffres qui sont de 0,0004 plus élevés que ceux qu'on trouve dans notre tableau.

Dans le mémoire publié par M. Hoek et moi, nous avons communiqué les résultats concernant le pouvoir réfringent, quand on exprime celui-ci par $(n^2 - 1)\,V$. Nous trouvâmes alors que les valeurs obtenues correspondantes devenaient plus petites, à mesure que la température augmentait et M. Hoek déduisit de là: ou que la formule de Newton ne satisfait pas aux conditions

Digitized by Google

requises, ou qu'en élevant la température, une partie de l'éther était expulsée des composés chimiques examinés.

Il ne me parut pas dénué d'intérêt de considérer l'éther éthylique du même point de vue et d'examiner quels résultats on obtiendrait pour les cinq liquides examinés par M. Hoek et moi, si l'on se servait des formules, données par M. Landolt [1]) et M. Lorentz [2]).

Éther éthylique.

Valeurs de $(n^2 - 1)\,V$ pour les raies K_α, Ca_β et Rb_α (V à 0° C. = 1).

t	K_α		Ca_β		Rb_α	
0° C.	0,8518		0,8660		0,8884	
		16		17		16
5° »	0,8502		0,8643		0,8868	
		17		14		17
10° »	0,8485		0,8629		0,8851	
		14		17		15
15° »	0,8471		0,8612		0,8836	
		16		14		14
20° »	0,8455		0,8598		0,8822	
		12		14		15
25° »	0,8443		0,8584		0,8807	
		15		12		16
30° »	0,8428		0,8572		0,8721	
		11		12		12
35° »	0,8417		0,8560		0,8769	

Valeurs de $(n - 1)\,V$ [3]) pour six liquides examinés et pour la raie Na_α

V à 0° C = 1.

t.	Alcool amylique Kopp 1855.	Acétate éthylique.	Benzoate éthylique.	Oxalate éthylique.	Éther éthylique.	Eau.
0° C					0,3642	
10° »	0,4158	0,3825	0,5155	0,4196	0,3641	0,3345
20° »	0,4157	0,3822	0,5153	0,4196	0,3637	0,3341
30° »	0,4157	0,3821	0,5154	0,4196	0,3635	0,3339
35° »					0,3633	
40° »	0,4153	0,3821	0,5152	0,4196		0,3337
50° »	0,4150	0,3821	0,5151	0,4195		0,3334
60° »	0,4148	0,3821	0,5149	0,4194		0,3331
70° »	0,4145	0,3821	0,5147	0,4193		0,3329
80° »	0,4143		0,5145	0,4193		0,3328
90° »	0,4140		0,5145	0,4192		0,3326
100° »	0,4140			0,4193		0,3323
110° »						

[1]) Annales de Poggendorff 123. p. 595.

[2]) Verhandelingen der Koninklijke Akademie v. Wetenschappen XVIII. Ann. de Poggendorff, Neue Folge IX, p. 64. Au lieu de la densité d j'ai introduit dans les formules $\frac{1}{V}$ afin de pouvoir mieux comparer les valeurs obtenues avec celles qui sont déduites de la formule $(n^2 - 1)\,V$.

[3]) Les volumes V sont ceux qui ont été trouvés par M. Kopp.

Digitized by Google

Valeurs de $\frac{n^2-1}{n^2+2} \times V$ [1]) pour les mêmes liquides et pour la raie Na_α

V à 0° C. = 1.

t.	Alcool amylique Kopp 1855.	Acétate éthylique	Benzoate éthylique.	Oxalate éthylique.	Éther éthylique.	Eau.
0° C.					0,2233	
10° »	0,2511	0,2333	0,3022	0,2532	0,2235	0,2152
20° »	0,2514	0,2336	0,3027	0,2536	0,2236	0,2133
30° »	0,2516	0,2338	0,3030	0,2539	0,2237	0,2113
35° »					0,2238	
40° »	0,2517	0,2341	0,3034	0,2542		0,2093
50° »	0,2518	0,2345	0,3038	0,2545		0,2072
60° »	0,2520	0,2349	0,3042	0,2547		0,2051
70° »	0,2521	0,2354	0,3045	0,2550		0,2031
80° »	0,2523		0,3048	0,2553		0,2008
90° »	0,2525		0,3051	0,2557		0,1994
100° »	0,2529		0,3055	0,2560		0,1977
110° »				0,2564		

Quand on fait le calcul pour un rayon d'une longueur d'onde infinie, on obtient des valeurs qui ne diffèrent que très peu des précédentes. En adoptant, par exemple, pour les longueurs d'onde de H_α et H_γ les données empruntées à M. Plücker (6. 564 et 4. 339 dix-millièmes de millimètres) et pour les indices de réfraction de l'éther éthylique à 0° C. et 35° C. les valeurs trouvées par moi, on obtient par le calcul, au moyen de la formule connue de Cauchy, pour le coefficient A les valeurs suivantes:

à 0° C. $A = 1{,}3557$; à 35° C. $A = 1{,}3354$

et puis pour les valeurs de $\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right) V$

à 0° C.: 0,2183 et à 35° C.: 0,2189.

Ainsi qu'il ressort du tableau donné, l'emploi de la formule de M. Landolt $(n-1)V$, quoique purement empirique conduit à des valeurs presque mais non parfaitement constantes. Dans tous les liquides examinés on observe une légère diminution, à mesure que la température s'élève. L'emploi de la formule de M. Lorentz ne mène pas à des produits constants pour des températures différentes, mais les écarts sont beaucoup plus petits que ceux qu'on obtient en se servant de la formule $(n^2-1)V$.

[1]) Les volumes V sont ceux qui ont été trouvés par M. Kopp.

Digitized by Google

SUR LES PRODUITS DE L'OXYDATION DE L'ISOQUINOLÉINE PAR LE PERMANGANATE DE POTASSIUM.

PAR

S. HOOGEWERFF ET W. A. VAN DORP.

Nous publions ici les résultats que nous a donnés l'oxydation de l'isoquinoléine — base de la formule C_9H_7Az, décrite il y a quelques mois [1]) — par le permanganate de potassium. Nous comptons revenir prochainement sur quelques dérivés de la base, que nous avons étudiés.

L'isoquinoléine fut oxydée suivant la méthode employée pour l'oxydation de la quinoléine [2]). On ajouta à la base, suspendue dans de l'eau, de la potasse caustique (environ la moitié du poids de la base), et on fit couler peu à peu dans le liquide bouillant une solution aqueuse (4 : 100) de permanganate de potassium, en ayant soin de ne pas ajouter de nouvelle portion avant que le liquide fût complètement décoloré. Quand on a ajouté 7—8 gr. de l'oxydant sur 1 gr. de la base la coloration rouge produite par le permanganate ne disparaît que très lentement. L'isoquinoléine s'oxyde environ avec la même vitesse que la quinoléine.

Nous avons trouvé comme produits de l'oxydation de l'ammoniaque et de l'acide oxalique en petite quantité, de l'acide cinchoméronique et de l'acide phtalique; sans doute il se forme aussi de l'acide carbonique. Lors de nos expériences sur l'oxydation de la quinoléine, nous avons dosé les différents produits formés, sans pouvoir en déduire l'équation suivant laquelle la réaction a lieu; d'après les résultats obtenus alors nous nous croyons dispensés de faire les mêmes dosages pour l'isoquinoléine. Nous nous sommes bornés à déterminer quantité d'ammoniaque qui se forme. Voici le résultat:

---

[1]) Recueil des Travaux Chimiques des Pays-Bas. T. IV p. 125.

[2]) Ibid. T. I p. 107.

Digitized by Google

5 grm. d'isoquinoléine donnèrent 0,2937 grm. de chloroplatinate d'ammonium et 0,1298 grm. de platine. 2.5 grm. de potasse caustique avaient été ajoutés avant l'oxydation.

En prenant pour base du calcul le poids du platine obtenu, 3.4% de l'azote contenu dans la base ont été transformés en ammoniaque. Il résulte encore du dosage qu'à l'exception de l'ammoniaque il ne s'était pas formé de bases volatiles dans l'oxydation de l'isoquinoléine, la quantité de platine trouvée dans le chloroplatinate étant de 44.2% au lieu de 43.9% exigés par la théorie.

Remarquons encore que la quantité d'ammoniaque formée semble augmenter avec la quantité de potasse caustique ajoutée à la base avant l'oxydation.

Pour isoler les acides formés dans l'oxydation nous avons suivi la même marche que lors de l'oxydation de la quinoléine. On sépare le liquide des oxydes de manganèse par filtration, on le neutralise par de l'acide azotique, on le réduit à un petit volume par évaporation et on éloigne l'azotate de potassium, qui se dépose (mélangé souvent à de la silice provenant des vases dans lesquels l'oxydation a eu lieu). On peut précipiter de la liqueur par de l'azotate de baryum de l'oxalate de baryum, mêlé souvent de quinoléate de baryum, quand la base oxydée contient des traces de quinoléine. Après filtration on précipite par de l'azotate de plomb le cinchoméronate et le phtalate de plomb. On décompose les sels de plomb en suspension dans de l'eau au moyen de l'hydrogène sulfuré, on sépare la liqueur du sulfure de plomb et on évapore le liquide au bain-marie.

Les acides qui se déposent peuvent être séparés de leur solution aqueuse par la cristallisation fractionnée, l'acide cinchoméronique étant beaucoup moins soluble dans l'eau que l'acide phtalique. Il est préférable cependant de se servir de la solubilité de l'acide phtalique dans l'éther pour le séparer de l'acide dicarbopyridique mentionné. Le mélange des deux acides fut traité par de l'éther tant que celui-ci en dissolvait des quantités appréciables; l'éther fut chassé et le résidu fut recristallisé dans de l'eau. Nous avons obtenu de cette manière des tablettes incolores, qui ne contiennent pas d'azote; chauffées en tube capillaire elles fondent à 193° en dégageant du gaz. De l'acide phtalique d'autre provenance fondait dans les mêmes conditions à 194°.

L'analyse a fourni les nombres suivants:

0,3663 grm. d'acide séchés à 115° donnèrent 0,7791 grm. CO_2 et 0,1247 grm. H_2O.

Calculé pour $C_8H_6O_4$		Trouvé
C	57,8	58.—
H	3,6	3,8

L'anhydride phtalique fut obtenu en distillant l'acide dans un courant d'acide

Digitized by Google

carbonique sec. On obtint de longues aiguilles, dont le point de fusion fut trouvé de 128°—130°. (D'après M. Lossen [1]) l'anhydride phtalique se fond à 128°).

L'analyse conduit à la formule $C_8H_4O_3$.

0,4398 grm. donnèrent 1,048 grm. CO_2 et 0,1168 grm. H_2O.

Calculé pour $C_8H_4O_3$		Trouvé
C	64,9	65.—
H	2,7	3,—

L'acide que l'éther n'avait pas dissous (voir ci-dessus) fut recristallisé dans de l'eau. On obtint les cristaux caractéristiques de l'acide cinchoméronique [2]), fondant de 251°—252° en dégageant du gaz. Ils sont peu solubles dans l'eau; leur solution aqueuse chaude donne avec l'acétate de cuivre un précipité qui se dissout par le refroidissement [3]).

La composition de l'acide correspond à la formule $C_7H_5AzO_4$.

1. 0,2956 grm. séchés à 110° donnèrent 0,5426 grm. CO_2 et 0,0831 gr. H_2O.

2. 0,3133 grm. séchés de 90°—100° donnèrent 23 c.c. d'azote à 22° et sous une pression de 768 mm. de mercure.

Calculé pour $C_7H_5AzO_4$		Trouvé	
		1.	2.
C	50,3	50,1	—
H	3,—	3,1	—
Az	8,4	—	8,4

Le cinchoméronate de cuivre fut préparé de la manière décrite dans un mémoire précédent [4]). Nous obtînmes les cristaux bleus mentionnés dans cet article. Séchés à l'air ils ont fourni à l'analyse les nombres suivants:

1. 0,4372 grm. donnèrent 0,4672 grm. CO_2 et 0,1497 grm. H_2O.

2. 0,2945 „ „ 0,0786 „ CuO.

Calculé pour $C_7H_3AzO_4Cu + 3\frac{1}{2}H_2O$		Trouvé	
		1.	2.
C	28,9	29,1	—
H	3,4	3,8	—
Cu	21,6	—	21,3

Dans les conditions dans lesquelles nous avons travaillé, l'isoquinoléine donne de 50 à 60% de son poids d'un mélange des acides cinchoméronique et phtalique, qui s'y trouvent presque en parties égales, le premier prédominant tant soit peu.

---

[1]) Ann. Chem. u. Pharm. 144, p. 76.

[2]) Ann. Chem. u. Pharm. 204, p. 107.

[3]) l. c. p. 112.

[4]) Recueil des Travaux Chimiques des Pays-Bas T. II p. 24.

Digitized by Google

L'isoquinoléine est sans doute oxydée en partie suivant l'équation:

$$C_9H_7Az + 9\,O = C_7H_5AzO_4 + H_2O + 2\,CO_2$$

en donnant naissance à l'acide cinchoméronique. Nous avons posé la même équation pour la transformation de la quinoléine en acide quinoléique [1]). La partie de l'isoquinoléine, qui fournit de l'acide phtalique, sera probablement oxydée suivant l'équation:

$$2\,C_9H_7Az + 13\,O = 2\,C_8H_6O_4 + 2\,CO_2 + H_2O + Az_2.$$

Nous n'avons pas examiné si l'azote se dégage comme tel, ou s'il donne lieu à la formation de l'acide azoteux ou azotique.

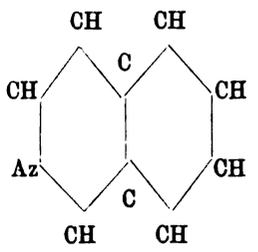
Comme dans la quinoléine, une partie considérable de l'isoquinoléine est transformée par le permanganate en des produits, dont la nature est inconnue. Les petites quantités d'ammoniaque et d'acide oxalique, qui ont été observées, seront probablement formées dans une telle réaction.

Nous avons prouvé dans les pages précédentes qu'il se forme par l'oxydation de l'isoquinoléine entre autres l'acide phtalique (acide benzodicarbonique), et l'acide cinchoméronique (acide dicarbopyridique). On peut déduire de ces résultats la constitution de l'isoquinoléine, en se basant sur les formules pour la benzine et la pyridine de MM. Kékulé et Koerner, et en acceptant l'acide phtalique comme acide orthodicarbonique de la benzine. En première ligne il suit de la formation des deux acides mentionnés que la base contient le noyau benzénique aussi bien que le noyau pyridique. Comparons ensuite la formule de l'isoquinoléine, qui contient neuf atomes de carbone, à celles de la benzine et de la pyridine, qui contiennent ensemble onze atomes de carbone. Il en résulte que, pour former l'isoquinoléine, les noyaux benzénique et pyridique doivent s'être unis de telle manière, que deux atomes de carbone sont communs aux deux noyaux mentionnés. Cette interprétation s'accorde avec le fait que les acides phtalique et cinchoméronique contiennent chacun deux groupes carboxyle. En tenant enfin compte du fait que l'acide benzodicarbonique formé est l'acide orthophtalique, on obtient pour l'isoquinoléine la formule

---

[1]) Recueil des Travaux Chimiques des Pays-Bas T. I p. 128.

Digitized by Google

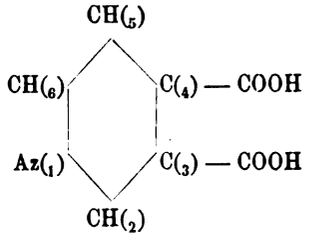


On peut envisager l'isoquinoléine comme de la naphtaline, dans laquelle un groupe CH, qui se trouve dans la position β, est remplacé par Az, tandis qu'au contraire la quinoléine ordinaire peut être regardée comme de la naphtaline, dans laquelle un groupe CH, se trouvant dans la position α, est substitué par Az.

D'après leurs formules les deux bases mentionnées doivent se comporter d'une manière analogue. Cette analogie se montre clairement dans l'action du permanganate de potassium.

Remarquons encore que la formule que nous venons de donner pour l'isoquinoléine, et d'après laquelle celle-ci est une amine tertiaire, est confirmée par l'étude des produits d'addition que la base forme avec les iodures de méthyle et d'éthyle.

En donnant à l'isoquinoléine la constitution à laquelle nous venons de parvenir, on fixe en même temps dans l'acide cinchoméronique la position des groupes carboxyle envers l'azote. Cet acide doit avoir la constitution



c'est-à-dire les deux groupes carboxyle se trouvent dans les positions 3 et 4, en assignant à l'azote la position 1.

Nous avons pu démontrer cependant, il y a quelque temps [1]), en partant de la formule de la pyridine donnée par KOERNER, que l'acide cinchoméronique [2])

---

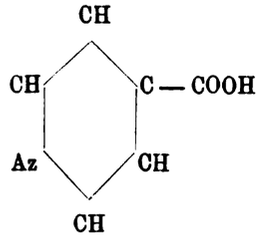
[1]) Ber. d. D. Chem. Ges. 14, p. 646.

[2]) Ici et dans la suite l'azote occupe la position 1.

Digitized by Google

doit posséder la constitution 1, 2, 5, quand l'acide quinoléique est 1, 2, 3. Qu'il nous soit permis de répéter ici en quelques mots notre raisonnement.

On connaît trois acides dicarbopyridiques, qui sont transformés entièrement ou en partie, par décomposition pyrogénée, en acide γ carbopyridique (syn. acide pyrocinchoméronique ou isonicotianique); ce sont les acides cinchoméronique et lutidique ainsi que l'acide dicarbopyridique de M. Boettinger. On connaît de même trois acides dicarbopyridiques, qui sont transformés par la chaleur entièrement ou en partie en acide nicotianique, à savoir les acides cinchoméronique, quinoléique et isocinchoméronique. Or l'acide carbopyridique 1, 4



distingue de ses isomères en ce qu'il n'y a que deux acides dicarbopyridiques pouvant en être formés. Donc ni l'acide γ carbopyridique, ni l'acide nicotianique ne peuvent être l'acide 1, 4, et l'acide cinchoméronique, qui par décomposition pyrogénée est transformée en acides γ carbopyridique et nicotianique, ne peut avoir de groupe carboxyle dans la position 4. L'acide cinchoméronique doit avoir nécessairement les groupes carboxyle dans les positions 2 et 5, quand on considère l'acide quinoléique, qui est formé par l'oxydation de la quinoléine, comme le dérivé 1, 2, 3.

De nouvelles recherches de MM. Ladenburg et Roth [1]) semblent faire cesser la contradiction dans laquelle se trouvent les conclusions que nous venons de formuler, avec celles que l'on peut tirer des résultats de l'oxydation de l'isoquinoléine. D'après les expériences des chimistes allemands que nous venons de citer, l'acide lutidique de MM. Weidel et Herzig est probablement identique à l'acide dicarbopyridique de M. Boettinger [2]). Si cette conclusion est juste, on ne peut maintenir le raisonnement que nous avions basé sur la différence de ces acides.

Quand on considère l'acide quinoléique comme ayant la constitution 1, 2, 3 et l'acide cinchoméronique comme 1, 3, 4, on peut fixer les positions du groupe

---

[1]) Ber. d. D. Chem. Ges. 18, p. 916.

[2]) Nous fixons l'attention sur un beau mémoire de M. Voigt (Ann. d. Chemie 228 p. 29), qui a examiné de nouveau cet acide, et qui donne un aperçu de la question concernant la constitution des acides carbopyridiques.

Digitized by Google

carboxyle vis à vis de l'azote dans les trois acides monocarbopyridiques; car d'une part les deux acides dicarbopyridiques que nous venons de nommer, ont un groupe carboxyle dans la position 3; d'autre part les acides quinoléique et cinchoméronique sont transformés par décomposition pyrogénée, l'un entièrement et l'autre partiellement, en acide nicotianique. Cet acide doit donc avoir le groupe carboxyle dans la position qui est occupée dans les deux acides dicarbopyridiques mentionnés; en d'autres termes l'acide nicotianique doit avoir la constitution 1, 3. L'autre produit de la décomposition pyrogénée de l'acide cinchoméronique, l'acide γ carbopyridique, doit être l'acide 1, 4, de sorte que l'acide picolique est le dérivé ortho ou 1, 2.

Les résultats auxquels nous venons d'aboutir, confirment les hypothèses que M. SKRAUP [1]) a publiées, il y a quelques années, sur la constitution des acides carbopyridiques et des corps dont ils dérivent. Ce savant a pu confirmer ses hypothèses par des expériences ultérieures [2]).

Nous nous occupons d'expériences pour la préparation de l'isoquinoléine et de ses homologues par voie synthétique. M. METZGER a déjà indiqué un chemin suivant lequel cette synthèse pourrait être effectuée [3]). Peut-être pourra-t-on aussi atteindre le but en partant de la benzylamine, dont la préparation est devenue plus facile depuis les récents travaux de M. HOFMANN [4]).

Delft,
Amsterdam, novembre 1885.

---

[1]) Monatshefte f. Chemie I, p. 800.

[2]) Monatshefte f. Chemie IV, p. 436.

[3]) S. METZGER Pyridin, Chinolin und deren Derivate, Braunschweig 1885, p. 19.

[4]) Ber. d. D. Chem. Ges. 18, p. 2738.

Digitized by Google

SUR LA PRÉPARATION DE LA BENZYLAMINE ET DE LA PHÉNYLÉTHYLAMINE

PAR

S. HOOGEWERFF ET W. A. VAN DORP.

Quand on prépare la benzylamine $C_6H_5 . CH_2 . AzH_2$ suivant le procédé de M. A. W. HOFMANN [1]), on mélange 1 molécule de brome avec 1 molécule d'amide phénylacétique $C_6H_5 . CH_2 . CO . AzH_2$ [2]); on ajoute ensuite 4 molécules de potasse en solution aqueuse (5 : 100) et on dirige à travers le liquide un courant de vapeur d'eau surchauffée. D'après les travaux de M. HOFMANN, on doit admettre que l'amide bromée $C_6H_5 . CH_2 . CO . AzHBr$ et l'isocyanate $C_6H_5 . CH_2 . AzCO$ se forment comme produits intermédiaires. La quantité de benzylamine que l'on obtient, correspond à 60% de celle qu'exige la théorie.

Le rendement s'élève à 80—85% en opérant de la sorte qu'on mélange d'abord le brome (1 mol.) avec la lessive de potasse (4 mol.) et qu'on ajoute ensuite cette solution alcaline d'hypobromite de potassium à l'amide (1 mol.); avant de chauffer et de chasser la base formée par un courant de vapeur d'eau, on doit agiter jusqu'à ce que l'amide soit entièrement dissoute.

En opérant de la manière que nous venons de décrire, on obtient direc-

---

[1]) Ber. d. Deutschen Chem. Ges. T. 18, p. 2738. Voir aussi T. 14, p. 2725, T. 15, p. 407, 752, 762.

[2]) Dans un mémoire inséré dans le Journ. f. prakt. Chemie N. F. 7, p. 100 M. WEDDIGE donne 180° comme le point d'ébullition de l'amide phénylacétique; le nombre a passé dans plusieurs traités (WURTZ. Dict. de Chimie, Supplém. p. 1182; BEILSTEIN, Handb. d. Organ. Chemie, 1e Aufl., p. 1165). Or il est probable qu'on a affaire ici à une erreur typographique; on devra lire 280° au lieu de 180°. Notre amide phénylacétique (qui avait été préparée une fois du cyanure de benzyle, une autre fois de l'acide phénylacétique) se décomposait partiellement par l'ébullition. Le thermomètre s'arrêtait d'abord un instant à 240°, tandis que des vapeurs à odeur ammoniacale se dégageaient. Le mercure montait ensuite à 280°. A 290° presque tout avait passé. L'amide phénylacétique recueillie contenait un corps huileux.

Digitized by Google

tement une base pure, tandis que la benzylamine préparée suivant le procédé de M. HOFMANN contient des quantités assez considérables de brome.

Le point d'ébullition de notre benzylamine se trouvait de 182° à 184° (non corrigé). Sa pureté fut contrôlée par un dosage de l'azote.

0,2717 grm. donnèrent $29^5/_8$ cc. d'azote à 15° et sous une pression de 764 mm. de mercure.

Calculé pour C_7H_9Az	Trouvé
Az = 13.1	12.8

Nous avons encore isolé le chlorhydrate. Quand on évapore à sec le liquide obtenu en recueillant dans de l'acide chlorhydrique les vapeurs alcalines, qui passent lors de la préparation de la benzylamine, et quand on traite à chaud ce résidu par de l'alcool absolu tout se dissout (ce qui prouve l'absence de chlorure d'ammonium). Par le refroidissement il se dépose des tablettes incolores dont le point de fusion fut trouvé de $255^1/_2$° à 258°; suivant M. SPICA [1]) il se trouve à 240°.

0,6503 grm. de ce sel séché à 100°—110° donnèrent 0,6299 grm. AgCl et 0,0126 grm. Ag.

Calculé pour C_7H_9Az . HCl	Trouvé
Cl = 24.7	24.6

La préparation de la phényléthylamine $C_6H_5 . CH_2 . CH_2 . AzH_2$ d'après M. HOFMANN [2]) est analogue à celle de la benzylamine. On verse 1 molécule de brome sur 1 molécule d'amide β phénylpropionique $C_6H_5 . CH_2 . CH_2 . CO . AzH_2$, on ajoute 4 molécules de potasse en solution aqueuse et on dirige un courant de vapeur d'eau à travers le liquide.

Nous avons apporté à la préparation de cette base la même modification que nous avons décrite pour la benzylamine, c'est-à-dire que nous avons dissous le brome dans la lessive de potasse (nous avons pris une solution de 5 sur 100) et que nous avons ajouté ce liquide à l'amide. On obtient 60% de la quantité de phényléthylamine qu'exige la théorie; M. HOFMANN trouve 30%.

Quand on prépare les deux bases, dont nous venons de parler, suivant notre procédé l'action du brome libre est exclue. Il nous semble que pour cette raison

[1]) Ber. d. Deutschen chem. Ges. T. 10, p. 889.

[2]) Ber. d. Deutschen chem. Ges. T. 18, p. 2740.

Digitized by Google

la réaction doit différer, du moins en partie, de celle de M. HOFMANN [1]). Nous espérons éclaircir ce point par de nouvelles expériences; en même temps nous nous proposons d'entreprendre la préparation d'autres amines suivant la nouvelle méthode.

Delft,
Amsterdam, novembre 1886.

---

[1]) Voir Ber. d. Deutschen chem. Ges. T. 15, p. 408.

Digitized by Google

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE SUR L'EFFET THERMO-ÉLECTRIQUE, DÉCOUVERT PAR THOMSON.

DEUXIÈME COMMUNICATION.

PAR

H. HAGA.

L'étude complète d'un circuit thermo-électrique de deux métaux comprend trois déterminations, savoir:

1. la mesure de l'effet découvert par THOMSON, — la convection électrique de la chaleur, — pour chacun des deux métaux;
2. la mesure de l'effet découvert par PELTIER, — le dégagement ou l'absorption de la chaleur dans les soudures;
3. la mesure de la force électromotrice du courant produit par la différence de température des soudures.

Chacune de ces déterminations doit être faite à diverses températures.

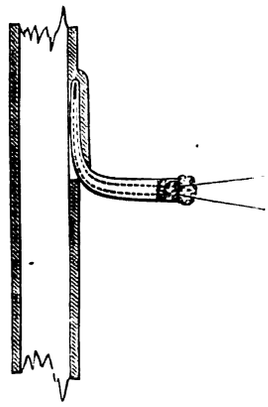
Pour le couple mercure-platine, que je m'étais proposé d'étudier, la première de ces déterminations pour le premier de ces deux métaux a été communiquée dans ce Journal Tome I, page 145 et suivantes. La mesure de la convection électrique de la chaleur dans le platine est l'objet de la présente communication. De même que pour le mercure, elle a été effectuée dans le laboratoire de physique de l'École Polytechnique de Delft. La méthode employée et l'appareil qui a servi à ces mesures [1]) ont été les mêmes pour les deux métaux. Le tube recourbé rempli de mercure a été remplacé par une tige recourbée de platine, ayant un diamètre de 4,05 millimètres. La partie recourbée qui se trouvait en haut de l'appareil fut échauffée par la vapeur d'un liquide bouillant, les bouts inférieurs furent maintenus à une température basse constante au moyen d'un

[1]) Voir la Planche du Tome I des Annales de l'École Polytechnique de Delft. Dans la figure il faut transposer les lettres *a* et *b*.

Digitized by Google

courant d'eau froide. Des aiguilles thermo-électriques appliquées aux parties intermédiaires servaient à en faire connaître la température. A cet effet deux tubes étroits en caoutchouc recouvraient la partie moyenne des deux branches de la tige recourbée; une incision transversale pratiquée dans les tubes en caoutchouc permettait d'y introduire les tubes en verre mince qui renfermaient les aiguilles thermo-électriques de sorte que ces tubes furent maintenus en leur place et fortement pressés contre le platine par l'effet de l'élasticité du caoutchouc (voir fig. 1). Le renversement du courant, passant par la tige de platine, produit dans un galvanomètre de THOMSON, placé dans le circuit des deux aiguilles, une déviation de l'image index, laquelle, ainsi qu'il a été expliqué dans notre précédente communication, est la mesure du quadruple effet de THOMSON.

Fig. 1.



Le courant fut fourni par 8 éléments de DANIELL, combinés de manière à former deux éléments à surface quadruple; une rhéochorde permettait de maintenir constantes les indications d'un ampèremètre placé dans ce circuit. Un circuit comparateur servait à déterminer pour chaque série la sensibilité du galvanomètre de THOMSON.

Dans les Tableaux A et B les données des observations ont été indiquées de la même manière que dans notre première communication. Ainsi A désigne en millimètres la distance de la paroi supérieure d'une des tubes en verre qui renfermaient les aiguilles thermométriques à la paroi inférieure du réservoir dans lequel circule la vapeur.

Les données du circuit comparateur sont indiquées par une équation exprimant le nombre d de divisions parcourues par l'image index du galvanomètre, lorsque l'on renverse le courant d'un couple thermo-électrique, dont les soudures diffèrent c degrés en température. On a de plus:

H heure de l'observation;

L_1 lecture du galvanomètre, lorsque le courant est ascendant dans la branche I;

L_2 lecture du galvanomètre, lorsque le courant est ascendant dans la branche II;

δ déplacement de l'image index causé par le renversement du courant en I et II.

Digitized by Google

A. Source de chaleur: Vapeur d'alcool méthylique.

I = 4 Ampères.

I. 10 novembre 1885. A = 26,5; 144,3 d = 92,5 c				II. 18 novembre 1885. A = 17,0; 156 d = 95,15 c				III. 29 décembre 1885. A = 24,5; 158,5 d = 91,65 c				IV. 31 décembre 1885. A = 17,5; 154 d = 91,3 c				V. 20 janvier 1886. A = 26,0; 158,5 d = 90,4 c			
H	L_1	L_2	δ	H	L_1	L_2	δ	H	L_1	L_2	δ	H	L_1	L_2	δ	H	L_1	L_2	δ
6h25m		121		6h13m		231		1h40m	180			1h 0m	94			6h30m		48	
36	148		33,5	23	262		32,0	50		146	34,5	10		63	34,5	40	80		31,5
46		110		35		229		2 0	181			20	101			50		49	
56	140		32,5	45	259		34,5	10		143	38,0	30		67	34,5	7 0	87		39,5
7 6		105		56		220		20	181			40	102			10		46	
17	138		35,0	7 6	256		34,5	30		146	35,5	50		65	36,0	20	72		31,5
27		101		17		223		40	182			2 0	100			30		35	
	142,0	109,25			259,0	225,75			181,0	145,0			99,25	65,0			79,7	44,5	
δ = 32,75				δ = 33,25				δ = 36,0				δ = 34,25				δ = 35,2			

B. Source de chaleur: Vapeur d'eau.

I = 4 Ampères.

VI. 10 décembre 1885. A = 25,25; 160 d = 91,7 c				VII. 24 décembre 1885. A = 24,5; 154,5 d = 91,3 c				VIII. 2 janvier 1886. A = 17,5; 153,5 d = 91,1 c				IX. 4 janvier 1886. A = 26,0; 160,7 d = 90,35 c				X. 11 janvier 1886. A = 26,0; 161 d = 92,05 c			
H	L_1	L_2	δ	H	L_1	L_2	δ	H	L_1	L_2	δ	H	L_1	L_2	δ	H	L_1	L_2	δ
6h38m		172		1h34m		156		2h 0m	144			1h30m		15		4h 5m		122	
49	231		55,0	45	215		57,5	11		95	55,5	40	67		53,5	15	178		51,5
7 0		180		55		159		21	155			50		14		25		131	
10	242		57,5	2 5	215		56,5	31		99	58,5	2 0	78		59,0	35	182		53,5
20		189		15		158		45	160			10		24		45		126	
30	244		55,0	25	215		55,5	56		103	59,5	20	77		51,0	55	183		54,5
40		189		35		161		3 6	165			30		28		5 5		131	
	239,0	182,5			215,0	158,5			156,0	99,0			74,0	20,0			181,0	127,5	
δ = 56.5				δ = 56,5				δ = 57,0				δ = 54,0				δ = 53,5			

Digitized by Google

Pour déterminer la température de la tige de platine à différentes hauteurs au-dessous du réservoir à vapeur, on a de nouveau employé la méthode de compensation. L'une des aiguilles d'un couple thermométrique fut placée dans le tube en verre mince serré contre le platine, l'autre fut disposée à côté de la boule d'un thermomètre dans une grande jarre de verre remplie d'eau dont on élevait la température jusqu'à faire disparaître le courant thermo-électrique. Les températures, ainsi mesurées, sont inscrites dans la quatrième colonne du Tableau C. La chute de température par unité de longueur: $\frac{dt}{dA}$, a été trouvée égale à 0,474, lorsque le réservoir supérieur était échauffé par les vapeurs d'alcool méthylique bouillant, et de 0,649, lorsque l'on se servait de la vapeur de l'eau bouillante.

Le circuit qui servait à ces expériences se composait des mêmes éléments que celui employé pour mesurer la convection électrique de la chaleur, seulement les fils conducteurs étaient plus longs, de sorte que le circuit pouvait servir en même temps à mesurer la déviation produite, dans un état donné de sensibilité, dans le galvanomètre, lorsque, la résistance étant une unité de Siemens, la différence de température des deux soudures est 1° centigrade. A cet effet l'une des soudures fut placée dans la glace fondante, l'autre dans la vapeur de l'eau bouillante; on intercalait dans le circuit la résistance nécessaire pour maintenir la déviation de l'image index en dedans des limites de l'échelle.

Le résultat de ces mesures fut que, dans le circuit qui servait à mesurer l'effet Thomson et dont la résistance était de 2,28 unités de Siemens, lorsque le galvanomètre avait la sensibilité unité, exprimée par l'équation $100\,d = 100\,c$ du circuit comparateur, une différence de température de 1° dans les deux aiguilles faisait dévier l'image index de 221,9 divisions de l'échelle. La différence entre cette valeur et celle que nous avions obtenue dans nos expériences avec le mercure, provient de ce que, dans les deux cas, on a employé des circuits comparateurs différents.

Au moyen des données que nous venons d'indiquer, on a pu vérifier jusqu'à quel point les observations des Tableaux A et B se laissent concilier avec une relation linéaire entre l'intensité de l'effet Thomson et la température. Les résultats du calcul sont inscrits dans le Tableau C dans lequel on a désigné par:

δ' le déplacement de l'image index produit par l'inversion de l'effet de Thomson, lorsque le courant de 4 ampères est renversé, ce déplacement étant réduit à l'unité de sensibilité du galvanomètre.

E_t le quadruple effet Thomson par unité du courant (1 ampère) et par unité de chute de température $\frac{dt}{dA}$ le long du conducteur.

Digitized by Google

C. Résumé et Calcul des Observations.

Série.	ϑ'	$\frac{dt}{dA}$	t	E_t observé.	E_t calculé			
					selon $E_{45,2} + a(t-45,2)$	ε	selon $a'T$	ε
I.	21,0	0,474	35°.9	0,0499	0,0480	+ 0,0019	0,0507	— 0,0008
V	20,1	»	36°.2	478	481	— 0,0003	507	— 0,0029
III.	20,8	»	36°.9	494	484	+ 0,0010	509	— 0,0015
IV.	20,3	»	40°.2	483	499	— 0,0016	514	— 0,0031
II.	20,3	»	40°.4	483	500	— 0,0017	514	— 0,0031
IX et X.	30,5	0,649	52°.5	529	555	— 0,0026	534	— 0,0005
VI.	32,4	»	53°.0	562	557	+ 0,0005	535	+ 0,0027
VII.	33,4	»	53°.6	580	560	+ 0,0020	537	+ 0,0043
VIII.	33,8	»	58°.0	587	581	+ 0,0006	543	+ 0,0044

$E_t = E_{45,2} + a(t - 45,2)$; $E_{45,2} = 0,0522$; $m = 0,00175$; $a = 0,00045$; $a' = 0,000164$;
$m_{E_{45,2}} = 0,00058$.

La température moyenne t étant 45°,2, on a calculé les valeurs les plus probables de $E_{45,2}$ et de a de la formule:

$$E_t = E_{45,2} + a(t - 45,2).$$

En cherchant avec les valeurs trouvées $E_{45,2} = 0,0522$ et $a = 0,00045$ les valeurs de E_t pour les températures t de la quatrième colonne, on obtient les nombres de la sixième. Les écarts inscrits dans la septième colonne donnent pour l'erreur moyenne d'une détermination la valeur 0,00175. L'erreur moyenne du résultat trouvé pour $E_{45,2}$ ne dépasse que fort peu un centième.

Les observations satisfont encore mieux à la formule admise que celles faites avec le mercure ce qui s'explique par l'effet nuisible que, dans l'emploi d'un conducteur liquide, les trépidations même légères peuvent avoir sur la stabilité de la température dans le voisinage des aiguilles thermométriques.

Nous avons remarqué, dans notre précédente communication que la variabilité observée de l'effet Thomson avec la température s'accorde, pour le mercure, assez bien avec la loi proposée par M. Tait:

$$E_T = a' T.$$

En appliquant cette loi à nos mesures faites avec le platine on trouve les résultats indiqués dans les deux dernières colonnes du Tableau C. Les écarts de la dernière colonne indiquent, tant par leur grandeur que par leur marche régulière, que les observations ne se laissent pas concilier avec cette supposition, de

Digitized by Google

sorte qu'on peut affirmer, que *l'effet* THOMSON *dans le platine ne s'accorde pas avec la loi* de TAIT.

Il est à supposer que d'autres métaux se trouveront dans le même cas et c'est ce qui donne lieu à la remarque suivante. Supposons que, pour le platine, la valeur de a dans la formule:

$$E_t = 0{,}0522 + a\,(t - 45{,}2)$$

reste constante en dehors des limites de température de nos expériences. L'effet THOMSON sera nul pour $t = -70°.8$ et au-dessous de cette température il changera de signe. Cette inversion de la convection électrique de la chaleur doit se montrer dans tout métal pour lequel la relation entre l'intensité de cet effet et la température peut s'exprimer par une formule linéaire. Peut-être pourra-t-on démontrer que dans un métal, tel que le plomb, pour lequel l'effet THOMSON est à peine appréciable à la température ordinaire, l'effet change de signe lorsqu'on fait varier la température dans des limites accessibles à l'expérience.

Pour évaluer en mesure absolue l'intensité de l'effet THOMSON dans le platine on a, de même que pour le mercure, supposé que, en dedans de certaines limites, les variations de température des aiguilles thermométriques fussent proportionnelles aux quantités de chaleur dégagée. Il ne reste alors qu'à comparer les indications du galvanomètre du circuit thermo-électrique dans le cas où la chaleur n'est produite que par la résistance du conducteur et celui où, de plus, l'effet THOMSON entre en jeu.

Dans cette expérience nous avons un peu modifié le procédé suivi dans nos premières recherches. A la partie recourbée de la tige de platine fut soudé un gros fil de cuivre. Celui-ci traversait le bouchon de liège supérieur de l'appareil calorifique et communiquait avec l'un des poles d'une pile.

Si l'on fait passer le courant alternativement par l'une et l'autre des deux branches I et II de la tige de platine, le couple thermométrique fournira un courant, tantôt dans un sens tantôt dans l'autre et la course de l'image index sur l'échelle correspondra à l'effet double de la chaleur développée d'après la loi de JOULE.

Les Tableaux D et E renferment les résultats de ces expériences.

Digitized by Google

D.

I = 4 Ampères.

I. 12 novembre 1885. A = 26,5 ; 145 d = 91,1 c.			II. 19 novembre 1885. A = 17,0 ; 148 d = 93,8 c.			III. 29 décembre 1885. A = 24,5 ; 158,5 d = 91,65 c.			IV. 31 décembre 1885. A = 17,5 ; 154 d = 91,3 c.			V. 21 janvier 1886. A = 26,0 ; 159,2 d = 90,25 c.		
H	Courant dans		H	Courant dans		H	Courant dans		H	Courant dans		H	Courant dans	
	I	II		I	II		I	II		I	II		I	II
	+	—		+	—		+	—		+	—		+	—
6h 3m	310		6h 4m	333		3h 0m	338		2h20m	301		6h30m	238	
26		37	30		18	20		30	40		73	50		91
48	308		50	338		40	348		3 0	297		7 10	267	
7 10		60	7 10		24	4 0		44	20		76	30		101
30	281		33	317		20	349		40	312		50	274	
	299,7	48,5		329,3	21,0		345,0	37,0		303,3	74,5		276,3	96,0
D = 348,2			D = 350,3			D = 382,0			D = 377,8			D = 372,3		

E.

I = 4 Ampères.

VI. 24 décembre 1885. A = 24,5 ; 154,5 d = 91,3 c.			VII. 2 janvier 1886 A = 17,5 ; 153,5 d = 91,1 c.			VIII. 4 janvier 1886. A = 26,0 ; 160,7 d = 90,85 c.			IX. 11 janvier 1886. A = 26,0 ; 161 d = 92,05 c.		
H	Courant dans		H	Courant dans		H	Courant dans		H	Courant dans	
	I	II		I	II		I	II		I	II
	+	—		+	—		+	—		+	—
3h 5m	353		3h26m	330		2h50m	234		6h45m	315	
25		16	45		46	3 10		120	7 5		74
45	338		4 5	342		30	250		25	284	
4 5		26	25		42	50		120	45		57
25	346		45	348		4 10	258		8 5	325	
	345,7	21,0		340,0	44,0		247,3	120,0		308,0	65,5
D = 366,7			D = 384,0			D = 367,3			D = 373,5		

Pour déduire des valeurs D de ces tableaux les élévations de température dues à un courant de 4 ampères, il faut, après réduction à l'unité de sensibilité du galvanomètre, diviser par $2 \times 221{,}9$.

La valeur de la résistance du conducteur en platine, qui doit servir à calculer en calories la chaleur produite par le courant de 4 ampères, fut déterminée en comparant une tige du même métal et de même épaisseur, longue de

Digitized by Google

507 millimètres avec un étalon auxiliaire directement comparé avec un étalon de SIEMENS. Pour éviter l'influence des résistances de passage, on employait dans ces comparaisons la méthode de THOMSON.

La résistance d'un mètre du fil de platine à 13° C. fut trouvée égale à 0,011092 Ohm, d'où il suit qu'un courant de 4 ampères développe par millimètre de longueur de ce conducteur 0,000042556 calories (1gr. d'eau, 1° C.) par seconde.

En admettant que la résistance est proportionnelle à la température absolue, on peut, au moyen de chacune des observations des Tableaux D et E, calculer la chaleur dégagée par millimètre de longueur.

En divisant par l'élévation de température, on obtient le nombre de calories dégagées correspondant à une élévation de température de 1° C. Les résultats de ce calcul, ordonnés suivant les températures croissantes, sont les suivantes:

0,0000933
0967
0927
0923
0929
1021
0996
0956
0,0000957

Nous avons obtenu pour la valeur quadruple de la variation de température due à l'effet THOMSON, à 45° C., le chiffre 0,0522. L'effet THOMSON dans le platine équivaut donc à 0,00000125 calories.

C'est-à-dire: *Lorsque dans la tige de platine qui a servi dans nos expériences, un courant de* 1 *ampère passe d'une section de la température* 44°.5 *à une autre de* 45°.5 *il se produit, en dehors du dégagement de chaleur d'après la loi de* JOULE, *une quantité de chaleur de* 0,00000125 *calories.*

Nous avons rapporté dans notre précédente communication que l'effet de THOMSON se produit dans le plomb et cela dans le sens indiqué d'avance par le physicien anglais. Comme notre résultat se trouvait en désaccord avec les expériences de M. LEROUX, qui avait obtenu pour le plomb un effet „sensiblement nul", il me parut important de répéter l'expérience en me servant du plomb pur, au lieu du plomb de commerce antérieurement employé. Pour obtenir le plomb pur dans la forme d'une barre bien homogène, on a forcé, au moyen d'une presse à vis, le métal, porté à la température de 200°, à travers une ouverture de 4 millimètres pratiquée dans le fonds d'un fort cilindre en fer.

Digitized by Google

La barre de plomb fut placée dans notre appareil de la même manière que la tige de platine. Une série de mesures effectuées un soir où le galvanomètre se montrait exceptionnellement tranquille fournit les données suivantes.

2 Février 1886. Source de chaleur: Vapeur d'eau. I = 4 ampères.

H.	L_1	L_2
6^h27^m		92
37	95	
47		91
57	94	
7 7		90
	94,5	91,0

$\delta = 3{,}5$. Sensibilité 147 $d = 88{,}7$ c.

Courant en I	+ 265
„ „ II	— 75

Quoique l'expérience accuse manifestement l'existence de l'effet THOMSON, il en résulte cependant que l'action n'est que très faible.

La branche L_1 dans laquelle le courant se meut dans le sens des températures croissantes étant en excès de température sur L_2, l'effet THOMSON dans le plomb pur est *négatif*. Le plomb du commerce nous ayant donné un résultat contraire, on voit de nouveau combien une faible différence de composition peut influer sur ce phénomène.

M. le docteur W. D. GRATAMA de Delft a bien voulu analyser le plomb employé dans ces dernières expériences. Il a trouvé: hormis une trace d'argent, 0,093% d'antimoine, 0,004% de fer et 0,013% de zinc.

Delft, mars 1886. H. HAGA.

Digitized by Google

SUR LE COMPLEXE DES DROITES DONT LES DISTANCES À DEUX DROITES DONNÉES SONT ENTRE ELLES DANS UN RAPPORT CONSTANT,

PAR

P. H. SCHOUTE.[1])

La théorie des complexes dont l'ordre surpasse deux, est encore à faire. Il est vrai que le livre précieux de J. PLUECKER „*Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*", publié en 1868 par M. F. KLEIN, contient quelques indications par rapport à certaines surfaces, appelées „*Complexflächen*", et leurs courbes doubles; mais dans le cas général du complexe d'un ordre n, on ignore encore l'ordre de la surface, appelée „*Singularitätenfläche*", constituant le lieu des points singuliers du complexe, etc.

Ce petit travail ne prétend qu'à l'étude géométrique d'un complexe particulier Φ du quatrième ordre, sur lequel M. J. NEUBERG de Liège a fixé mon attention. Et si parfois cette première étude d'un complexe d'un ordre supérieur puisse accélérer le développement de quelques détails de la théorie générale, j'en saurai gré à mon savant collègue de Liège, qui après avoir parcouru le manuscrit m'a suggéré bien des amplifications.

Parce que la génération des courbes et des surfaces au moyen de faisceaux projectifs joue un rôle important dans l'étude du complexe Φ, je me suis décidé à exclure d'abord toute analyse. Cependant je rassemblerai dans un supplément la démonstration analytique des principaux résultats [2]).

---

[1]) Les résultats de ce travail ont été communiqués à l'Académie des Sciences de Paris par M. Ch. Hermite (Comptes-rendus, 12 avril 1887).

[2]) Par les chiffres (1), (2), etc. je renverrai à cette démonstration analytique.

Digitized by Google

1. Les droites d dont les distances ϱ et ϱ' à deux droites données l et l' sont dans un rapport donné f, de manière que l'on a $\varrho' = f\varrho$, forment un complexe, parce qu'elles satisfont à une relation unique (1). Nous nommons l et l' les „*axes*" et f la „*constante*" de ce complexe, que nous représentons par Φ.

Les droites de Φ qui passent par un point donné P, forment un cône, le „*cône de complexe*" de P. Les droites de Φ situées dans un plan donné π enveloppent une courbe, la „*courbe de complexe*" de π. Et il est évident que l'ordre des cônes de complexe est toujours égal à la classe des courbes de complexe; parce que ces deux quantités représentent à la fois le nombre des droites de Φ, qui passent par un point donné P et se trouvent dans un plan donné π par P. Nous étudierons l'un après l'autre le cône de complexe et la courbe de complexe.

2. Pour chercher le cône de complexe d'un point donné P, nous rangeons les droites de Φ de la manière suivante.

Toutes les droites distantes de l de la quantité ϱ forment le complexe des tangentes au cylindre de révolution C à axe l et à rayon ϱ. De même, les droites dont la distance à l' est égale à $\varrho' = f\varrho$, forment le complexe des tangentes au cylindre C' à axe l' et à rayon ϱ'. Les tangentes communes à ces deux cylindres, c.-à-d. les droites communes à ces deux complexes, forment une *congruence*. Et l'ensemble de ces congruences, lorsque ϱ varie, constitue le complexe Φ, que nous étudions.

Pour trouver les droites de Φ, qui passent par un point donné P, nous menons par ce point les deux plans tangents σ, τ au cylindre C et les deux plans tangents σ', τ' au cylindre C'. Les quatre droites d'intersection des plans σ, τ avec les plans σ', τ' appartenant à Φ, le cône de complexe de P est le lieu de ces quatre droites, quand ϱ varie.

Lorsque ϱ varie, les plans σ, τ sont les éléments conjugués d'une *involution quadratique* I_p, ayant pour axe la droite l_p parallèle à l par P. De cette involution les *éléments doubles* sont le plan (P l), que nous représentons par δ, et le plan par l_p perpendiculaire à δ, que nous représentons par ε; ces éléments doubles correspondent au cylindre C réduit à l'axe l et au cylindre C passant par P. Nous nommons cette involution une *involution isogonale*, parce que les plans δ et ε sont les plans bissecteurs de tous les angles dièdres formés par les couples de plans conjugués. De même, les plans σ', τ' sont les éléments conjugués d'une involution isogonale I'_p, ayant pour axe la droite l'_p parallèle à l' par P et pour éléments doubles δ', ε' le plan (P l') et le plan par l'_p perpendiculaire à (P l').

Ces deux involutions isogonales I_p et I'_p sont projectives. Car si l'on connaît σ ou τ, on peut construire C, ensuite le cylindre correspondant C' et enfin σ'

Digitized by Google

et τ' d'une manière unique. Et réciproquement on parvient à un couple de plans unique σ, τ en partant de σ' ou τ'. Il est à remarquer que les éléments doubles δ et δ' forment des couples d'éléments correspondants de I_p et I'_p. Au contraire les plans doubles ε et ε' ne se correspondent l'un à l'autre que lorsque les distances de P à l et l' sont dans le rapport donné. Nous excluons ce cas, de même que d'autres cas singuliers, que nous examinerons plus tard.

Le cône de complexe de P est, comme le lieu des droites d'intersection des deux plans σ, τ avec les deux plans σ', τ', en même temps le lieu des droites d'intersection des couples correspondants des deux involutions projectives I_p et I'_p. Et ces involutions engendrent, comme l'on sait, un *cône du quatrième ordre.* En effet, un plan quelconque π par P coupe les deux involutions de plans I_p et I'_p suivant deux involutions de rayons $i_{p,\pi}$ et $i'_{p,\pi}$. Et d'après le *principe de correspondance*, ces deux involutions projectives $i_{p,\pi}$ et $i'_{p,\pi}$ admettent quatre rayons correspondants coincidants.

Dans un plan quelconque σ par l_p on ne trouve que deux droites de Φ qui varient avec σ, les droites d'intersection de σ et des deux plans correspondants σ', τ'. Donc, l'axe l_p de I_p représente deux arêtes du cône K^4 que nous venons de trouver, dans chacun des plans σ par l_p; en d'autres termes, l_p est *arête double* du cône K^4. Si l'on désigne le plan $(l_p\, l'_p)$ par λ ou λ', selon qu'il fait partie d'un couple de l'involution I_p ou I'_p et que l'on indique par σ_1, τ_1 le couple de I_p correspondant au couple de I'_p qui contient λ' et par σ'_2, τ'_2 le couple de I'_p correspondant au couple de I_p qui contient λ, on n'a qu'à faire passer le plan σ par les deux positions σ_1, τ_1 pour démontrer, que le cône admet deux plans tangents suivant l_p, les plans σ_1, τ_1. De même, l'_p est arête double de K^4 avec les deux plans tangents σ'_2, τ'_2 [1]).

Enfin le cône K^4, dont nous avons indiqué deux arêtes doubles, en possède encore une troisième, la droite ι_p par P, qui s'appuie sur l et l'. Car, si σ coincide avec δ, les deux plans du couple correspondant de I'_p coincident en δ', de manière que δ est plan tangent à K^4 suivant ι_p. Mais de la même manière on démontre que δ' touche K^4 suivant ι_p. Donc ι_p est arête double de K^4. Et d'après les propriétés harmoniques d'un angle tétraèdre, la limite de l'angle tétraèdre formé par les deux plans σ, τ et les deux plans σ', τ' au moment que le premier couple va coincider avec δ et le second avec δ', les deux plans tangents à K^4 suivant ι_p sont séparés harmoniquement par δ et δ' (2).

---

[1]) Quoiqu'on évite l'emploi du principe de correspondance dans la détermination de l'ordre du cône en remarquant que chaque plan σ par l_p contient deux arêtes différentes de l_p et que l_p est arête double, je n'ai pas hésité à introduire ce principe, qui est d'un fréquent usage dans la géométrie.

Digitized by Google

Nous remarquons encore, que les plans σ_3, τ_3 de l'involution I_p, qui correspondent à l'élément double ε' de I'_p, sont tangents à K^4 suivant les droites d'intersection avec ε'; de même, les plans σ'_4, τ'_4 de I'_p, qui correspondent à ε, touchent K^4 suivant les droites d'intersection avec ε. Ce sont là les plans uniques par l_p et l'_p qui touchent K^4 suivant d'autres arêtes; ce qui prouve, que le cône K^4 est de la sixième classe. Ce résultat est vérifié par les formules de PLUECKER. Car elles font trouver que le cône K^4 à trois arêtes doubles, dont en général pas un seul n'est arête de rebroussement, admet six plans tangents par un point donné, quatre plans tangents doubles et six plans d'inflexion. On sait que le cône K^4 est *unicursal*, parce qu'il ne saurait avoir une arête double de plus, sans se décomposer en deux cônes d'un ordre inférieur.

Enfin nous observons que les droites $\sigma\sigma'$ et $\tau\tau'$, $\sigma\tau'$ et $\sigma'\tau$ d'intersection croisée forment sur K^4 une involution quadratique. En cherchant le nombre de fois que le plan $(\sigma\sigma', \tau\tau')$ ou $(\sigma\tau', \sigma'\tau)$ passe par l_p, on trouve que l'enveloppe de ces plans est un cône de la quatrième classe.

3. Nous avons démontré que le cône de complexe K^4 d'un point quelconque P a trois arêtes doubles, les droites l_p, l'_p et $\mathfrak{l}_p$. Cependant, ce résultat semble *paradoxal*; parce qu'il exige que toutes les droites parallèles à l ou à l' appartiennent deux fois au complexe Φ, tandis que ces droites ne satisfont même pas à la condition caractéristique des distances. Car on peut supposer qu'on ait choisi d'abord une droite quelconque parallèle à un des deux axes et qu'ensuite on ait fixé la constante f, différente du rapport des distances de cette droite aux axes.

Le *paradoxe* en question est introduit par une *discontinuité* qui affecte l'idée „*distance de deux droites*". En effet, la définition générale de la distance de deux droites, comme la distance des deux plans menés par l'une des droites parallèle à l'autre et réciproquement — et sur cette définition s'appuie la considération des cylindres C et C' — est spécialisée dans le cas de deux droites parallèles. Pour qu'on puisse sanctionner entièrement le résultat du cône K^4, il faut donc qu'on défasse l'idée de la distance de deux droites de la discontinuité indiquée, en se plaçant au point de vue que la distance de deux droites parallèles est indéterminée, parce qu'on peut mener une infinité de couples de plans parallèles par ces droites. C'est ce que nous nous proposons de faire dans ce qui suit.

L'adoption du nouveau point de vue exige que chaque droite parallèle à l ou à l' fasse partie de Φ. Donc le cône K^4 du point de l ou de l' situé à l'infini est indéterminé. On a nommé de tels points inertes dans la détermination d'un cône K^4, ces points dont les cônes de complexe sont remplacés par

Digitized by Google

des gerbes, les *points principaux* du complexe [1]). Et nous disons que le complexe Φ possède deux points principaux „de puissance deux" ou deux points principaux doubles, les points à l'infini L_∞ et L'_∞ de l et l', parce que chaque droite par un de ces points est arête double des cônes K^4 de tous les points de la droite. Ce qui produit que chaque plan π par un de ces points L_∞ a une courbe de complexe dont le point en question fait partie deux fois; parce que chaque droite en π par L_∞ appartient deux fois aux quatre tangentes par un point quelconque de la droite à la courbe de complexe située en π.

4. Cherchons la courbe de complexe d'un plan quelconque π. Revenons à cet effet aux cylindres correspondants C et C' à rayon ϱ et $\varrho' = f\varrho$. Représentons les coniques qui sont les traces de ces cylindres sur π, par c et c'. Et remarquons que l'enveloppe cherchée est l'enveloppe des quatre tangentes communes de ces deux coniques, quand ϱ varie.

Quand ϱ varie, les coniques c et c' forment les éléments correspondants de *deux faisceaux tangentiels projectifs de coniques.* En effet, les cylindres C étant coaxiaux, leurs traces c sur π seront homothétiques et concentriques; le centre commun de ces courbes est le point d'intersection L de l et π. De même, les coniques c' sont homothétiques et ont leur centre au point d'intersection L' de l' et π. Et parce que deux coniques homothétiques et concentriques se touchent à l'infini en deux points, imaginaires dans le cas en question des ellipses, ces deux systèmes de coniques forment à la fois deux faisceaux ponctuels et deux faisceaux tangentiels qui évidemment sont projectifs l'un à l'autre.

La courbe de complexe de π est, comme l'enveloppe des quatre tangentes communes de c et c', quand ϱ varie, l'enveloppe des tangentes communes des éléments correspondants c et c' des deux faisceaux tangentiels projectifs de coniques. Et, comme l'on sait, cette enveloppe est de la quatrième classe. En effet, quand nous nous imaginons les couples de tangentes par un point quelconque P de π aux coniques c et aux coniques c', nous retombons sur les involutions projectives $i_{p,\pi}$ et $i'_{p,\pi}$, qui admettent quatre rayons correspondants coincidants, etc.

---

[1]) Les *points principaux* — et les *plans principaux* que nous rencontrerons bientôt — ont été signalés par PLUECKER (l. c. art. 313). Mais les noms ont été introduits d'après REYE. M. REYE s'est servi des termes »*Hauptpunkt*" et »*Hauptebene*" (»Die Geometrie der Lage"), ce que M. CHEMIN a rendu par point et plan principal.

C'est ici que l'idée de point et plan principal *multiple* se présente pour la première fois. Cette extension nous mène d'un pas plus loin dans la voie de la comparaison entre les complexes et les courbes planes en nous montrant dans les points et plans principaux multiples des complexes les *analogies* des points et tangentes multiples des courbes planes.

A un second PLUECKER le devoir de découvrir les relations entre les nombres de ces *véritables singularités* des complexes.

Digitized by Google

Il va sans dire que le raisonnement qui vient d'être développé, serait tout à fait superflu, s'il ne nous faisait connaître que la classe des courbes de complexe que nous représentons par c^4. Mais il nous apprend beaucoup plus. Même au risque de faire semblant de nous répéter, nous n'avons donc pas voulu supprimer la considération des deux faisceaux tangentiels projectifs de coniques c et c'. En verité, nous verrons qu'elle nous révèlera le vrai caractère des courbes c^4.

D'après la théorie générale de la génération des courbes au moyen de deux faisceaux projectifs, les tangentes communes des courbes de chacun des deux faisceaux, les *tangentes de base* des deux faisceaux, sont des tangentes de l'enveloppe engendrée. Et parce que dans notre cas spécial les quatre tangentes de base de chacun des deux faisceaux se reduisent à deux tangentes à points de contact communs, chaque courbe c^4 a *quatre asymptotes imaginaires conjuguées*, les asymptotes communes des coniques c et celles des coniques c'. De plus elle a *deux tangentes doubles*, la droite l_π de π qui joint les points d'intersection L et L′ de π avec l et l' et la droite l_∞ de π située entièrement à l'infini. En effet, les coniques c et c', qui se réduisent aux points doubles L et L′, se correspondent l'une à l'autre dans les deux faisceaux tangentiels; de manière que pour $\varrho = o$ les quatre tangentes communes de c et c' coincident avec l_π et que cette droite touche c^4 en deux point séparés harmoniquement de L et L′, comme on déduit de la considération de la question analogue des deux plans tangents au cône K^4 d'un point P par l'arête double l_p au moyen de la loi de dualité. Et les coniques c et c', qui se reduisent à des couples de points imaginaires à l'infini, sont de même des éléments correspondants des deux faisceaux, les éléments pour $\varrho = \infty$, ce qui fait trouver que la droite l_∞ de π touche c^4 en deux points formant un couple de l'involution détérminée par les couples de points c et c'. A coté de la tangente double l_π les asymptotes par L forment les deux tangentes par L, les asymptotes par L′ les deux tangentes par L′. Et parce que la droite l_∞ coupe c^4 en quatre points, tandis qu'elle la touche en deux autres points, la courbe c^4 est du huitième ordre. D'après les formules de Pluecker, qui vérifient ce résultat de l'ordre, la courbe c^4 possède huit points doubles et douze points de rebroussement (3).

Quand tous les plans π ont des courbes de complexe c^4, dont la droite à l'infini du plan est tangente double, le plan à l'infini, que nous représentons par π_∞, doit être inerte dans la détermination de sa courbe c^4. Donc le plan π_∞ est un plan principal et même un plan principal double, parce que chacune de ses droites est tangente double de c^4 pour chacun des plans qui passent par cette droite. Donc le plan π_∞ appartient en même temps deux fois aux cônes K^4 de tous ses points, comme nous vérifions de la manière suivante. Pour un point P de.

Digitized by Google

π_∞ les deux involutions I_p et I'_p sont des involutions de couples de plans parallèles et équidistants de part et d'autre d'un plan fixe, en I_p le plan $\delta = (P\,l)$, en I'_p le plan $\delta' = (P\,l')$. Ces deux involutions ont le plan π_∞ comme élément double commun, c.-à-d. les plans ε et ε' coïncident en π_∞. Donc le plan π_∞ appartient en effet deux fois au cône K^4 d'un point quelconque P de π_∞. Nous remarquons encore que le cône quadratique, qui complète π_∞ au cône K^4 du point P de π_∞, se compose de deux plans. Car ce cône a une arête double, l'intersection l_p des plans δ et δ'.

Après tout il est bien évident que chaque droite de π_∞ appartient à Φ; car les distances de cette droite à l et l' sont infinies et ont donc un rapport indéterminée.

5. Comme le cône de complexe K^4 d'un point quelconque P de l'espace est *unicursal*, il y aura une *surface* dont chaque point P a un *cône de complexe dégénéré*. Cette surface, qui comme le lieu des points singuliers du complexe, porte en allemand le nom de „*Singularitätenfläche*" se composera peut-être de deux parties de *signification différente*; car la décomposition du cône K^4 en deux parties peut se faire de deux manières différentes, en deux cônes quadratiques ou en un cône cubique et un plan. Occupons nous d'abord de la première manière de décomposition.

Le cône K^4 du point P, qui, comme nous avons vu, est le lieu des droites d'intersection des couples de plans correspondants des deux involutions isogonales projectives I_p et I'_p, ne saurait avoir une quatrième arête double en dehors du plan $(l_p\,l'_p)$ que dans le cas spécial exclu à l'art. 2, où les deux plans doubles ε et ε' se correspondent l'un à l'autre dans les deux involutions. Et dans ce cas les cylindres C et C' par P se correspondent l'un à l'autre; en d'autres termes, les distances de P à l et l' sont entre elles dans le rapport constant f. Donc la surface cherchée est le lieu des points, dont les distances à l et l' sont dans le rapport donné f.

Le lieu des points P, dont les distances à l et l' sont dans le rapport donné f, est en même temps le lieu de la courbe gauche $r^{3,3}$ d'ordre quatre, qui est l'intersection des cylindres C et C' à rayons ϱ et $\varrho' = f\varrho$, quand ϱ varie. Ces deux faisceaux projectifs de cylindres coaxiaux engendrent une surface du quatrième ordre; car les deux faisceaux ponctuels projectifs des traces c et c' de C et C' sur un plan quelconque π engendrent tout aussi bien une courbe du quatrième ordre que les deux faisceaux tangentiels projectifs de ces coniques engendrent une enveloppe de la quatrième classe [1]). Mais le plan π_∞ fait partie deux

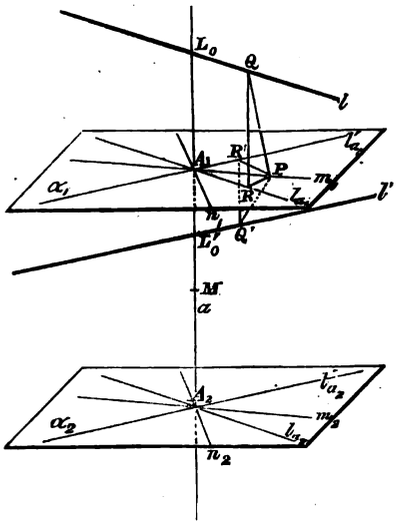
[1]) Les deux involutions projectives, déterminées sur une droite de π par les deux faisceaux projectifs des coniques c et c', admettent quatre points correspondants coincidants.

Digitized by Google

fois de la surface du quatrième ordre, parce que ce plan compté deux fois représente ce que deviennent les cylindres C et C′ pour $\varrho = \infty$. A côté de ce plan principal double, les faisceaux de cylindres engendrent donc une surface du second ordre, que nous examinerons de plus près.

Soit a (fig. 1) la perpendiculaire commune des axes l et l' et soient L_o et L'_o les points où elle s'appuie sur ces axes. Déterminons les points A_1 et A_2, qui divisent le segment $L_o L'_o$ dans la raison f, de manière que l'on a en valeur absolue $A_1 L'_o = f \cdot A_1 L_o$ et $A_2 L'_o = f \cdot A_2 L_o$. Ces deux points A_1 et A_2, qui séparent harmoniquement les points L_o et L'_o, sont les points de la surface cherchée situés sur a. Ils se trouvent tous les deux à distances finies, quand $f \gtrless 1$, ce que nous supposerons dans ce qui suit.

Fig. 1.



Sur le plan α_1 perpendiculaire à a en A_1, nous projetons les droites l et l' suivant l_{a_1} et l'_{a_1} et dans ce plan α_1 nous cherchons les deux droites m_1 et n_1 dont les points ont à l_{a_1} et l'_{a_1} des distances, dont le rapport est f. Ces deux droites appartiennent à la surface cherchée. En effet, les distances P Q et P Q′ d'un point quelconque P d'une de ces deux droites à l et l' sont les hypothenuses de deux triangles rectangles P Q R et P Q′ R′, qui sont semblables et ont un rapport de similitude f, parce que $Q'R' = f \cdot QR$ et $PR' = f \cdot PR$. Donc α_1 contient deux droites m_1 et n_1 concourant en A_1 de la surface cherchée et est plan tangent de cette surface en A_1. De même, le plan α_2 perpendiculaire à a en A_2 contient deux droites m_2 et n_2 de la surface, de manière qu'il la touche en A_2. Donc a est un axe de la surface, le milieu M de $A_1 A_2$ est le centre de la surface et la surface elle-même est un *hyperboloide à une nappe* (4). Nous la représentons par H^2 [1]).

6. La surface H^2, que nous venons de trouver, est une „*surface limite*" du complexe. Pour le démontrer nous ferons voir qu'une droite réelle d de Φ ne saurait couper H^2 en deux points imaginaires.

Soient P et Q les points de la droite d qui se trouvent à la plus courte distance de l et de l'. Ces deux points sont différents, ou bien ils coincident. Dans le premier cas (fig. 2) le quotient $\frac{\varrho'}{\varrho}$ a pour P une valeur plus grande et

[1]) La déduction géométrique de l'hyperboloide H^2 est copiée en partie de M. Schroeter (Crelle, 1878, t. 85, p. 47). Ce que j'ai tâché de simplifier, c'est la démonstration que la surface est du second ordre.

Digitized by Google

pour Q une valeur plus petite que la constante f. Donc il y aura sur d entre P et Q un point R, dont les distances à l et l' sont dans le rapport donné f; en d'autres termes il y aura un point d'intersection réel R de d et H^2 entre P et Q. Et dans le second cas (fig. 3) le point de coincidence R de P et Q sera un point réel de H^2. Donc les points d'intersection de d et H^2 sont toujours réels; il sont différents dans le premier des deux cas, ils coincident ou ils sont indéterminés dans le second. Car il est évident que les distances S T et S T' d'un point quelconque S de d sont les hypothenuses de deux triangles S T U et S T' U', semblables et à rapport de similitude f ou insemblables, selon que le rapport des sinus des angles $(l\,d)$ et $(l'\,d)$ est ou n'est pas égal à f. Donc d est située tout entière sur H^2 dans la première de ces deux suppositions et elle touche H^2 en R dans la seconde.

Fig. 2.

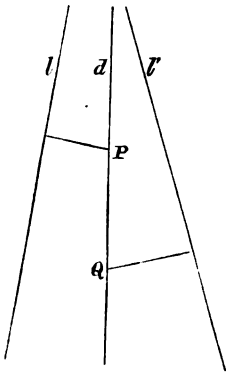
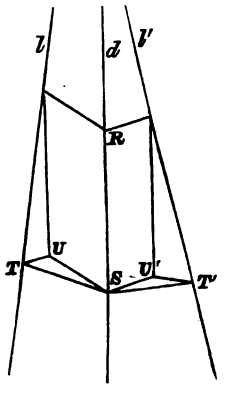


Fig. 3



Voici deux remarques, qui découlent de la propriété de H^2 d'être surface limite du complexe et qui nous seront utiles dans ce qui suit. Si par rapport à H^2 le point P admet un cône enveloppe réel K^2, le cône de complexe K^4 de P se trouve entièrement en dehors de K^2; de manière que les huit arêtes communes de ces deux cônes se reduisent à quatre arêtes de contact. Si la trace de H^2 sur le plan π est une hyperbole, la courbe de complexe c^4 de π n'admettra pas des tangentes qui rencontrent cette hyperbole en deux points imaginaires; de manière que les huit tangentes communes de ces deux courbes se reduisent à quatre tangentes, dont chacune touche les deux courbes au même point. Et il va sans dire que ces résultats que nous venons de démontrer pour le cas d'un point P à cône enveloppe réel et celui d'un plan π qui coupe H^2 suivant une hyperbole, sont généraux, à cause du principe de continuité.

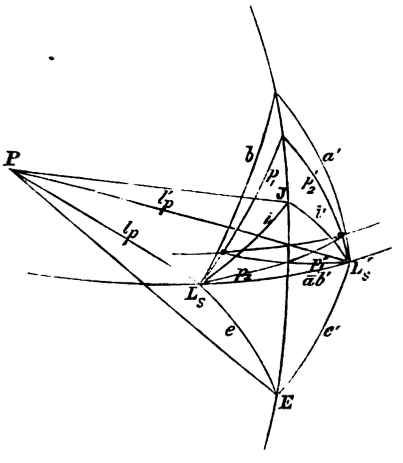
7. On démontre de la manière suivante qu'en effet le cône K^4 de chaque point P dont les distances à l et l' sont dans le rapport donné f, se compose de deux cônes quadratiques. Quand ce rapport existe entre les distances de P à l et l', les deux figures, dont l'une se compose des cylindres C et des couples de plans tangents par l_p et l'autre des cylindres C' et des couples de plans tangents par l'_p, sont semblables, de manière que les involutions I_p et I'_p sont identiques à la position près. Donc on peut décomposer les deux involutions isogonales

Digitized by Google

projectives I_p et I'_p en deux couples de faisceaux de plans *égaux*, chacun desquels engendre un cône du second ordre [1]).

Cette dernière considération révèle un caractère général des cônes quadratiques constituants. Car, comme l'on sait, le cône engendré par des faisceaux de plans égaux, est en même temps un „*cône orthogonal*", c.-à-d. un cône qui est le lieu de l'arête d'un angle dièdre droit dont chacune des faces passe par une de deux droites concourantes données. En effet, représentons le plan $(l_p\, l'_p)$ des axes des deux faisceaux par α ou β', selon qu'il est considéré comme élément du faisceau l_p ou l'_p et par β un des deux plans correspondants à β', par α' un des deux plans correspondants à α. Considérons les deux faisceaux égaux $(\alpha, \beta \ldots.)$ et $(\alpha', \beta' \ldots.)$, qui engendrent un des deux cônes quadratiques K^2 du point P à l'aide de leurs traces $(a, b \ldots.)$ et $(a', b' \ldots.)$ sur une sphère quelconque à centre P. Sur cette sphère (fig. 4) les traces $\overline{ab'}$ du plan $\overline{\alpha\beta'}$ et p_1 et p'_1 des plans correspondants π_1 et π'_1 formeront un triangle sphérique dont les angles adjacents au coté $\overline{ab'}$ ont une somme constante [2]). Cela prouve que les plans π_2 et π'_2 dont les traces p_2 et p'_2 sont symétriques à p_1 et p'_1 par rapport au cercle qui bissecte orthogonalement le côté $\overline{ab'}$, sont de même des plans correspondants des deux faisceaux, c.-à-d. que le plan de ce grand cercle est plan de symétrie de K^2. De plus, si nous indiquons par i et i' les bissectrices intérieures et par e et e' les bissectrices extérieures des angles à la base $\overline{ab'}$ du triangle sphérique isoscèle formé par $\overline{ab'}$, a' et b et que I et E représentent les points d'intersection des arcs i et i', e et e', le cône engendré par deux faisceaux de plans dont les axes sont les diamètres de la sphère par I et E situés dans le plan de symétrie indiqué de K^2 et dont la relation de projectivité est déterminée par la condition que les plans correspondants des deux faisceaux soient perpendiculaires l'un à l'autre, coincidera avec le cône K^2. Car ces deux cônes ont de commun les arêtes $P\,L_s = l_p$, $P\,L'_s = l'_p$, P J, P E et le plan de symétrie P J E.

Fig. 4.



Une des propriétés les plus remarquables des cônes orthogonaux, c'est que

[1]) Je tiens l'idée fertile de cette décomposition des involutions I_p et I'_p de M. J. Neuberg.

[2]) Si l'on remplace un des deux faisceaux par le faisceau de sens contraire, on trouve un triangle sphérique dont les angles adjacents à la base ont une différence constante. Mais le raisonnement suivant s'applique également aux deux cas.

Digitized by Google

les plans des sections circulaires sont perpendiculaires à une arête. En effet, parce qu'un plan perpendiculaire à une des faces d'un angle dièdre droit coupe l'angle suivant les deux côtés d'un angle droit, les traces des deux faisceaux P J et P E sur un plan perpendiculaire à un de ces deux axes sont des faisceaux de rayons égaux, dont les rayons correspondants sont perpendiculaires l'un à l'autre; ces deux faisceaux projectifs engendrent donc un cercle [1]).

8. Passons à la seconde décomposition de K^4, la décomposition en un plan et un cône cubique K^3.

Quand le lieu K^4 de l'intersection des couples de plans correspondants de I_p et I'_p se décompose en un plan et un cône K^3, ce plan contient au moins un des deux axes l_p et l'_p des faisceaux. Car s'il ne contenait ni l_p, ni l'_p, le plan $(l_p\, l'_p)$ serait son propre homologue dans les deux involutions et ferait donc aussi partie de K^4; de manière qu'on trouverait un cas plus particulier de décomposition, que nous excluons à présent. Et si le plan qui fait partie de K^4 passe par les deux axes l_p et l'_p, il est son propre homologue; s'il ne passe que par l_p ou l'_p, il fait partie de tous les couples de l'involution I_p ou I'_p. Nous avons donc à examiner ces deux suppositions et à rechercher quand elles se présentent.

Lorsque, d'après la première supposition, le plan $(l_p\, l'_p)$ est son propre homologue dans les deux involutions I_p et I'_p, ce plan doit être tangent à un couple de cylindres C et C' correspondants; il doit donc être parallèle à l_p et à l'_p et diviser la plus courte distance $L_o L'_o$ de ces droites (fig. 1) dans le rapport donné f. Donc le point P doit être situé dans un des deux plans α_1, α_2 menés perpendiculairement à $L_o L'_o$ aux points A_1 et A_2.

Il est bien évident que pour un point quelconque P d'un des deux plans α ce plan fait partie de K^4, en d'autres termes que les deux plans α sont des plans principaux simples. Car les distances d'une droite quelconque d'un plan α aux axes l et l' sont toujours dans le rapport f. D'un côté, si la droite n'est pas

---

[1]) Il y a toute une littérature sur le *cône orthogonal* et l'*hyperboloide orthogonal*. Le cône est mentionné le premier par Hachette (*Corr. sur l'Ecole imp. Polytechn., Paris, t. I, p.* 179), l'hyperboloide par Chasles (*Mém. de géom. pure sur les prop. génér. des cônes du second degré, Bruxelles*, 1830, *p.* 40) et Steiner (*Syst. Entw. u. s. w., Berlin* 1832, *N°* 53, *II*, 3). Nous verrons que la surface H^3 est un hyperboloide orthogonal.

La littérature plus récente est:

A. Schoenflies, *Synth. geom. Untersuchungen, Berlin*, 1877, *Seite* 14,

H. Schroeter, *Ueber ein einf. Hyperb. von besonderer Art* (*Crelle* 1878, *Band* 85, *Seite* 26),

F. Ruth, *Ueber eine besondere Erzeugungsweise des orth. Hyperb. und über Büschel orth. Kegel und Hyperb.* (*Wiener Sitzungsber. II Abth.*, 1879, *Band* 80, *Seite* 257),

H. Schroeter. *Theorie der Oberfl. zweiter Ordn. und der Raumcurven dritter Ordn., Leipzig* 1880, *Seite* 67,

Th. Meyer, *Ueber die Kegel des Pappus und des Hachette, Inauguraldissertation, Berlin* 1884.

Digitized by Google

parallèle à l ou à l', ces distances sont toujours égales à AL_o et AL'_o, tandis que $AL'_o = f.AL_o$. Et si elle est parallèle à l ou à l' une de ces deux distances est indéterminée, de manière que le rapport des distances passe par toutes les valeurs possibles et donc aussi par f.

Ce que nous avons trouvé entraine que les intersections d'un plan quelconque π avec les deux plans α sont des tangentes simples de la courbe de complexe c^1 de π.

Les éléments de I_p étant les couples de plans tangents menés par P aux cylindres coaxiaux C, l'involution I_p ne saurait être composée de couples qui contiennent un plan fixe et un plan variable, que lorsque P se trouve dans un des deux plans tangents communs à tous les cylindres C, c.-à-d. dans un des deux *plans isotropes* par l. Donc la seconde des deux suppositions est réalisée, quand P se trouve en un des deux plans isotropes ω_1 ou ω_2 par l_1 ou en un des deux plans isotropes ω'_1 ou ω'_2 par l'. De manière que les quatre plans isotropes indiqués sont aussi des plans principaux simples du complexe et que la décomposition de K^4 en un plan et un cône K^3 ne mène pas à une partie de la surface des points singuliers (5).

Chacun des deux derniers cas de décomposition de K^4 doit être examiné plus à fond.

9. Considérons le cône K^3, qui complète le plan α au cône K^4 d'un point quelconque P_α de ce plan. Les propriétés remarquables de ce cône s'étudient de la manière la plus simple en suivant le chemin frayé par M. SCHROETER dans son mémoire intéressant „*Ueber eine besondere Curve 3ter Ordnung, und eine einfache Erzeugungsart der allgemeinen Curve 3ter Ordnung*" (*Math. Annalen*, 1872, *Band* 5, *Seite* 50). Nous indiquons en quelques mots les résultats de l'extension de sa méthode à nos cônes cubiques [1]). Mais pour être compris il est indispensable que nous commencions par l'extension de la méthode elle-même.

Les deux involutions I_p et I'_p du point P_α, dont le plan $(l_p\, l'_p)$ est un élément correspondant commun, disons avec M. SCHROETER — par analogie à deux faisceaux de plans projectifs — les deux involutions I_p et I'_p „*mi-perspectives*", engendrent toujours un cône K^3, même lorsqu'elles ne sont pas isogonales. Dans ce cas, que nous considérons d'abord pour spécialiser ensuite, les involutions I_p et I'_p peuvent être mises en rapport l'une à l'autre à l'aide des plans θ et θ' par l_p et l'_p, respectivement séparés harmoniquement du plan correspondant coincidant ϑ par les couples de plans correspondants σ, τ et σ', τ', de manière que l'intersection g de ces plans θ et θ' est d'après les propriétés harmoniques de l'angle tétraèdre

[1]) La plupart de ces résultats se trouvent dans mon étude »*Over een bijzondere ruimtekromme van den zevenden graad*" (*Nieuw archief voor wiskunde*, *deel* 10 *blz.* 54).

Digitized by Google

en même temps l'intersection des plans $(\sigma\sigma', \tau\tau')$ et $(\sigma\tau', \sigma'\tau)$. En effet, quand σ, τ et σ', τ' parcourent les deux involutions I_p et I'_p, les plans θ et θ' parcourent deux faisceaux perspectifs, le plan ϑ représentant un élément correspondant coincidant des deux faisceaux; de manière que l'intersection g des plans θ et θ' engendre un plan, que nous représentons par γ. Et ce plan nous fait retrouver les couples correspondants des deux involutions d'une manière déterminée. Car, si l'on s'imagine que l'involution I_p est déterminée par les deux couples σ_1, τ_1 et σ_2, τ_2, et l'involution I'_p par les deux couples correspondants σ'_1, τ'_1 et σ'_2, τ'_2, la correspondance des deux involutions est fixée en même temps, parce que ϑ indique un troisième couple de couples correspondants. De même le plan γ est déterminé par deux droites, l'intersection g_1 des plans θ_1 et θ'_1, qui respectivement séparent harmoniquement le plan ϑ des couples σ_1, τ_1 et σ'_1, τ'_1 et l'intersection g_2 des plans θ_2 et θ'_2 qui ont la même signification par rapport aux couples σ_2, τ_2 et σ'_2, τ'_2. Et si l'on part d'une droite quelconque g de γ, on détermine les deux couples correspondants σ, τ et σ', τ', qui dépendent de g, en cherchant d'abord les plans doubles δ, ε de I_p et δ', ε' de I'_p, et ensuite les plans σ, τ à la fois séparés harmoniquement des couples δ, ε et ϑ, θ, les plans σ', τ' à la fois séparés harmoniquement des couples δ', ε' et ϑ, θ', où θ et θ' représentent les plans (l_p, g) et (l'_p, g), etc.

Ces considérations mènent aux résultats suivants:

α) Le cône engendré par les deux involutions mi-perspectives I_p et I'_p est le cône K^3 le plus général.

β) Les arêtes l_p et l'_p de K^3 sont des *arêtes conjuguées*, c.-à-d. qu'elles ont la même *arête tangentielle* l_t; en d'autres termes les plans tangents de K^3 suivant l_p et l'_p rencontrent K^3 dans une même troisième arête l_t.

γ) L'intersection des plans γ et ϑ forme avec l_p et l'_p les trois arêtes de K^3 situées dans ϑ; elle est conjuguée à l_t.

δ) Lorsque a_1, a'_1 et a_2, a'_2 sont deux couples quelconques d'arêtes conjuguées de K^3, le troisième couple d'arêtes opposées de l'angle tétraèdre complet $a_1 a_2 a'_1 a'_2$ est de même un couple d'arêtes conjuguées de K^3.

ε) Les deux droites $(\sigma\sigma', \tau\tau')$ et $(\sigma\tau', \sigma'\tau)$ d'intersection croisée des couples correspondants σ, τ et σ', τ' sont des arêtes conjuguées de K^3.

ζ) Le cône K^3 peut être engendré par deux involutions mi-perspectives J et J', dont un couple quelconque d'arêtes conjuguées forme les axes.

η) Les huit faces de deux angles tétraèdres inscrits à K^3 enveloppent un cône K^2. Ces cônes K^2 forment un réseau tangentiel.

ϑ) Les plans qu'on mène par les couples d'arêtes conjuguées, enveloppent un cône de la troisième classe.

Digitized by Google

Quand les deux involutions mi-perspectives I_p et I'_p sont isogonales — et c'est là le cas actuel qui nous occupe — les plans γ et ϑ sont perpendiculaires l'un à l'autre. Dans ce cas spécial on trouve encore les résultats suivants:

ι) Si a_1, a'_1 et a_2, a'_2 sont deux couples d'arêtes conjuguées, les couples d'arêtes $(\sigma_1 \sigma'_1, \tau_1 \tau'_1)$, $(\sigma_1 \tau'_1, \sigma'_1 \tau_1)$ et $(\sigma_2 \sigma'_2, \tau_2 \tau'_2)$, $(\sigma_2 \tau'_2, \sigma'_2 \tau_2)$ [1]), le lieu des axes a, pour lesquels les couples de plans $(a\, a_1), (a\, a'_1)$ et $(a\, a_2), (a\, a'_2)$ déterminent une involution isogonale, est le cône K^3 lui-même. En d'autres termes, le lieu des *axes focaux* des cônes K^2 inscrits dans un angle tétraèdre donné est un cône K^3 du caractère spécial, dont les arêtes opposées de l'angle tétraèdre sont deux couples de droites conjuguées.

À cause de la dernière propriété je propose le nom de „*cône focal*" pour l'espèce spéciale des cônes K^3, qui nous occupe.

$\varkappa$) Dans chaque angle tétraèdre inscrit dans un cône focal les trois plans diagonaux forment un angle trièdre, dont les projections orthogonales des arêtes sur les faces opposées se trouvent sur K^3.

λ) Les deux arêtes situées dans un des deux plans isotropes ω menés par une arête quelconque d'un cône focal sont conjuguées aux deux arêtes situées dans l'autre de ces deux plans ω. Cette propriété constitue le vrai caractère spécial du cône focal.

μ) Le cône général K^3 admet trois arêtes, qui projettent ses couples de droites conjuguées suivant une involution isogonale.

10. Ce qui nous frappe dans le second cas de la décomposition du cône K^4 en un plan et un cône cubique, c'est qu'il semble *paradoxal* que le plan isotrope ω par l fasse partie du cône de complexe K^4 de P, quand P se trouve dans ce plan ω. Car la distance d'une droite quelconque d de ω à l est zéro, parce que les deux droites d et l concourent en un point, tandis que la distance de d à l diffère en général de zéro; de manière que le rapport des distances est infini au lieu de f.

Ce second paradoxe est introduit par une autre discontinuité de l'idée „*distance de deux droites*", qui se présente quand les deux droites se trouvent dans un même plan isotrope, c.-à-d. dans un plan, qui touche le cercle imaginaire Σ de l'infini, commun à toutes les sphères. En vérité, dans ce cas particulier la distance de ces deux droites concourantes est indéterminée comme nous verrons tout à l'heure, après avoir cherché la distance d'un point quelconque du plan isotrope ω à sa droite réelle l.

Comme dans le plan le cercle de centre P et de rayon zéro se compose des

[1]) Cette addition n'est pas superflue, eu égard aux trois systèmes de couples d'arêtes conjuguées.

Digitized by Google

deux droites isotropes par P, dans l'espace le cylindre d'axe l et de rayon zéro se compose des deux plans isotropes par l. Donc on trouve que la distance d'un point quelconque P d'un plan isotrope ω par l à l est zéro. Seulement les points de ω situé dans le plan π_∞ à l'infini ont des distances indéterminées de l, parce qu'ils se trouvent sur tous les cylindres C d'axe l. Ainsi l'on peut prétendre que l'addition du mot „isotrope" au plan par l multiplie la distance d'un point P du plan à l par zéro. Car, si P ne se trouve pas en π_∞, les distances finies deviennent zéro et, si P est un point de π_∞, les distances infinies deviennent finies.

Cherchons la distance de l à une droite d du plan ω et supposons d'abord que le point d'intersection de ces deux droites ne se trouve pas dans π_∞. À ce but déterminons la perpendiculaire commune à l et d, qui est perpendiculaire à ω. Comme l'on sait, une droite et un plan sont perpendiculaires l'un à l'autre, quand leurs traces sur π_∞ sont pôle et polaire par rapport au cercle Σ. Donc toutes les droites qui passent par le point T, où ω touche Σ, sont perpendiculaires à ω; de manière que chaque droite par T contenue dans ω est perpendiculaire commune à l et d. Et quoique la distance de l au point d'intersection variable P de la perpendiculaire commune avec d reste zéro, autant que P ne se trouve pas en π_∞, elle devient indéterminée, aussitôt que la distance en question est mesurée suivant l'intersection de ω et π_∞. Donc nous considérons comme indéterminée la distance d'une droite l à une droite d d'un plan isotrope ω par l. Et nous n'avons pas à excepter les droites de ω parallèles à l, car la distance de ces droites à l est indéterminée pour la cause indiquée à l'art. 3.

Le point de vue que nous venons de développer, nous fait éviter le paradoxe en question. Il nous oblige à considérer les quatre plans isotropes comme des plans principaux simples de Φ, qui possède donc sept plans principaux, six plans principaux simples, les deux plans α et les quatre plans ω, et un plan principal double, le plan π_∞.

11. Nous avons trouvé que le cône K^4 se décompose, quand P se trouve:

^{a}) sur H^2 . . . . . en deux cônes orthogonaux,

^{b}) dans un des deux plans α . . en ce plan et un cône focal,

^{c}) „ „ „ quatre „ ω . . „ „ „ „ „ „ cubique unicursal (à arête double l_p ou l'_p, suivant que ω passe par l' ou l),

^{d}) dans π_∞ . . . . . en ce plan compté deux fois et deux autres plans.

Les combinaisons et répétitions de ces cas nous mèneront à quelques autres résultats.

Combinaison (a, b). Si P se trouve sur H^2 et en un des plans α, il faut qu'un des deux cônes orthogonaux de P dégénère en deux plans perpendiculaires l'un à l'autre; parce que la combinaison de deux plans perpendiculaires l'un à l'autre représente une surface du second ordre, qui peut être engendrée par deux

Digitized by Google

faisceaux de plans projectifs, dont les couples de plans correspondants sont des couples de plans perpendiculaires. Ce cas se présente, quand les axes de ces deux faisceaux du caractère spécial sont perpendiculaires l'un à l'autre. Et en vérité la supposition par rapport à la position du point P amène cette dégénération. Car la similitude des triangles P Q R et P Q′ R′ (fig. 1) démontre que les plans doubles $\delta = (P\,l)$ et $\delta' = (P\,l')$ des involutions I_p et I'_p, qui sont égales à la position près, P étant un point de H^2, ont la même pente sur α; de manière que ces plans sont symétriques par rapport au plan perpendiculaire à α suivant celle des deux bissectrices de l'angle $l_p\,l'_p$ qui est séparée de A P par l_a et l'_a, et que les deux faisceaux engendrent ce plan perpendiculaire à α. Et l'on voit de suite (fig. 4) que les deux arêtes P I et P E du cône orthogonal restant, qui sont perpendiculaires aux sections circulaires de ce cône, sont les droites $\delta\,\delta'$ et $\varepsilon\,\varepsilon'$ situées dans ce plan perpendiculaire à α; de manière que la combinaison d'un cône orthogonal et du plan principal de ce cône perpendiculaire aux deux systèmes de sections circulaires de ce cône représente un cône focal dégénéré. On obtient ce cône comme le lieu des axes focaux des cônes quadratiques inscrits dans un angle tétraèdre, qui admet un plan de symétrie.

Quand P est un des points A, le cône K^4 se compose de quatre plans, le plan α par A compté deux fois et les deux plans perpendiculaires à α suivant les deux bissectrices de l'angle $l_a\,l'_a$. Cela prouve que les trois faces d'un angle trièdre trirectangle forment la dégénération la plus complète d'un cône focal. En effet, quand on mène par un point des plans parallèles aux faces d'un tétraèdre régulier et que l'on cherche le lieu des axes focaux des cônes du second degré inscrits dans cet angle tétraèdre, on trouve les trois plans de symétrie de l'angle tétraèdre, qui sont perpendiculaires l'un à l'autre.

Combinaison (a, c). Quand P se trouve dans un plan isotrope ω par l, sa distance ϱ à l est zéro; quand il se trouve en même temps sur H^2, sa distance ϱ' à l' est f fois plus grande, c.-à-d. encore zéro; donc il se trouve en même temps dans un des deux plans isotropes ω' par l'. En d'autres termes, les quatre droites d'intersection des deux plans ω_1, ω_2 par l avec les deux plans ω'_1, ω'_2 par l' sont des génératrices de H^1; chacun des quatre plans isotropes ω touche H^2 au point d'intersection avec celle des deux axes de Φ qu'il ne contient pas; de manière que les axes de Φ sont des *droites polaires réciproques* par rapport à H^1. Et le cône K^4 de P se compose d'un plan ω, d'un plan ω' et d'un cône orthogonal.

Les surfaces H^2, que l'on obtient en conservant le couple d'axes l et l', mais en variant f, forment un *faisceau* (4). En effet, un point quelconque P de l'espace a des distances déterminées de l et l' et mène donc à une valeur unique de f, c.-à-d. à une surface H^2 déterminée. Et si P se trouve sur deux des surfaces H^2

Digitized by Google

à la fois, le rapport des distances de P à ces droites est indéterminé, parce qu'il possède deux valeurs inégales, de manière que P se trouve sur toutes les surfaces H^3. Les quatre droites d'intersection des plans ω et des plans ω', qu'on peut appeler les „*antidroites*" des axes l et l', forment *la base* de ce faisceau des surfaces H^3. Le lieu des centres de ces surfaces est une droite, la plus courte distance des axes l et l', et pas une cubique gauche comme dans le cas d'un faisceau ponctuel ordinaire, parce que le faisceau ponctuel des surfaces H^3, comme le démontre sa base, est en même temps un faisceau tangentiel [1]).

Combinaison (b, c). Quand P se trouve à la fois en un des plans α et un des plans ω, le cône K^4 de P est composé de ces deux plans et d'un cône K^2.

Remarquons encore un cas de *répétition*. Quand P est à la fois dans les deux plans ω par l (la combinaison ω, ω' a été examinée), P se trouve sur l et K^4 se compose de ω_1, ω_2 et du plan $\delta' = (P\,l')$ compté deux fois.

Il peut paraître *paradoxal* que les huit droites d'intersection d'un plan α avec un plan ω considérées dans la combinaison (b, c) et les deux droites l_1 et l_2 ne se trouvent pas sur H^3, quoique la décomposition des cônes K^4 de leurs points forme un cas particulier de la décomposition en deux cônes quadratiques. Mais il est bien évident, pourquoi ces dix droites n'ont pas été trouvées à l'art. 5. Là nous avons exclus formellement les cas de décomposition en deux cônes quadratiques, qui puissent provenir de la décomposition en un plan et un cône cubique. Voilà pourquoi les lignes doubles du lieu des points P à cônes K^4 décomposés en π et K^3, ne se trouvent pas toutes sur la surface H^2, quoique la décomposition en deux plans et un cône K^2 soit un cas particulier de celle en deux cônes K^2; voilà pourquoi parmi les quinze droites doubles de cette surface, qui se compose des deux plans α et des quatre plans ω, il n'y a que les quatre droites (ω, ω') qui se trouvent sur H^2 et l'intersection des deux plans α en π_∞.

12. Dans ce qui précède nous avons trouvé les sept plans principaux et les deux points principaux de Φ en étudiant les cônes de complexe K^4 et leurs décompositions. Nous avons choisi cet ordre d'idées, parce qu'il nous à donné l'occasion d'examiner à fond l'idée „*distances de deux droites*" dans tous les cas possibles. Mais nous nous dépêchons d'y ajouter un moyen plus prompt et sûr de découvrir toutes ces particularités.

Si ϱ et ϱ' sont encore les distances d'une droite quelconque d de Φ à l et l', on a $\varrho' = f\varrho$. Donc un plan π est plan principal de Φ, quand les distances ϱ et ϱ' de toutes ses droites satisfont à cette relation $\varrho' = f\varrho$. Cela n'arrive que

---

[1]) Quand f varie, les cônes de complexe K^4 d'un point donné P forment un faisceau ponctuel et les courbes de complexe c^4 d'un plan donné π un faisceau tangentiel.

Digitized by Google

dans chacune des six hypothèses suivantes, que pour toutes les droites d du plan

(1) ϱ est indéterminée,
(2) ϱ' „ „ ,
(3) ϱ et ϱ' sont zéro,
(4) ϱ et ϱ' sont constantes, de manière que $\varrho' = f\varrho$,
(5) „ „ „ „ infinies,
(6) „ „ „ „ variables, „ „ „ „ „ „ .

De ces six hypothèses la première livre les plans ω_1 et ω_2 par l, la seconde les plans ω'_1 et ω'_2 par l', la quatrième les plans α_1 et α_2, la cinquième le plan π_∞, tandis que la troisième et la sixième ne se présentent pas.

Par rapport aux points principaux la même classification est de rigueur pour les droites, qui y passent. La première hypothèse mène au point L_∞ de l, la seconde au point L'_∞ de l' et les autres ne se réalisent pas [1]).

13. Si $\left.\begin{matrix} P_n \\ \pi_n \end{matrix}\right\}$ est un $\left.\begin{matrix} \text{point} \\ \text{plan} \end{matrix}\right\}$ principal d'ordre n, la droite $\left.\begin{matrix} P\,P_n \\ \pi\,\pi_n \end{matrix}\right\}$ est $\left.\begin{matrix} \text{arête} \\ \text{tangente} \end{matrix}\right\}$ multiple d'ordre n $\left.\begin{matrix} \text{du cône} \\ \text{de la courbe} \end{matrix}\right\}$ de complexe du $\left.\begin{matrix} \text{point } P \\ \text{plan } \pi \end{matrix}\right\}$. De cette manière les deux points principaux doubles, où l et l' percent π_∞, répondent des deux arêtes doubles l_p et l'_p des cônes K^4, tandis que le plan principal π_∞ répond de la tangente double des courbes c^4 à l'infini. Et il est évident que les troisièmes arêtes doubles l_p des cônes K^4 et les deuxièmes tangentes doubles l_π des courbes c^4 forment à la fois *la congruence de premier ordre et classe*, dont l et l' sont les axes, c.-à-d. le système des droites qui s'appuient sur l et l'. Mais à côté de cette congruence des droites l_p ou l_π il y a un autre système de droites, celui des quatrièmes arêtes doubles des cônes K^4 des points P de H^2, qui constitue à elle-seule la véritable „*surface singulière*", parce que les autres parties ne sont que des plans principaux. Nous procédons à l'étude de cette série de quatrièmes arêtes doubles.

---

[1]) Comme exercice nous proposons la recherche des éléments principaux du complexe $\rho\rho' = f^2$. On trouve huit plans principaux, les deux plans isotropes par l, les deux plans isotropes par l' et quatre plans α perpendiculaires à la plus courte distance; ces quatre plans α peuvent être imaginaires. Et tandis que ces huit plans sont des plans principaux simples, le complexe ne possède que deux points principaux doubles, les points de l et l' en π_∞.

Le complexe $\rho\rho' = f^2$ est aussi de l'ordre et de la classe quatre. Le cône de complexe K^4 a deux arêtes doubles, les droites l_p et l'_p. La courbe de complexe c^4 n'a pas de tangente double, etc.

J'indique encore que le lieu des points qui satisfont à la relation $\rho\rho' = f^2$ est le lieu des points à cônes unicursaux K^4, une surface du quatrième ordre et que probablement les plans tangents de cette surface sont caractérisées par des courbes c^4 à une tangente double.

On peut copier à peu près l'étude du complexe $\rho\rho' = f^2$ d'après celle du complexe Φ.

Digitized by Google

La quatrième arête double du point P de H^2, disons la droite v de ce point, est l'intersection des plans doubles ε et ε' des involutions I_p et I'_p, c.-à-d. l'intersection des plans tangents en P aux cylindres correspondants C et C' de rayons ϱ et $\varrho' = f\varrho$, ou la tangente en P à la courbe gauche $r^{2,2}$, qui est l'intersection de C et C'. Donc v touche en P la courbe $r^{2,2}$, dont H^2 est le lieu, quand ϱ varie; ce qui prouve, que v touche en P la surface H^2 elle-même (6). Et comme en général la courbe $r^{2,2}$ ne touche pas une des deux génératrices de H^2 situées dans le plan tangent π de H^2 en P, cette droite v ne coincide pas avec une de ces génératrices et ne se trouve donc pas sur H^2. Elle est la droite dont les points à la plus courte distance de l et l' (art. 6) se confondent en P.

Ce résultat fait connaître une grande différence entre la droite v de P et l'arête double l_p du cône K^4 de P. Tandis que la dernière est arête double des cônes K^4 de *tous* ses points, la droite v de P ne saurait être arête double que du cône K^4 du point P. Car elle ne peut être que quatrième arête double, parce qu'elle n'est parallèle ni à l ni à l' et qu'elle ne s'appuie pas sur l et l'; donc elle ne peut être arête double que des cônes K^4 d'un de ces deux points d'intersection avec H^2. Mais ces deux points coincident en P, parce qu'elle touche H^2 en P.

La différence entre les droites v et l_p, que nous venons de signaler, est d'une grande importance. En effet, puisque l_p est arête double des cônes K^4 de tous ses points, elle représente pour tous ses points deux tangentes coincidées à la courbe c^4 d'un plan quelconque π mené par elle; donc elle est tangente double de toutes ces courbes c^4. Et ce théorème renversible est général. Quand une droite d est $\left.\begin{matrix}\text{arête}\\\text{tangente}\end{matrix}\right\}$ de multiplicité n pour les $\left.\begin{matrix}\text{cônes}\\\text{courbes}\end{matrix}\right\}$ de complexe de tous ses $\left.\begin{matrix}\text{points}\\\text{plans}\end{matrix}\right\}$, elle est en même temps $\left.\begin{matrix}\text{tangente}\\\text{arête}\end{matrix}\right\}$ de multiplicité n pour les $\left.\begin{matrix}\text{courbes}\\\text{cônes}\end{matrix}\right\}$ de complexe de tous ses $\left.\begin{matrix}\text{plans}\\\text{points}\end{matrix}\right\}$. Et nous avons vu en vérité que sous la forme l_π les droites l_p sont des tangentes doubles des courbes c^4 situées en des plans π par ces droites.

Cette propriété ne convient pas aux droites v, qui ne sont des arêtes doubles que des cônes K^4 d'un seul de leurs points. Tandis que nous reviendrons à ce point en étudiant les particularités des courbes c^4, nous appelons en général des droites qui se comportent comme l_p *des droites multiples* et des droites qui se comportent comme v *des droites singulières* de Φ [1]). De manière que Φ a *une*

[1]) Le nom »*droite singulière*" a été introduit en suivant la terminologie de PLUECKER, l. c. (art. 187). Là une droite singulière est tangente double extraordinaire de la courbe de complexe c^3 (c.-à-d. la droite

Digitized by Google

congruence (1,1), c.-à-d. une congruence de premier ordre et de première classe, de droites doubles et comme nous démontrerons tout à l'heure une *congruence* (4,4) de droites singulières.

Les deux génératrices g_1 et g_2 de H^2, qui passent par P, sont des arêtes du cône K^4 de P. Car les distances d'un point quelconque Q d'une de ces deux génératrices g aux droites l et l' sont entre elles dans le rapport donné f, parce que g est située sur H^2 et ces deux distances passent donc au même instant par leur minimum, quand Q parcourt la droite g. Et cela prouve que les distances de g à l et l' sont dans le rapport donné, en d'autres termes que g fait partie de Φ. Donc l'intersection du plan tangent π en P à H^2 avec le cône K^4 de P se compose de la droite v de P comptée deux fois et des deux génératrices g_1 et g_2 de H^2 par P, c.-à-d. que des deux cônes orthogonaux, qui constituent le cône K^4 de P, l'un passe par g_1 et v, l'autre par g_2 et v.

Ce que nous venons de trouver démontre que les droites singulières v forment une congruence de l'ordre quatre. En effet, les droites v, qui passent par un point quelconque P' de l'espace, se trouvent sur le cône K^4 de P' et sur le cône à sommet P' qui enveloppe H^2. Ces deux cônes se touchent, comme nous avons vu à l'art. 6, suivant quatre arêtes. Et chacune de ces quatre arêtes de contact doit être une droite v pour le point P où elle touche H^2, parce qu'elle est droite de complexe par P et se trouve dans le plan tangent en P à H^2 sans être génératrice de H^2.

La congruence des droites singulières est aussi de la quatrième classe; les quatre droites v situées dans un plan quelconque π' sont les tangentes communes à point de contact commun (art. 6) de la courbe c^4 de π' et de l'intersection de π' et H^2.

14. Nous indiquons quelques particularités de la congruence des droites singulières.

α) Chaque génératrice de H^2 est une droite v. Car elle est l'intersection des plans ε et ε' pour le point Q où les distances à l et l' passent en même temps par leur minimum.

β) Cherchons le lieu du point Q, pour lequel la génératrice g de H^2 est une droite v. Soit c^2 le contour apparent de H^2 sur un plan λ perpendiculaire à l. Parce que les plans tangents par l à H^2 sont les plans isotropes ω par l, ce contour apparent c^2 est une conique, dont le point d'intersection L de l et λ

---

qui passe par les deux points dont c^2 se compose) et en même temps arête double extraordinaire du cône de complexe K^2 (c.-à-d. la droite d'intersection des deux plans, dont K^2 se compose). De la même manière les droites v sont les arêtes doubles extraordinaires des cônes K^4 et comme nous verrons tout à l'heure en même temps les tangentes doubles extraordinaires des courbes c^4.

Digitized by Google

est un *foyer* [1]). Soit la tangente g' de c^2 la projection de la génératrice g de H^3 sur λ et Q' le pied de la perpendiculaire abaissée de L sur g'. Ce point Q' sera la projection du point Q, pour lequel g est une droite v, sur λ. Donc la projection de la courbe cherchée est, comme la *podaire* de la conique c^2 par rapport au foyer L le cercle décrit sur le diamètre de c^2, qui porte L, comme diamètre [2]). Les deux extrémités de ce diamètre sont les points A_1 et A_2, où H^3 est rencontrée par la plus courte distance a de l et l' et touchée par les plans α_1 et α_2.

Quand le lieu de la projection Q' de Q sur λ est un cercle, le lieu de Q se trouve sur le cylindre, dont ce cercle est une section droite. De plus, ce lieu est l'*intersection totale* de ce cylindre et de H^2. En effet, chaque tangente g' de c^2 est la projection de deux génératrices de H^3, qui font partie des deux systèmes différents, de manière que chaque point Q' est la projection des deux points Q de H^2, où cette surface est rencontrée par la génératrice du cylindre, qui passe par Q'. Cette courbe du quatrième ordre a deux points doubles, les points A_1 et A_2, parce que les deux surfaces dont elle est l'intersection sont touchées en A_1 par le même plan α_1 et en A_2 par le même plan α_2. Donc le lieu des points Q se compose de deux sections centrales de H^2 situées dans des plans qui passent par $A_1 A_2$; l'une de ces coniques est le lieu des points Q des génératrices de l'un des deux systèmes, l'autre est le lieu des points Q des génératrices de l'autre système. Ces deux lieux passent tous les deux par A_1 et A_2, parce que la droite v de chacun de ces deux points est indéterminée, les cônes K^4 de ces points possédant un plan double [3]). Et les deux plans qui les contiennent sont perpendiculaires l'un à l'autre, parce que les deux courbes sont l'intersection de deux cylindres de rayons égaux, dont les axes, les droites parallèles à l et l' par le centre de H^2, se rencontrent. En effet, les quatre génératrices de ces deux cylindres situées dans le plan des axes des cylindres forment un losange, dont les diagonales sont perpendiculaires l'une à l'autre, etc.

Ce résultat démontre que l'hyperboloide H^2 est un *hyperboloide orthogonal*. En

---

[1]) Parce que les plans isotropes par l touchent H^3 sur l', la projection de l' sur λ est la *directrice* de la conique c^2 qui correspond au foyer L. Parce que les deux points A_1 et A_2 sont séparés harmoniquement par l et l', cela démontre que des deux coniques, qui forment le contour apparent de H^3 sur λ et λ (perpendiculaire à l'), l'une est une *ellipse* à grande axe $A_1 A_2$, l'autre une *hyperbole* à axe transverse $A_1 A_2$.

[2]) La *podaire* d'une conique par rapport à un point quelconque L est comme l'on sait une *quartique bicirculaire unicursale*, dont L est le troisième point double. Cette courbe se décompose au cas actuel dans les deux droites isotropes par L et le cercle que nous avons trouvé.

[3]) Quand on complète les deux cylindres, l'un par les plans ω_1 et ω_2, l'autre par les plans ω'_1 et ω'_2, les deux lieux ont de commun les deux points A_1, A_2 et les »antidroites" de l et l'. Cela est d'accord. Car si P est un point quelconque d'une de ces quatre droites, le cône K^4 se compose de trois parties, comme nous avons vu dans la combinaison (a, c) et il y a deux arêtes doubles nouvelles.

Digitized by Google

effet, soit a la moitié des côtés du losange, soient b et c les moitiés des diagonales et nous trouvons de suite dans un des quatre triangles rectangles, dont se compose le losange, $a\sqrt{b^2+c^2}=b\,c$ ou $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$. Faisons passer un hyperboloide réglé quelconque par les deux courbes planes d'intersection des deux cylindres égaux. La trace de cette surface sur le plan du losange est une hyperbole, dont b et c sont deux demi-diamètres perpendiculaires. Mais d'après un théorème élémentaire bien connu de l'hyperbole la somme $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ est constante, quand on fait tourner l'angle droit des diamètres [1]). Donc le demi-diamètre perpendiculaire à une des asymptotes de l'hyperbole a la longueur a, en d'autres termes le plan perpendiculaire à une de ces asymptotes coupe l'hyperboloide suivant un cercle. Et cela prouve, que le cône asymptote de l'hyperboloide H^2 a ses sections circulaires perpendiculaires à des arêtes, etc. [2]).

γ) Cherchons le lieu des droites v qui s'appuient sur une droite donnée l'.

---

[1]) Si parfois on est d'opinion que l'introduction de ce théorème nuit au caractère géométrique de l'argumentation, parce qu'on démontre ordinairement ce théorème par l'analyse, on peut démontrer ce théorème par la géométrie de la manière suivante.

L'enveloppe des cordes d'une conique c^2 à centre O vues de ce point sous un angle droit est de même une conique γ^2 à centre O, dont les axes coincident avec celles de c^2. En effet, l'enveloppe est de la deuxième classe, parce que par un point quelconque P de c^2 passent deux tangentes de l'enveloppe, etc. Mais cette conique γ^2 est un cercle, parce que les positions de la corde parallèles aux axes font trouver que les axes de γ^2 sont égaux, etc.

Ce que nous avons trouvé prouve que les deux diamètres b et c sont les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, dont la distance du sommet de l'angle droit à l'hypothenuse est constante. Donc on a $\frac{b\,c}{\sqrt{b^2+c^2}}=$ constante, etc.

[2]) Le manuel »*Leçons de géométrie analytique*" de MM. Briot et Bouquet contient dans la dernière série d'exercices le problème suivant: »*Trouver le lieu des points tels que le rapport des distances de chacun d'eux à deux droites données soit constant. Déterminer ensuite pour une surface du second degré susceptible de ce mode de génération les divers couples de droites que l'on peut employer.*"

La solution géométrique de ce problème est contenu dans nos résultats. On a successivement:

a) L'hyperboloide réglé orthogonal H^2 seul est susceptible de la génération en question.

b) Le plus grand des deux axes réels de H^2 rencontre orthogonalement les droites l et l'.

c) Les droites l et l' sont des droites polaires réciproques par rapport à H^2, de manière que leurs projections sur le plus grand axe réel sont des points conjugués et que leurs projections sur le plan principal de cet axe sont des diamètres conjugués de l'hyperbole située dans ce plan principal.

d) Le contour apparent de H^2 sur un plan λ perpendiculaire à la droite l est une conique, dont le point d'intersection de l et λ est un foyer. De même par rapport à l'.

e) Le lieu des droites l et l', que l'on peut employer, est aussi le lieu des normales erigées aux plans par le plus grand axe réel de H^2 dans les foyers des sections c^2 de H^2 avec ces plans, qui se trouvent

Digitized by Google

Par chaque point P de l' passent quatre droites v, tandis qu'en général l' elle-même n'est pas une droite v; donc l' est une droite quadruple de la surface. Et un plan quelconque par l' contient quatre droites v, dont en général pas une seule ne coincide avec l'; donc la surface cherchée est du huitième ordre [1]). Nous la représentons par F^8. A côté de la droite quadruple l' elle possède deux droites doubles, les droites v des points d'intersection de l' et H^2. Elle coupe H^2 suivant les quatres génératrices de H^2, qui passent par ces deux points, et la touche le long d'une courbe gauche du sixième ordre $r^{3,3}$.

Quand l' touche H^2 sans être droite v, les deux arêtes doubles de F^8 se confondent et les quatre génératrices de H^2 situées sur F^8 coincident deux à deux. Quand l' est droite v sans être génératrice de H^2, l' est une droite quintuple de F^8. Et quand l' est génératrice de H^2, la surface F^8 dégénère en H^2 comptée une fois en une autre surface F^3, dont l' est arête double, comptée deux fois. Cela est d'accord. Car la courbe de contact $r^{3,3}$ d'une surface quelconque F^8 coupe la génératrice de H^2 en trois points, ce qui prouve que la droite l' de cette surface F^8 rencontre trois droites v, qui s'appuient sur la génératrice de H^2, etc.

δ) Le lieu des droites v qui s'appuient sur une section plane de H^2 se compose de H^2 elle-même comptée deux fois, eu égard aux deux systèmes de génératrices, et d'une surface F^6 de même comptée deux fois. L'ordre de cette dernière surface est six, puisqu'elle est coupée par le plan de la section plane suivant cette conique de H^2 et les quatre droites v. Ou bien, la courbe $r^{3,3}$ de contact entre H^2 et la surface F^8 d'une droite quelconque l' rencontre le plan de la section en six points, ce qui prouve que l' contient six points de la surface cherchée, etc.

15. Un des résultats les plus importants de la théorie des complexes quadratiques, c'est que la surface singulière du complexe joue le même rôle par ses plans tangents que par ses points. Tout aussi bien que le cône quadratique d'un point de cette surface se décompose en deux plans, la conique de complexe d'un

---

sur cet axe. Ce lieu est une surface réglée du quatrième ordre, dont cet axe est une droite double.

f) Chaque cylindre de révolution à diamètre $A_1 A_2$ coupe H^2 suivant deux courbes planes situées dans des plans *perpendiculaires*. Ce théorème est nouveau.

Le manuel »*Traité de géométrie descriptive*" de M. J. DE LA GOURNERIE contient (art. 992) le théorème »*Les tangentes de plus grande pente à une surface de vis à filets triangulaires (dont l'axe est vertical) aux divers points d'une génératrice forment un hyperboloide*". Cet hyperboloide est *orthogonal*. Car le plan horizontal (fig. 399) coupe la surface suivant un cercle, qui passe par la trace Q d'une génératrice perpendiculaire au plan horizontal. Pour une surface gauche quelconque ce théorème s'applique à toute génératrice dont le plan central est vertical. Donc il s'applique à toutes les génératrices d'une surface gauche, qui admet un cône directeur de révolution, dont l'axe est vertical.

[1]) On a en général le théorème suivant. Quand l'ordre et la classe d'une congruence sont μ et ν, l'ordre de la surface des droites de la congruence qui s'appuient sur une droite donnée, est $\mu + \nu$, etc.

Digitized by Google

plan tangent de cette surface dégénère en deux points. On remarque dans ces complexes un dualisme parfait. La surface singulière du quatrième ordre est en même temps de la quatrième classe, ce qui la signale comme une surface de KUMMER à seize points doubles et seize plans qui touchent la surface suivant une conique, etc.

Le dualisme parfait, que l'on rencontre dans les complexes quadratiques, n'existe pas dans le complexe que nous étudions. Car les courbes de complexe c^4 n'admettent que deux tangentes doubles, tandis que les cônes de complexe K^4 ont trois arêtes doubles; le nombre des points principaux n'égale pas celui des plans principaux, etc. Cependant nous verrons que les plans tangents de H^2 sont des plans singuliers du complexe, qui contiennent des courbes c^4 dégénérées en un point à l'infini et une courbe c^3 de la troisième classe.

Nous avons remarqué (art. 4) que la courbe de complexe c^4 d'un plan quelconque π est l'enveloppe des tangentes communes des coniques correspondantes c et c' de deux faisceaux tangentiels projectifs de coniques semblables et concentriques à centre L et L', dont les éléments extrèmes, d'un côté pour $\varrho = o$ les deux centres, de l'autre côté pour $\varrho = \infty$ les deux couples de points sur l_∞, sont des couples d'éléments correspondants. De plus, ces deux faisceaux tangentiels projectifs sont en même temps des faisceaux ponctuels projectifs. Ces faisceaux ponctuels projectifs engendrent une courbe du quatrième ordre, qui se compose de la droite l_∞ comptée deux fois et de la conique d'intersection h^2 de π et H^2. Car la droite l_∞ comptée deux fois représente un couple d'éléments correspondants des deux faisceaux, et un point d'intersection P de deux autres coniques correspondantes c et c' est situé sur H^2, parce que les coniques c et c' sont les courbes d'intersection de π et des deux cylindres à rayon ϱ et $\varrho' = f\varrho$, dont l'intersection $r^{2,2}$ engendre H^2, quand ϱ varie (art. 5). Eh bien, nous allons démontrer que la décomposition de la conique h^2 entraîne la décomposition de la courbe de complexe c^4 située dans le plan π de h^2. Pour abréger, nous nous servirons de l'imaginaire.

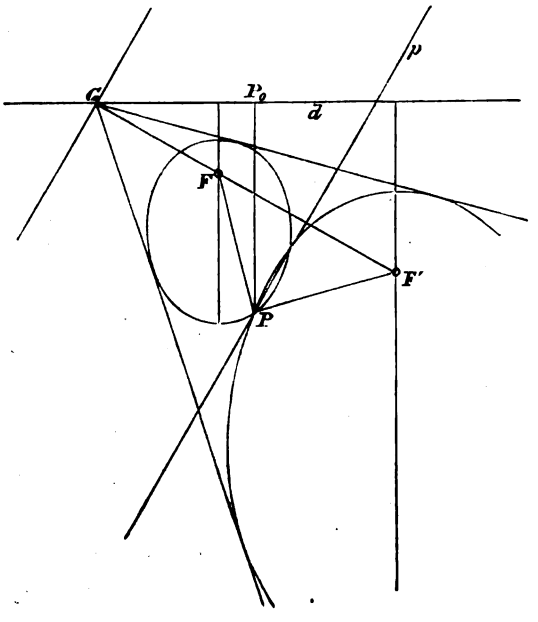
Soient Q_1 et Q_2, R_1 et R_2 les deux couples de points d'intersection imaginaires conjugués des asymptotes communes aux coniques c avec les asymptotes communes aux coniques c' et représentons par q et r les droites réelles $Q_1 Q_2$ et $R_1 R_2$. Cherchons un centre de projection S et un plan de projection π', tels que la projection centrale de q s'éloigne à l'infini dans π' et que les projections de Q_1 et Q_2 se placent aux points cycliques de π' [1]). Cela posé, il est évident

[1]) J'ai résolu le problème réciproque par dualité à celui de la détermination des droites q et r dans le Journal de Crelle, tome 101, page 154. Tandis qu'il n'y a aucune difficulté à construire un cercle qui passe

Digitized by Google

que la figure nouvelle, obtenue par cette projection, contient encore deux faisceaux de coniques. Les coniques du premier faisceau ont pour foyer et directrice adjointe les projections F de L et d de l_∞, les coniques du second faisceau ont pour foyer et directrice adjointe les projections F′ de L′ et d de cette même droite l_∞ (fig. 5). Et la correspondance projective est déterminée par la condition que le lieu des points d'intersection des courbes correspondantes soit composé de deux droites. Car si e et e' représentent les excentricités numériques de deux coniques correspondantes, on a immédiatement $e = k\,e'$, parce que pour $e = o$ et $e = \infty$ on trouve $e' = o$ et $e' = \infty$, F correspondant à F′ et d à elle-même. Mais si P est un point commun aux deux coniques correspondantes à excentricités e et e' et P_o la projection de P sur d, on a $\frac{FP}{PP_o} = e$ et $\frac{F'P}{PP_o} = e'$, ce qui donne $FP = k\,F'P$. Le rapport des distances de P à F et F′ étant constant, le lieu de P est une circonférence. Celle-ci ne dégénère en deux droites que pour $k = 1$. Mais dans ce cas le point d'intersection G de F F′ et d est un *point de similitude* de chaque couple de coniques correspondantes. Ce point de similitude G des deux faisceaux tangentiels projectifs appartient donc une fois à la projection de la courbe c^4; car une droite quelconque par G est touchée par un seul couple de coniques correspondantes. En recourant à la figure originale située dans le plan π, on trouve que le point de L L′ situé à l'infini fait partie de c^4.

Fig. 5.



Cherchons la projection de la droite v, qui passe par le point d'intersection $\bar{P}$ des génératrices g_1 et g_2 de H^2 situées dans le plan tangent π en $\bar{P}$ à H^2. Comme la conique engendrée par les deux faisceaux de coniques situées dans le plan π' se compose de la perpendiculaire p élevée au milieu du segment F F′, et de la droite à l'infini, ces deux droites sont les projections de g_1 et g_2 et

---

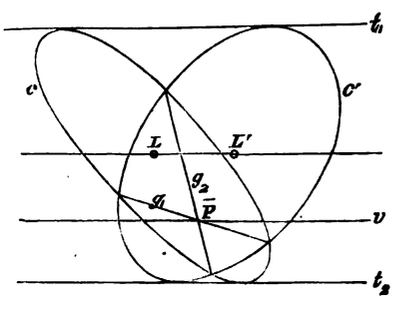
par les points Q_1 et Q_2, points doubles de l'involution déterminée sur q par les couples de diamètres conjugués de c ou c', le problème de projeter une droite q à l'infini de manière que la projection d'un cercle reste un cercle a été résolu par PONCELET (»Traité des propriétés projectives des figures," tome I, art. 108).

Digitized by Google

le point infiniment éloigné de p est la projection de $\bar{P}$. Donc la projection de v est parallèle à p. La droite v par $\bar{P}$ est l'intersection des plans tangents en $\bar{P}$ aux cylindres C et C' à rayon ϱ et $\varrho' = f\varrho$, dont c et c' sont les traces sur π (art. 13); donc c'est la tangente commune de c et c' en $\bar{P}$. Ainsi la parallèle à p, qui est la projection de v, doit être asymptote commune de deux coniques correspondantes des deux faisceaux, des deux coniques qui passent par le point de p à l'infini. En effet, une figure élémentaire fait voir que le pied de la perpendiculaire abaissée du foyer sur une asymptote se trouve sur la directrice adjointe; de manière que la perpendiculaire commune F F' de F et F' sur p qui coupe d en G fait trouver la droite par G parallèle à p comme étant la projection de v [1]). La projection de v passant par le point G qui se détache de la courbe de la quatrième classe en π', la droite v passe par le point à l'infini de L L', qui se détache de la courbe de complexe c^1 de π, et est donc parallèle à L L'.

Le caractère spécial d'un plan tangent π de H^2, est que les traces c et c' d'un couple de cylindres C et C' sur ce plan ont deux tangentes communes parallèles. Ce cas se présentera évidemment par rapport à chaque couple d'ellipses c et c', aussitôt qu'il se présente par rapport à un couple c et c', et alors les couples de tangentes communes parallèles sont parallèles entre elles. Si donc (fig. 6) c et c' sont les deux ellipses aux tangentes parallèles t_1 et t_2, $\bar{P}$ est le sommet du triangle autopolaire de c et c' situé entre t_1 et t_2 et v est la droite par $\bar{P}$ parallèle à t_1, t_2 et L L'. Et parce que l et l' sont polaires réciproques par rapport à H^2, L et L' sont séparés harmoniquement par les deux droites g_1 et g_2, dont se compose l'intersection h^2 de π et H^2 (7).

Fig. 6.



Pour qu'un point $\bar{P}$ fasse partie de c^1, il faut que les tangentes de $\bar{P}$ à chacune des coniques c coincident avec les tangentes de $\bar{P}$ à la conique correspondante c'. Si nous prenons pour c et c' les coniques qui se réduisent à leurs centres, nous trouvons que $\bar{P}$ est un point de la droite qui joint ces centres; si nous prenons pour c et c' les couples de points à l'infini, nous voyons que $\bar{P}$ est un point de π_∞. Donc ce point $\bar{P}$ est l'intersection de la droite des centres avec la droite à l'infini, le point d'intersection des deux tangentes doubles de c^1. Il est im-

[1]) Ici l'on ne doit pas perdre de vue que chaque droite passant par un point double d'une courbe représente une tangente de cette courbe. Sans cela la projection de v, comme tangente commune des projections de c et c', devrait coincider avec p ou avec la droite à l'infini de π' et v se confondrait avec une des droites g_1 et g_2, ce qui évidemment n'est pas le cas.

Digitized by Google

possible que de la manière indiquée deux points $\bar{P}$ à l'infini se détachent de c^4; car si les coniques c et c' admettaient deux couples de tangentes parallèles, elles seraient concentriques. Cependant quand les deux faisceaux tangentiels projectifs de coniques sont homothétiques, de manière qu'on peut les projeter orthogonalement en deux faisceaux de cercles concentriques, la courbe c^4 se compose même de quatre points, deux points situés sur la droite qui joint les deux centres et les deux points communs à toutes ces coniques à l'infini. Dans les faisceaux de cercles ces quatres points sont les points de similitude des deux faisceaux et les points cycliques. Or, ce cas remarquable se présente, quand π est parallèle à un des deux plans par a, qui font des angles égaux avec les axes l et l'.

16. Dans l'étude géométrique des courbes c^4 nous avons supposé que le plan π coupe les deux faisceaux de cylindres suivant des faisceaux d'ellipses. Mais si ce plan est parallèle à un des deux axes l et l', un des deux faisceaux ponctuels de coniques dégénère en un faisceau de couples de droites parallèles. Dans ce cas la courbe c^4 de π montre des particularités correspondantes. Quand π est parallèle à l et que c' est l'intersection de π avec le cylindre C' qui correspond au cylindre C tangent à π, la courbe c^4 doit contenir c'; car chaque droite de π étant tangente à C, toutes les tangentes de c' sont des droites de Φ. Comme les autres coniques c considérées comme des courbes de la deuxième classe se réduisent au point à l'infini de l compté deux fois, la conique c' est complétée à une c^4 par ce point compté doublement. Ce résultat nous est connu, car les points d'intersection de π_∞ avec l et l' sont des points principaux doubles du complexe. Donc, il va sans dire que la courbe c^4 se composera de ces deux points comptés deux fois, si le plan est parallèle aux deux axes l et l' à la fois [1]).

17. Complétons l'étude géométrique du complexe π par un seul mot sur le lieu des courbes c^4 situées dans des plans π, qui passent par une droite donnée l''. Cette surface, comme enveloppe des droites d de Φ qui rencontrent l'', est en même temps l'enveloppe des cônes K^4, dont les sommets P se trouvent sur l''; elle a reçu le nom de „*Complexfläche*", surface de complexe. Elle est de l'ordre et de la classe quatorze. D'abord l'ordre de la surface se trouve en augmentant l'ordre huit des courbes c^4 de la classe six des cônes K^4; car un plan quelconque par l'' rencontre la surface suivant une courbe c^4 de l'ordre huit et la droite l'', qui est à compter six fois, parce que la classe des cônes K^4 indique combien de

[1]) Nous aurions encore à compléter cet examen géométrique des cas particuliers des courbes c^4 en démontrant que le cas d'une c^4 unicursale, qui ne dégénère pas, ne se présente pas. Mais comme ce résultat négatif saute aux yeux dans l'interprétation des équations, nous n'y insisterons pas ici.

Digitized by Google

courbes c^4 situées dans des plans par l' passent par un point déterminé P de l'. Réciproquement la classe de la surface se détermine en augmentant la classe six des cônes K^4 de l'ordre huit des courbes c^4; car le cône enveloppe de la surface, qui a son sommet en un point donné P de l'', se compose du cône K^4 de P et du faisceau de plans par l' compté autant de fois que la courbe c^4 située dans un plan quelconque par l' rencontre l'', etc. [1]).

18. Terminons par l'énumération des *cas particuliers*. Comme Φ dépend de trois paramètres, la constante f, l'angle 2α de l et l' et la distance a de ces axes, ces cas particuliers se présentent en grand nombre. Nous bornons les valeurs particulières de ces paramètres à l'unité pour f et à zéro pour α et pour a. Ainsi nous trouvons huit cas, y compris le cas général. Nous les représentons par les symboles $(f, 2\alpha, a)$.

a) *Cas* $(f, 2\alpha, a)$. Le cas général.

b) *Cas* $(1, 2\alpha, a)$. La surface H^3 est un *paraboloide hyperbolique*, dont le sommet est au milieu M de $L_o L'_o$ et dont l'axe est la plus courte distance a de l et l'. Les plans directeurs sont les plans par a, qui font des angles égaux avec l et l'. Donc le paraboloide est orthogonal.

Par rapport aux éléments principaux, nous remarquons qu'un des deux plans simples α coincide avec le plan double π_∞.

c) *Cas* $(f, 2\alpha, o)$. Quand les axes l et l' se rencontrent, la surface H^3 est un *cône orthogonal*.

Le point d'intersection L des axes est un troisième point principal double; le plan λ des axes est un second plan principal double, qui remplace les deux plans α. Et la congruence (1, 1) des droites doubles se compose des droites par L et des droites du plan λ.

d) *Cas* $(1, 2\alpha, o)$. La surface H^3 se compose de *deux plans perpendiculaires*, les deux plans normaux au plan des axes qui bissectent l'angle des axes.

Les deux plans de H^3 sont des plans principaux simples, le cône K^4 d'un point P d'un de ces plans se décomposant en ce plan, le plan par P parallèle au plan des axes, et un cône quadratique. On trouve six plans principaux simples, deux plans principaux doubles et trois points principaux doubles.

e) *Cas* (f, o, a). Le cas des axes parallèles montre des particularités saillantes.

Si a_1 et a_2 sont les droites parallèles aux axes et dans le plan des axes, qui divisent intérieurement et extérieurement la distance a des axes dans le rapport donné, il est évident que chaque point d'une de ces deux droites est un point

[1]) Pour ne pas donner trop d'étendue à cette étude, je n'entre pas dans les détails relatifs aux surfaces de complexe. Je ne m'occupe donc pas des surfaces équatoriales, des surfaces méridiennes, etc.

Digitized by Google

principal et que chaque plan par une de ces droites est un plan principal. Nous nommons ces droites, qui se comportent toujours de la même manière par rapport aux points qu'elles contiennent et aux plans qui les contiennent, des *„droites principales"* et dans ce cas des „droites principales *simples*", parce que les plans $P\,a_1$ et $P\,a_2$ font une fois partie du cône K^4 de P et que les points $\pi\,a_1$ et $\pi\,a_2$ font une fois partie de la courbe c^4 de π.

Le complexe Φ se divise en deux complexes d'ordre et de classe deux. Le premier, qui contient la partie réelle, se compose des droites qui rencontrent une des droites a_1 et a_2 et est donc lui-même la combinaison de deux complexes linéaires de la plus grande simplicité. Le second, qui contient la partie imaginaire, se compose des droites rencontrant une des deux tangentes t_1 et t_2 du cercle Σ en π_∞, qui passent au point d'intersection des axes en π_∞; il est donc également la combinaison de deux complexes linéaires de la plus grande simplicité. Ceci prouve que les tangentes t_1 et t_2 en question sont, de même, des droites principales simples.

Le cône K^4 de P se compose des quatre plans $P\,a_1$, $P\,a_2$, $P\,t_1$ et $P\,t_2$ ou $P\,a_1$, $P\,a_2$ et le cylindre à axe l_p et à rayon zéro: La courbe c^4 de π se compose des quatre points $\pi\,a_1$, $\pi\,a_2$, $\pi\,t_1$ et $\pi\,t_2$. Au lieu de H^2 on trouve un *cylindre*, le cylindre dont a_1 et a_2 sont des génératrices diamétralement opposées. Cette surface est la surface limite par rapport aux droites réelles de Φ; mais elle perd sa signification comme surface singulière, à moins que l'on ne reconnaisse la singularité du cône K^4 d'un de ces points dans la position orthogonale des deux plans réels [1]).

f) *Cas* (1, *o*, *a*). Une des deux droites a_1 et a_2 se trouve à l'infini et le cylindre H^2 devient un *plan*, le plan par l'autre droite *a* perpendiculaire au plan des axes.

g) *Cas* (*f*, *o*, *o*). Si λ est le plan de coincidence des deux axes *l*, le cône K^4 de P se compose de quatre plans: le plan $P\,l$, le plan par P parallèle à λ, $P\,t_1$ et $P\,t_2$, etc.

La surface H^2 se reduit au *cylindre* d'axe *l* et de rayon zéro.

h) *Cas* (1, *o*, *o*). Le complexe Φ est indéterminé; chaque droite *d* de l'espace en fait partie.

---

[1]) En général l'existence d'une droite principale de multiplicité *m* est cause que le complexe linéaire des droites qui la rencontrent se détache *m*-fois du complexe donné.

Digitized by Google

SUPPLÉMENT ANALYTIQUE.

(1). L'ÉQUATION DU COMPLEXE Φ. —

Soient $\left.\begin{matrix} z=a \\ y=x\,\mathrm{tg}\,\alpha \end{matrix}\right\}$ et $\left.\begin{matrix} z=-a \\ y=-x\,\mathrm{tg}\,\alpha \end{matrix}\right\}$ les équations des deux axes l et l'. Si (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) sont les coordonnées de deux points d'une droite quelconque d, les projections de d sur les plans coordonnés ont les équations:

$$\left.\begin{matrix} (z_2-z_1)\,y-(y_2-y_1)\,z=y_1z_2-y_2z_1 \\ (x_2-x_1)\,z-(z_2-z_1)\,x=z_1x_2-z_2x_1 \\ (y_2-y_1)\,x-(x_2-x_1)\,y=x_1y_2-x_2y_1 \end{matrix}\right\},$$

pour lesquelles nous écrivons:

$$\left.\begin{matrix} p_3\,y-p_2\,z=p_4 \\ p_1\,z-p_3\,x=p_5 \\ p_2\,x-p_1\,y=p_6 \end{matrix}\right\},$$

en posant:

$$\frac{p_1}{x_2-x_1}=\frac{p_2}{y_2-y_1}=\frac{p_3}{z_2-z_1}=\frac{p_4}{y_1z_2-y_2z_1}=\frac{p_5}{z_1x_2-z_2x_1}=\frac{p_6}{x_1y_2-x_2y_1}.$$

Les six quantités $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ sont les *coordonnées homogènes* de la droite d; elles vérifient l'*identité*:

$$p_1p_4+p_2p_5+p_3p_6=0$$

et se reduisent donc à *quatre paramètres* indépendants, ainsi que cela doit être.

Pour déterminer la distance de d à l, nous faisons tourner les axes OX, OY autour de l'axe OZ, jusqu'à ce que le plan ZOX′ contienne l; cela donne lieu aux équations:

$$\left.\begin{matrix} x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha \\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha \end{matrix}\right\}.$$

Par rapport à ce nouveau système la droite d est déterminée par les équations:

$$\left.\begin{matrix} p_3\,x'\sin\alpha+p_3\,y'\cos\alpha-p_2\,z=p_4 \\ -p_3\,x'\cos\alpha+p_3\,y'\sin\alpha+p_1\,z=p_5 \end{matrix}\right\},$$

Digitized by Google

d'où l'on tire:

$$p_3 y' + (p_1 \sin\alpha - p_2 \cos\alpha) z - (p_4 \cos\alpha + p_5 \sin\alpha) = o.$$

Comme la distance cherchée est égale à la distance du point $\begin{matrix} y' = o \\ z = a \end{matrix}\Big\}$ à cette projection de d sur Z O Y', elle est représentée par:

$$\frac{a(p_1 \sin\alpha - p_2 \cos\alpha) - (p_4 \cos\alpha + p_5 \sin\alpha)}{\sqrt{p_3^2 + (p_1 \sin\alpha - p_2 \cos\alpha)^2}}.$$

Donc la condition, qui exprime que d fait partie de Φ, c.-à-d. l'équation du complexe Φ est:

$$f\frac{a(p_1 \sin\alpha - p_2 \cos\alpha) - (p_4 \cos\alpha + p_5 \sin\alpha)}{\sqrt{p_3^2 + (p_1 \sin\alpha - p_2 \cos\alpha)^2}} = \frac{a(p_1 \sin\alpha + p_2 \cos\alpha) - (p_4 \cos\alpha - p_5 \sin\alpha)}{\sqrt{p_3^2 + (p_1 \sin\alpha + p_2 \cos\alpha)^2}}.$$

Après avoir chassé les radicaux, on trouve une équation homogène du quatrième ordre par rapport aux coordonnées p. Donc, quand (x_1, y_1, z_1) est un point fixe P, le lieu de (x_2, y_2, z_2) est un cône du quatrième ordre, etc.

(2). L'ÉQUATION DU CÔNE DE COMPLEXE. —

Par rapport à des axes parallèles par (x_1, y_1, z_1) les équations:

$$\frac{p_1}{x_2 - x_1} = \frac{p_2}{y_2 - y_1} = \frac{p_3}{z_2 - z_1} = \frac{p_4}{y_1 z_2 - y_2 z_1} = \frac{p_5}{z_1 x_2 - z_2 x_1} = \frac{p_6}{x_1 y_2 - x_2 y_1}$$

se transforment en:

$$\frac{p_1}{x} = \frac{p_2}{y} = \frac{p_3}{z} = \frac{p_4}{y_1 z - y z_1} = \frac{p_5}{z_1 x - z x_1} = \frac{p_6}{x_1 y - x y_1},$$

quand x, y, z représentent les coordonnées nouvelles du point (x_2, y_2, z_2). Donc le cône des droites d par P a l'équation:

$$\begin{aligned} &f^2\{(a - z_1)(\mu x - y) + (\mu x_1 - y_1) z\}^2\{(\mu x + y)^2 + (1 + \mu^2) z^2\} - \\ &- \{(a + z_1)(\mu x + y) - (\mu x_1 + y_1) z\}^2\{(\mu x - y)^2 + (1 + \mu^2) z^2\} = o, \end{aligned}$$

où μ remplace $\operatorname{tg}\alpha$. Ce cône du quatrième ordre admet trois arêtes doubles, les droites représentées par les équations:

$$\begin{matrix} z = o \\ \mu x - y = o \end{matrix}\Big\}, \quad \begin{matrix} z = o \\ \mu x + y = o \end{matrix}\Big\}, \quad \begin{matrix} (a - z_1)(\mu x - y) + (\mu x_1 - y_1) z = o \\ (a + z_1)(\mu x + y) - (\mu x_1 + y_1) z = o \end{matrix}\Big\},$$

dans lesquelles nous reconnaissons tout de suite les droites l_p, l'_p et l_p [1]).

---

[1]) Quel est le nombre des droites dont les distances à cinq droites données l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 sont entre elles comme cinq quantités données?

Digitized by Google

(3) L'ÉQUATION DE LA COURBE DE COMPLEXE. —

Soient $\left.\begin{aligned} u_1 x + v_1 y + w_1 z + 1 = o \\ u_2 x + v_2 y + w_2 z + 1 = o \end{aligned}\right\}$ deux plans quelconques (u_1, v_1, w_1) et (u_2, v_2, w_2) et représentons l'intersection de ces plans par d. Les projections de cette droite sont:

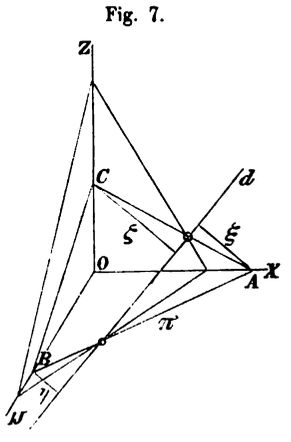
$$\left.\begin{aligned} (u_1 v_2 - u_2 v_1) y - (w_1 u_2 - w_2 u_1) &= u_2 - u_1 \\ (v_1 w_2 - v_2 w_1) z - (u_1 v_2 - u_2 v_1) &= v_2 - v_1 \\ (w_1 u_2 - w_2 u_1) x - (v_1 w_2 - v_2 w_1) &= w_2 - w_1 \end{aligned}\right\};$$

donc les coordonnées de d sont déterminées par les équations:

$$\frac{p_1}{v_1 w_2 - v_2 w_1} = \frac{p_2}{w_1 u_2 - w_2 u_1} = \frac{p_3}{u_1 v_2 - u_2 v_1} = \frac{p_4}{u_2 - u_1} = \frac{p_5}{v_2 - v_1} = \frac{p_6}{w_2 - w_1}.$$

Supposons que le plan (u_1, v_1, w_1) soit fixe et déterminons la courbe de complexe située dans ce plan en faisant usage des coordonnées tangentielles ξ, η, ζ, qui représentent les distances des points A, B, C (fig. 7), où ce plan fixe π est percé par les axes O X, O Y, O Z, à la droite d'intersection d des deux plans. On trouve tout de suite:

Fig. 7.



$$\frac{\xi}{\frac{u_2}{u_1} - 1} = \frac{\eta}{\frac{v_2}{v_1} - 1} = \frac{\zeta}{\frac{w_2}{w_1} - 1},$$

de manière que l'élimination de u_2, v_2, w_2 donne:

$$\frac{p_1}{v_1 w_1 (\zeta - \eta)} = \frac{p_2}{w_1 u_1 (\xi - \zeta)} = \frac{p_3}{u_1 v_1 (\eta - \xi)} = \frac{p_4}{u_1 \xi} = \frac{p_5}{v_1 \eta} = \frac{p_6}{w_1 \zeta}.$$

En remplaçant dans l'équation du complexe les coordonnées p par les conséquents des rapports précédents et $\operatorname{tg} \alpha$ par μ, on obtient l'équation de la courbe de complexe située dans π sous la forme:

$$\begin{aligned} f^2 \{a w_1 [\mu v_1 (\zeta - \eta) - u_1 (\xi - \zeta)] - (u_1 \xi + \mu v_1 \eta)\}^2 \{(1 + \mu^2) u_1^2 v_1^2 (\eta - \xi)^2 + \\ + w_1^2 [\mu v_1 (\zeta - \eta) + u_1 (\xi - \zeta)]^2\} = \\ \{a w_1 [\mu v_1 (\zeta - \eta) + u_1 (\xi - \zeta)] - (u_1 \xi - \mu v_1 \eta)\}^2 \{(1 + \mu^2) u_1^2 v_1^2 (\eta - \xi)^2 + \\ + w_1^2 [\mu v_1 (\zeta - \eta) - u_1 (\xi - \zeta)]^2\}. \end{aligned}$$

La courbe de complexe est donc une courbe de la quatrième classe. Elle a deux tangentes doubles; l'une, représentée par:

$$\left.\begin{aligned} a w_1 [\mu v_1 (\zeta - \eta) - u_1 (\xi - \zeta)] - (u_1 \xi + \mu v_1 \eta) = o \\ a w_1 [\mu v_1 (\zeta - \eta) + u_1 (\xi - \zeta)] - (u_1 \xi - \mu v_1 \eta) = o \end{aligned}\right\}$$

Digitized by Google

est la droite l_π de π, qui s'appuie sur l et l' [1]), tandis que l'autre a pour équations:

$$\xi = \eta = \zeta$$

et est la droite d'intersection de π avec π_∞.

(4) LA DÉCOMPOSITION DE K^4 EN DEUX CÔNES QUADRATIQUES. — L'ÉQUATION DE LA SURFACE SINGULIÈRE. —

Nous transformons l'équation du cône de complexe à sommet (x_1, y_1, z_1) en posant:

$$\left.\begin{aligned} (a - z_1)(\mu x - y) + (\mu x_1 - y_1) z &= \mathbb{X} \\ (a + z_1)(\mu x + y) - (\mu x_1 - y_1) z &= \mathbb{Y} \\ z &= \mathbb{Z} \end{aligned}\right\},$$

ce qui revient à transposer les axes dans les trois arêtes doubles du cône [2]). Parce qu'on a aussi

---

[1]) Les deux droites $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$ et $(p'_1, p'_2, p'_3, p'_4, p'_5, p'_6)$ se rencontrent sous la condition:

$$p_1 p'_4 + p_2 p'_5 + p_3 p'_6 + p_4 p'_1 + p_5 p'_2 + p_6 p'_3 = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

(voir M. Th. REYE, »*Ueber lineare und quadratische Strahlencomplexe und Complexen-Gewebe*", Crelle 1883, t. 95, p. 331). Cela nous permet de vérifier aisément que la première des deux droites doubles rencontre l et l'. D'abord les coordonnées de l et l' sont:

$$p_1 = 1, \quad p_2 = \pm\mu, \quad p_3 = 0, \quad p_4 = -\mu a, \quad p_5 = \pm a, \quad p_6 = 0$$

où les signes supérieurs se rapportent à l, les signes inférieurs à l'.

De plus les équations:

$$\left.\begin{aligned} \mu a v_1 w_1 (\zeta - \eta) - u_1 \xi &= 0 \\ a u_1 w_1 (\xi - \zeta) + \mu v_1 \eta &= 0 \end{aligned}\right\}$$

de la droite double donnent:

$$\frac{\xi}{\frac{\mu v_1}{u_1} - a w_1} = \frac{\eta}{\frac{u_1}{\mu v_1} - a w_1} = \frac{\zeta}{\frac{1}{a w_1} - a w_1},$$

ce qui conduit aux relations

$$\frac{p'_1}{\frac{v_1}{a} - \frac{u_1 w_1}{\mu}} = \frac{p'_2}{\mu v_1 w_1 - \frac{u_1}{a}} = \frac{p'_4}{\mu v_1 - a u_1 w_1} = \frac{p'_5}{\frac{u_1}{\mu} - a v_1 w_1}.$$

On a donc pour chacune des deux droites l, l' et la droite double:

$$p_1 p'_4 + p_4 p'_1 = 0, \quad p_2 p'_5 + p_5 p'_2 = 0, \quad p_3 = 0, \quad p_6 = 0,$$

de manière que la condition A est remplie.

[2]) Cette transposition est impossible, quand deux des trois arêtes doubles coincident, ce qui arrive, quand $z_1 = \pm a$. Mais le cas général $z_1 = \pm a$ peut être exclu. Car quoiqu'il semble que les trois arêtes doubles sont dans un même plan, quand $z_1 = \pm a$, ce qui prouverait que le cône K^4 se decompose en un plan

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}\mu x - y &= \frac{\mathbf{X} - (\mu x_1 - y_1)\mathbf{Z}}{a - z_1}\\ \mu x + y &= \frac{\mathbf{Y} + (\mu x_1 + y_1)\mathbf{Z}}{a + z_1}\end{aligned}\right\},$$

on trouve

$$f^2(a-z_1)^2\mathbf{X}^2\{[\mathbf{Y}+(\mu x_1+y_1)\mathbf{Z}]^2+(1+\mu^2)(a+z_1)^2\mathbf{Z}^2\}$$
$$-(a+z_1)^2\mathbf{Y}^2\{[\mathbf{X}-(\mu x_1-y_1)\mathbf{Z}]^2+(1+\mu^2)(a-z_1)^2\mathbf{Z}^2\}=0.$$

Si ce cône se compose de deux cônes quadratiques, chacun de ceux-ci passe par les trois arêtes qui forment les nouveaux axes de coordonnées, et le premier membre de cette équation peut s'identifier avec

$$(k\mathbf{Y}\mathbf{Z}+l\mathbf{Z}\mathbf{X}+m\mathbf{X}\mathbf{Y})(k\mathbf{Y}\mathbf{Z}-l\mathbf{Z}\mathbf{X}+n\mathbf{X}\mathbf{Y}),$$

le terme $\mathbf{X}\mathbf{Y}\mathbf{Z}^2$ faisant défaut. En égalant les coefficients correspondants, on parvient aux cinq relations

$$\begin{aligned}k^2 &= -(a+z_1)^2\{(\mu x_1-y_1)^2+(1+\mu^2)(a-z_1)^2\},\\ l^2 &= -f^2(a-z_1)^2\{(\mu x_1+y_1)^2+(1+\mu^2)(a+z_1)^2\},\\ mn &= f^2(a-z_1)^2-(a+z_1)^2,\\ l(m-n) &= -2f^2(a-z_1)^2(\mu x_1+y_1),\\ k(m+n) &= 2(a+z_1)^2(\mu x_1-y_1)\end{aligned}$$

entre les quatre paramètres k, l, m, n. Par élimination de ces paramètres au moyen de l'identité

$$\frac{\{k(m+n)\}^2}{k^2}-\frac{\{l(m-n)\}^2}{l^2}=4mn,$$

on trouve en supprimant les indices

$$f^2\{(\mu x-y)^2+(1+\mu^2)(a-z)^2\}-\{(\mu x+y)^2+(1+\mu^2)(a+z)^2\}=0.$$

La forme de cette équation nous fait reconnaître tout de suite l'hyperboloide à une nappe, qui est le lieu des points dont les distances à l est l' sont entre elles dans le rapport donné f [1]).

---

et un cône cubique, une analyse détaillée démontre que le plan de coincidence des deux arêtes doubles confondues n'est pas le plan $z_1 = \pm a$; de manière que K^4 — au lieu de se décomposer en le plan $z_1 = \pm a$ et un cône cubique qui touche ce plan — ne possède que la particularité de deux arêtes doubles confondues suivant laquelle les deux nappes de la surface se touchent de part et d'autre.

[1]) Quoiqu'il soit superflu de démontrer analytiquement que le lieu des points dont les distances à l et l' sont dans un rapport donné est un hyperboloide réglé, je résume ici la manière, dont M. Neuberg étudie le lieu.

Si P (Fig. 1) est un point quelconque du lieu, de manière que f. PQ = PQ', si l'on désigne QR et Q'R' par x et x', PR et PR' par y et y', l'équation du lieu est

$$f^2(x^2+y^2)=x'^2+y'^2,$$

ou

$$(fy-y')(fy+y')=(x'-fx)(x'+fx).$$

Quand P se meut dans un plan perpendiculaire à la plus courte distance, x et x' sont constantes et l'équation représente une hyperbole dont les asymptotes

Digitized by Google

L'équation trouvée représente un faisceau de surfaces du second ordre H^2, quand f varie. La courbe de base de ce faisceau est l'intersection des deux cylindres de révolution

$$\left.\begin{aligned}(\mu x - y)^2 + (1+\mu^2)(a-z)^2 &= o\\ (\mu x + y)^2 + (1+\mu^2)(a+z)^2 &= o\end{aligned}\right\},$$

qui se sont réduits à leurs axes, c.-à-d. les quatre „antidroites" de l et l'.

(5) LA DÉCOMPOSITION DE K^4 EN UN PLAN ET UN CÔNE CUBIQUE. —

Quand un plan fait partie d'un cône K^4 à trois arêtes doubles, ce plan contient au moins deux de ces trois arêtes. Si donc nous écrivons l'équation donnée au numéro précédent sous la forme

$$\alpha\,\mathfrak{Y}^2\mathfrak{Z}^2 + \beta\,\mathfrak{Z}^2\mathfrak{X}^2 + \gamma\,\mathfrak{X}^2\mathfrak{Y}^2 + 2(\delta\,\mathfrak{X} + \varepsilon\,\mathfrak{Y})\,\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{Z} = o,$$

nous n'avons qu'à examiner les suppositions $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$, dont la première fait trouver le plan $\mathfrak{X} = o$ ou $(l_p\ l_p)$, la seconde le plan $\mathfrak{Y} = o$ ou $(l'_p\ l_p)$ et la troisième le plan $\mathfrak{Z} = o$ ou $(l_p\ l'_p)$ comme partie de K^4.

Comme

$$\alpha = -(a+z_1)^2\{(\mu x_1 - y_1)^2 + (1+\mu^2)(a-z_1)^2\}$$

et que l'hypothèse $z_1 = \pm a$ a été déjà écartée, le premier cas $\alpha = o$ donne

$$(\mu x_1 - y_1)^2 + (1+\mu^2)(a-z_1)^2 = o,$$

ce qui représente le cylindre à axe l et à rayon zéro, c.-à-d. les plans isotropes ω_1 et ω_2 par l. De même la deuxième supposition $\beta = o$ fournit les plans isotropes ω'_1 et ω'_2 par l'.

Le troisième cas $\gamma = o$ exige

$$f^2(a-z_1)^2 - (a+z_1)^2 = o$$

et conduit donc aux deux plans α_1 et α_2 parallèles à l et l', qui divisent la distance a de l et l' harmoniquement dans le rapport f.

Ainsi nous retrouvons les six plans principaux simples.

$$fy \pm y' = o$$

sont toujours parallèles aux droites m_1 et n_2 du plan α_1 et dont le centre se trouve sur a. Dans un des deux cas

$$fx \pm x' = o$$

l'hyperbole dégénère en ses asymptotes, etc.

Digitized by Google

(6) LES QUATRIÈMES ARÊTES DOUBLES v DE K^4. —

Cherchons l'équation de la quatrième arête double v du cône K^4 dégénéré en deux cônes quadratiques. Les équations de ces cônes K^2

$$k\,\mathbf{Y}\mathbf{Z}+l\,\mathbf{Z}\mathbf{X}+m\,\mathbf{X}\mathbf{Y}=o,\quad k\,\mathbf{Y}\mathbf{Z}-l\,\mathbf{Z}\mathbf{X}+n\,\mathbf{X}\mathbf{Y}=o,$$

donnent tout de suite:

$$\frac{\mathbf{X}}{\mathbf{Z}}=-\frac{2k^2}{k(m+n)},\quad \frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{Z}}=-\frac{2l^2}{l(m-n)}$$

ou, en substituant les valeurs de k^2, l^2, $k(m+n)$, $l(m-n)$:

$$\frac{\mathbf{X}}{\mathbf{Z}}=(\mu x_1-y_1)+(1+\mu^2)\frac{(a-z_1)^2}{\mu x_1-y_1},\quad \frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{Z}}=-(\mu x_1+y_1)-(1+\mu^2)\frac{(a+z_1)^2}{\mu x_1+y_1}.$$

D'où, en recourant aux coordonnées ordinaires à origine (x_1, y_1, z_1):

$$\left.\begin{aligned}(\mu x-y)(\mu x_1-y_1)&=-(1+\mu^2)(a-z_1)z\\(\mu x+y)(\mu x_1+y_1)&=-(1+\mu^2)(a+z_1)z\end{aligned}\right\}$$

et, en revenant à l'origine primitive:

$$\left.\begin{aligned}(\mu x_1-y_1)(\mu x-y)+(1+\mu^2)(a-z_1)(a-z)&=(\mu x_1-y_1)^2+(1+\mu^2)(a-z_1)^2\\(\mu x_1+y_1)(\mu x-y)+(1+\mu^2)(a+z_1)(a+z)&=(\mu x_1+y_1)^2+(1+\mu^2)(a+z_1)^2\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (B).$$

Cette droite se trouve dans le plan

$$\begin{aligned}f^2\{(\mu x_1-y_1)(\mu x-y)+(1+\mu^2)(a-z_1)(a-z)\}-\{(\mu x_1+y_1)(\mu x+y)+(1+\mu^2)(a+z_1)(a+z)\}\\=f^2\{(\mu x_1-y_1)^2+(1+\mu^2)(a-z_1)^2\}-\{(\mu x_1+y_1)^2+(1+\mu^2)(a+z_1)^2\},\end{aligned}$$

dont l'équation s'obtient en retranchant la seconde des équations (B) de la première multipliée par f^2. Mais le second membre de cette nouvelle équation est zéro, parce que le point (x_1, y_1, z_1) se trouve sur H^2, et le premier membre égalé à zéro représente le plan tangent en (x_1, y_1, z_1) à H^2. Donc la quatrième arête double du cône de complexe, dont le sommet P est un point de H^2, touche H^2 en ce point.

(7) LA DÉCOMPOSITION DE c^4 EN UN POINT ET UN c^3. — L'ÉQUATION TANGENTIELLE DE LA SURFACE SINGULIÈRE. —

L'équation de la courbe c^4 se présente sous la forme

$$f^2\,K_1^2\,L_2-K_2^2\,L_1=o,$$

si nous posons

$$\begin{aligned}a\,w_1\{\mu\,v_1(\zeta-\eta)-u_1(\xi-\zeta)\}-(u_1\xi+\mu\,v_1\,y)&\equiv K_1,\\a\,w_1\{\mu\,v_1(\zeta-\eta)+u_1(\xi-\zeta)\}-(u_1\xi-\mu\,v_1\,y)&\equiv K_2,\\(1+\mu^2)\,u_1^2\,v_1^2(\eta-\xi)^2+w_1^2\{\mu\,v_1(\zeta-\eta)-u_1(\xi-\zeta)\}^2&\equiv L_1,\\(1+\mu^2)\,u_1^2\,v_1^2(\eta-\xi)^2+w_1^2\{\mu\,v_1(\zeta-\eta)+u_1(\xi-\zeta)\}^2&\equiv L_2.\end{aligned}$$

Digitized by Google

Donc l'équation de c^4 s'obtient par l'élimination du paramètre λ entre les relations

$$f^2 K_1^2 - \lambda K_2^2 = o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(C)},$$
$$L_1 - \lambda L_2 = o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(D)},$$

lesquelles définissent deux involutions quadratiques projectives, situées l'une sur la droite l_π et la seconde sur la droite d'intersection des plans π et π_∞. Le point d'intersection des deux supports se détache de la courbe c^4, quand les couples dont il fait partie dans les deux involutions sont des couples correspondants, c'est-à-dire quand on obtient la même valeur de λ en remplaçant ξ, η, ζ dans (C) par $\frac{\mu v_1}{u_1} - a w_1$, $\frac{u_1}{\mu v_1} - a w_1$, $\frac{1}{a w_1} - a w_1$ (voir la note [1]) de la page 84), et dans (D) par 1, 1, 1. Donc un point à l'infini se détache de c^4, quand les coordonnées tangentielles u_1, v_1, w_1 de π vérifient l'équation:

$$\frac{f^2 (u_1 + \mu v_1)^2}{(u_1 - \mu v_1)^2} = \frac{a^2 (1+\mu^2)(u_1^2 - \mu^2 v_1^2)^2 + \mu^2 (1 - a w_1)^2 (u_1 + \mu v_1)^2}{a^2 (1+\mu^2)(u_1^2 - \mu^2 v_1^2)^2 + \mu^2 (1 + a w_1)^2 (u_1 - \mu v_1)^2}$$

ou, en simplifiant et en supprimant les indices:

$$f^2 \{a^2 (1+\mu^2)(u + \mu v)^2 + \mu^2 (1 + a w)^2\} = a^2 (1+\mu^2)(u - \mu v)^2 + \mu^2 (1 - a w)^2.$$

On vérifie sans peine que cette surface de la seconde classe est l'hyperboloide H^2. En effet, si pour abréger nous remplaçons $\frac{f^2 - 1}{f^2 + 1}$ par p et $\frac{\mu^2}{1+\mu^2}$ par q, l'équation tangentielle devient

$$p a^2 u^2 + p a^2 \mu^2 v^2 + p q a^2 w^2 + 2 a^2 \mu u v + 2 q a w + p q = o,$$

de manière que l'équation en coordonnées ponctuelles, sous forme de déterminant, est:

$$\begin{vmatrix} p a^2 & \mu a^2 & o & o & x \\ \mu a^2 & p \mu^2 a^2 & o & o & y \\ o & o & p q a^2 & q a & z \\ o & o & q a & p q & 1 \\ x & y & z & 1 & o \end{vmatrix} = o;$$

celle-ci se reduit à

$$\mu^2 (p a^2 - 2 a z + p z^2) + q \{y (p y - \mu x) - \mu x (y - p \mu x)\} = o,$$

ou, en restituant les valeurs de p et q, à

$$f^2 \{(\mu x - y)^2 + (1+\mu^2)(a - z)^2\} - \{(\mu x + y)^2 + (1+\mu^2)(a+z)^2\} = o,$$

ce qui est l'équation de H^2.

Digitized by Google

L'équation $f^2 K_1^2 L_2 - K_2^2 L_1 = o$ et la génération de la courbe c^4 qui en découle, permet de prouver qu'il n'y a pas de courbe c^4 unicursale. En effet, pour que l'enveloppe des droites $P_1 P'_1$, $P_1 P'_2$, $P_2 P'_1$, $P_2 P'_2$ qui joignent les points P_1, P_2 d'un couple aux points P'_1, P'_2 du couple correspondant, ait une troisième tangente double, qui ne passe pas par le point d'intersection des deux autres, un des deux points doubles de l'une des deux involutions doit correspondre à un des deux points doubles de l'autre. Mais les points doubles de la première involution sont évidemment donnés par $K_1^2 = o$ et $K_2^2 = o$. Donc la condition d'une c^4 unicursale est que $L_1 = o$, ou $L_2 = o$ représente deux points confondus. Mais on a

$$L_1 \equiv \{(1+\mu^2) v_1^2 + w_1^2\} u_1^2 \alpha^2 + \{(1+\mu^2) u_1^2 + \mu^2 w_1^2\} v_1^2 \beta^2 + 2\{(1+\mu^2) u_1^2 v_1^2 - \mu u_1 v_1 w_1^2\} \alpha\beta,$$

où α et β remplacent $(\xi - \zeta)$ et $(\zeta - \eta)$; donc la condition cherchée est $(1+\mu^2) u_1^2 v_1^2 w_1^2 (u_1 + \mu v_1)^2 = o$. De la même manière l'équation $L_2 = o$ donne $(1+\mu^2) u_1^2 v_1^2 w_1^2 (u_1 - \mu v_1)^2 = o$. Nous avons donc à examiner les cas $u_1 = o$, $v_1 = o$, $w_1 = o$ et $u_1 \pm \mu v_1 = o$.

Dans le cas $u_1 = o$ (Fig. 7) on a $\xi = \infty$ pour toutes les droites, de manière que les formules de transformation (note [1]) de page 84) deviennent

$$\frac{u_1 \xi}{\mu v_1} = \frac{-\eta}{a w_1} = \frac{\zeta}{\frac{1}{a w_1} - a w_1}.$$

On a donc

$$L_1 \equiv \frac{\mu^2 v_1^2}{a^2 w_1^2} \{(1+\mu^2) v_1^2 \eta^2 - w_1^2 [a w_1 (\zeta - \eta) - \eta]^2\}$$

et il est évident que cette expression n'est un carré parfait que sous la condition $v_1 = o$, ou $w_1 = o$. Mais dans le cas $u_1 = o$, $v_1 = o$ le plan est parallèle à l et l' à la fois et c^4 se compose de deux points doubles, les points de l et l' en π_∞. Et dans le cas $u_1 = o$, $w_1 = o$ la courbe c^4 se compose de quatre points (art. 15).

Quand $w_1 = o$, on a $\zeta = \infty$ pour toutes les droites et les formules de transformation sont

$$\frac{\xi}{\frac{\mu v_1}{u_1}} = \frac{\eta}{\frac{u_1}{\mu v_1}} = a w_1 \xi.$$

Donc

$$L_1 \equiv (1+\mu^2) u_1^2 v_1^2 (\eta - \xi)^2 + \left(\frac{\eta}{a u_1} + \frac{\xi}{\mu a v_1}\right)^2,$$

ce qui ne représente un carré parfait que sous l'une des conditions $u_1 = o$, $v_1 = o$, $u_1 + \mu v_1 = o$, dont nous avons déjà considéré les deux premières. Il nous reste donc à examiner les cas $u_1 \pm \mu v_1 = o$.

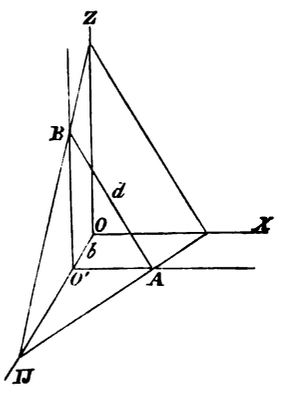
Digitized by Google

La condition $u_1 \pm \mu v_1 = o$ exprime que le plan π est paralèlle à un des deux axes, et nous savons que dans ces cas, c^4 se compose d'un point compté deux fois et d'une conique.

Ainsi il n'y a pas un seul plan π, qui contient une c^4 unicursale.

Pour vérifier que les plans parallèles aux plans de coordonnées **X O Z** et **Y O Z** ont des courbes c^4 composées de quatre points, nous employons (Fig. 8) dans un plan $y = b$ les coordonnées tangentielles $\sigma = -\frac{1}{O'A}$ et $\tau = -\frac{1}{O'B}$, de manière que:

Fig. 8.



$$p_2 = o, \qquad \frac{p_1}{-\tau} = \frac{p_3}{\sigma} = \frac{p_4}{b\sigma} = \frac{p_5}{1} = \frac{p_6}{-b\tau}.$$

Donc l'équation de la courbe c^4 est

$$\{\sigma^2(1+\mu^2) + \tau^2\mu^2\}\{f^2[a\tau+1)\mu + b\sigma]^2 - [(a\tau-1)\mu + b\sigma]^2\} = o;$$

le premier facteur du premier membre de cette équation se rapporte aux points imaginaires à l'infini communs à toutes les coniques des deux faisceaux, le second facteur indique deux points réels à distance finie.

Groningue, avril 1887.

ERRATUM.

Page 52 ligne 10, *au lieu de* »et leurs courbes doubles" *lisez* »et leurs droites multiples".

Digitized by Google

SUR LA CONNEXION ENTRE LE CARACTÈRE CHIMIQUE ET LE POUVOIR ROTATOIRE DES SUBSTANCES ACTIVES

PAR

A. C. OUDEMANS Jr.

Les recherches que j'ai faites, il y a quelques années [1]), concernant l'influence de divers acides sur le pouvoir rotatoire spécifique des alcaloïdes du quinquina, m'ont convaincu que cette influence est régie par quelques lois très simples, qu'on peut formuler de la manière suivante:

1°. Les alcaloïdes monoacides dissous dans l'eau sous forme de sels divers et dans des conditions analogues de concentration, ont le même p. r. s. et ne sont pas influencés sous ce rapport par la nature de l'acide. Un excès de ce dernier ne fait pas sensiblement varier le p. r. s., pourvu qu'il ne soit pas exagéré et que par là l'acide ne se combine pas avec une certaine quantité de l'eau de la solution.

2°. Les alcaloïdes diacides ont un p. r. s. plus élevé sous la forme de sels neutres que sous celle de sels basiques. Dans chaque série de sels on observe environ le même p. r. s. de la base, si elle est combinée à des acides forts, mais si l'on emploie des acides faibles surtout des acides organiques pour dissoudre l'alcaloïde, on voit que le p. r. s. est beaucoup moins élevé que dans le cas précédent. L'addition croissante d'un excès d'acide a une influence très marquée qui se trahit par le fait que le p. r. s. va toujours en croissant jusqu'à ce qu'il ait atteint une certaine limite. Les valeurs exprimant les p. r. s. maxima obser-

[1]) Natuurkundige Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Deel XVI. — Verslagen en Mededeelingen der K. A. v. W. te Amsterdam. 2e Serie. 12. p. 257 et 14. p. 360. — Archives Néerlandaises X. 193 et XV. 155. — Ann. der Chem. u. Pharm. 183. 33, 197. 48, 209. 38. — Recueil des Travaux Chimiques des Pays-Bas. I. p. 18.

Digitized by Google

vés dans l'action des acides tant organiques qu'inorganiques ne diffèrent que très peu entre elles.

Voici l'explication que j'ai donnée du dernier phénomène: l'eau exerce sur les sels neutres une action décomposante dont le résultat est la formation d'une certaine quantité d'acide libre et de sel basique, ayant un p. r. s. moins élevé. Cette action varie avec la quantité du dissolvant et selon la nature du sel dissous.

Or, il est clair que, conformément aux lois qui régissent les phénomènes de dissociation, l'addition d'acide en excès doit entraver la décomposition et tendra ainsi à faire monter le p. r. s.

Les alcaloïdes monoacides que j'ai étudiés sous le rapport de la variation du p. r. s. étaient la quinamine et la conquinamine. Plus tard M. H. Tykoziner [1]) poursuivit mes recherches en opérant avec la brucine, la strychnine, la morphine et la codéine.

Ses résultats confirmèrent en tout point les conclusions que j'avais tirées de mes recherches. Si l'on réfléchit sur les phénomènes observés dans l'action des acides sur le p. r. s. des alcaloïdes, la question suivante se présente naturellement à l'esprit: Les lois régissant la variation du p. r. s. des alcaloïdes sous l'influence des acides, ont-elles la même valeur pour les acides doués du pouvoir rotatoire, quand ils sont soumis à l'action des bases.

A vrai dire, la réponse à cette question a déjà été donnée jusqu'à certain point par les résultats obtenus par M. Landolt dans ses recherches sur le p. r. s. des tartrates et de quelques camphorates et par les données concernant le p. r. s. de quelques cholates, dues à M. Hoppe-Seyler; mais le nombre des composés chimiques qu'on a étudiés sous ce rapport, est assez restreint; c'est pourquoi je ne crus pas superflu d'étendre cet examen à d'autres substances actives.

On rencontre, il est vrai, pas mal d'obstacles dans ce genre de recherches. En effet il n'est pas toujours facile de se procurer en quantité suffisante et à l'état de pureté parfaite des acides organiques doués de pouvoir rotatoire; souvent la plupart des sels formés par ces composés sont insolubles dans l'eau ou bien leur p. r. s. est si faible, qu'on ne saurait élucider la question avec la précision requise. Enfin il y en a dont le caractère chimique est douteux ou peu marqué.

Néanmoins je me suis mis à l'étude de l'acide podocarpique et l'acide quinique, deux composés chimiques qui, comme on sait, jouent le rôle d'acides monobasiques.

Avant de communiquer les résultats obtenus, je dois faire remarquer que le

---

[1]) Recueil des Travaux Chimiques des Pays-Bas, T. I, p. 144.

Digitized by Google

problème dont je m'occupe à présent, n'a jamais été bien reconnu dans sa signification réelle. Dans son mémoire sur le p. r. s. de l'acide tartrique et des tartrates M. LANDOLT traite des rapports simples qu'il croyait trouver entre le p. r. s. de l'acide et de ces deux séries de sels, mais il ne fait aucune mention d'une connexion quelconque entre la basicité de l'acide et les p. r. s. de ses composés. Il en est de même du mémoire de M. HOPPE-SEYLER, qui du reste étend beaucoup plus loin, que je n'ai l'intention de le faire, l'idée qu'il y a une certaine relation entre le p. r. s. et la constitution chimique.

Mes recherches sur le p. r. s. ont été faites à l'aide du polaristrobomètre; les valeurs que je vais communiquer se rapportent donc à la raie jaune du sodium D.

L'acide quinique cristallisé d'une solution aqueuse contient une molécule d'eau de cristallisation, qu'il ne perd qu'à une température de 150° C., circonstance qui doit être mise en ligne de compte quand on calcule le p. r. s. de la molécule $C_7H_{12}O_6$.

Dans les expériences servant à étudier l'action des divers alcalis, la quantité voulue d'acide fut pesée et dissoute dans un peu d'eau, puis on ajouta la quantité requise de la base et enfin on dilua la liqueur avec de l'eau jusqu'à ce qu'elle eût un volume déterminé. L'influence des terres alcalines et d'autres bases métalliques fut déduite d'expériences exécutées avec des quinates cristallisés.

Pour ce qui concerne la méthode suivie, je dois renvoyer le lecteur à mes mémoires précédents, et ne fais maintenant que communiquer les résultats obtenus.

Acide podocarpique sous l'influence des alcalis.

Nombre de molécules de la base ajoutées à 1 Mol. d'acide.	p.	l.	v.	t.	α trouvé.	$(\alpha)_D$ calculé pour $C_{17}H_{21}MO_3$	$(\alpha)_D$ calculé pour $C_{17}H_{22}O_3$
1 KOH	0,3760 Gr.	302,8 mM.	22 cc.	19° C.	6°57′	+ 117°.9	+ 134°.3
6 »	0,3756 »	»	»	»	6°59′	+ 118°.5	+ 135°.1
1 NaOH	0,3717 »	»	»	»	6°50′	+ 123°.4	+ 133°.3
6 »	0,3754 »	»	»	»	6°57′	+ 124°.4	+ 134°.4
1 NH_3	0,3741 »	»	»	»	6°51′	+ 125°.3	+ 130°.0
6 »	0,3761 »	»	»	»	6°58′	+ 126°.5	+ 134°.3

Acide quinique libre.

p.	l.	v.	t.	α trouvé.	$(\alpha)_D$ trouvé pour $C_7H_{12}O_6 + H_2O$. .	$(\alpha)_D$ calculé pour $C_7H_{12}O_6$.
0,3136 Gr.	303,8 mM.	20 cc.	16° C.	1°59′	— 41°.6	— 45°.5
0,3190 »	»	»	»	2°1′	— 41°.6	— 45°.5
0,6526 »	»	»	»	4°6′	— 41°.7	— 45°.6
0,6878 »	»	22 »	»	5°4′	— 42°.8	— 46°.7
1,2316 »	»	20 »	»	8°0′	— 42°.8	— 46°.7
2,5414 »	»	»	»	15°1′	— 42°.8	— 46°.7

Digitized by Google

Acide quinique sous l'influence des alcalis.

Nombre de molécules de la base ajoutées à 1 Mol. d'acide.	p.	l.	v.	t.	α trouvé.	$(\alpha)_D$ calculé pour $C_7H_{11}MO_6$.	$(\alpha)_D$ calculé pour $C_7H_{12}O_6$.
1 KOH	0,5782 Gr.	303,8 mM.	22 cc.	16° C.	3°33′	— 40°.6	— 45°.8
2 »	0,5784 »	»	»	»	3°33′	— 40°.6	— 46°.8
3 »	0,5765 »	»	»	»	3°33′	— 40°.6	— 46°.6
3 »	1,1748 »	»	»	»	7°22′5	— 41°.6	— 46°.9
3 »	1,9700 »	»	»	»	11°12′	— 41°.5	— 46°.7
1 NaOH	0,5752 »	»	»	»	3°33′	— 42°.9	— 48°.9
2 »	0,5778 »	»	»	»	3°33′	— 43°.7	— 48°.7
3 »	0,5771 »	»	»	»	3°35′	— 44°.0	— 49°.0
3 »	0,5458 »	»	»	»	9°36′	— 44°.3	— 49°.3
1 NH_3	0,5757 »	»	»	»	3°29′	— 44°.0	— 47°.9
2 »	0,5718 »	»	»	»	3°28′	— 44°.3	— 48°.2
3 »	0,5754 »	»	»	»	3°32′	— 44°.9	— 48°.9
3 »	1,7694 »	302,8 mM.	»	»	10°45′	— 44°.1	— 48°.0

Quinate barytique $(C_7H_{11}O_6)_2$. Ba + 6 H_2O.

p.	l.	v.	t.	α trouvé.	$(\alpha)_D$ calculé pour $(C_7H_{11}O_6)_2$. Ba.	$(\alpha)_D$ calculé pour $C_7H_{12}O_6$.
1,4899 Gr.	303,8 mM.	20 cc.	17° C.	6°28′	— 34°.6	— 46°.8
3,5938 »	»	»	»	15°53′	— 35°.2	— 47°.5
4,9385 »	»	»	»	22°11′	— 35°.8	— 48°.3

Quinate strontique $(C_7H_{11}O_6)_2$ Sr + 10 H_2O.

p.	l.	v.	t.	α trouvé.	$(\alpha)_D$ calculé pour $(C_7H_{11}O_6)_2$. Sr.	$(\alpha)_D$ calculé pour $C_7H_{12}O_6$.
0,7394 Gr.	303,8 mM.	22 cc.	16° C.	2°46′5	— 37°.9	— 46°.3
1,0281 »	»	»	»	4°44′	— 39°.8	— 48°.7
2,1295 »	»	»	»	10°14′	— 40°.3	— 49°.2

Quinate calcique $(C_7H_{11}O_6)_2$. Ca + 10 H_2O.

p.	l.	v.	t.	α trouvé.	$(\alpha)_D$ calculé pour $(C_7H_{11}O_6)_2$. Ca.	$(\alpha)_D$ calculé pour $C_7H_{12}O_6$.
0,4763 Gr.	303,8 mM.	20 cc.	17° C.	2°14′	— 44°.0	— 48°.4
0,9587 »	»	22 »	»	4° 7′	— 44°.3	— 48°.7
1,1078 »	»	»	»	4°43′	— 44°.0	— 48°.3
2,6350 »	»	»	»	11°49′	— 46°.4	— 51°.0
3,7400 »	»	»	»	17°10′5	— 47°.4	— 52°.2

Digitized by Google

Quinate magnésique $(C_7H_{11}O_6)_2 . Mg + 6 H_2O$.

p.	l.	v.	t.	α trouvé.	$(\alpha)_D$ calculé pour $(C_7H_{11}O_6)_2 . Mg$.	$(\alpha)_D$ calculé pour $C_6H_{12}O_6$.
0,9314 Gr.	303,8 mM.	22 cc.	17° C.	4°36′	— 45°.3	— 47°.9
1,6850 »	»	»	»	9°31′	— 47°.1	— 49°.8
3,4714 »	»	»	»	20°2′5	— 48°.1	— 50°.9

Quinate zincique $(C_7H_{11}O_6)_2 . Zn$.

p.	l.	v.	t.	α trouvé.	$(\alpha)_D$ calculé pour $(C_7H_{11}O_6)_2 . Zn$.	$(\alpha)_D$ calculé pour $C_7H_{12}O_6$.
0,4656 Gr.	303,8 mM.	20 cc	17° C.	3°2′	— 42°.9	— 49°.9
0,8350 »	»	22 »	»	5°9′	— 44°.7	— 52°.0
0,8438 »	»	22 »	»	5°19′	— 45°.6	— 53°.3
1,3336 »	»	20 »	»	9°28′	— 46°.9	— 54°.6

En résumant les résultats obtenus nous arrivons aux conclusions suivantes:

1°. *Dans les solutions aqueuses étendues l'acide podocarpique et l'acide quinique* examinés sous la forme de sels divers, montrent *à peu près le même p. r. s.*; ou, selon l'expression adoptée par plusieurs chimistes:

le pouvoir rotatoire moléculaire des divers podocarpates et quinates est à peu près le même dans des conditions identiques[1]) *de concentration.*

Ce phénomène est donc tout-à-fait analogue à celui qu'on observe dans l'action des acides sur les alcaloïdes monoacides; cela ressort plus clairement des tables suivantes, où sont inscrits les p. r. s. de l'acide podocarpique sous l'influence des alcalis et ceux de l'acide quinique sous la forme de divers sels et pour une concentration correspondant à 3 molécules (exprimées en milligrammes) sur 22 c.c. de liquide ($2^1/_2$ p.c. d'acide quinique).

P. R. S. de l'acide podocarpique.

Sous la forme de sel potassique	+ 134°.3
» » » » » sodique	+ 133°.3
» » » » » ammonique	+ 133°.0

[1]) C'est avec intention que j'ai évité de me servir de l'expression: pouvoir rotatoire moléculaire; en effet, je crois que ma manière d'exposer les phénomènes observés est plus claire; en outre la comparaison des chiffres qui représentent les p. r. m. cause beaucoup plus d'embarras.

Digitized by Google

P. R. S. de l'acide quinique (calculé pour la molécule $C_7H_{12}O_6$).

Sous la forme de sel potassique	— 48°.8
» » » » » sodique	— 48°.9
» » » » » ammonique	— 47°.9
» » » » » barytique	— 46°.6
» » » » » strontique	— 48°.7
» » » » » calcique	— 48°.7
» » » » » magnésique	— 47°.8
» » » » » zincique	— 51°.0

La moyenne des valeurs est — 48°.5.

Il ressort des résultats obtenus:

1°. *que les différences entre les valeurs obtenues et cette moyenne sont en général très petites;* il n'y a que les valeurs obtenues avec le sel zincique et le sel barytique, qui s'en écartent sensiblement. Probablement ces différences doivent être attribuées à diverses influences perturbatrices, telles que l'influence de la concentration, les erreurs d'observation, l'impureté des sels employés, etc. Le p. r. s. du sel magnésique est probablement un peu plus élevé que je ne l'ai trouvé; en effet ce sel manifestait une tendance prononcée à se colorer en rouge vinâtre, ce que j'attribue à des impuretés contenues dans l'acide quinique de commerce. De même je crois que la valeur obtenue pour le quinate ammonique dans la première observation est un peu trop petite, à cause d'une dissociation partielle du sel sous l'influence de l'eau. Un excès d'ammoniaque augmente le p. r. s. et en prenant 3 NH_3 sur 1 mol. de $C_7H_{12}O_6$ on obtient précisément le même chiffre qu'avec la potasse et la soude.

2°. *Que (conformément à ce que l'on observe dans l'action d'un excès d'acide sur les alcaloïdes monoacides) un excès d'une base quelconque (la potasse, la soude, l'ammoniaque)*, ajouté *aux solutions des sels correspondants, n'augmente pas sensiblement le p. r. s.*

3°. *Que l'influence de la concentration ne se fait pas sentir au même degré dans les divers quinates; (très peu dans les quinates alcalins, beaucoup au contraire dans les quinates des terres alcalines et du zinc);* enfin que *en général le p. r. s. augmente à mesure que la concentration est plus grande.*

Avant d'aller plus loin, je me permettrai de répondre à quelques objections qui pourraient se soulever contre la valeur de mes résultats.

Dans ses belles recherches sur l'influence de divers dissolvants inactifs sur

Digitized by Google

le p. r. s. des huiles de térébenthine dextrogyre et levogyre, de la nicotine et du tartrate éthylique M. LANDOLT [1]) a démontré, que le p. r. s. d'une matière active est au fond représenté par la valeur qu'on obtient pour la substance *isolée* et *non dissoute* et que si l'on veut comparer entre eux les p. r. s. de diverses substances actives, afin d'en déduire des lois, il est rationnel de ne considérer que ces valeurs, qui du reste peuvent se déduire par le calcul des p. r. s. appartenant à 2 ou 3 solutions de la substance dans un même dissolvant.

Or, on pourrait s'étonner que, en regard de ces faits, je continue à attribuer quelque valeur aux résultats obtenus par moi dans l'étude des solutions très diluées. Qu'il me soit permis de faire les remarques suivantes à cet égard.

1°. Mes recherches se rapportent aux variations *d'une même substance* sous l'influence de diverses substances inactives. Or, je crois qu'elles ont par là un caractère spécial qui comporte une exception à la règle générale, admise par M. LANDOLT.

2°. Si d'une part on admet avec M. LANDOLT que le p. r. s. réel d'une substance est celui qui appartient à la substance pure et isolée — on ne saurait nier d'autre part la valeur du principe qui a servi de base à M. TH. THOMSON dans ses recherches sur les p. r. s. multiples. On se rappellera que ce savant a cherché à démontrer qu'on est en droit d'admettre en dehors de l'*état limite* observé par M. LANDOLT (∞ de matière et 0 de dissolvant) un autre *état limite* diamétralement opposé, celui où la quantité de la matière devient $=0$ et celle du dissolvant $=\infty$.

Quoique je ne sois pas en tout point d'accord avec M. THOMSEN là où il trouve quelques relations simples entre le p. r. s. des substances actives dissoutes, je suis cependant d'avis que le raisonnement qui fait le point de départ des recherches du chimiste danois pouvait très bien servir de base à mes propres travaux.

Dans mes recherches sur le p. r. s. de la quinamine et la conquinamine sous la forme de divers sels à l'état de solution très étendue, j'obtins des valeurs, différant si peu entre elles qu'il serait peu rationnel de penser à un caprice du hasard et que je me vis contraint à admettre que l'examen des solutions très étendues pourrait aider à révéler les lois qui régissent la variation du p. r. s. Et à mesure que j'étendais mes recherches dans cette voie, je ne rencontrais que des faits qui corroboraient les conclusions tirées de mes expériences antérieures.

Je me crois donc pleinement justifié en persistant à suivre la voie que je me suis tracée.

---

[1]) Das optische Drehungsvermögen organischer Substanzen. Braunschweig. F. Vieweg und Sohn. 1879.

Digitized by Google

Qu'il me soit permis maintenant de mentionner ici les observations faites par d'autres chimistes au sujet de la question qui m'occupe.

M. HOPPE-SEYLER [1]) trouva pour le cholate potassique et le cholate sodique les résultats suivants:

Nom de la substance.	Poids de la substance sur 100 c.c. de la solution.	$(\alpha)_D$ trouvé.	$(\alpha)_D$ calculé sur le sel.	$(\alpha)_D$ calculé sur $C_{20}H_{50}O_5$.
Cholate potassique $C_{24}H_{39}KO_5$	6.0044 gr.	+ 6°.8	+ 28°.2	+ 31°.0
Cholate sodique $C_{24}H_{39}NaO_4$	9.0244 »	+ 9°.2	+ 27°.4	+ 28°.6

L'addition de la potasse diminua beaucoup le p. r. s., probablement parce que cette substance soustrait de l'eau à la solution saline.

On doit à M. LANDOLT les données suivantes concernant le p. r. s. de quelques sels de l'acide camphorique dextrogryre [2]), qui comme on le sait est bibasique.

Nom de la substance.	Poids de la substance sur 100 c c. de la solution.	$(\alpha)_D$ trouvé.	$(\alpha)_D$ calculé sur $C_{10}H_{16}O_4$.
Camphorate potassique $C_{10}H_{14}K_2O_4$	4 gr.	+ 14°.53	+ 20°.1
Camphorate sodique $C_{10}H_{14}Na_2O_4$	4 »	+ 16°.58	+ 20°.1
Camphor. ammonique $C_{10}H_{14}(NH_4)_2O_4$	4 »	+ 17°.60	+ 19°.6

Je n'ai pu trouver aucune donnée concernant les p. r. s. s. des camphorates acides. Cependant on aurait de l'intérêt à les connaître; le sel hydro-ammonique est très soluble et se prêterait bien à une détermination exacte du p. r. s.

Enfin je dois citer ici les observations de M. LANDOLT sur le p. r. s. de divers tartrates dans des solutions étendues, correspondant pour la plupart à 7.69 gr. d'acide tartrique dans 100 c.c. d'eau. ($t = 20°$ C.).

---

[1]) J. f. P. C. T. 89. p. 264 et 272.

[2]) H. LANDOLT. Das optische Drehungsvermögen organischer Substanzen. p. 225.

Digitized by Google

	Formule du sel.	$(\alpha)_D$ calculé pour le sel anhydre.	$(\alpha)_D$ calculé pour $C_4H_6O_6$.
Sels acides	$C_4H_5LiO_6$	+ 27°.4	+ 28°.5
	$C_4H_5(NH_4)O_6$	25°.7	28°.5
	$C_4H_5NaO_6$	24°.0	27°.5
	$C_4H_5KO_6$	22°.6	28°.3
	$C_4H_5(AsO)O_6$	16°.2	27°.1
Sels neutres	$C_4H_4Li_2O_6$	+ 35°.8	+ 38°.6
	$C_4H_4(NH_4)_1O_6$	34°.3	42°.0
	$C_4H_4Na_2O_6$	30°.9	39°.9
	$C_4H_4K_2O_6$	28°.5	43°.0
	$C_4H_4MgO_6$	35°.9	41°.2
	$C_4H_4(NH_4)NaO_6$	32°.7	41°.2
	$C_4H_4(NH_4)KO_6$	31°.1	42°.6
	$C_4H_4NaKO_6$	29°.7	41°.6
	$C_4H_4K(C_2H_5)O_6$	29°.9	43°.1
	$C_4H_4Ba_{\frac{1}{2}}(C_2H_5)O_6$	25° 7	42°.0
	$C_4H_4(AsO)O_6$	21°.1	39°.2

Il ressort du tableau précédent que l'acide tartrique bibasique a toujours un p. r. s. à peu près constant dans les sels acides; il en est de même quand on examine les solutions des sels neutres, mais les valeurs des deux p. r. s. diffèrent considérablement entre elles. L'on voit que le p. r. s. est plus grand dans les sels neutres que dans les sels acides. Les écarts des valeurs devront sans doute être attribués à diverses influences perturbatrices, surtout à celle de la concentration.

Il me reste encore à répondre à une question qui se présente à propos de l'influence d'un excès de base sur le p. r. s. des tartrates. Nous avons vu que le p. r. s. des alcaloïdes diacides à l'état de sel neutre est profondément modifié par un excès d'acide. En sera-t-il de même, quand on ajoute un excès de base à la solution d'un tartrate neutre? Bien que cela me parût peu probable, je crus cependant devoir m'en assurer par l'expérience. Le résultat était en parfait accord avec ma prévision, ainsi qu'il ressort du tableau suivant, où sont inscrites les valeurs des p. r. s. de l'acide tartrique dans des solutions de même concentration examinées par M. Landolt, mais qui contenaient une quantité de base alcaline plus que suffisante pour la saturation complète de l'acide ($t = 20°$ C.)

Poids de l'acide tartrique.	Nombre de molécules de la base sur 1 mol. d'acide	v	l	$(\alpha)_D$ trouvé.	$(\alpha)_D$ calculé pour $C_4O_6H_6$.
1.5784 gr.	6 KOH	22 c.c.	302.8 mm.	9°13′	+ 42°.2
1.5800 »	6 NaOH	» »	» »	8°45′	+ 39°.9
1.5684 »	6 NH_3	» »	» »	8°54′	+ 41°.3
1.4725 »	20 NH_3	19 »	» »	9°30′	+ 40°.5

Digitized by Google

En résumant les résultats obtenus avec les tartrates, on arrive à la conclusion qu'ils s'accordent parfaitement avec la théorie que j'ai exposée ci-dessus. Si au contraire on les compare avec ceux que j'obtins dans mes recherches sur le p. r. s. des alcaloïdes diacides, on peut constater une différence très essentielle. Le p. r. s. de l'acide tartrique ne change pas sensiblement si l'on ajoute un excès de base aux sels neutres, tandis qu'il faut ajouter beaucoup plus que deux molécules d'un acide organique monobasique à une molécule d'alcaloïde, pour atteindre le maximum du p. r. s.

Cette différence cependant ne nous surprendra pas en nous rappelant, que les tartrates n'éprouvent aucune décomposition ou dissociation dans une solution aqueuse, tandis qu'au contraire les sels neutres de la quinine et des bases analogues, (composés qu'on nomme ordinairement sels acides), ne sont pas stables dans une solution aqueuse.

L'étude des tartrates offre pourtant quelques particularités, qui méritent de fixer l'attention.

1°. On pourrait se demander pourquoi l'acide libre se comporte autrement quant à son p. r. s. que les sels formés par sa combinaison avec les bases. En partant de certaines théories chimiques, on s'attendrait à voir plutôt: *ou* que le composé hydrogéné (l'acide libre) suivrait les mêmes lois que le composé analogue contenant du potassium, du sodium etc. à la place de l'hydrogène; *ou* que le p. r. s. s'élève à mesure que l'affinité de la base pour l'acide est plus grande. Cependant il n'en est rien. L'acide libre (le composé hydrogéné) forme une espèce à part et les sels acides et neutres, dans lesquels l'hydrogène des groupes CO_2H est substitué en partie ou totalement par des métaux, forment deux classes distinctes, différant entre elles sous le rapport du p. r. s.

On ne saurait dire au juste comment se comporte l'acide quinique à cet égard. Il y a une différence à observer entre les p. r. s. de ce composé à l'état libre et à l'état combiné, mais cette différence n'est pas très considérable; on pourrait douter encore qu'elle ne soit pas l'effet de l'influence de la concentration. En tout cas le phénomène est beaucoup moins prononcé dans l'acide quinique que dans l'acide tartrique.

2°. Il est bien remarquable que le radical antimonyle, quant à la variation du p. r. s. a une influence différant totalement de celle qu'exercent les métaux. Si l'on calcule le p. r. s. de l'acide tartrique, comme il se montre dans le tartre émétique, on trouve une valeur d'environ +334, qui, comme on le voit, est beaucoup plus élevée que celles qu'on observe dans les autres tartrates neutres. On serait peut-être tenté d'attribuer ce phénomène au fait que le radical SbO est *composé*, ou au caractère chimique de ce radical, qui tend à former des com-

Digitized by Google

posés faiblement acides avec le groupe OH. On revient cependant bien vite de cette idée en considérant que le radical AsO, qui, sous le rapport du caractère chimique, est l'analogue de l'antimonyle, ne montre pas dans les tartrates la discordance remarquable dont nous parlons; il semble donc qu'il faille attribuer à l'antimoine seul l'influence singulière du radical antimonyle. Le malate d'antimonyle et d'ammonium, examiné par M. PASTEUR [1]) présente la même anomalie.

Sans doute il y aurait un grand intérêt à faire une étude plus approfondie de l'influence qu'exerce ce groupe singulier.

Quant au tartrate éthylique, M. LANDOLT a démontré que le p. r. s. de l'acide tartrique sous la forme de ce corps, examiné en solution aqueuse tient environ le milieu entre les valeurs qu'on trouve pour l'acide sous forme de sels neutres et de sels acides: phénomène qu'il attribue à une décomposition partielle de la substance sous l'influence de l'eau. Il serait important d'examiner ce genre de corps dans une solution alcoolique, ou dissous dans un liquide quelconque, n'exerçant point d'influence décomposante sur la matière active. Probablement on trouverait que le p. r. s. de l'acide tartrique est le même sous des circonstances égales dans tous les corps de cette classe.

---

[1]) Ann. de Chim. et de Phys. (3) 31. 85.

Digitized by Google

SUR QUELQUES DÉRIVÉS DE L'ISOQUINOLÉINE

PAR

S. HOOGEWERFF ET W. A. VAN DORP.

L'isoquinoléine, base de la formule C_9H_7Az, que nous avons isolée du goudron de houille, peut être envisagée d'après nos expériences [1]) comme une naphtaline, dans laquelle un groupe CH, qui se trouve dans la position β, est remplacé par Az.

Nous décrivons dans les pages suivantes quelques dérivés de cette base, que nous avons étudiés; qu'il nous soit permis de dire auparavant quelques mots sur la provenance de la base, qui nous a servie pour nos expériences.

La quinoléine du goudron de houille contient des quantités appréciables d'isoquinoléine. On peut s'en assurer en l'oxydant par du permanganate de potassium, comme nous l'avons décrit et en isolant l'acide phtalique formé [2]). En admettant que cet acide provient entièrement de l'isoquinoléine, ce qui nous semble probable, les échantillons de quinoléine de goudron de houille que nous avions entre les mains, contenaient au moins 10% d'isoquinoléine. Nous n'avons réussi cependant qu'à isoler de petites quantités d'isoquinoléine de cette matière brute. Une quantité plus considérable de la base — quelques centaines de grammes — a été séparée d'une huile que nous avions obtenue de M. KAHLBAUM de Berlin sous le nom de „Bases pyridiques du goudron de houille." Nous avons soumis cette huile à un traitement presque identique à celui qui a été décrit dans notre premier mémoire sur ce sujet. Seulement on se servait de l'alcool

[1]) Recueil des Travaux Chimiques des Pays-Bas, IV, p. 125 et 285. Annales de l'École Polytechnique de Delft. T. III. p. 33.

[2]) En traitant les acides formés par de l'éther, celui-ci dissout outre l'acide phtalique un corps très-peu soluble dans l'eau, qui contient de l'azote et qui peut être distillé sans décomposition. Il se dépose de l'alcool sous la forme d'aiguilles fondant de 200°—206°. Nous n'en avons obtenu que de petites quantités.

Digitized by Google

absolu au lieu de l'alcool de 95% pour isoler de cette huile les sulfates des bases quinoléiques.

Pour préparer une isoquinoléine absolument pure, nous avons recristallisé son sulfate dans de l'alcool jusqu'à ce que le point de fusion ne changeât plus. Le sel fondait alors à 205°—206½°. La base obtenue de ce sel fondait à 22°—23°. Elle bout à 240½° sous une pression barométrique de 763 mm., le thermomètre étant entièrement plongé dans la vapeur. L'isoquinoléine donne des combinaisons cristallisées avec plusieurs sels, tels que le chlorure mercurique, l'azotate d'argent. Elle attire l'eau et probablement aussi l'acide carbonique de l'atmosphère.

Nous n'avons pu réussir à préparer une isoquinoléine bromée. Une fois nous avons opéré comme M. LUBAVIN [1]) l'a décrit pour la quinoléine. Nous avons placé sous une cloche, dans deux vases séparément, la base (1 part.) et le brome (2 part.). Une autre fois nous avons dissous ceux-ci (1 part. de base sur 1½ part. de brome) dans du sulfure de carbone et nous avons mélangé les solutions. Dans les deux cas il se forme des produits d'addition solides, instables, qui exhalent une odeur de brome; il nous a été impossible d'en obtenir des dérivés bromés stables en quantité suffisante.

Nous profitons de cette occasion pour redresser une erreur qui s'est glissée dans notre premier mémoire sur l'isoquinoléine. Quand on fait monter doucement la température, le point de fusion du chloroplatinate de cette base se trouve à 260° et non pas à 246°—248°. M. GABRIEL [2]) trouve 260°—264° pour le point de fusion du chloroplatinate de l'isoquinoléine synthétique.

L'*iodure de méthylisoquinoléylammonium* se forme, quand on mélange la base avec un excès d'iodure de méthyle à la température ambiante. On recristallise la masse solide quelques fois dans de l'alcool absolu. On obtient des aiguilles plates, de couleur jaune, dont le point de fusion se trouve à 158°—161°. Pour l'analyse le sel fut séché sur de l'acide sulfurique.

I. 0.351 grm. donnèrent 0.5767 grm. CO_2 et 0.1251 grm. H_2O.

II. 0.4108 grm. donnèrent 17⅛ c.c. d'azote à 8° et sous une pression de 765 mm.

III. 0.513 grm. donnèrent 0.440 grm. AgI.

---

[1]) Annalen d. Chem. u. Pharm. 155, p. 318. Notre mémoire était déjà rédigé, quand nous vîmes dans la »Chemiker Zeitung" du 12 décembre 1886, que M. LUBAVIN n'a pu obtenir une quinoléine tribromée de la quinoléine synthétique. Il attribue la formation du dérivé bromé à la présence de la tétrahydroquinoléine dans la quinoléine obtenue de la cinchonine, avec laquelle il travaillait autrefois.

[2]) Ber. d. D. Chem. Ges. 19, p. 2362.

Digitized by Google

Calculé pour $C_9H_7Az.CH_3I$.		Trouvé. I.	II.	III.
C	44.4	44.8	—	—
H	3.7	4.—	—	—
Az	5.2	—	5.1	—
I	46.8	—	—	46.3

On prépare l'*iodure d'éthylisoquinoléylammonium* en mélangeant l'isoquinoléine et l'iodure d'éthyle. La masse se fige bientôt à la température ordinaire. On recristallise plusieurs fois le produit obtenu dans de l'alcool absolu. On obtient de petites tablettes jaunes, qui fondent à 148°—151°, en se colorant tant soit peu en rouge. M. GABRIEL [1]), qui a préparé le même dérivé d'une isoquinoléine synthétique, a trouvé le point de fusion 147°—148°. L'iodure paraît se décomposer, quand on le recristallise dans de l'acide acétique cristallisable. Sa composition correspond à la formule $C_9H_7Az.C_2H_5I$.

I. 0.5028 grm. séchés sur de l'acide sulfurique donnèrent 0.8538 grm. CO_2 et 0.2122 grm. H_2O.

II. 0.5507 grm. donnèrent 23 c.c. d'azote à 12° et sous une pression de 757 mm.

III. 0.5119 grm. donnèrent 0.4206 grm. AgI.

Calculé pour $C_9H_7Az.C_2H_5I$.		Trouvé. I.	II.	III.
C	46.4	46.3	—	—
H	4.2	4.7	—	—
Az	4.9	—	4.9	—
I	44.5	—	—	44.4

L'iodure d'éthylisoquinoléylammonium ne forme pas de cyanines [2]) avec l'iodure d'amyllépidylammonium ou avec l'iodure d'éthylquinaldylammonium, sous l'influence de la potasse caustique.

Nous avons préparé un acide *sulfoisoquinoléique* en chauffant au bain-marie, dans des tubes scellés, 1 partie d'isoquinoléine avec 2 parties d'acide sulfurique fumant pendant environ 30 heures. Après avoir ajouté de l'eau, on neutralise le liquide par du carbonate de baryum; la solution filtrée contient deux sels de baryum, dont l'un seulement a été isolé à l'état pur et analysé. Ce sel est facilement soluble dans l'eau chaude; il cristallise par le refroidissement en aiguilles. L'autre se dépose en forme de poudre beaucoup moins soluble dans l'eau. Quand donc on recristallise dans un peu d'eau tiède le mélange des deux sels, — comme on l'obtient en évaporant la solution susdite — les aiguilles se dissolvent pres-

[1]) Mémoire cité.

[2]) Recueil des Travaux Chimiques des Pays-Bas, II, p. 317, III, p. 337.

Digitized by Google

que seules et se déposent de nouveau par le refroidissement. Une nouvelle cristallisation donne généralement un produit pur. L'analyse conduit à la formule $(C_9H_6Az \cdot SO_3)_2Ba + 9\,H_2O$ pour le sel séché à l'air. Il perd 7 molécules d'eau sur de l'acide sulfurique; les deux dernières molécules ne sont expulsées totalement que vers 200°.

I. 0.6369 grm. séchés à l'air perdirent sur de l'acide sulfurique 0.1127 grm., en chauffant à 230° encore 0.0312 grm. d'eau.

II. 0.5322 gr. séchés à l'air perdirent sur de l'acide sulfurique 0.0935 grm. en chauffant à 210° encore 0.027 grm. d'eau.

Calculé pour	Trouvé.	
$(C_9H_6Az \cdot SO_3)_2Ba + 9\,H_2O$.	I.	II.
$7\,H_2O = 17.6$	17.7	17.6
$2\,H_2O = 6.1$	6.—	6.2

I. 0.493 grm. du sel anhydre donnèrent 0.2067 grm. $BaSO_4$. (Le sel fut décomposé en le chauffant).

II. 0.3998 grm. donnèrent 0.1679 grm. $BaSO_4$. (Le sel fut traité avec de l'acide azotique suivant Carius dans un tube scellé. L'acide azotique fut éloigné en évaporant le contenu du tube à plusieurs reprises avec de l'eau et de l'acide chlorhydrique).

Calculé pour	Trouvé.	
$(C_9H_6Az \cdot SO_3)_2Ba$.	I.	II.
$Ba = 24.8$	24.6	24.7

Les analyses se rapportent à des sels de deux préparations.

L'isoquinoléine peut fixer quatre atomes d'hydrogène comme la quinoléine. On peut préparer la nouvelle base suivant le procédé recommandé par MM. Hoffmann et Koenigs [1]) dans leur mémoire sur la tétrahydroquinoléine. Ces savants dissolvent 1 part. de base dans 30 part. d'acide chlorhydrique concentré; ils chauffent au bain-marie en ajoutant peu à peu 3 à $3\frac{1}{2}$ part. d'étain granulé. On obtient un rendement un peu plus grand en chauffant doucement 1 part. d'isoquinoléine avec $3\frac{1}{2}$ part. d'étain et 12 part. d'acide chlorhydrique très-concentré jusqu'à ce que tout le métal soit dissout. Après avoir ajouté un excès de potasse, on dirige un courant de vapeur d'eau surchauffée à travers le liquide,

[1]) Ber. d. D. Chem. Ges. 16, p. 727.

Digitized by Google

tant que l'eau distillée réduit sensiblement une solution d'azotate d'argent. Un mélange d'isoquinoléine et de tétrahydroisoquinoléine passe avec l'eau; le résidu dans la cornue contient de petites quantités d'un produit organique en apparence amorphe, que nous n'avons pas étudié. Ce produit représente probablement une dihydroisoquinoléine, correspondant à la dihydroquinoléine, qui se forme en petite quantité quand on soumet la quinoléine à l'action du même mélange réducteur [1]).

On isole la *tétrahydroisoquinoléine* sous la forme du chlorhydrate. On ajoute au liquide distillé, dont nous venons de parler, un excès d'acide chlorhydrique et on l'évapore. Le résidu complètement sec est recristallisé dans de l'alcool absolu jusqu'à ce que le point de fusion du chlorhydrate se trouve à 195°—197°. Le sel forme de petites tablettes non hygroscopiques. Sa composition répond à la formule $C_9H_{11}Az$. HCl.

0.5828 grm. séchés à 100° donnèrent 0.4826 grm. AgCl et 0.007 grm. Ag.

Calculé pour $C_9H_{11}Az$. HCl.	Trouvé.
Cl = 20.9	20.9

La tétrahydroisoquinoléine, isolée de son chlorhydrate, est liquide; elle ne se fige pas à — 15°. Son odeur ressemble à celle de la base non hydrogénée. Elle bout à 232°—233° (non corrigé), donc à une température inférieure à celle du point d'ébullition de l'isoquinoléine [2]). L'analyse fournit les nombres suivants.

I. 0.2514 grm. donnèrent 0.7515 grm. CO_2 et 0.1896 grm. H_2O.

II. 0.255 grm. donnèrent 0.7632 grm. CO_2 et 0.1917 grm. H_2O.

III. 0.2890 grm. donnèrent $25\frac{3}{4}$ c.c. d'azote à $16\frac{1}{2}°$ et sous une pression de 767 mm.

Calculé pour $C_9H_{11}Az$.		Trouvé.		
		I.	II.	III.
C	81.2	81.5	81.6	—
H	8.3	8.4	8.4	—
Az	10.5	—	—	10.5

Les analyses se rapportent à des bases de deux préparations différentes.

La tétrahydroisoquinoléine absorbe l'acide carbonique de l'air en donnant un carbonate cristallisé. Elle est un peu soluble dans l'eau; la solution réduit l'azotate d'argent. L'acide azoteux la transforme en nitrosamine huileuse. Cette pro-

---

[1]) Hoffmann et Koenigs. Mémoire cité.

[2]) D'après MM. Hoffmann et Koenigs (Mémoire cité) le point d'ébullition de la tétrahydroquinoléine surpasse au contraire celui de la quinoléine.

Digitized by Google

priété rend probable pour la base hydrogénée une constitution analogue à celle de la tétrahydroquinoléine; un atome d'hydrogène se sera fixé sur l'azote.

La tétrahydroisoquinoléine forme des sels bien cristallisés. Nous avons déjà décrit le chlorhydrate. Le sulfate est assez soluble dans l'alcool. Le chloroplatinate forme des tablettes de couleur rouge-jaunâtre et dont le point de fusion fut trouvé à 231°—232°. Le sel semble se décomposer partiellement par la recristallisation dans l'eau chaude. Séché à l'air sa composition correspond à la formule $(C_9H_{11}Az \,.\, HCl)_2PtCl_4$.

0.6544 grm. donnèrent 0.1882 grm. Pt.

Calculé pour $(C_9H_{11}Az \,.\, HCl)_2PtCl_4$.	Trouvé.
Pt = 28.8	28.8

D'après les expériences que nous venons de communiquer, l'isoquinoléine présente la plus grande analogie avec la quinoléine. Sous un rapport seulement nous avons trouvé une différence essentielle. Tandis que les iodures quaternaires de la lépidine et de la quinaldine donnent avec les iodures de la quinoléine sous l'influence de la potasse des matières colorantes cristallisées, connues sous le nom de cyanines, ils ne semblent pas capables de former des corps analogues avec les iodures quaternaires de l'isoquinoléine (voir p. 104).

Plusieurs dérivés quinoléiques possèdent des qualités thérapeutiques. Il nous semble désirable d'étudier sous ce point de vue les dérivés correspondants de l'isoquinoléine. Quand nous pourrons disposer des quantités de base nécessaires, nous tâcherons de préparer ces corps.

Peut-être l'étude poursuivie des alcaloïdes naturels fera voir que des dérivés de l'isoquinoléine entrent dans la composition de quelques-unes de ces bases complexes, comme on l'a démontré depuis longtemps pour les dérivés de la quinoléine [1]).

Delft, Amsterdam, décembre 1886.

---

[1]) On peut s'assurer aisément que la quinoléine obtenue de la cinchonine ne contient pas la base isomère; quand on la traite par du permanganate de potassium l'acide phtalique ne se trouve pas parmi les produits d'oxydation formés.

Digitized by Google

SUR LA DÉTERMINATION DE LA DURETÉ DES MATIÈRES ROCHEUSES

PAR

TH. H. BEHRENS.

La dureté d'un minéral est une de ses marques distinctives qui mérite d'être considérée en première ligne tant à cause de son importance réelle que pour le peu d'embarras que coûte sa détermination.

En effet l'examen par rapport à la dureté exige si peu de temps et ses résultats méritent tant de confiance, qu'on n'a pas de peine à s'expliquer pourquoi on a tenté depuis longtemps de se servir de la même marque distinctive dans l'examen des matières rocheuses et cependant les difficultés qui se présentent à ce sujet ne sont pas à dédaigner. Quelques exemples suffiront pour donner une idée de leur importance.

Supposons qu'on ait affaire à un morceau de pierre lithographique ou de *cannelcoal*; dans ce cas la détermination de la dureté est assez facile. La méthode usitée de rayer l'objet à examiner par les minéraux qui font part de l'échelle de dureté de Mohs, nous donne tout de suite un chiffre déterminé exprimant la dureté relative du minéral. Il en est encore de même, quand on a sous la main une roche d'une structure crystalline grossière par exemple le granit, et dans ce cas on pourra encore se servir de la méthode usitée; seulement elle donnera trois chiffres distincts pour la dureté relative, selon qu'on a expérimenté sur le quartz, l'orthoclase ou le mica. Ainsi donc on déterminera la dureté des diverses matières intégrantes au lieu de celle qui appartient à l'espèce pétrographique.

Est-on en droit de considérer la valeur de cette dernière comme égale à la moyenne des valeurs obtenues pour la dureté des minéraux simples entrant dans la composition de la roche?

A coup sûr aucun expert ne donnera une réponse affirmative à cette question et cependant il est clair que la dureté de la matière rocheuse complexe

Digitized by Google

sera comprise entre les valeurs minimum et maximum exprimant la dureté des matières intégrantes.

Il pourrait sembler, au premier abord, que les roches microcristallines doivent offrir peu de difficultés sous ce rapport et cependant il en est tout autrement.

Quand on fait l'expérience avec un morceau d'orthoclase et de granit microcristallin, ils seront attaqués tous les deux.

En renversant l'épreuve de la dureté usitée, c'est-à-dire en usant des matériaux d'une dureté connue par la poudre de la matière rocheuse à examiner, on pourra obtenir la valeur maximum de la dureté du complexe; mais la dureté moyenne reste inconnue, ainsi que celle des diverses matières intégrantes, le minéral le plus dur excepté.

On rencontre des difficultés encore plus grandes dans l'examen des roches friables. Le charbon friable et le marbre de statuaire doivent être rangés déjà parmi les espèces qui donnent pour la dureté des valeurs peu précises. Mais comment déterminer la dureté d'un grès calcaire ou d'un grès argileux par exemple celle de *la pierre de la Rochette?* Cette matière est déjà rayée par le spath fluor et la valeur de la dureté est donc inférieure à 4; mais le spath fluor est attaqué fortement sous l'épreuve, d'où l'on tirerait la conclusion que sa dureté est supérieure à 4. Ici encore on reste dans l'ignorance complète quant à la dureté moyenne et pour la plupart il en est de même pour la dureté minimum.

On fera peut-être l'objection qu'il n'y a pas lieu de parler de la dureté moyenne d'une matière rocheuse, telle que nous en avons cité; et jusqu'à un certain point, quand on a affaire à un conglomérat très grossier comme la *nagelfluе*, je pourrais en convenir, mais dans l'emploi des grès d'un grain très fin pour des pierres de taille, pour des statues et pour des pierres à aiguiser la dureté moyenne joue un rôle si important à côté de la dureté maximum et minimum, que l'objection perd beaucoup de sa valeur.

On ne parviendra pas aisément à une solution complète et satisfaisante des problèmes que je viens de proposer et les communications que je vais faire dans les pages suivantes ne devront pas être considérées sous cet aspect; elles ne sont que la suite de quelques observations faites durant des recherches pétrographiques différentes.

Elles pourront peut-être avoir quelque utilité pour ceux qui voudront s'occuper de recherches scientifiques analogues aux miennes.

Digitized by Google

DÉTERMINATION DE LA DURETÉ DES PARTIES INTÉGRANTES.

La méthode usitée pour la détermination de la dureté ne peut pas être appliquée toutes les fois qu'on a affaire à des roches microcristallins et microporphyriques.

Parmi les minéraux faisant partie de l'échelle de Mohs, le quartz seul se prêterait à être brisé en de petits fragments aigus et aciculaires, et il est clair qu'on aurait besoin de pareils fragments aciculaires pour la détermination de la dureté à l'aide du microscope.

Cependant on peut se passer de cet instrument, quand on veut déterminer la dureté maximum en suivant la méthode indiquée ci-dessus, c'est-à-dire en usant des matières d'une dureté connue par la poudre de la substance à examiner, — méthode qui du reste est souvent appliquée pour arriver à un résultat plus concluant.

Après avoir trouvé deux minéraux se suivant dans l'échelle de dureté et dont l'un raie la roche à examiner, tandis que le second ne produit aucune impression, on tâche de rayer les minéraux de l'échelle par la substance en question. Pour le cas donné l'application de la méthode se fait en usant des matières d'une dureté connue par la poudre de la substance à essayer aussi grossière que le permet l'exiguité des cristaux microscopiques.

Quant au choix des substances qui seront soumises à cette expérience, on peut employer des lamelles de sel gemme, de gypse, de spath d'Islande, de spath fluor, d'orthoclase et enfin des plaques en verre.

L'orthoclase peut être remplacé au besoin par le verre à vitres et l'apatite par le verre à plomb. Au contraire les plaques métalliques ne sont pas recommandables, puisqu'elles acquièrent presque toujours un certain poli, ce qui rend incertain le résultat de l'épreuve.

Voici maintenant la manière d'opérer dans ce genre d'expériences. On étend un peu de la poudre sur la plaque au moyen d'un pinceau ou d'un morceau de papier mou et on le frotte sur la surface en se servant d'un morceau de bois, de zinc ou de plomb comme pilon, en prenant soin d'éviter tout mouvement rotatoire. L'emploi de l'eau mélangée à la poudre favorise l'attaque de la plaque d'épreuve, mais offre l'inconvenient de causer plus d'embarras par suite de la nécessité de nettoyer ou de rincer et de sécher la surface attaquée.

Quand on prend la couche de poudre très mince et qu'on arrête l'opération, dès que la plaque *commence* à se ternir, on obtiendra ordinairement de très bons résultats. La moindre quantité de quartz dans les gabbros et les diorites,

Digitized by Google

ou de grenat et de staurolithe dans les ardoises se trahissent par des rayures assez fortes, surtout quand on a expérimenté sur le verre.

Une autre méthode de recherche, qui mène au même résultat, m'a été suggerée par une observation qu'on fait souvent en taillant des plaques très minces pour l'examen au microscope. Quand on est occupé à achever le polissage des plaques, on s'aperçoit que quelques points ou quelques bandes à la surface commencent à devenir luisants et souvent on observe distinctement les contours nettement accusés de cristaux. On s'assure en outre sans beaucoup de peine que la transition de l'usure au polissage peut être obtenue à volonté en éloignant presque tout l'éméri de la plaque et en la mouillant abondamment d'eau. Il va sans dire que ce phénomène doit avoir une connexion intime avec des différences par rapport à la dureté des substances en contact.

Quant la dureté du feldspath est 6 et celle du quartz 7, on s'attendra à voir que ce dernier minéral sera le premier à prendre le poli et quand la dureté de l'augite est située entre 5 et 6, on présumera que celle-ci commencera à devenir luisante après le feldspath. Cependant il n'en est pas ainsi; on peut s'assurer que ce sont le quartz, le grenat et l'olivine qui commencent les premiers à prendre le poli; après quelque temps le phénomène se produit avec l'augite et peu de temps après avec le feldspath et l'amphibole. Cette méthode rend de très bons services, quand on veut reconnaître le quartz et l'olivine. Cette dernière espèce se distingue du quartz, parce qu'elle se ternit après avoir été exposée pendant quelques instants à l'action de l'acide chlorhydrique concentré.

Les tentatives faites dans le but de donner une plus ample application à la méthode décrite, n'ont pas mené à un résultat satisfaisant. Le cuivre et le plomb ne sont pas très propres au polissage, et la nature du métal qui entre dans la construction de la plaque à user, ne joue qu'un rôle très secondaire.

On doit attacher plus d'importance au choix de la poudre à polir, mais ni la grosseur des grains ni la dureté de la substance n'ont une influence si prépondérante qu'on aurait réussi à trouver des matières qui puissent servir à polir exclusivement le quartz, la tourmaline et le corindon. En employant la poudre de ce dernier minéral, on réussit à la longue à polir le feldspath non seulement en opérant sur une plaque de fer, mais même quand celle-ci est en cuivre, pourvu qu'on la mouille largement d'eau.

Les plaques métalliques et la poudre à user peuvent être remplacées par des pierres à aiguiser; les grès d'un grain très fin peuvent servir à polir même le sel gemme; on ne prend que très peu d'eau ou s'en passe totalement. On s'aperçoit pendant l'opération que la cause de l'apparition locale du lustre est située dans l'existence d'un certain *relief*, qui se trahit bien distinctement,

Digitized by Google

quand pendant l'usure la grosseur des grains d'éméri correspond à la résistance de la roche. La poudre d'éméri trop grossière offusque les contours et un polissage trop prolongé n'a d'autre effet que d'amoindrir le *relief*, jusqu'à ce qu'il disparaît tout-à-fait et que la surface totale devient luisante.

Quand on a pour but de déterminer la dureté de plusieurs parties constituantes d'une roche, on commence par polir la surface totale d'une lame de la matière, en se servant à cet effet d'un grès assez fin, d'une pierre à aiguiser turque ou même d'une plaque en fer. L'expérience se fait à la lumière incidente et à un grossissement de 50 à 100 fois. On se sert de forts oculaires et on obtient par là des distances focales de 2 à 3 centimètres qui permettent d'opérer avec les aiguilles à essai entre l'objectif et la substance à examiner. Quant à la construction des aiguilles on ne pourra y employer d'autres matériaux que des métaux puisque la première condition à remplir c'est de voir distinctement le point de contact sur la plaque d'essai et à cet effet les aiguilles doivent être assez minces et effilées.

Après plusieurs essais infructueux je me suis arrêté à la série suivante d'aiguilles à essayer:

Dureté 1. Le plomb mou.
1,5. L'étain.
2. Le plomb dur ou l'étain ferrifère.
2,5. Le zinc laminé.
3. Le cuivre jaune ayant passé la filière (on peut se servir d'une épingle; le cuivre rouge martelé a une dureté un peu plus grande, c'est-à-dire de 3.1—3.2).
3,5. Le fer dur (un clou d'épingle).
4. L'acier (une aiguille à coudre) chauffé jusqu'au point où elle prend la couleur jaune du 4me ordre.
4,5. Une aiguille à coudre portant la couleur verte du 3me ordre par l'effet du chauffage.
5. Une aiguille à coudre chauffée jusqu'à ce qu'elle prenne la couleur bleu-foncée du 2me ordre.
5,5. Qualité supérieure d'aiguilles.
6. L'acier des outils servant à perforer le fer, trempé dans l'acide sulfurique dilué, puis adouci jusqu'à ce qu'il prenne la couleur jaune pâle du premier ordre.
6,5. Le même acier non adouci.

Digitized by Google

La dureté du plomb, contenant de l'antimoine dépend à un haut degré de la structure; c'est pourquoi il faut faire un choix parmi plusieurs échantillons en les rayant par un morceau de sel gemme. On les taille par la scie en forme de bâtons qu'on façonne à la lime.

C'est pour la même raison qu'il faut marteler l'étain et le cuivre avant d'en faire usage.

A cet état le cuivre rouge est un peu plus dur que le laiton. Sur ce point MM. Calvert et Johnston sont arrivés à un résultat tout contraire, mais probablement il faut attribuer ce désaccord à des différences de structure.

Les aiguilles d'épreuve servant à déterminer une dureté allant de 4 à 7, sont toutes fabriquées en acier; il est assez facile de les ajuster, si l'on a eu la précaution pendant l'adoucissage de chauffer la pointe à la température la plus élevée.

On procède à l'aiguisage en faisant de temps en temps une épreuve quant à la dureté, jusqu'à ce qu'on ait atteint la dureté requise. Pour les aiguilles les plus dures le degré de chaleur appliqué pour la trempe est d'une importance prépondérante; en effet si l'on n'a pas atteint la température requise, on n'obtient pas la dureté voulue, tandis que par l'effet d'une chaleur trop grande le métal devient cassant. Je ne doute pas que les aciers les plus durs employés dans la confection des outils, — l'acier contenant du chrome ou du tungstène — puissent par un traitement convenable égaler le quartz en dureté.

L'emploi des pointes métalliques est en quelque sorte incommode, parce qu'elles font des traits, quand elles ne sont pas beaucoup plus dures que l'objet à examiner, c'est pourquoi il faut éviter de rayer par un mouvement de va et vient reitéré, d'autant plus qu'on a beaucoup plus d'intérêt à savoir ce qui se passe à l'extrémité rayante de l'aiguille qu'à considérer la nature de la raie produite derrière la pointe elle-même. Pour cette raison et afin de pouvoir mieux juger de l'effet que la pointe produit sur le minéral on fera bien de pousser l'aiguille en avant au lieu de la tirer en arrière et par conséquent on la mouvra dans un sens contraire à celui qu'on parcourt ordinairement dans les épreuves de dureté.

Les minéraux ductiles, comme le cuivre natif et le chlorure argentique forment une petite bosse au devant de l'aiguille; ceux qui sont peu fragiles, comme le gypse et la serpentine produisent un petit monceau de poudre, tandis que des minéraux comme la blende et le feldspath donnent des éclats fuyant avec une certaine vitesse.

Le juste degré de polissage est de même d'une importance réelle pour l'exécution facile de l'épreuve; en effet on obtient de forts traits métalliques sur des plaques un peu ternes, tandis qu'au contraire on s'expose à glisser sur des sur-

Digitized by Google

faces trop lisses et trop luisantes et à se tromper quant à la dureté de plus d'un demi-degré de l'échelle.

La méthode de recherche, que je viens de décrire, m'a rendu entre autres d'importants services dans l'examen des grès et des ciments.

Dans plusieurs grès appartenant aux formations triassiques et jurassiques et venant des frontières du Luxembourg et de la Prusse, le ciment montrait une mollesse remarquable, et il en était de même du grès triassique très compacte d'Oeynhausen, connu sous le nom de *Weser Sandstein* (grès du Weser). Le grès liassique de Romelange (dans le Luxembourg) consiste en majeure partie de fragments de coquilles et d'un ciment très calcifère; on n'y observe que peu de grains quartzeux; la dureté des coquilles est de 3 et celle du ciment varie de 1.5 à 2.

La pierre de la Rochette, qui est d'un usage assez étendu, est de même un grès calcaire, mais contenant beaucoup de grains quartzeux assez gros et tant soit peu anguleux; le ciment, qui apparaît çà et là sous la forme de mouchetures, a la dureté de 1.5. La pierre de Bollendorf, qu'on confond parfois avec celle de la Rochette, ne contient pas de chaux (c'est du grès Keupérien), elle est encore plus riche en quartz que l'espèce précédente; la dureté du ciment argileux est de 1.2.

Quant au grès bigarré rouge-brun d'Oeynhausen, employé fréquemment jadis dans le Nord de l'Allemagne et dans notre pays dans la construction des pavés, il contient beaucoup plus de ciment; celui-ci est exempt de chaux argileuse, riche en écailles de mica et d'une dureté allant jusqu'à 2.

La solidité extraordinaire de cette roche doit être attribuée sans doute à la forme des grains quartzeux, qui consistent en des écailles à contours aigus, rappelant celles du silex ou pierre pyromaque et ne se montrent pas sous l'aspect de morceaux polygonaux ou arrondis.

La brique ordinaire (briques du Waal) est très poreuse; sa surface usée ressemble au premier abord à celle du lava rouge; la matière contient beaucoup de quartz sous forme de grains tant soit peu arrondis; la masse fondamentale rouge a une dureté 2; les taches jaunâtres, qui y sont distribuées en assez grand nombre ont une dureté un peu plus grande, c'est à dire de 2.5.

Les briques dures comprimées fabriqués par M. VAN Loo à Bemmelen sont beaucoup moins poreuses et contiennent beaucoup moins de grains quartzeux; la dureté de la masse rouge-brun fondamentale est de 5; celle des tâches et des veines jaunes de 2.5.

Le mortier fabriqué de trass véritable montre des morceaux d'augite et de feldspath (dureté relative 6 et 5.7), puis des raies grises de pierre ponce d'une dureté de 2.5 et une masse fondamentale gris-jaunâtre, dont la dureté atteint

Digitized by Google

à peine le chiffre 1.5; les taches de chaux non mélangée qui se trouvent çà et là, ont une dureté inférieure à 1.

Le ciment fabriqué avec le trass sauvage, durci sous une pression convenable, contient des fragments de pierre ponce un peu plus molle (dureté = 1.8); le ciment de Portland montre des éclats noirs d'une densité de 6 et plusieurs fragments jaunes et jaune-brunâtres d'une densité de 4—5. Quant à la dureté de la masse fondamentale grise tachetée en jaune, six mois après la confection du mortier elle était de 2.5—2.7.

Cinq des plaques examinées furent impregnées pendant 72 heures d'une solution de verre soluble (1 partie de verre soluble à base de soude et 2 parties d'eau), puis légèrement rincées, séchées à l'air et examinées de nouveau.

En général la dureté avait beaucoup augmenté. En effet on trouva pour la dureté de la masse fondamentale:

dans le grès de la Rochette 2.5 au lieu de 1.5 (observée avant l'expérience); dans le grès de Bollendorf 2.7 au lieu de 1.2;

dans le grès de Romelange 3.2 au lieu de la moyenne 1.8; dans le trass 2.5 au lieu de 1.5.

Le ciment-Portland seul faisait exception; car la dureté de 2.7 n'avait subi aucun changement.

DÉTERMINATION DE LA DURETÉ MOYENNE.

La dureté des parties constituantes du granit — du quartz, de l'orthoclase et du mica — est de 7, 6 et 2.5. Si ces minéraux paraissaient sur une section de la roche avec des surfaces égales et étaient solidement liés entre eux, on pourrait prendre pour la dureté moyenne de la roche la moyenne des duretés des parties constituantes. Mais il est clair qu'on ne trouvera jamais ces deux conditions remplies, et l'on est arrêté ici par deux difficultés, dont la première peut être évitée par une intégration mécanique à l'aide de la balance.

Au lieu de rayer la roche par quelques minéraux définis, on soumet une surface un peu étendue de celle-ci pendant quelque temps à l'action d'un minéral beaucoup plus dur que la partie composante la plus dure de la roche à examiner et on détermine le poids de la substance enlevée.

Cette recherche peut être exécutée de diverses manières. En premier lieu on peut comparer les espaces de temps nécessaires pour enlever un même poids de

Digitized by Google

matière à diverses roches; en second lieu on peut déterminer la perte essuyée par deux roches diverses par la même opération et dans le même espace de temps; enfin on peut enlever la matière de diverses manière c'est-à-dire par un procédé d'usure, de rabotage, de tournage ou de forage.

La méthode indiquée en premier lieu, consistant à mésurer le temps nécessaire à produire la même perte en matière, est sans doute la plus simple mais par contre elle ne donne qu'une valeur très approximative pour la dureté. Elle se présente involontairement à l'esprit en taillant des plaques de diverses roches pour l'examen à l'aide du microscope; en effet on s'aperçoit tout de suite que le temps exigé pour produire le même effet varie dans des limites assez étendues, de 20 minutes à 3 heures par exemple, mais ce qui en même temps a de quoi étonner, c'est que les minéraux et les roches qui présentent la même dureté en les rayant par des substances définies, se comportent de la manière la plus divergente pendant l'usure. Le calcédoine et la pierre à fusil par exemple exigent un temps double de celui qu'on met à user le quarz; la néphrite demande un temps quadruple en comparaison de l'orthoclase et le rapport des espaces de temps nécessaire à user à un même degré le gabbro à saussurite et le gabbro à labradorite est environ de 3 : 1.

Les faits cités, observés par expérience mènent à supposer que, quand on enlève la matière d'un minéral quelconque par le procédé d'usure, on n'a pas seulement affaire à la dureté, mais encore à d'autres facteurs distincts.

Dans la plupart des manuels de minéralogie ou de pétrographie on émet l'idée que la résistance à l'usure est identique à la dureté de la matière, quand celle-ci est rayé par une substance quelconque. Je me permettrai de citer quelques exemples à l'appui de cette assertion.

MM. Naumann et Zirkel donnent la définition suivante de la dureté [1]): „Par la dureté d'un corps solide on entend la résistance qu'il oppose à la „séparation de ses particules"; plus loin les auteurs nommés [2]) conseillent de déterminer la dureté non seulement par la rayure, mais encore en l'attaquant à la lime, c'est-à-dire par un procédé d'usure.

M. Kenngott s'engage encore plus loin dans la même voie. Selon cet auteur la dureté d'un minéral est: „la résistance qu'il montre quand on veut le couper „ou rayer avec le couteau, quand on l'attaque par la lime, ou quand on l'use „pour quelque but pratique [3])".

---

[1]) Naumann, Elemente der Minéralogie 10e Aufl. S. 125.

[2]) Ibid. S. 126, 127.

[3]) Handwörterbuch der Mineralogie. Bd I. S. 165.

Digitized by Google

Chez M. GROTH nous rencontrons une définition plus restreinte; en effet il entend sous le terme *dureté* „la résistance qu'oppose la surface d'un cristal à „la rayure par un corps plus dur [1])". Il est clair que ces termes n'impliquent pas nécessairement la perte par usure.

Pour approfondir ces contradictions par la voie expérimentale, on peut consulter des faits tirés de la technologie et surtout de la technologie des métaux. Selon MM. CALVERT et JOHNSTON la fonte est plus dure que le fer malléable et même que l'acier. Quand on exprime la dureté de la fonte par le chiffre 1000, celle de l'acier suivant les auteurs nommés, est représentée par 958, celle du fer malléable par 948 et celle du cuivre par 301. Les expériences furent exécutées par un sklérométre dont la pointe d'acier était chargée d'un poids.

Si nous écartons les données concernant l'acier et la fonte, comme des substances métalliques d'une composition variable et douées de propriétés peu constantes, on ne peut jusqu'à ce jour donner une explication satisfaisante du fait que le cuivre est beaucoup plus difficile à limer, à façonner au tour et à polir que la fonte et pour le moins aussi difficile à travailler que le fer malléable. Cette question sans doute a un rapport intime avec l'application générale du cuivre rouge et du fer doux dans le polissage et le sciage du verre et des pierres.

Suivant le résultat des expériences citées au chapitre précédent, la dureté du laiton, déterminée par le rayage, est environ la même que celle du cuivre rouge; suivant MM. CALVERT et JOHNSON ce dernier métal est le plus mou des deux. Mais une sciotte en laiton produit beaucoup moins d'effet et néanmoins elle n'exige que la moitié du temps pour être usée qu'une sciotte en cuivre rouge et quiconque a eu à s'en occuper saura que le laiton est beaucoup plus facile à travailler au ciseau et au perçoir que le cuivre rouge.

Pour façonner le laiton au tour on emploie des ciseaux dont le tranchant forme un angle presque droit avec ses faces et on place l'instrument un peu au-dessus du plan horizontal passant par le centre de la pièce d'œuvre; quand au contraire on a affaire au cuivre rouge et au fer malléable, le tranchant de l'instrument doit être beaucoup plus effilé et doit être placé à un niveau beaucoup plus élevé, de telle sorte que la tangente au point de contact tombe environ dans le prolongement du ciseau. Si l'on agit de la même manière qu'avec le laiton, on éprouve une résistance assez forte; le tour commence à vibrer et la surface de la pièce d'œuvre devient rugueuse et se couvre de raies ternes tant soit peu raboteuses.

---

[1]) Physikalische Krystallographie. S. 7.

[2]) NAUMANN loc. cit. S. 127.

Digitized by Google

Ce résultat de l'expérience et le fait que des copeaux de fer et de cuivre rouge montrent un raccourcissement considérable en comparaison de la pièce d'œuvre et qu'on y distingue à la loupe une surface supérieure fortement rugueuse, démontrent que le haut degré de malléabilité et d'élasticité de la pièce d'œuvre et de l'outil y jouent un rôle considérable.

L'influence de l'élasticité se manifeste au plus haut degré dans le travail du caoutchouc. Le produit le plus dur préparé de cette matière, l'ébonite, peut être sans peine scié, limé, poli et travaillé au tour et sous ce rapport égale le bois de palissandre et d'ébène. Au contraire le caoutchouc le plus mou ne se prête nullement à ces manipulations. La pièce d'œuvre, en effet, n'est pas attaquée du tout; il en est de même quand on tâche d'enlever la matière par l'usure; on n'atteint d'autre effet que le déchirement de la masse en lambeaux irréguliers aux frais d'un travail énorme.

Pour pouvoir couper le caoutchouc on doit éviter l'adhérence à l'outil en mouillant celui-ci et en outre il faut que le couteau soit très aigu ou soit passé avec grande rapidité par la masse. Ici apparemment la résistance contre l'effleurement est produite par l'extensibilité et l'élasticité extrêmes de la matière.

On peut faire des observations pareilles dans le traitement de la colle. La colle sèche se comporte comme l'ébonite, elle acquiert même parfois une dureté encore plus grande. Une teneur en eau de 50 à 60 p.C. la rend flexible et élastique à un très haut degré; dans cet état elle présente, quant à la résistance contre l'usure, toutes les allures du caoutchouc mou, quoique son extensibilité soit beaucoup plus petite. Les facteurs qui sont en jeu dans ce cas concret, sont la flexibilité et l'élasticité. La matière flexible enveloppe les grains de la poudre à user et même le fil d'un couteau assez tranchant, sans que la continuité de la matière soit rompue et par l'effet de son elasticité elle reprend aussitôt sa position primitive derrière la pointe ou le tranchant de l'outil.

Les métaux qui sous le rapport de la limite de l'élasticité, viennent après le caoutchouc, mais dont la surface montre du reste un pouvoir adhésif semblable, manifestent distinctement sous les mêmes circonstances le phénomène connu sous le nom *d'écoulement des solides*. Les particules glissent l'une par dessus l'autre sans jamais cesser d'adhérer. Le métal s'étend comme si l'on avait affaire à un liquide très visqueux. A mesure que l'outil est moins tranchant et que les grains de la poudre à user sont moins aigus la pression nécessaire à faire pénétrer la masse et à amener ainsi la séparation des particules sera plus grande.

Je cite comme exemples de matériaux d'une flexibilité et d'une malléabilité extraordinaire les métaux qu'on peut perforer à l'aide du poinçon et comme exemple d'une élasticité de grande amplitude le caoutchouc, qui offre une résistance si

Digitized by Google

grande qu'on ne peut le découper par le ciseau à moins que le tranchant ne soit presque en contact avec le bois qui sert de support.

Il est clair que, quand ces sortes de matériaux sont travaillés au tour, les propriétés décrites provoquent une vibration intense du banc de tourneur.

Il ressort de tout ce que nous avons avancé que la malléabilité, la flexibilité et une grande amplitude de l'élasticité peuvent remplacer la dureté dans l'opération du polissage, quoique ces propriétés soient du reste d'un ordre tout différent dans l'acception usitée du mot. Il en est tout autrement du coefficient d'élasticité.

Les substances dont le coefficient d'élasticité est très grand, sont à l'ordinaire très dures et la pression nécessaire à faire pénétrer un corps aigu dans une substance élastique est proportionelle au coefficient nommé.

Il saute aux yeux que dans une matière dont l'élasticité est une des propriétés principales, comme l'acier et le caoutchouc, on a avant tout affaire à une courbure élastique. Nous montrerons dans la suite qu'il en est de même des substances fragiles.

Le maximum de résistance contre l'usure se trouvera dans les matériaux qui ont en même temps un coefficient d'élasticité considérable et une grande amplitude d'élasticité. Cette thèse cependant n'est applicable qu'au cas où on a affaire à une matière homogène et à des pointes inaltérables, deux conditions qui ne se trouvent remplies qu'approximativement et encore dans quelques cas exceptionnels.

Quand la matière à rayer a un coefficient d'élasticité à peu près égal à celui de la pointe, elles subiront toutes les deux une déformation par suite de la pression qu'on applique à cette dernière. Ceci a pour effet d'étendre le plan de contact et de diminuer la pression sur l'unité de surface. Si le corps à rayer n'est pas homogène celui-ci commencera à vibrer et quand on a affaire à un corps fragile les vibrations amèneront le désagrègement des particules plus dures. Voilà à mon opinion l'explication de la manière toute différente dont se comportent le calcédoine et le quartz, la saussurite et le labrador.

Les corps amorphes pourront en général atteindre une homogénéité beaucoup plus grande que les corps cristallins, c'est pourquoi ils pourront prendre par le travail mécanique un poli beaucoup plus parfait que ces derniers. Cependant la manière dont se comporte la poudre à polir joue un rôle considérable dans cet ordre de phénomènes.

Une partie des grains ou des éclats adhère temporairement à la plaque; ces grains agissent pour rayer ou raboter, comme la pointe d'un ciseau ou comme les pointes des minéraux dont on se sert dans la détermination usitée de la dureté. Ce sont eux qui font la plus grande partie du travail.

Digitized by Google

La plupart des grains est en mouvement et ce mouvement est glissant ou roulant selon leur forme. Les grains glissants exécutent une action rayante des deux côtés, tant sur la plaque que sur l'objet à polir, action d'un effet amoindri, tandis que les grains roulants qui forment souvent la majorité, comme dans le sable des dunes et dans quelques espèces d'éméri agissent par un travail de morcellement et produisent très peu d'effet sur des surfaces unies et homogènes.

Citons à l'appui de ce que je viens de dire, ce qu'on observe en entamant un morceau de vitre par le sable des dunes.

Quand on frotte l'une contre l'autre sous une pression de 25 grammes par centimètre carré deux plaques de vitre séparées par une mince couche de sable sec et qu'on examine à la loupe la surface entamée après deux minutes de travail, on observera à peine une raie distincte, mais au contraire quantité de petits points ternes, et de fossettes peu profondes à bords éraflés. Si l'on continue le travail, le nombre des mouchetures va toujours en augmentant, jusqu'à ce que la plaque a enfin pris le grain terne du verre mat. On ne trouve que peu de véritables raies et le travail n'avance que lentement même sous une pression de 100 grammes par centimètre carré. On opère avec plus de succès et on produit beaucoup plus de raies en favorisant l'adhésion des grains par l'addition d'eau et surtout en remplaçant un des morceaux de vitre par une plaque métallique. Le cuivre produit beaucoup plus d'effet que le fer, le plomb a un effet presque égal à celui du cuivre mais produit plus de raies, conformément aux considérations développées aux pages précédentes [1]).

Le verre s'use plus vite après que sa surface s'est amatie et on se convainct aisément par l'ouie et le toucher que la poudre à user attaque plus énergiquement la matière. C'est ainsi que le morcellement du verre et de la poudre tous les deux, joue un rôle important. Les grains de sable s'encaissent dans les fossettes et brisent le verre situé entre deux fossettes voisines ou bien ils se brisent eux-mêmes; dans ce dernier cas les éclats agissent sur le verre en le rayant. Un phénomène analogue s'observe parfois dans la détermination usitée de la dureté ou quand on écrit sur le verre avec le diamant; on se convainct aisément qu'il faut une pression beaucoup plus grande et une pointe beaucoup plus aiguë pour attaquer une surface luisante et polie qu'une surface mate.

---

[1]) Citons à ce sujet deux faits tirés de la technique, l'emploi du poix dans le polissage des verres optiques et l'usage des disques cannelés en fer doux, impregnés de poudre de diamant dans le façonnage et le polissage des diamants. Dans le premier cas on a pour but d'empêcher les grains de la poudre à polir de rouler, ce qui nuirait à la forme précise des faces; au second cas on a en vue de produire un maximum d'effet avec une certaine quantité de la poudre de diamant précieuse.

Digitized by Google

C'est surtout en écrivant sur le verre que le phénomène est très saillant.

Remarquons maintenant que le calcédoine prend toujours un poli plus parfait que le quartz et ce fait, à mon opinion, explique pourquoi le premier minéral s'use moins facilement par le polissage que le second. Le lisse plus parfait de la surface polie doit être attribué non seulement à l'absence de structure cristalline, mais aussi à une fragilité peu considérable; citons à l'appui de cette assertion que le verre et l'obsidienne ne prennent pas un poli plus parfait que le feldspath, mais qu'il en est bien ainsi de la porcelaine, matière beaucoup moins fragile que le verre.

J'ai tâché de contrôler cette théorie de diverses manières par des expériences sur des roches différentes, c'est-à-dire en les usant, en les travaillant sur le tour par le diamant (manipulation analogue à celle qu'à exécutée M. Pfaff d'Erlangen dans la détermination de la dureté des minéraux en les rabotant par le diamant sur un petit établi) et en observant le degré d'affaissement.

Pour user le minéral j'ai suivi deux manières différentes. Tantôt l'objet fixé au fond d'un bacquet chargé de poids était frotté contre un plan de fonte par un mouvement de va-et-vient rectiligne et avec une vitesse de 1 mètre par seconde; tantôt l'objet était pressé à l'aide d'un levier, chargé de poids contre la périphérie d'un disque en fonte, tournant avec une vitesse de 3 mètres par seconde. Dans les deux cas l'expérience durait dix minutes.

Afin de déterminer l'influence de la dureté de la poudre à user, j'employais tantôt l'éméri, tantôt le sable de mer.

L'attaque des plaques sur le tour que j'ai déjà décrite dans une note préliminaire envoyée à l'académie des Sciences des Pays-Bas fut d'abord appliquée à la préparation de plaques minces servant à l'examen au microscope. Plus tard j'ai pu me convaincre que cette méthode n'a aucun avantage sur les méthodes pour l'usure des minéraux que je viens de décrire que dans les cas où l'on a affaire à des minéraux très durs.

On se sert en guise de ciseau d'un morceau tant soit peu piramidal de diamant noir (ainsi nommé carbon ou carbonado) dont le tranchant est large de 3 mM.; il est solidement enchassé dans un gros boulon en fer malléable, on lui communique un mouvement de va-et-vient devant l'objet à travailler et on le presse contre celui-ci au moyen d'un support à vis. La matière à travailler est donc enlevée suivant des lignes spirales, qui s'approchent tour à tour du centre et de la périphérie de l'objet. Les particules de la matière peuvent donc s'écarter librement dans une direction latérale, tandis que en rayant une face polie les molécules ne peuvent se transporter que dans la direction de la surface.

Digitized by Google

Il s'ensuit que le travail au tour a quelque analogie avec le rayage, mais en même temps avec l'usure d'une surface granuleuse.

A la rigueur les deux opérations, l'enlevage de la matière au tour et par l'usure, devraient s'exécuter au moyen d'un moteur mécanique; mais à mon regret je n'avais pas à ma disposition les instruments requis. C'est pourquoi le travail au tour fut réglé autant que possible de la même manière que le procédé d'usure sur la roue, c'est-à-dire que l'objet fut attaqué pendant dix minutes avec une vitesse du volant d'un mètre par seconde ce qui équivaut à cinq révolutions de l'objet à préparer, la surface de celui-ci étant toujours de la même grandeur de 10 centimètres carrés et autant que possible de la même forme, condition aisée à remplir pour les opérations faites sur le tour. Les faibles différences dans les dimensions et dans la forme n'ont aucune influence réelle sur le résultat des expériences d'usure, parce que, quand la surface s'agrandit, le nombre des grains de sable ou d'éméri augmente à mesure que la pression par unité de surface diminue et que les grains pénètrent moins profondément dans la matière à user.

Afin de savoir à quel point les résultats obtenus méritaient confiance, je répétai deux ou plusieurs fois quelques expériences avec les mêmes objets et sous la même pression. Voici les résultats obtenus:

TRAVAIL AU TOUR.

Orthoclase	2.05	2.09
Porphyre quartzeux	1.55	1.60

Différence entre deux résultats divers 2 à 3 p.C.

USURE SUR LA ROUE TOURNANTE.

Charge de 2 kilogr.	Basalte	3.5	3.6
„ „ 0.5 „	Calcaire carbonifère	3.1	3.2
„ „ 0.5 „	Diorite quartzeuse	0.68	0.72

Différence entre deux résultats divers 3 à 5 p.C.

USURE SUR LA PLAQUE DE FONTE.

Charge de 0.5 kilogr.	Diorite quartzeuse	0.6	0.7

Différence entre deux résultats divers 14 p.C.

Je me permets maintenant de communiquer les résultats finaux de mes expériences obtenus avec des échantillons de divers minéraux, ayant une surface d'environ 10 centimètres carrés.

Digitized by Google

PERTE EN POIDS PAR LE TRAVAIL AU TOUR.

Calcédoine	0.57 Grammes.
Quartz, section transversale	1.09 „
„ section longitudinale	0.50 „
Quartzite	2.10 „
Basalte (pavé)	1.95 „
Diorite quartzeuse de Quénast	1.46 „
Porphyre de la Bergstrasse	1.01 „
Méme roche, un peu effleurie	1.60 „
Porphyre vitreux de Denver	1.05 „
Rétinite de Meissen	1.02 „
Rétinite friable d'Arran	3.52 „
Orthoclase, facette terminale	2.05 „
„ facette de l'orthopinacoide	1.55 „
Calcaire carbonifère (petit granit de l'Ourthe)	7.00 „
Granit	0.9—1.3 „

PERTE EN POIDS PAR L'USURE EN EMPLOYANT DE L'ÉMÉRI.

	1.) *Sur la roue tournante.*		2.) *Sur la plaque.*
	Charge de 2 kilogr.		Charge de 2 kilogr.
Calcédoine	0.175	Grammes.	—
Quartz, section transversale	0.62	„	—
Roche de Quénast	3.3	„	—
Basalte	3.4	„	—
Rétinite de Meissen	3.9	„	—
Porphyre de la Bergstrasse	4.7	„	3.0 Grammes.
	Charge de 1 kilogr.		Charge de 1 kilogr.
Basalte	—		0.9 Grammes.
Quartzite	—		1.2 „
Calcaire	—		3.1 „
	Charge de 0.5 kilogr.		Charge de 0.5 kilogr.
Roche de Quénast	0.7	Grammes.	0.5 Grammes.
Basalte	0.8	„	—
Calcaire	3.1	„	3.3 „
Brique dure	8.2	„	—

Digitized by Google

PERTE EN POIDS PAR L'USURE EN EMPLOYANT DU SABLE.

	1.) *Sur la roue.*	2.) *Sur la plaque.*
	Charge de 2 kilogr.	Charge de 2 kilogr.
Diorite de Quénast	1.9 Grammes.	1.2 Grammes.
Ébonite	0.3 „	—
Caoutchouc mou	0.1 „	—
	Charge de 1 kilogr.	Charge de 1 kilogr.
Diorite de Quénast	—	0.5 Grammes.
Basalte	—	0.6 „
Calcaire	—	3.1 „
Ciment Portland	—	14.8 „
Trass	—	37.0 „
Ébonite	—	0.2 „
Caoutchouc mou	—	0.06 „
	Charge de 0.5 kilogr.	Charge de 0.5 kilogr.
Calcaire	—	1.1 Grammes.
Grès de la Rochette	—	4.6 „
Grès de Bollendorf	—	7.8 „

En prenant pour unité le quartz et en exprimant par le chiffre 100 la perte en poids que subit ce minéral quand on l'attaque par la section transversale, on obtient les chiffres suivants par la réduction des résultats obtenus :

1). PERTE EN POIDS PAR LE TRAVAIL AU TOUR.

Quartz, section longitudinale	46 Grammes.
Calcédoine	51 „
Porphyre de la Bergstrasse	93 „
Rétinite de Meissen	94 „
Porphyre de Denver	96 „
Quartz, section transversale	100 „
Diorite de Quénast	134 „
Orthoclase, face de l'orthopinacoide	142 „
Porphyre, quelque peu effleuri	147 „
Basalte de Schandau	179 „
Orthoclase, face du pinacoide basique	189 „
Quartzite	193 „
Rétinite d'Arran	323 „
Calcaire	642 „

Digitized by Google

2). PERTE EN POIDS PAR L'USURE EN EMPLOYANT L'ÉMÉRI.

Charge de 2 kilogr.

Calcédoine	29	Grammes.
Quartz	100	„
Roche de Quénast	532	„
Basalte	565	„
Rétinite	628	„
Quartzite	753	„
Calcaire	2357	„
Brique dure	6445	„

3). PERTE EN POIDS PAR L'USURE EN EMPLOYANT LE SABLE.

Charge de 1 kilogr.

Roche de Quénast = 100.

Caoutchouc mou	12	Grammes.
Ébonite	40	„
Roche de Quénast	100	„
Basalte	120	„
Calcaire	620	„
Grès de la Rochette	2604	„
Ciment Portland	2960	„
Grès de Bollendorf	4402	„
Mortier de trass	7409	„

J'aurais pu allonger ce tableau, mais les chiffres communiqués suffisent pour démontrer ce que j'avais en vue et ce que je vais formuler succinctement:

1°. Il est évident, d'après les résultats communiqués, qu'on n'a aucune raison valable pour identifier la dureté moyenne des minéraux avec leur résistance à l'usure. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à comparer la perte en poids, essuyée par le calcédoine, le quartz et la quartzite, le basalte et la quartzite, le calcaire et la brique qui le surpasse en dureté (dureté = 5), enfin le basalte et l'ébonite.

L'appareil de M. le Prof. Pfaff, machine à raboter en miniature à ciseau de diamant, n'a par conséquent aucune utilité pour déterminer la dureté d'un minéral dans l'acception ordinaire du mot.

2°. Le rabotage, l'attaque au tour et le forage au moyen du diamant ne

Digitized by Google

sont non plus des moyens propres à donner une notion exacte de l'usure que subissent les roches dans leur emploi comme matériaux de construction. Dans le premier tableau le porphyre et la rétinite de Meissen occupent une place supérieure à celle de la diorite quartzeuse de Quénast et même du quartz, tandis qu'au contraire dans le second tableau la rétinite vient encore après le basalte.

3°. Quand on emploie une poudre à user relativement dure, on obtient des résultats relativement moins divergents, parce qu'elle attaque énergiquement les roches dures aussi bien que les substances plus molles. Cette influence de la poudre à user se montre clairement quand on compare les pertes en poids du calcédoine et du quartz dans le premier tableau (1 : 2) et dans le second tableau (1 : 3—5) et de même celles de la diorite de Quénast et du calcaire d'Escaussines dans le deuxième (1 : 4,4) et le troisième tableau (1 : 6.2).

Dans les tableaux précédents on a inscrit des valeurs pour la perte en poids sous l'action de l'éméri et sous celle du sable. La comparaison de ces chiffres nous apprend que la dureté plus grande de l'éméri ne se fait pas valoir dans l'attaque des roches les plus molles. En effet, les pertes en poids, essuyées par la diorite de Quénast par l'usure sur la roue tournante, était de 3.3 en employant de l'éméri et de 1.8 en employant du sable. Le basalte, plus mou, donna dans ces circonstances sous une charge de 1 kilogr. les chiffres 0.9 et 0.6 et enfin le calcaire perdit 3.1 gr. de matière par usure sur la plaque sous une charge de 1 kilogr. indifféremment pour l'emploi de l'éméri ou du sable.

4°. L'influence de la pression sur la perte en poids des substances examinées ressort clairement des résultats suivants:

La *diorite de Quénast* usée sur la roue par l'éméri perdit 3.3 gr. sous un poids de 2 kilogr. mais seulement 0.7 grammes sous un poids de 0.5 kilogr.

Le *basalte* perdit sous les mêmes circonstances 3.6 et 0.8 grammes de matière.

Le *calcaire* usé sur le plan en employant du sable perdit 3.1 gr. sous un charge de 1 kilogr. et 1.1 gr. sous une charge de 0.5 kilogr.

La perte en poids, comme l'on voit, augmente dans une proportion plus forte que la charge, ce qui montre clairement qu'il faut une certaine charge initiale pour amener un commencement d'usure et que cette charge initiale est plus grande à mesure que la différence en dureté de l'objet à travailler et la poudre à user est plus petite. Quand la charge initiale est surpassée, la perte en poids augmente beaucoup plus vite que la pression; citons par exemple le calcaire, qui perd 3.1 grammes sous un poids de 1 kilogr., en employant soit l'éméri, soit le sable, tandis que sous une charge de 0.5 kilogr. la perte est de même de 3.1 grammes, quand on use avec de l'éméri, mais de 1.1 grammes seulement, quand on le remplace par le sable.

Digitized by Google

5°. La grandeur de la surface attaquée n'a qu'une importance secondaire pour des raisons que j'ai déjà exposées ailleurs.

A l'appui de cette assertion je communique ici les résultats de quelques expériences faites avec le basalte. Un morceau piramidal de cette matière fut usé quatre fois de suite pendant dix minutes sur la roue en employant de l'éméri et en appliquant une charge de 2 kilogr.

1re fois. Surface de la cassure rugueuse 6.2 cM²; surface de la face usée 6.8 cM²; Perte en poids 3.6 grammes.

2me fois. Surface avant l'expérience 6.8 cM², après l'expérience 7.3 cM². Perte en poids 3.1 grammes.

3me fois. Surface avant l'expérience 7.3 cM²; après l'expérience 8.1 cM². Perte en poids 3.5 grammes.

4me fois. Surface avant l'expérience 8.1 cM²; après l'expérience 9.3 cM². Perte en poids 3.1 grammes.

6°. L'influence de la vitesse se fait valoir à un haut degré dans les roches qui offrent beaucoup de résistance, mais a au contraire peu d'importance dans celles qui s'usent facilement; on s'en convainct par l'inspection du tableau suivant:

Emploi de l'éméri.

	Charge.	Vitesse.	Perte en poids.
Diorite de Quénast	2 kilogr.	3 m. par seconde	3.3 grammes.
» » »	2 »	1 m. » »	1.2 »
Porphyre	2 »	3 m. » »	4.7 »
»	2 »	1 m. » »	3.0 »
Calcaire	0.5 »	3 m. » »	3.1 »
»	0.5 »	1 m. » »	3.3 »

Le résultat quelque peu singulier relatif au calcaire s'explique par le fait que le limon calcifère n'adhère pas à la plaque, tandis que l'effet contraire se manifeste en usant sur la roue, où la plus grande partie de l'eau employée est rejetée avec force.

7°. L'influence de la flexibilité se fait surtout sentir chez le calcédoine, l'ébonite et le caoutchouc mou. La dureté de l'ébonite égale celle de l'étain (1.5) tandis que la dureté du basalte doit être évaluée à 5 pour le moins. Cependant en usant ces matières à l'aide du sable, la perte que subit l'ébonite sous les mêmes circonstances n'est que le tiers, et celle qu'éprouve le caoutchouc ordi-

Digitized by Google

naire, substance plus molle que le plomb, que le dixième de celle qu'essuie le basalte. Le poids spécifique de l'échantillon de basalte, qui servait à l'expérience, était = 3.1, celui de l'ébonite = 1.06 et celui du caoutchouc mou = 0.96. Si, en partant de ces chiffres, on réduit les poids des matières enlevées à leur volume, on arrive au résultat que les volumes du basalte, de l'ébonite et du caoutchouc enlevés sont entre eux comme 100, 100 et 30.

La perte en poids du calcédoine en l'attaquant sur le tour par le diamant est environ la moitié de celle que subit le quartz sur la section transversale des cristaux; quant à la perte en poids par l'usure sur la plaque la proportion entre les pertes de poids des deux minéraux est de 29 à 100.

Je me permets d'ajouter à ces données les résultats de quelques observations concernant la courbure du quartz et du calcédoine, d'où il ressortira que, bien que la dureté des deux minéraux soit à peu près égale, le calcédoine est beaucoup plus flexible que le quartz.

Le quartz fut façonné par la scie en forme de bâtons dont la longueur correspondait à l'axe principal du cristal; la longueur des baguettes de calcédoine avait une direction parallèle aux plans des couches. Ces baguettes, ayant une longueur de 30 et une largeur de 3.9 mM. furent usées jusqu'à ce qu'il avaient une épaisseur uniforme de 0.6 mM. Leurs bouts furent collés contre deux lames assez fortes de calcédoine, de telle manière que la partie moyenne libre, ayant une longueur de 25 mM. pouvait être soumise, comme une poutre en miniature, à l'expérience en y suspendant des crochets, portant les poids nécessaires. La courbure fut déterminée à l'aide de la vis micrométrique d'un microscope.

Voici le résultat:

Charge.		Courbure en microns.	
		Calcédoine.	Quartz.
50	Grammes.	48	39
100	»	96	82
150	»	147	rompu
200	»	213	
250	»	262	
300	»	320	
350	»	rompu	

Je me propose de publier plus tard les résultats d'expériences analogues faites avec le basalte et le porphyre.

8°. Examinons enfin l'influence de la structure particulière des substances minérales.

La différence entre les pertes en poids qu'éprouve une matière, quand on la travaille au tour et quand on l'use, doit être attribuée à l'aptitude plus ou

Digitized by Google

moins prononcée de se morceler. En général le procédé d'usure permet de ménager beaucoup plus l'objet à travailler, comme j'ai déjà eu occasion de le démontrer aux pages précédentes. La manière particulière dont se comporte le quartz, quand on l'attaque au tour, s'explique par l'aptitude de se cliver suivant la direction du prisme, tandis que la manière dont se comporte la quartzite a pour cause sa structure granuleuse.

Quant au fait que le porphyre éprouve une perte en poids beaucoup moindre que le basalte par le travail au tour, tandis qu'on observe tout le contraire quand on use les deux substances sur la plaque, l'expérience suivante pourra servir à en donner l'explication.

On communiqua sur le tour un mouvement rotatoire très rapide à un disque en pierre artificielle formée d'un mélange d'éméri, de résine et de gomme-laque, et on appliqua contre la face basale du disque une plaque en acier dur en la mouillant continuellement d'eau. Au bout de 10 minutes la plaque en acier avait perdu 3.5 grammes et le disque 0.6 grammes de matière. Maintenant on substitua à la plaque un morceau de grès de la Rochette. Cette fois, après 10 minutes de travail le grès avait éprouvé une perte de 6 grammes et le disque à éméri une perte de 2.2 grammes. Enfin on appliqua contre le disque une aiguille solide en acier dur; celle-ci perdit 0.02 grammes de matière après 2 minutes tandis que le disque avait éprouvé une perte en poids montant à 1.74 grammes. Mais dès ce moment les conditions commencèrent à se changer rapidement. En effet dans l'espace des 3 minutes suivantes l'aiguille avait perdu 0.15 grammes et le disque 0.26 grammes de substance et dans la période située entre la cinquième et la dixième minute l'aiguille éprouva une perte de 0.8 grammes, tandis que le disque n'était diminué en poids que de 0.09 grammes.

Quelques granits ne sont pas attaqués plus fortement au tour que les porphyres les plus compactes, tandis que d'autres espèces de cette roche, dont le grain a la même finesse et qui ne montrent aucun signe d'effleurissement à l'œil nu, perdent beaucoup plus de matière et cette perte en poids peut différer de 0.9 à 1.3 grammes.

Il en est tout autrement, quand on use les roches nommées sur la plaque. Sous cette manipulation le granit éprouve toujours une perte plus grande que le porphyre ou le basalte; seulement pour bien constater la différence, la grosseur des grains de l'éméri doit être en quelque sorte proportionnée à la grosseur des cristaux formant le granit et en même temps au degré de cohésion entre les cristaux eux-mêmes. Cependant les expériences provisoires faites avec le granit ont donné des résultats si divergents qu'il me semble prématuré de les discuter ici.

Digitized by Google

ERREURS DANS LES TABLES DE CALLET

PAR

CH. M. SCHOLS.

Dans la préface des tables de CALLET [1]) on trouve les formules de EULER pour le calcul des sinus, des cosinus, des tangentes et des cotangentes ainsi que pour le calcul des logarithmes des sinus et des cosinus. Les coefficients de ces formules sont donnés avec 20 décimales à l'exception de ceux des formules pour les sinus et les cosinus qui sont donnés avec 22 décimales.

Ayant besoin de connaître le log. sin. et le log. cos. d'un angle avec plus de dix décimales je resolus de les calculer à l'aide des formules (R R) et (S S) de CALLET. Pour contrôler les résultats je calculai aussi le sinus et le cosinus d'après les formules (P) et (Q) et j'en cherchai ensuite les logarithmes. Ce calcul de contrôle me montra qu'il y avait une erreur dans le log. sin. montant jusqu'à la dixième décimale. Dans le log. cos. il y avait aussi une erreur mais plus petite.

Ne pouvant trouver d'erreur dans mes calculs je commençais à soupçonner l'exactitude des coefficients de CALLET. Un calcul très simple montra que mes

---

[1]) FRANÇOIS CALLET. Tables portatives de Logarithmes. Paris 1795. Le dernier tirage consulté est celui de 1885. En 1861 les tables de CALLET ont été revues par M. SAIGEY qui a corrigé beaucoup d'erreurs dans ces tables. A la fin de sa préface M. SAIGEY dit: »Quant à *l'explication* et *l'application* des logarithmes, qui forme la longue préface de CALLET, je ne m'en suis pas occupé, si ce n'est pour y faire les »petites corrections indiquées par les correspondants."

Les erreurs que je viens de trouver dans cette partie des tables de CALLET n'ont pas été corrigées.

Au sujet des *log. vulgair. à 61 décimales* M. SAIGEY dit entre autre, que dans les Tables de SHERWIN on trouve pour la 58e décimale du logarithme de 1097 le chiffre 9 tandis que CALLET donne le chiffre 0 et que ce dernier chiffre est bon. J'ai trouvé tout le contraire. En calculant de cinq manières différentes le logarithme de 1097 j'ai trouvé toujours le chiffre 9 pour la 58e décimale. Les autres variantes signalées par M. SAIGEY n'ont pas été vérifiées par moi.

Digitized by Google

soupçons étaient fondés. En mettant dans la formule (S S): $m = n = 1$, je trouvai pour le log. sin. 90° au lieu de *zéro* la valeur:

$$9{,}99999.99990.00000.10225 - 10,$$

accusant une erreur d'une unité dans la 9me décimale et d'autres erreurs dans les cinq dernières décimales.

Ayant trouvé une aussi grosse erreur dans la formule (S S), je n'avais plus de confiance dans les autres. En y appliquant le même contrôle, je trouvai que les formules (P) et (Q) seules y satisfaisaient; pour toutes les autres formules je devais constater des erreurs tantôt plus grandes, tantôt plus petites.

Afin de pouvoir me servir de ces formules le cas échéant, j'ai calculé de nouveau ces coefficients et j'ai trouvé de cette manière 126 erreurs dans les coefficients de ces 18 formules formant en tout 184 chiffres fautifs.

Un certain nombre de ces erreurs (57) ne montent que jusqu'à une unité de la dernière décimale, mais les autres au nombre de 69 sont d'une importance plus grande.

Dans la liste qui suit je donne les coefficients de CALLET où il y a des erreurs. Les chiffres fautifs y sont soulignés et les chiffres par lesquels ils doivent être remplacés sont mis au-dessous.

Form. (R).

$$0{,}01868.86502.77329.8211\frac{7}{6}$$

$$0{,}00019.75800.71520.477\frac{31}{24}$$

$$0{,}00002.16977.37324.8602\frac{6}{3}$$

$$0{,}00000.00003.65174.902\frac{74}{13}$$

$$0{,}00000.00000.40\frac{75}{57}4.0382\frac{8}{7}$$

$$0{,}00000.00000.04508.\frac{2}{1}88\frac{8}{4}7$$

$$0{,}00000.00000.00000.0763\frac{4}{5}$$

Form. (S).

$$0{,}63661.97723.67581.34307.5535\frac{8}{0}.53490.05744.8\frac{0126}{1378}$$

Digitized by Google

$0,00655.10747.88218.4992\frac{5}{7}$

$0,00034.50292.55396.7770\frac{2}{3}$

$0,00002.02791.06051.5\frac{5}{3}806$

$0,00000.00002.96905.166\frac{79}{81}$

Form. (C C).

$0,50733.90158.0209\frac{1}{6}.02727$

$0,08333.33333.33628.39\frac{4}{3}58$

Form. (D D).

$0,00019.55067.52954.6\frac{4}{5}197$

$0,00004.07001.17454.1547\frac{8}{9}$

Form. (E E).

$0,22033.45350.17076.9861\frac{8}{4}$

$0,14497.43131.01101.3\frac{5301}{6149}$

$0,08686.03765.746\frac{42}{37}.2610\frac{6}{7}$

$0,06204.20818.25036.\frac{42}{38}7\frac{34}{40}$

$0,05428.68114.99377.631\frac{6}{5}7$

$0,04342.94482.02781.08\frac{8}{2}80$

$0,03619.12068.25399.1286\frac{8}{7}$

Form. (F F).

$0,01468.89690.01138.465\frac{96}{74}$

Digitized by Google

$$0,00042.58449.75782.00\frac{578}{496}$$

$$0,00001.76758.36423.15\frac{178}{365}$$

$$0,00000.37869.79297.139\frac{49}{50}$$

$$0,00000.00414.17588.\frac{9}{8}25\frac{67}{58}$$

$$0,00000.00094.13081.\frac{8}{6}3428$$

$$0,00000.00021.57164.155\frac{39}{40}$$

Form. (G G).

$$0,00048.23588.80314.0406\frac{3}{4}$$

$$0,00003.87947.56324.0298\frac{2}{3}$$

$$0,00000.03143.08097.186\frac{59}{60}$$

$$0,00000.00000.28680.7697\frac{4}{5}$$

$$0,00000.00000.00295.0602\frac{4}{5}$$

$$0,00000.00000.00030.262\frac{49}{50}$$

$$0,00000.00000.00000.323\frac{79}{80}$$

$$0,00000.00000.00000.0035\frac{2}{3}$$

Form. (H H).

$$0,93471.16558.30435.7541\frac{0}{1}$$

$$0,16123.35167.12056.6091\frac{1}{2}$$

$$0,00000.39817.93162.0550\frac{1}{2}$$

$$0,00000.01942.52954.6519\frac{6}{7}$$

Digitized by Google

$0,00000.00005.34041.3561\frac{8}{9}$

$0,00000.00000.29148.5965\frac{8}{9}$

$0,00000.00000.01617.979\frac{79}{80}$

$0,00000.00000.00090.9769\frac{0}{1}$

$0,00000.00000.00005.1682\frac{7}{8}$

$0,00000.00000.00000.2960\frac{7}{8}$

$0,00000.00000.00000.0000\frac{5}{6}$

Form. (I I).

$0,00020.94858.00017.4189\frac{3}{4}$

$0,00001.68483.48598.3074\frac{3}{4}$

$0,00000.00129.81714.\frac{73}{69}773$

$0,00000.00000.12455.9000\frac{6}{4}$

$0,00000.00000.00013.1428\frac{3}{4}$

$0,00000.00000.00001.35\frac{726}{601}$

Form. (K K).

$9,59405.98857.02190.268\frac{6}{7}1$

$0,07002.28266.05901.9201\frac{4}{5}$

$0,00000.17292.70798.360\frac{59}{60}$

$0,00000.00000.00702.679\frac{69}{70}$

$0,00000.00000.00000.007\frac{38}{42}$

Digitized by Google

$0,00000.00000.00000.0000\frac{2}{3}$

Form. (L L).

$0,05323.99169.08198.15\frac{389}{602}$

$0,00050.64639.30245.81\frac{399}{412}$

$0,00001.09057.90002.2146\frac{1}{2}$

$0,00000.00000.10259.3\frac{8}{4}368$

$0,00000.00000.00012.6797\frac{0}{1}$

$0,00000.00000.00000.4\frac{61}{55}9\frac{6}{4}$

Form. (M M).

$8,38993.99030.46265.487\frac{7}{8}6$

$0,04287.94214.86948.6809\frac{1}{2}$

$0,00026.90350.31694.5574\frac{1}{0}$

$0,00000.00015.27887.6691\frac{3}{4}$

$0,00000.00000.34387.4481\frac{7}{8}$

$0,00000.00000.00000.4778\frac{6}{7}$

Form. (N N).

$0,03586.81376.32068.08\frac{078}{291}$

$0,00015.90283.44723.212\frac{53}{66}$

$0,00000.16408.41054.9452\frac{4}{5}$

$0,00000.00220.65961.9\frac{6}{5}566$

Digitized by Google

$0,00000.00000.00094.\frac{41}{37}112$

$0,00000.00000.00000.0299\frac{8}{6}$

Form. (O O).

$6,83363.74022.78978.222\frac{7}{8}4$

$0,03081.56858.78525.01\frac{848}{904}$

$0,00000.07833.58382.1270\frac{7}{8}$

$0,00000.00000.91400.3281\frac{6}{7}$

$0,00000.00000.00000.1986\frac{1}{2}$

$0,00000.00000.00000.0027\frac{2}{3}$

Form. (P P).

$5,95762.14018.60123.8544\frac{2}{1}$

$0,02700.49849.40164.98\frac{226}{439}$

$0,00006.85880.11132.364\frac{59}{71}$

$0,00000.04103.60325.8180\frac{6}{7}$

$0,00000.00032.32073.2\frac{5}{4}453$

$0,00000.00000.00283.1849\frac{7}{6}$

$0,00000.00000.00002.\frac{93}{89}374$

$0,00000.00000.00000.0003\frac{5}{3}$

Form. (Q Q).

$5,02745.74282.95091.051\frac{4}{5}6$

Digitized by Google

$0,02402.98345.98786.70\frac{867}{923}$

$0,00004.84686.85121.27\frac{1}{3}22$

$0,00000.02311.24391.2629\frac{5}{6}$

$0,00000.00014.\frac{2}{5}5403.\frac{4}{3}4430$

$0,00000.00000.10506.6771\frac{5}{6}$

$0,00000.00000.00082.1236\frac{4}{5}$

$0,00000.00000.00000.00\frac{600}{575}$

Form. (R R).

$4,04913.63829.81474.1052\frac{4}{3}$

$0,02164.33246.69754.\frac{3}{4}6\frac{587}{800}$

$0,00003.54913.42796.497\frac{21}{33}$

$0,00000.01379.59763.3829\frac{4}{5}$

$0,00000.00007.09845.8\frac{2}{1}458$

$0,00000.00000.00000.\frac{22}{18}173$

Form. (S S).

$3,02745.74282.95091.051\frac{4}{5}6$

$0,01968.68\frac{90}{89}7.79754.190\frac{39}{96}$

$0,00002.67539.61026.1\frac{08}{10}63$

$0,00000.00003.69667.\frac{2}{1}395\frac{4}{5}$

$0,00000.00000.01820.\frac{5}{7}875\frac{1}{3}$

Digitized by Google

$$0,00000.00000.00000.0549\frac{9}{8}$$

$$0,00000.00000.00000.000\frac{57}{32}$$

A la page 118 où l'on retrouve les coefficients des formules (I I) et (K K) et les multiples de ces coefficients, on rencontre les mêmes erreurs que je viens de signaler.

Pour être sûr de la 20e décimale tous les coefficients ont été calculés avec 23 décimales; pour un de ces coefficients j'ai du recommencer tout le calcul avec 26 décimales, parce que après la 20e décimale suivaient les chiffres 500.

En faisant le contrôle dont il était question plus haut, sur les coefficients à 23 décimales, je ne trouvais que des différences de 1 ou 2 unités de la 23e décimale.

Pour calculer les coefficients j'avais pris comme point de départ les sommes:

$$A = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \ldots.$$

$$B = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \ldots.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \ldots..$$

$$\beta = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{8^4} + \ldots..$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

données par Euler [1]), mais en faisant le contrôle je trouvais des différences qui montaient jusqu'à 173 unités de la 23e décimale dans le log. cos. et jusqu'à 88 de ces unités dans le log. sin. Ces différences ne pouvaient être expliquées que par des erreurs dans ces sommes. Ce n'est qu'après les avoir calculées de nouveau que je suis arrivé aux résultats définitifs que je viens de donner.

Abstraction faite de petites erreurs dans la dernière décimale, j'ai trouvé des erreurs dans 3 de ces sommes. Je les donne ici de la même manière que j'ai donné les coefficients de Callet en y ajoutant encore la valeur de $\frac{1}{\pi}$ où se trouve aussi une erreur dans Euler.

---

[1]) L. Euler. Introductio in analysin infinitorum.

Digitized by Google

EULER § 190.

$$E = 1,00001.70413.63044.825\frac{50}{48}.816$$

EULER § 193.

$$\vartheta = 0,00001.52590.22251.272\frac{69.977}{71.502}$$

$$\lambda = 0,00000.02384.18635.95259.\frac{1}{2}54$$

EULER § 198.

$$\frac{1}{\pi} = 0.31830.98861.83790.67153.7767\frac{9}{5}.26745.02872.4$$

Avant de terminer signalons encore une erreur qu'on rencontre dans plusieurs livres. Pour le sin 1″ on donne souvent la valeur:

0,00000.48481.36809

ce n'est pas le sinus de 1″ mais la dixième partie du sinus de 10″. Le sinus de 1″ ne diffère de l'arc de 1″ que de 2 unités de la 17me décimale. Avec 15 décimales on doit donc avoir:

$$\sin 1'' = \text{arc } 1'' = 0,00000.48481.36811.$$

L'erreur signalée se trouve entre autres dans:

H. G. KÖHLER. Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. Leipzig 1852. p. 330.

P. VAN GEER. LOBATTO's Leerboek der rechtlijnige en bolvormige driehoeksmeting. Schoonhoven 1869. p. 34.

G. J. VERDAM. Summarium der Goniometrie en der rechtlijnige of vlakke trigonometrie. Leiden 1858. p. 7.

Dans ce dernier ouvrage le log. sin. 1″ est aussi trop petite d'une unité de la 10e décimale.

Delft, février 1886.

Digitized by Google

LA LOI DE L'ERREUR RÉSULTANTE

PAR

CH. M. SCHOLS.

§ 1. Dans un mémoire sur la probabilité des erreurs d'observation, M. BESSEL [1]) a traité le problème de trouver la loi de l'erreur qui résulte du concours de plusieurs erreurs indépendantes, restant entre des limites finies; mais il n'a donné des formules directes que pour le cas de 2 et de 3 erreurs composantes. Les formules devenaient alors si compliquées qu'il a renoncé à les développer pour quatre erreurs. Il donne ensuite une formule générale pour un nombre quelconque d'erreurs à l'aide d'un facteur qui devient égal à zéro pour certaines valeurs d'un paramètre et égale à l'unité pour d'autres valeurs. Après avoir montré par un seul exemple l'emploi de cette formule pour le cas de deux erreurs, il s'en sert pour le développement en série dans le cas d'un grand nombre d'erreurs.

Plus tard M. KUMMELL [2]) a repris le problème, mais il a recours immédiatement au facteur de discontinuité de LEJEUNE-DIRICHLET pour établir la formule générale exprimant la facilité des erreurs, à laquelle il donne une généralité un peu plus grande que ne l'a fait M. BESSEL, en y comprenant aussi les erreurs non symétriques. Comme application il développe cette formule dans le cas où les erreurs composantes ont une facilité constante et symétrique. Il donne aussi le développement en série, mais seulement pour ce dernier cas; de sorte que ce développement n'est qu'un cas particulier de celui donné par M. BESSEL, dont il peut être déduit en remplaçant les deux constantes:

---

[1]) FR. W. BESSEL. Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler. Astr. Nachr. n°. 358—359. Band 15. Seite 369. Voir aussi: Abhandlungen von FRIEDRICH WILHELM BESSEL. Herausgegeben von R. ENGELMANN. Leipzig 1876. Zweiter Band. Seite 372.

[2]) CHAS. H. KUMMELL. On the composition of errors from single causes of error. Astr. Nachr. n°. 2460—2461. Band 103. Seite 177.

Digitized by Google

$$\frac{3[\alpha^4]-[\alpha_1{}^4]}{24[\alpha^2]^2} \quad \text{et} \quad \frac{30[\alpha^6]-15[\alpha^2.\alpha_1{}^4]+[\alpha_2{}^6]}{720[\alpha^2]^3}$$

par:

$$\frac{1}{20}\cdot\frac{[a^4\varepsilon^4]}{[a^2\varepsilon^2]^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{105}\cdot\frac{[a^6\varepsilon^6]}{[a^2\varepsilon^2]^3}$$

Les difficultés qui résultent de la discontinuité ne sont pas résolues par les formules qu'ont données MM. Bessel et Kummell; elles ne sont que déplacées. Pour chaque cas particulier on les retrouve en discutant la formule générale.

Je donnerai dans les pages suivantes des formules assez simples pour la solution du problème et qui tiennent compte de toutes les discontinuités, sans avoir recours aux ressources de la haute analyse.

§ 2. Dans la suite je représenterai les erreurs composantes par $x_1, x_2, \ldots x_s$, leur facilité par $f_1(x_1)$, $f_2(x_2) \ldots f_s(x_s)$, les limites inférieures par $p_1, p_2 \ldots p_s$ et les limites supérieures par $q_1, q_2 \ldots q_s$; enfin je représenterai, s'il y a lieu, par $k_1, k_2, \ldots k_s$ soit les limites $p_1, p_2 \ldots p_s$, soit les limites $q_1, q_2 \ldots q_s$. La résultante d'un nombre s d'erreurs sera représentée par X_s, de sorte que $X_2\ X_3\ X_4$ désignent les résultantes de 2, 3, 4 erreurs. Le symbole X_1 désignera donc la résultante d'une seule erreur, c'est-à-dire, cette erreur elle-même. Pour la symétrie des formules nous pourrons donc, s'il y a lieu, remplacer x_1 par X_1.

Comme la facilité de l'erreur résultante ne peut être représentée par une seule formule pour toutes les valeurs de cette erreur, il sera nécessaire de distinguer les limites où il y a un changement dans cette formule. Ces limites, qui sont au nombre de 2^s, seront représentées, rangées par ordre de grandeur, par $K_1, K_2 \ldots K_{2^s}$; de sorte que $K_1 = [p]$ sera la limite inférieure, et $K_{2^s} = [q]$ la limite supérieure.

La facilité de l'erreur qui résulte du concours de s erreurs composantes sera représentée en général par F_s; mais comme cette fonction différera par suite des limites entre lesquelles l'erreur X_s sera comprise, il faudra distinguer par un second indice ces différentes fonctions. Nous représenterons pour cela par $F_{s.u}$ la facilité pour le cas que l'erreur X_s est comprise entre les limites K_u et K_{u+1}. Comme toutes les erreurs doivent être comprises entre les limites extrêmes K_1 et K_{2^s} la valeur de $F_{s.0}$ et de $F_{s.2^s}$ sera identiquement nulle; néanmoins nous conserverons, s'il y a lieu, ces deux expressions à cause de la symétrie des formules.

§ 3. La facilité F_2 de l'erreur qui résulte du concours des erreurs x_1 et x_2 est représentée par la formule bien connue:

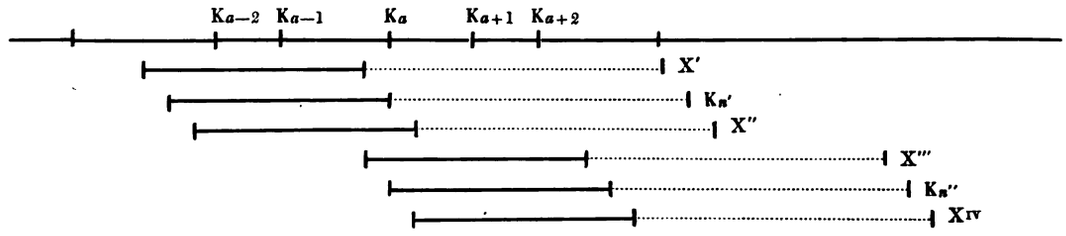
$$F_2 = \int f_2(X_2 - x_1) f_1(x_1)\, dx_1$$

Digitized by Google

et la difficulté ne consiste que dans la détermination des limites de l'intégration.

La méthode développée dans le § 31 de mon mémoire sur la: *Théorie des erreurs dans le plan et dans l'espace* [1]) nous donnera d'abord les limites où la fonction F changera de forme et ensuite les limites des intégrations dans les différents cas.

Représentons pour cela par la ligne supérieure de la figure la loi de la résul-



tante des $s-1$ premières erreurs, et notons sur cette ligne les limites pour lesquelles la facilité F_{s-1} change de formule.

Les six autres lignes représenteront six positions de l'image renversé de la dernière erreur composante correspondant aux valeurs X', $K_{n'}$, X'', X''', $K_{n''}$ et X^{IV} de l'erreur résultant du concours de toutes les erreurs composantes.

De cette figure il suit immédiatement que la facilité de l'erreur X' sera représentée par une autre fonction que celle de l'erreur X''; en effet cette dernière facilité dépendra de la facilité $F_{s-1.a}$ de l'erreur X_{s-1} entre les limites K_a et K_{a+1}, tandis que la première en est indépendante. Entre ces deux valeurs il doit donc se trouver une valeur limite où ce changement a lieu et la figure montre immédiatement qu'il en sera ainsi, quand la limite inférieure de l'erreur x_s correspondra à la limite K_a de l'erreur X_{s-1}.

De la même manière on voit qu'il y a une différence entre les fonctions qui représentent les facilités des erreurs X''' et X^{IV} et que la valeur pour laquelle cela a lieu s'obtient en faisant correspondre la limite supérieure de x_s à la limite K_a de l'erreur X_{s-1}.

De ce qui précède il résulte que chaque limite K_a de l'erreur X_{s-1} en donne deux pour l'erreur X_s. Comme les erreurs élémentaires n'ont chacune que deux limites il est clair que la résultante de deux de ces erreurs en aura $2 \times 2 = 2^2$ et la résultante de trois de ces erreurs $2^2 \times 2 = 2^3$ et ainsi de suite, de sorte que l'erreur X_s qui résulte de s erreurs aura 2^s limites pour le changement des fonctions qui en représentent la facilité.

---

[1]) Voir: Ces Annales, T. II p. 123—178.

Digitized by Google

On voit en outre de la figure que les deux limites $K_{n'}$ et $K_{n''}$ qui résultent de la limite K_a ont pour valeurs:

$$K_{n'} = K_a + p_s \qquad \text{et} \qquad K_{n''} = K_a + q_s$$

pour lesquelles on peut écrire par suite de la notation adoptée la formule unique:

$$K_n = K_a + k_s.$$

En appliquant successivement cette relation à la résultante de deux erreurs, de trois erreurs etc. on voit facilement que toutes les limites K de l'erreur résultante X_s sont comprises dans la formule:

$$K = [k] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

qui donne toutes ces limites en remplaçant les différentes valeurs k successivement par les valeurs correspondantes de p et de q.

Pour $s = 3$ par exemple on aura:

$$K = k_1 + k_2 + k_3$$

d'où l'on tire les huit limites suivantes:

$$\begin{array}{l} p_1 + p_2 + p_3 \\ p_1 + p_2 + q_3 \\ p_1 + q_2 + p_3 \\ q_1 + p_2 + p_3 \\ p_1 + q_2 + q_3 \\ q_1 + p_2 + q_3 \\ q_1 + q_2 + p_3 \\ q_1 + q_2 + q_3 \end{array}$$

lesquelles, rangées par ordre de grandeur sont les valeurs de $K_1\, K_2 \ldots . K_8$.

Notons encore que dans des cas particuliers quelques-unes des limites peuvent devenir égales. Supposons par exemple que les trois erreurs ont la même facilité et que ce sont des erreurs symétriques, on aura alors:

$$\begin{array}{l} p_1 = p_2 = p_3 = -a \\ q_1 = q_2 = q_3 = +a \end{array}$$

Dans ce cas la première limite est $-3a$, les trois suivantes deviennent égales à $-a$, les trois autres qui suivent seront égales à $+a$ et la dernière devient égale à $+3a$; de sorte que dans ce cas particulier on aura les quatre limites:

$$-3a \qquad -a \qquad +a \qquad +3a.$$

§ 4. Revenons maintenant à la facilité de l'erreur résultante. La figure nous donne immédiatement pour la facilité de X':

Digitized by Google

$$F_{s.n'-1} = \int_{X_s - q_s}^{K_{a-2}} f_s(X_s - X_{s-1})\, F_{s-1.a-3}(X_{s-1})\, d X_{s-1} + \int_{K_{a-2}}^{K_{a-1}} f_s(X_s - X_{s-1})\, F_{s-1.a-2}(X_{s-1})\, d X_{s-1} + \int_{K_{a-1}}^{X_s - p_s} f_s(X_s - X_{s-1})\, F_{s-1.a-1}(X_{s-1})\, d X_{s-1}$$

et pour la facilité de l'erreur X'':

$$F_{s.n'} = \int_{X_s - q_s}^{K_{a-2}} f_s(X_s - X_{s-1})\, F_{s-1.a-3}(X_{s-1})\, d X_{s-1} + \int_{K_{a-2}}^{K_{a-1}} f_s(X_s - X_{s-1})\, F_{s-1.a-2}(X_{s-1})\, d X_{s-1} + \int_{K_{a-1}}^{K_a} f_s(X_s - X_{s-1})\, F_{s-1.a-1}(X_{s-1})\, d X_{s-1} + \int_{K_a}^{X_s - p_s} f_s(X_s - X_{s-1})\, F_{s-1.a}(X_{s-1})\, d X_{s-1}$$

d'où nous tirons en prenant la différence:

$$F_{s.n'} - F_{s.n'-1} = \int_{K_a}^{X_s - p_s} f_s(X_s - X_{s-1})\,(F_{s-1.a} - F_{s-1.a-1})\, d X_{s-1}.$$

D'une manière analogue on trouve pour la différence des facilités de X''' et X^{IV}:

$$F_{s.n''} - F_{s.n''-1} = \int_{X_s - q_s}^{K_a} f_s(X_s - X_{s-1})\,(F_{s-1.a} - F_{s-1.a-1})\, d X_{s-1} = -\int_{K_a}^{X_s - q_s} f_s(X_s - X_{s-1})\,(F_{s-1.a} - F_{s-1.a-1}) d X_{s-1}$$

Ces deux formules ne diffèrent que par le signe et par la limite p_s ou q_s de la s^{me} erreur composante; ces deux formules peuvent donc être représentées par une seule formule, savoir:

$$F_{s.n} - F_{s.n-1} = \pm \int_{K_a}^{X_s - k_s} f_s(X_s - X_{s-1})\,(F_{s-1.a} - F_{s-1.a-1})\, d X_{s-1}. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

en ayant soin de prendre le signe + ou le signe — suivant que k_s représente une limite inférieure (p) ou une limite supérieure (q).

Remplaçons maintenant dans cette formule l'indice s successivement par $s-1$, $s-2$, ... 3 et 2 et remarquons qu'on a $F_{1.1} - F_{1.0} = F_{1.1} = f_1(x_1) = f_1(X_1)$ et $F_{1.2} - F_{1.1} = -F_{1.1} = -f_1(x_1) = -f_1(X_1)$, représentons en outre par r le nombre de fois que la limite k dans K_n représente une limite supérieure (q), nous trouvons alors en substituant l'une dans l'autre:

$$F_{s.n} - F_{s.n-1} = (-1)^r \int_{k_1 + k_2 \ldots + k_{s-1}}^{X_s - k_s} f_s(X_s - X_{s-1})\, d X_{s-1} \int_{k_1 + k_2 \ldots + k_{s-2}}^{X_{s-1} - k_{s-1}} f_{s-1}(X_{s-1} - X_{s-2})\, d X_{s-2} \int_{k_1 + k_2 \ldots + k_{s-3}}^{X_{s-2} - k_{s-2}} \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots \int_{k_1 + k_2}^{X_3 - k_3} f_3(X_3 - X_2)\, d X_2 \int_{k_1}^{X_2 - k_2} f_2(X_2 - X_1)\, f_1(X_1)\, d X_1$$

Digitized by Google

pour laquelle on peut écrire aussi:

$$F_{s.n} - F_{s.n-1} = (-1)^r \int_{K_n}^{X_s} f_s(X_s + k_s - X_{s-1})\, dX_{s-1} \int_{K_n}^{X_{s-1}} f_{s-1}(X_{s-1} + k_{s-1} - X_{s-2})\, dX_{s-2} \int_{K_n}^{X_{s-2}} \dots\dots$$

$$\dots \int_{K_n}^{X_3} f_3(X_3 + k_3 - X_2)\, dX_2 \int_{K_n}^{X_2} f_2(X_2 + k_2 - X_1)\, f_1(X_1 + k_1 - K_n)\, dX_1$$

ou par abréviation et en représentant en outre cette différence par $G_{s.n}$:

$$G_{s.n} = F_{s.n} - F_{s.n-1} = (-1)^r \int_{K_n}^{X_s} \int_{K_n}^{X_{s-1}} \dots \int_{K_n}^{X_3} \int_{K_n}^{X_2} \Pi f_s(X_s + k_s - X_{s-1})\, \Pi\, dX_{s-1} \quad (3)$$

seulement on doit avoir soin de remplacer dans cette formule X_o par K_n.

Prenons maintenant pour n successivement les valeurs n, $n-1$, $n-2 \dots$ $\dots 3, 2, 1$ et sommons, nous trouvons alors:

$$F_{s.n} = \sum_{n=1}^{n=n} G_{s.n} \quad (4)$$

ou encore en remplaçant n par $n+1$, $n+2$, $n+3 \dots 2^s - 1$ et 2^s et en sommant:

$$F_{s.n} = -\sum_{n=n+1}^{n=2^s} G_{s.n} \quad (5)$$

Ces deux formules représentent l'une et l'autre sous la forme la plus générale, la facilité de l'erreur résultante X_s entre les limites K_n et K_{n+1}.

§ 5. Appliquons maintenant ces formules à quelques cas particuliers. Supposons d'abord que la facilité des erreurs composantes soit constante et symétrique de sorte qu'on a $p_s = -q_s$ et $f_s = \frac{1}{2q_s}$.

Les formules (3) et (4) donnent alors immédiatement:

$$F_{s.n} = \sum_{n=1}^{n=n} (-1)^r \int_{K_n}^{X_s} \int_{K_n}^{X_{s-1}} \dots \int_{K_n}^{X_3} \int_{K_n}^{X_2} \frac{\Pi\, dX_{s-1}}{\Pi\, 2q_s} = \sum_{n=1}^{n=n} (-1)^r \frac{(X_s - K_n)^{s-1}}{(s-1)!\, 2^s\, \Pi\, q_s}.$$

Supposons en second lieu que toutes les erreurs composantes suivent la même loi et qu'elles aient par conséquence les mêmes limites p et q. Un certain nombre des limites K auront alors la même valeur, savoir toutes les limites pour lesquelles r a la même valeur; et comme r peut avoir les valeurs $0, 1, 2 \dots$ $s-1, s$, on n'aura plus que $s+1$ valeurs différentes pour les limites K, que nous représenterons par $K_1, K_2 \dots K_r \dots K_s$. Les valeurs de ces limites sont données par (1) qui donne pour ce cas particulier:

Digitized by Google

$$K_r = K_n = [k] = (s-r)\,p + r\,q = p\,.\,s + (q-p)\,r.$$

Le nombre des limites K_n qui ont la même valeur représentée par K_r est égale au nombre des permutations de s quantités dont r et $s-r$ sont égales; ce nombre sera donc le coefficient binominal $\binom{s}{r} = \frac{s!}{r!\,(s-r)!}$.

Comme la valeur de $G_{s\,.\,n}$ pour toutes ces limites K_r est la même, savoir:

$$\int_{K_r}^{X_s}\int_{K_r}^{X_{s-1}} \cdots \int_{K_r}^{X_3}\int_{K_r}^{X_2} f(X_s + p - X_{s-1}) \ldots . f(X_{r+1} + p - X_r)\, f(X_r + q - X_{r-1}) \ldots .$$

$$\ldots . f(X_2 + q - X_1)\, f(X_1 + q - K_r)\, \Pi\, d\,X_{s-1}$$

on trouve enfin d'après (4):

$$F_{s\,.\,r} = \sum_{r=0}^{r=r} (-1)^r \binom{s}{r} \int_{K_r}^{X_s}\int_{K_r}^{X_{s-1}} \cdots \int_{K_r}^{X_3}\int_{K_r}^{X_2} f(X_s + p - X_{s-1}) \ldots . f(X_{r+1} + p - X_r)\, f(X_r + q - X_{r-1}) \ldots$$

$$\ldots . f(X_2 + q - X_1)\, f(X_1 + q - K_r)\, \Pi\, d\,X_{s-1}.$$

Réunissons enfin les deux suppositions précédentes; supposons donc que les erreurs composantes aient tous une facilité constante et symétrique entre les mêmes limites; la facilité de l'erreur résultante entre les limites $K_r = q\,(2\,r - s)$ et $K_{r+1} = q\,(2\,r + 2 - s)$ se réduit alors à:

$$F_{s\,.\,r} = \sum_{r=0}^{r=r} (-1)^r \binom{s}{r} \frac{|X_r - q\,(2\,r - s)|^{s-1}}{(s-1)!\,2^s\,q^s} = \sum_{r=0}^{r=r} (-1)^r \binom{s}{r} \frac{\left(\frac{X_s}{2\,q} + \frac{s}{2} - r\right)^{s-1}}{2\,q\,(s-1)!}.$$

§ 6. La probabilité W_x que l'erreur soit plus petite qu'une certaine valeur X, c'est-à-dire qu'elle soit comprise entre la limite inférieure K_1 et la valeur X, est donnée par:

$$W_x = \int_{K_1}^{X} F_s\, d\,X_s$$

ou, en ayant soin de prendre entre les diverses limites les facilités correspondantes $F_{s\,.\,n}$:

$$W_x = \sum_{n=1}^{n=n-1} \int_{K_n}^{K_{n+1}} F_{s\,.\,n}\, d\,X_s + \int_{K_n}^{X} F_{s\,.\,n}\, d\,X_s$$

ou, en prenant pour $F_{s\,.\,n}$ l'expression (4):

$$W_x = \sum_{n=1}^{n=n-1} \int_{K_n}^{K_{n+1}} \sum_{n=1}^{n=n} G_{s\,.\,n}\, d\,X_s + \int_{K_n}^{X} \sum_{n=1}^{n=n} G_{s\,.\,n}\, d\,X_s = \sum_{n=1}^{n=n} \int_{K_n}^{X} G_{s\,.\,n}\, d\,X_s \quad \ldots . \quad (6)$$

Digitized by Google

D'une manière analogue on trouve pour la probabilité W'_x que l'erreur est plus grande que X en prenant la valeur de $F_{s..n}$ de (5):

$$W'_x = -\sum_{n=n+1}^{n=2^s} \int_{X}^{K_n} G_{s..n}\, dX_s = \sum_{n=n+1}^{n=2^s} \int_{K_n}^{X} G_{s..n}\, dX_s \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

§ 7. En appliquant l'expression pour W_x aux trois cas spéciaux traités dans le paragraphe 5, on trouve pour le premier cas:

$$W_x = \sum_{n=1}^{n=n} (-1)^r \frac{(X - K_n)^s}{s\,!\,2^s\,\Pi\, q_s}$$

pour le second:

$$W_x = \sum_{r=0}^{r=r} (-1)^r \binom{s}{r} \int_{K_r}^{X} \int_{K_r}^{X_s} \int_{K_r}^{X_{s-1}} \ldots \int_{K_r}^{X_3} \int_{K_r}^{X_2} f(X_s + p - X_{s-1}) \ldots f(X_{r+1} + p - X_r)\, f(X_r + q - X_{r-1}) \ldots$$
$$\ldots f(X_2 + q - X_1)\, f(X_1 + q - K_r)\, \Pi\, dX_s$$

et enfin pour le troisième cas:

$$W_x = \sum_{r=0}^{r=r} (-1)^r \binom{s}{r} \frac{|X - q(2r - s)|^s}{s\,!\,2^s q^s} = \sum_{r=0}^{r=r} (-1)^r \frac{\left(\frac{X}{2q} + \frac{s}{2} - r\right)^{s-1}}{r\,!\,(s-r)\,!}.$$

§ 8. Représentons la racine t^{me} de la moyenne des puissances t^{mes} des erreurs par M_t, on aura alors:

$$M_t^t = \int X^t F\, dX.$$

En appliquant cette formule à l'erreur résultante, nous devons avoir soin de prendre pour F entre les diverses limites l'expression de la facilité qui y correspond, soit sous la forme (4) soit sous la forme (5). Une expression très simple et fort remarquable est obtenue en prenant l'expression (4) pour les erreurs plus petites qu'une certaine valeur X et l'expression (5) pour celles qui sont plus grandes que cette valeur. Pour M'_t on doit alors écrire:

$$M'_t = \sum_{n=1}^{n=n-1} \int_{K_n}^{K_{n+1}} X_s^t F_{s..n}\, dX_s + \int_{K_n}^{X} X_s^t F_{s..n}\, dX_s + \int_{X}^{K_{n+1}} X_s^t F_{s..n}\, dX_s + \sum_{n=n+1}^{n=2^s-1} \int_{K_n}^{K_{n+1}} X_s^t F_{s..n}\, dX_s$$

ou, en prenant l'expression pour $F_{s..n}$ de la manière indiquée:

$$M'_t = \sum_{n=1}^{n=n-1} \int_{K_n}^{K_{n+1}} X_s^t \sum_{n=1}^{n=n} G_{s..n}\, dX_s + \int_{K_n}^{X} X_s^t \sum_{n=1}^{n=n} G_{s..n}\, dX_s - \int_{X}^{K_{n+1}} X_s^t \sum_{n=n+1}^{n=2^s} G_{s..n}\, dX_s - \sum_{n=n+1}^{n=2^s-1} \int_{K_n}^{K_{n+1}} X_s^t \sum_{n=n+1}^{n=2^s} G_{s..n}\, dX_s =$$
$$= \sum_{n=1}^{n=n} \int_{K_n}^{X} X_s^t G_{s..n}\, dX_s - \sum_{n=n+1}^{n=2^s} \int_{X}^{K_n} X_s^t G_{s..n}\, dX_s = \sum_{n=1}^{n=n} \int_{K_n}^{X} X_s^t G_{s..n}\, dX_s + \sum_{n=n+1}^{n=2^s} \int_{K_n}^{X} X_s^t G_{s..n}\, dX_s$$

Digitized by Google

ou enfin :

$$M_t^t = \sum_{n=1}^{n=2^s} \int_{K_n}^{X} X_s^t G_{s..n} \, dX_s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Cette formule a cela de remarquable qu'elle représente la valeur de M_t^t sous la forme d'une fonction d'une quantité X tout à fait arbitraire. En développant cette expression, la quantité X doit disparaître. On peut se convaincre facilement que c'est en effet le cas; en différentiant par rapport à X, on trouve:

$$\frac{d M_t^t}{d X} = \sum_{n=1}^{n=2^s} X^t G_{s..n} = X^t \sum_{n=1}^{n=2^s} G_{s..n} = o$$

d'où il suit que M_t^t est en effet indépendant de X.

§ 9. La circonstance que X est entièrement arbitraire dans la formule (8) peut servir pour simplifier dans des cas particulier l'expression pour M_t^t.

Appliquons par exemple cette expression au premier des cas traités dans le paragraphe 5; on aura alors:

$$M_t^t = \sum_{n=1}^{n=2^s} (-1)^r \int_{K_n}^{X} X_s^t \frac{(X_s - K_n)^{s-1}}{(s-1)!\, 2^s \Pi q_s} \, d X_s$$

ou, en effectuant l'intégration:

$$M_t^t = \sum_{n=1}^{n=2^s} \frac{(-1)^r}{2^s \Pi q} \left\{ \frac{X^t (X - K_n)^s}{s!} - t \frac{X^{t-1} (X - K_n)^{s+1}}{(s+1)!} + \ldots . \right.$$

$$\left. \ldots . - (-1)^t t (t-1) \ldots . 3 . 2 \frac{X (X - K_n)^{s+t-1}}{(s+t-1)!} + (-1)^t t! \frac{(X - K_n)^{s+t}}{(s+t)!} \right\}.$$

Cette expression se simplifie en prenant pour X la valeur particulière zéro; elle devient alors:

$$M_t^t = \sum_{n=1}^{n=2^s} \frac{(-1)^r}{2^s \Pi q_s} (-1)^t t! \frac{(-K_n)^{s+t}}{(s+t)!} = \frac{t!}{(s+t)!\, 2^s \Pi q_s} \sum_{n=1}^{n=2^s} (-1)^{s-r} K_n^{s+t}.$$

Pour le cas encore plus spécial, traité en troisième lieu, on trouve:

$$M_t^t = \frac{t!}{(s+t)!\, 2^s q^s} \sum_{r=0}^{r=s} (-1)^{s-r} \binom{s}{r} (q(2r-s))^{s+t} = (-1)^t \frac{t!\, 2^t q^t}{(s+t)!} \sum_{r=0}^{r=s} (-1)^r \binom{s}{r} (\tfrac{1}{2} s - r)^{s+t}.$$

Pour $t = 2$, on tire de cette expression:

$$M_2^2 = \frac{8 q^2}{(s+2)!} \sum_{r=0}^{r=s} (-1)^r \binom{s}{r} (\tfrac{1}{2} s - r)^{s+2} = \frac{8 q^2}{(s+1)(s+2)} \sum_{r=0}^{r=s} \frac{(-1)^r (\frac{1}{2} s - r)^{s+2}}{(s-r)!\, r!}$$

ou en mettant pour la dernière somme sa valeur: $\frac{s(s+1)(s+2)}{24}$

Digitized by Google

$$M_2^2 = \frac{8q^2}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{s(s+1)(s+2)}{24} = \frac{q^2}{3} s$$

et en observant que l'on a ici pour les erreurs composantes $m_2^2 = \frac{1}{3} q^2$

$$M_2^2 = m_2^2 s.$$

Pour $t = 4$, on trouve de même:

$$M_4^4 = \frac{24 \cdot 2^4 q^4}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} \sum_{r=0}^{r=s} \frac{(-1)^r (\frac{1}{2} s - r)^{s+4}}{(s-r)!\, r!},$$

ou en mettant pour la dernière somme sa valeur: $\frac{s(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)(5s-2)}{2^4 \cdot 360}$

$$M_4^4 = \frac{s(5s-2)}{15} q^4.$$

§ 10. Comme $G_{s,n}$ est donné par une intégrale multiple de l'ordre $s-1$, la valeur M_t^t est donnée par une intégrale multiple de l'ordre s. Cependant cette intégrale peut être reduite à la somme de produits d'intégrales simples de la forme:

$$\int x^t f\, dx = m_t^t.$$

Remarquons pour cela que M_t^t se compose de 2^s termes qu'on peut grouper deux à deux de manière que les deux termes de chaque groupe ne diffèrent que par le signe et par le changement de p_s en q_s, il en resulte que pour $p_s = q_s$ ces termes se détruisent, de sorte que pour $p_s = q_s$ la valeur de M_t^t est égale à zéro [1]). Remarquons encore que la même chose a lieu, lorsqu'on prend $p_{s-1} = q_{s-1}$, $p_{s-2} = q_{s-2} \ldots p_2 = q_2$ ou $p_1 = q_1$. De là il suit qu'on peut retrouver la valeur de M_t^t en différentiant successivement par rapport à $q_s, q_{s-1} \ldots q_2$ et q_1 et en intégrant ensuite par rapport à ces mêmes quantités entre les limites p_s et q_s, p_{s-1} et q_{s-1} etc. De cette manière on trouve:

$$M_t^t = \int_{p_s}^{q_s} \int_{p_{s-1}}^{q_{s-1}} \ldots \int_{p_2}^{q_2} \int_{p_1}^{q_1} \frac{d^s M_t^t}{\Pi\, dq_s} \Pi\, dq_s.$$

Pour développer la valeur de $\frac{d^s M_t^t}{\Pi\, dq_s}$ il suffit de prendre pour X une valeur entièrement indépendante des différentes valeurs q; par cela il n'y aura entre tous les termes au nombre de 2^s qu'un seul qui contienne toutes les quantités q.

[1]) Dans cette démonstration purement analytique, on doit laisser invariables les valeurs de p et de q qui se trouvent dans les fonctions f.

Digitized by Google

Tous les autres termes disparaissent par la différentiation de sorte qu'il suffit de considérer ce terme unique, qui est:

$$\int_{K_{2^s}}^{X} X_s^t \, G_{s.2^s} \, dX_s.$$

En prenant pour $G_{s.2^s}$ sa valeur de (3), on trouve immédiatement en différentiant:

$$\frac{d M_t^t}{\Pi d q_s} = \frac{d^s}{\Pi d q_s} \int_{K_{2^s}}^{X} X_s^t \, G_{s.2^s} \, dX_s = K_{2^s}^t \, \Pi f_s(q_s) = [q]^t \, \Pi f_s(q_s)$$

En mettant cette valeur dans la dernière expression pour M_t^t on trouve, en remplaçant sous le signe d'intégration $q_1, q_2 \ldots q_{s-1}$ et q_s par $x_1, x_2 \ldots x_{s-1}$ et x_s, l'expression:

$$M_t^t = \int_{p_s}^{q_s} \int_{p_{s-1}}^{q_{s-1}} \ldots \int_{p_2}^{q_2} \int_{p_1}^{q_1} [x]^t \, \Pi f_s(x_s) \, d x_s \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Cette expression qu'on peut établir directement, sans avoir recours à la facilité F de l'erreur résultante, donne une preuve nouvelle de la formule (8) dont nous venons de la déduire. L'expression pour M_t^t se présente ici encore sous la forme d'une intégrale multiple, mais on voit facilement qu'en développant la valeur de $[x]^t$, elle se réduit à une somme de produits d'intégrales simples.

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Pag.

S. HOOGEWERFF et W. A. v. DORP. Sur quelques dérivés de l'isoquinoléine. . . . . 102.

TH. H. BEHRENS. Sur la détermination de la dureté des matières rocheuses. 108.

Détermination de la dureté des parties intégrantes . . . . . 110.

Détermination de la dureté moyenne . . . . . 115.

CH. M. SCHOLS. Erreurs dans les tables de CALLET . . . . . 130.

——— La loi de l'erreur résultante. . . . . 140.

Digitized by Google

ANNALES

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

DE

DELFT.

TOME III. 1888.

4me LIVRAISON.

THE LIBRARY OF THE
JUL. 23 1973
UNIVERSITY OF ILLINOIS
AT URBANA-CHAMPAIGN

LEIDE. — E. J. BRILL.
1888.

GEOLOGY

Digitized by Google

Digitized by Google

APPLICATION DES PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE SYNTHÉTIQUE À LA SOLUTION DES PROBLÈMES DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

PAR

J. CARDINAAL.

L'étude approfondie de la géométrie descriptive montre clairement qu'en vertu des principes de cette science même, ses progrès sont intimement liés à ceux de la géométrie synthétique et analytique. On ne tarde pas à apercevoir que toute conquête scientifique dans le domaine de ces dernières sciences devient le point de départ de quelques nouvelles méthodes de construction de la première. A son tour la géométrie descriptive suggère des problèmes jusque-là exclus du domaine de la géométrie synthétique ou analytique et leur trace ainsi la voie. Les considérations géométriques, contenues dans ce mémoire, ont pour but d'exposer ce rapport organique entre la géométrie descriptive et la géométrie synthétique en appliquant quelques théories et constructions de la première à la dernière.

Les problèmes que j'aborderai se rapportent à la construction et à l'intersection des surfaces du second ordre. La théorie de l'intersection et de la projection de ces surfaces se trouve dans plusieurs traités de géométrie, parmi lesquels je citerai les œuvres de maître de M. Reye sur la Géométrie de position, de M. Fiedler sur la Géométrie descriptive et de M. Schröter sur les surfaces du second ordre. Pour atteindre au but que je me proposais, il m'a fallu cependant ajouter des remarques et donner extension à plusieurs théorèmes, et cela à plus forte raison que je me propose de suivre la marche géométrique pure. Les difficultés qui se présenteraient si j'eusse voulu séparer les principes généralement connus de ceux dont une nouvelle démonstration serait indispensable, m'ont conduit à donner un aperçu général des théorèmes généraux qui formeront la base des problèmes précités. Dans des notes j'aurai l'occasion de

Digitized by Google

signaler en quoi certaines démonstrations diffèrent de celles contenues dans les traités précités et de quelle manière elles s'y rattachent; qu'il suffise de les citer ici comme sources générales.

Qu'on me permette enfin l'observation que le but de ce travail n'est nullement d'exécuter réellement en tout détail les constructions qui se présenteront. Il est clair qu'en raison de la complication des problèmes l'exécution de la solution deviendra plus pénible; mais en même temps un problème peut de plus en plus être considéré comme résolu, quand chacune des constructions particulières dont il se compose pourra être résolue par les méthodes de la projection centrale ou parallèle.

Ceci posé ce mémoire se subdivise dans les parties suivantes:

I. Intersection des surfaces du second ordre.

II. Projection des courbes gauches qui résultent de l'intersection des surfaces du second ordre.

III. Construction et intersection des courbes planes d'après les principes de la géométrie synthétique.

IV. Solution de quelques problèmes sur la construction et l'intersection des surfaces du second ordre.

I. INTERSECTION DES SURFACES DU SECOND ORDRE.

1. *Courbe gauche du quatrième ordre.* La courbe d'intersection de deux surfaces du second ordre est une courbe gauche du quatrième ordre c^4. On le démontre en déterminant l'intersection d'un plan avec les deux surfaces; elle consiste en deux coniques, ayant toujours un système réel de deux cordes communes. Sur chacune de ces cordes communes se trouvent deux points, réels ou imaginaires conjugués [1]); dans le premier cas il y aura encore deux systèmes de deux cordes communes. La courbe satisfait ainsi à la définition d'une courbe gauche du quatrième ordre. Les cordes communes des deux coniques sont en même temps des cordes de c^4, d'où il s'ensuit qu'il est possible de construire des cordes d'une courbe gauche du quatrième ordre, même quand tous ses points seraient imaginaires. La tangente à c^4 en un point donné sera l'intersection des plans tangents des deux surfaces en ce point [2]).

[1]) Chasles. Traité des sections coniques p. 219.

[2]) La remarque sur la courbe imaginaire se trouve dans Schröter, Oberflächen zweiter Ordnung p. 692.

Digitized by Google

Remarque. La courbe précédente appartient à un type appelé courbes gauches du quatrième ordre et de la première espèce, pour la distinguer de celles dites de la seconde espèce, sections partielles d'une surface du second et du troisième ordre. Comme dans ce mémoire il ne sera question que de surfaces du second ordre, la spécification de l'espèce sera dorénavant omise.

2. *Faisceau de surfaces.* Deux surfaces du second ordre déterminent un faisceau de surfaces du second ordre passant toutes par la même courbe d'intersection. Ces surfaces coupent un plan quelconque en un faisceau de coniques. Par un point donné P on peut mener une seule surface appartenant au faisceau. On l'obtient en menant un plan variable α par P; une seule conique appartient au faisceau de coniques qui se présente; à chaque nouvelle position du plan une nouvelle conique s'obtiendra et le lieu géométrique de leur contour forme la surface. La surface sera réglée ou non réglée selon qu'on pourra mener par P deux cordes réelles ou imaginaires conjuguées à la courbe. Il y aura deux surfaces tangentes à une droite donnée l, ce dont on s'aperçoit en menant un plan variable par la droite.

Corollaires. a. Un faisceau est déterminé par une courbe gauche du quatrième ordre, appelée courbe de base.

b. Une courbe gauche du quatrième ordre avec une de ses cordes détermine une surface réglée du faisceau déterminé par la courbe.

3. *Cas particuliers. a.* Quand les deux surfaces S_1^2 et S_2^2 ont un point de contact A, ce point sera un point double de la courbe d'intersection; les deux tangentes en ce point sont situées dans le plan tangent commun α des deux surfaces. Ces tangentes peuvent être réelles ou imaginaires conjuguées; dans le premier cas A sera un point double, dans le second cas on aura un point isolé; quand elles se confondent A sera un point de rebroussement. Tout plan mené par A coupera encore la courbe en deux points réels ou imaginaires conjugués.

b. Quand trois points de la courbe d'intersection sont en ligne droite, cette droite fait partie de la courbe, et l'autre partie sera une cubique gauche c^3 dont cette droite sera une corde c. Les surfaces génératrices de la courbe, R_1^2 et R_2^2, doivent nécessairement être des surfaces réglées ayant une droite commune. Tout plan α mené par c coupera R_1^2 et R_2^2 en une seconde droite; le point d'intersection de ces deux dernières droites fournira un point de la cubique gauche c^3; les deux autres points d'intersection du plan α et de c^3 seront les points communs de c^3 et de c. Par conséquent, quand une cubique gauche est située entièrement sur une surface réglée du second ordre, un des deux systèmes de droites se composera de cordes de la courbe et l'autre de sécantes. Quand une des deux surfaces génératrices est un cône, son sommet sera situé

Digitized by Google

sur l'autre surface et la cubique gauche passera par ce sommet. Il est clair qu'une cubique gauche avec une corde déterminent un faisceau de surfaces du second ordre.

c. Je passerai rapidement sur les autres cas particuliers. Si S_1^2 et S_2^2 ont deux points de contact, la courbe d'intersection se composera de deux coniques situées dans deux plans différents, et ayant une corde commune passant par les points de contact. Ces coniques peuvent se confondre et chacune d'elles peut être réelle ou imaginaire; chacune d'elles peut de même se réduire à deux droites qui se coupent. Ces cas particuliers ne feront pas l'objet d'une étude spéciale.

4. *Cubique gauche passant par cinq points.* Par cinq points A, B, C, D, E situés sur une surface réglée du second ordre R^2, on peut mener deux cubiques gauches entièrement situées sur la surface. En effet, prenons A pour sommet d'un cône, ayant en outre les génératrices A B, A C, A D, A E, et menons par A les deux droites a_1 et a_2 appartenant à R^2. Chacune de ces droites détermine avec les quatre génératrices nommées un cône; les intersections de ces cônes avec R^2 seront deux cubiques gauches c_1^3 et c_2^3, passant par les points donnés. Les droites du système a_1 seront des cordes de c_1^3 et des sécantes de c_2^3, les droites du système a_2 joueront le rôle contraire. Il s'ensuit:

Deux cubiques gauches situées sur une surface réglée du second ordre et ayant pour cordes les droites de différents systèmes ont au plus cinq points communs.

Remarque. N'est pas besoin que les points B, C, D, E soient tous en réalité donnés; ils peuvent être représentés par les points d'intersection de deux droites avec la surface. Les deux cônes sont alors déterminés par leurs génératrices a_1 et a_2 et les droites qui joignent A à ces points d'intersection. Ces derniers points peuvent être imaginaires conjugués, sans que la construction cesse d'être possible.

5. *Ponctuelle involutoire sur une cubique gauche.* Considérons toujours la cubique gauche c_1^3 et soit A le sommet du cône dont a_1 est une génératrice. Toutes les cordes de c_1^3 couperent a_2. En menant des plans par a_2 et ces cordes, on obtient un faisceau de plans ayant pour axe a_2; chacun de ces plans coupera le cône en deux génératrices et les couples de ces génératrices formeront une involution ayant pour rayons doubles les génératrices de contact des plans tangents menés par a_2. En observant que les génératrices conjuguées de l'involution coupent c_1^3 en deux points d'une droite du système a_1, on conclut:

Quand une cubique gauche est située entièrement sur une surface réglée du second ordre, elle est coupée par les droites d'un des deux systèmes en deux points. L'ensemble de ces points forme une involution ayant pour points dou-

Digitized by Google

ANNALES

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

DE

DELFT.

TOME III

1887.

LEIDE. — E. J. BRILL.
1887.

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Pag.

A. C. OUDEMANS Jr. Sur la densité, le coefficient de dilatation et l'indice de réfraction de l'éther éthylique . . . . . 1.

S. HOOGEWERFF et W. A. v. DORP. Sur les produits de l'oxydation de l'isoquinoléine par le permanganate de potassium. . . . . 33.

——— Sur la préparation de la benzylamine et de la phényl-éthylamine . . . . . 40.

H. HAGA. Étude expérimentale sur l'effet thermo-électrique, découvert par Thomson. Deuxième communication . . . . . 43.

P. H. SCHOUTE. Sur le complexe des droites dont les distances à deux droites données sont entre elles dans un rapport constant . . . . . 52.

Supplément analytique . . . . . 81.

A. C. OUDEMANS Jr. Sur la connexion entre le caractère chimique et le pouvoir rotatoire des substances actives . . . . . 91.

S. HOOGEWERFF et W. A. v. DORP. Sur quelques dérivés de l'isoquinoléine. . . . . 102.

TH. H. BEHRENS. Sur la détermination de la dureté des matières rocheuses. 108.

Détermination de la dureté des parties intégrantes . . . . . 110.

Détermination de la dureté moyenne . . . . . 115.

CH. M. SCHOLS. Erreurs dans les tables de Callet . . . . . 130.

——— La loi de l'erreur résultante. . . . . 140.

J. CARDINAAL. Application des principes de la géométrie synthétique à la solution des problèmes de la géométrie descriptive . . . . . 151.

I. Intersection des surfaces du second ordre . . . . . 152.

II. Projection des courbes gauches qui résultent de l'intersection des surfaces du second ordre. 165.

III. Construction et intersection des courbes planes d'après les principes de la géométrie synthétique . . . . . 171.

IV. Solution de quelques problèmes sur la construction et l'intersection des surfaces du second ordre . . . . . 181.

CH. M. SCHOLS. Démonstration directe de la loi limite pour les erreurs dans le plan et dans l'espace . . . . . 195.

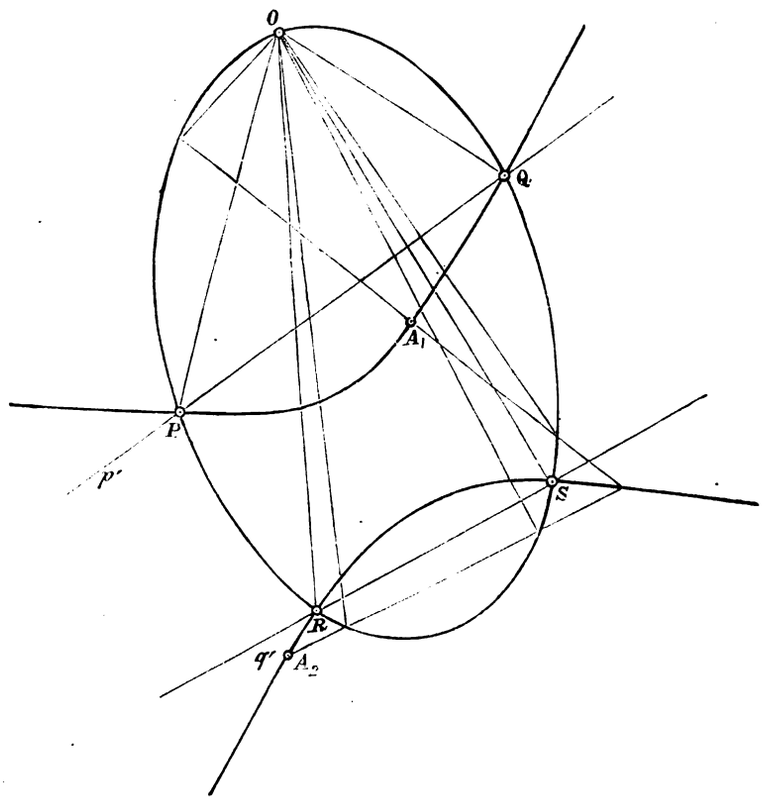
Digitized by Google

Digitized by Google

bles les points de contact de deux droites avec la courbe. Les deux points de contact sont réels ou imaginaires conjugués [1]).

6. *Intersection de deux cubiques gauches.* Soient données deux cubiques gauches c_1^3 et c_2^3 situées sur la même surface réglée R^2 et ayant pour cordes des droites du même système. Considérons une droite a de ce système, et menons des plans par a et par les points des deux involutions précitées sur c_1^3 et c_2^3. Le résultat sera deux faisceaux involutoires de plans ayant pour axe commun a, et qui seront projectifs, en considérant comme homologues les couples de plans, déterminés par les points d'intersection des deux courbes avec la même corde. On aura les points d'intersection de c_1^3 et de c_2^3 en déterminant les plans homologues communs aux deux involutions. Cette détermination peut se faire de la manière suivante (voir fig. 1).

Fig. 1.



Les deux faisceaux seront coupés par un plan α en deux involutions de rayons concentriques ayant pour centre O. Construisons le cône ayant pour sommet un des points d'intersection A de a avec c_1^3 et pour directrice c_1^3; ce cône sera du second ordre (3 *b*) et sera coupé par α dans une conique plane c_1^2 passant par O.

Déterminons les deux points centraux A_1 et A_2 des involutions par rapport à c_1^3, ce seront les centres de deux faisceaux de rayons projectifs, qui engendreront une conique c_2^2 dont on détermine les points d'intersection avec c_1^3. Les

[1]) Cette proposition se trouve sans démonstration dans un article de M. Stahl, Journal de Crelle, t. XCIII p. 216.

Digitized by Google

rayons du faisceau O passant par ces points seront les rayons homologues coïncidants des deux involutions.

En ayant égard à (1), on tire la conclusion suivante:

Deux faisceaux involutoires de plans projectifs et coaxiaux ont quatre plans homologues coïncidants; ces plans pourront être deux à deux conjugués imaginaires.

En supposant les points communs P, Q, R, S de c_1^3 et de c_2^3 réels, les génératrices A P, A Q, A R, A S passeront par les points d'intersection de c_1^3 et de c_2^3, qui seront ainsi déterminés. Quand ces points sont imaginaires, il y aura toujours deux cordes réelles p' et q'. Chacun des plans Ap', Aq' coupera la courbe c_1^3 en deux points conjugués imaginaires situés sur une droite p ou q, qui sera une corde commune à c_1^3 et c_2^3. Pour construire une de ces droites, on remarquera que la ponctuelle involutoire p' se projette du point A comme un faisceau involutoire elliptique. En construisant d'un sommet quelconque situé sur c_1^3 le cône dont c_1^3 est la directrice, on trouvera comme intersection dans le plan Ap une conique d^2 passant par A. La corde commune p se trouvera comme axe de l'involution par rapport à d^2. On arrive ainsi à la conclusion:

Deux cubiques gauches situées sur une surface réglée du second ordre et ayant pour cordes des droites appartenant au même système, ont quatre points communs réels ou deux à deux imaginaires conjugués. Dans tous les cas il y aura deux cordes communes aux courbes, sur lesquels des involutions représentent, par leurs points doubles réels ou imaginaires conjugués, les points d'intersection des courbes [1]).

7. *Points communs de deux courbes gauches du quatrième ordre.* La recherche des points communs de deux cubiques gauches mène à la détermination des points communs de deux courbes gauches du quatrième ordre. Soient données deux de ces courbes c_1^4 et c_2^4, ayant trois points communs A, B, C. Deux surfaces réglées du second ordre seront déterminées par la droite AB et chacune des courbes c_1^4 et c_2^4, et auront pour intersection une cubique gauche dont AB est une corde, et qui contient d'abord C et puis tous les points communs de c_1^4 et de c_2^4. Deux autres surfaces seront déterminées par BC et c_1^4 et c_2^4, elles engendreront une seconde cubique gauche contenant de même les points communs de c_1^4 et de c_2^4. Deux cubiques gauches ayant au plus cinq points communs, il s'ensuit:

Deux courbes gauches du quatrième ordre ont au plus huit points communs.

---

[1]) J'ai donné une autre démonstration de cette proposition dans un article inséré dans le Journal de Crelle, T. CI p. 143. La démonstration donnée ici est indépendante des propriétés des courbes planes du troisième ordre.

Digitized by Google

Comme chacune d'elles peut être considérée comme l'intersection de deux surfaces du second ordre, trois surfaces du second ordre auront au plus huit points communs [1]).

Remarque. D'après (6) quatre des points construits pourront être imaginaires; ils seront alors deux à deux liés par deux droites.

8. *Droite conjuguée à un point.* Les plans polaires d'un point P par rapport aux surfaces d'un faisceau de surfaces du second ordre passeront tous par une même droite p. On s'en aperçoit en menant par P un plan qui coupera le faisceau en un faisceau de coniques et la droite en un seul point conjugué à P par rapport à ce dernier faisceau. La droite p est dite conjuguée à P.

9. *Surface conjuguée à une droite.* Prenons deux points A et B sur une droite p. Les droites a et b, conjuguées à A et B par rapport à un faisceau de surfaces du second ordre, seront les axes de deux faisceaux de plans projectifs, qui engendreront un système de droites d'une surface réglée du second ordre R^2, qui sera conjuguée à p. La signification des deux systèmes de droites de cette surface est éminemment différente. Un des systèmes (celui auquel appartiennent a et b) sera composé de droites respectivement conjuguées aux points de p, l'autre système se compose des polaires de p par rapport aux différentes surfaces du faisceau.

10. *Cubique gauche conjuguée à un plan.* Prenons trois points A, B, C situés dans un plan α. Les droites a, b, c conjuguées à A, B, C seront les axes de trois faisceaux de plans projectifs. Les surfaces réglées conjuguées à AB et BC, passant toutes les deux par b, auront pour intersection une cubique gauche c^3. Les points de c^3 seront les pôles du plan α par rapport aux surfaces du faisceau, ses cordes seront les droites conjuguées aux points du plan. Les points d'intersection de c^3 et de α sont les points de contact de ce plan avec trois surfaces du faisceau.

11. *Tétraèdre principal.* Soient données trois droites a, b, c ayant le point commun P. a et b détermineront avec le faisceau les surfaces réglées R_1^2 et R_2^2, ayant pour courbe d'intersection la droite p conjuguée au point P et une cubique gauche c_3^3. De même l'intersection de la surface R_3^2, conjuguée à c, avec R_2^2 se composera de p et d'une nouvelle cubique gauche c_1^3. Les deux cubiques gauches c_1^3 et c_3^3 ayant pour corde p, droite située sur R_2^2, se couperont encore en quatre points réels ou deux à deux imaginaires conjugués (6). Ces points jouissent de propriétés remarquables. Considérons une des cordes communes toujours réelles de c_1^3 et c_3^3; cette corde l sera conjuguée à un point du plan ab et à un point

[1]) Cette démonstration est due à Reye, Geometrie der Lage II p. 150, 2e éd.

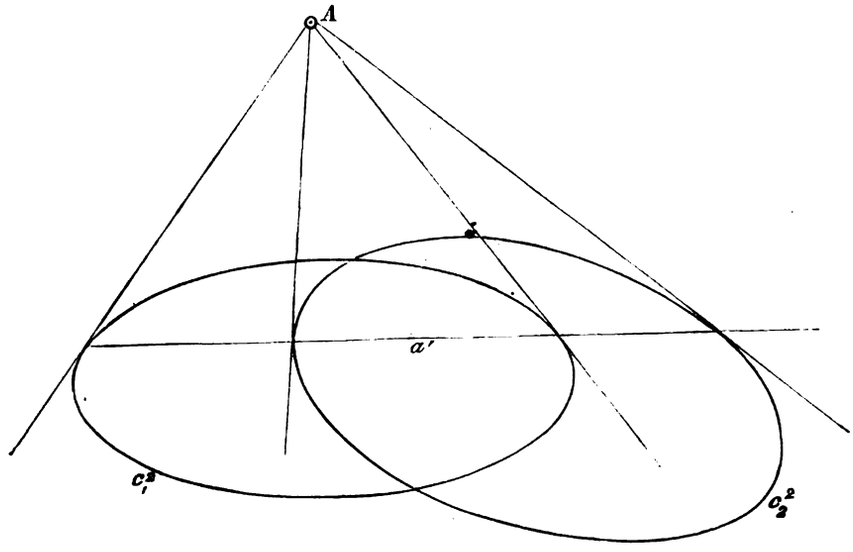
Digitized by Google

du plan $b\,c$; comme l n'est pas située sur R_2^2, ce ne peut être un point de la droite b, ainsi l est conjuguée à la droite qui joint les deux points dans les plans $a\,b$ et $b\,c$; ces deux droites sont donc des polaires réciproques pour tout le faisceau; et on arrive à la conclusion suivante:

Etant donné un faisceau de surfaces du second ordre, on peut construire quatre points principaux, formant les sommets du tétraèdre principal; les arêtes opposées de ce tétraèdre sont des polaires réciproques et les faces — plans principaux — les plans polaires des sommets opposés par rapport à toutes les surfaces du faisceau. Deux de ces arêtes sont toujours réelles. Les plans polaires des points d'un plan principal passant par le sommet opposé, les sommets du tétraèdre principal seront les sommets des cônes appartenant au faisceau.

12. *Forme de la courbe gauche du quatrième ordre.* Les considérations précédentes et la connaissance des quatre points principaux sont inévitables pour préciser la forme de la courbe gauche du quatrième ordre. Supposons les deux arêtes opposées a et a' toujours réelles du tétraèdre principal construites, et menons un plan α par a' qui coupera a en un point A (voir la figure 2). Ce même plan α coupera deux des surfaces du faisceau en deux coniques, c_1^2 et c_2^2; les tangentes menées du point A à ces coniques seront les intersections des plans tangents menés par a aux surfaces, et a' sera la polaire de A par rapport à c_1^2 et c_2^2. Les points principaux $X_1\,X_2$ situés sur a', devant être conjugués par rapport aux deux coniques c_1^2 et c_2^2, seront les éléments accouplés des ponctuelles involutoires déterminées sur a' par c_1^2 et c_2^2. X_1 et X_2 pourront seulement être imaginaires conjugués, quand les deux ponctuelles involutoires sont hyperboliques et que les points doubles se séparent. C'est le cas représenté par la figure 2; les figures 3 et 4 représentent deux autres cas, où les deux points principaux seront réels.

Fig. 2.

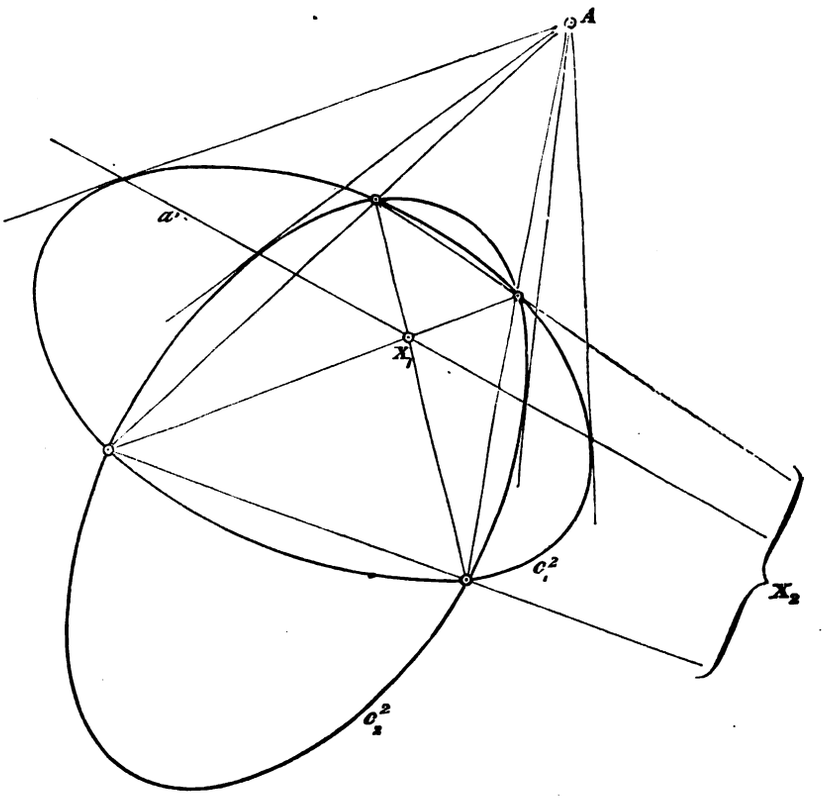


Digitized by Google

Pour que ces deux points soient imaginaires, il faut donc que c_1^2 et c_2^2 aient deux points réels communs et que a' passe entre ces points. En supposant le plan α mobile, ce seul cas possible devant se montrer continuellement, la courbe de base consistera donc ou bien en une seule partie traversée par a' ou bien en deux parties, coupées par un plan chacune en un nombre impair de points. En résumant les résultats il s'ensuit:

Quand les quatre points principaux sont réels, la courbe de base se compose de deux parties ou bien sera tout à fait imaginaire; les surfaces du second ordre appartenant au faisceau auront une intersection par pénétration ou bien ne se couperont pas.

Fig. 3.



Quand deux des points principaux sont imaginaires conjugués, la courbe se compose d'une seule partie, traversée par l'arête du tétraèdre principal qui contient les points imaginaires; les surfaces auront une intersection par arrachement.

Quand les points principaux sont tous imaginaires, la courbe se compose de deux parties coupées par un plan chacune en un nombre impair de points.

13. *Genre des surfaces d'un faisceau.* La connaissance des points principaux conduit à celle des divers genres de surfaces contenues dans le faisceau. En les divisant dans les genres de surfaces réglées et non réglées, on voit que les cônes forment la transition d'un genre à l'autre, puisque les tangentes d'inflexion, réelles dans les surfaces réglées, imaginaires conjuguées dans les surfaces non réglées, coïncident dans les cônes. Il y a donc trois cas à distinguer.

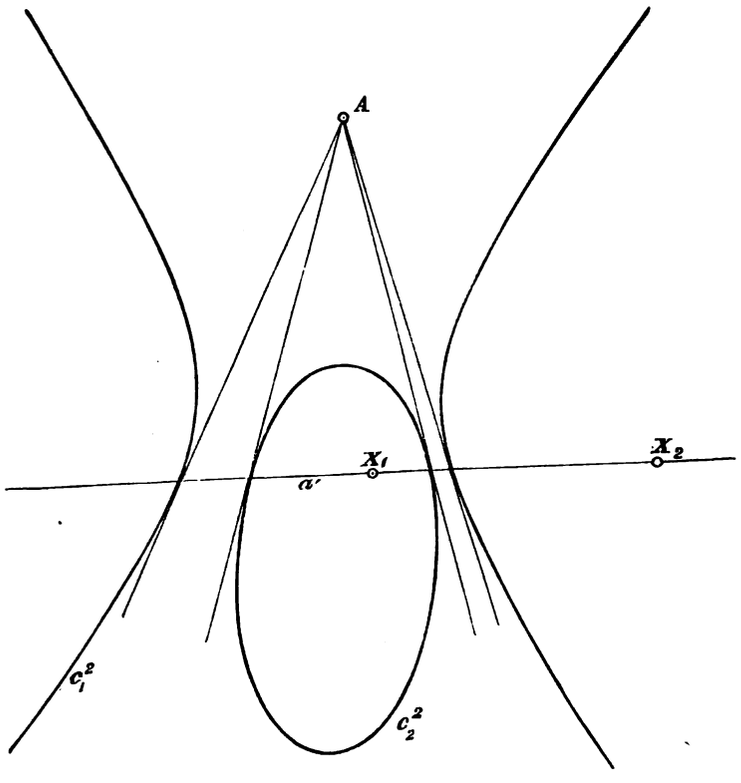
Digitized by Google

Quand les quatre points principaux sont imaginaires, il n'y aura qu'un genre de surfaces. Comme la courbe de base est réelle et qu'on peut toujours tirer une droite qui en joint deux points, les surfaces seront toutes réglées.

Quand deux des points principaux sont réels, il y aura une série de surfaces réglées et une série de surfaces non réglées, dont les deux cônes forment la transition.

Quand tous les points principaux sont réels, il y a à distinguer deux cas. En premier lieu, quand la courbe de base est réelle, le faisceau se composera de deux séries de surfaces réglées et de deux séries de surfaces non réglées, dont les quatre cônes forment la transition. En second lieu, quand la courbe de base est imaginaire, il y aura une série de surfaces imaginaires; deux cônes imaginaires en forment la transition avec les surfaces non réglées, et deux cônes réels celle des surfaces réglées avec ces dernières.

Fig. 4.



La figure 4 montre que les sommets des cônes sont dans ce dernier cas situés à l'intérieur des surfaces réelles, de sorte que l'existence de cônes imaginaires est évidente à l'œil. L'existence de surfaces imaginaires est d'ailleurs en harmonie avec l'existence de coniques imaginaires dans un faisceau de coniques à base imaginaire [1]).

Il est à remarquer que les surfaces non réglées se diviseront en ellipsoïdes et en hyperboloïdes à deux nappes, dont les paraboloïdes elliptiques forment

---

[1]) La démonstration de coniques imaginaires dans un faisceau se trouve dans STEINER-SCHRÖTER, Theorie der Kegelschnitte, 2e éd. p. 495—497. La connaissance complète des points principaux d'un faisceau est nécessaire pour faire une conclusion sur la nature des surfaces qui y appartiennent; cette

Digitized by Google

la transition, et que les paraboloïdes hyperboliques forment la transition entre deux groupes d'hyperboloïdes réglés. En remarquant que la cubique gauche conjuguée au plan à l'infini coupera celui-ci au moins dans un point, on tirera la conclusion qu'il y aura toujours au moins un paraboloïde.

Le faisceau de surfaces coupera le plan à l'infini dans un faisceau de coniques, dont les points principaux sont les points de contact des paraboloïdes; comme par un de ces points principaux il passera toujours deux tangentes d'inflexion, un de ces paraboloïdes sera toujours un paraboloïde hyperbolique. Le faisceau de coniques dans le plan à l'infini aura ensuite nécessairement trois points principaux réels, s'il contient des coniques imaginaires; comme cela aura lieu, quand le faisceau contient des ellipsoïdes ou des surfaces imaginaires, on en déduit:

Le faisceau de surfaces à courbe de base imaginaire contient toujours deux paraboloïdes elliptiques et un paraboloïde hyperbolique.

14. *Cas particuliers. a.* Quand la courbe gauche du quatrième ordre possède un point double A, son plan polaire pour toutes les surfaces du faisceau sera le plan tangent commun α (3. *a*). Le point A et le plan α, constituant deux points et deux plans principaux coïncidents, A sera donc le sommet d'un cône du faisceau qu'on pourrait nommer cône double.

Le plan α est coupé par le faisceau de surfaces dans un faisceau de coniques qui s'est transformé en faisceau involutoire de rayons, chaque couple de rayons conjugués étant représenté par les deux tangentes d'inflexion d'une surface. Les rayons doubles seront les génératrices des deux cônes simples, ils seront réels ou imaginaires conjugués. Les tangentes à la courbe gauche seront les génératrices d'intersection du cône double et du plan α. Par ce moyen on pourra distinguer un point double d'un point isolé.

Si A est un point de rebroussement, le cône double précité deviendra cône tangent à α et se confondra avec un des cônes simples, puisque le faisceau de rayons ne peut avoir plus de deux rayons doubles. Le cône A sera alors triple et son plan tangent sera un plan principal triple.

b. Quand la courbe gauche se transforme en une cubique gauche avec une corde, le nombre de points principaux est de deux, qui seront précisément les points d'intersection de la corde avec la courbe. Chacun de ces points pouvant

---

connaissance doit s'étendre sur tous les cas. Le cas de quatre et de deux points principaux réels est traité dans FIEDLER, Darstellende Geometrie, 3e éd. II p. 156. Dans les problèmes à résoudre le même auteur (p. 358 probl. 4) traite de la distribution des surfaces pour ces deux cas, puis il cite (p. 363 probl. 29) le cas de quatre points principaux imaginaires. J'ai tâché de donner une démonstration générale qui comprend en même temps le cas des surfaces imaginaires.

Digitized by Google

être considéré comme double, il y aura deux cônes doubles; leurs plans tangents le long de la corde seront les deux plans principaux doubles.

c. Dans les cas encore plus particuliers où la courbe se réduit à deux coniques ou à quatre droites, les points principaux s'indiquent instantanément et les cônes deviennent des plans.

15. *Rang de la courbe gauche du quatrième ordre.* Le rang de la courbe c.-à-d. le nombre de tangentes coupant une droite donnée se détermine de la manière suivante. Soit donnée la courbe c^4 et la droite d. En déterminant les polaires de d par rapport à toutes les surfaces du faisceau, on trouvera la surface réglée R^2, qui d'après (7) coupera c^4 au plus dans huit points; un plan mené par un de ces points et d sera un plan tangent à une surface du faisceau et contiendra une tangente de c^4; il s'ensuit:

Le rang de la courbe gauche du quatrième ordre est le huitième [1]).

Remarque. Quand d est une sécante de c^4, deux des tangentes précitées se confondent dans la tangente au point d'intersection; en omettant celles-ci on arrive au résultat:

Une sécante d'une courbe gauche du quatrième ordre est coupée par six tangentes, une corde ou une tangente par quatre.

Il s'ensuit encore:

Sur chacune des surfaces réglées appartenant au faisceau il y a quatre droites dans chacun des systèmes tangentes à la courbe de base. De même sur un des cônes du faisceau il y aura quatre génératrices tangentes à la courbe de base. Quand on se représente que dans le cas d'une pénétration un des cônes traverse un autre, et que dans un arrachement une partie d'un des cônes est en dehors de l'autre et l'autre partie au dedans, on voit que dans le premier cas on pourra combiner deux cônes dont l'un aura quatre génératrices de contact réelles et l'autre quatre génératrices de contact imaginaires, tandis que dans le second cas chacun des cônes aura deux génératrices de contact réelles et deux imaginaires.

16. *Courbe double.* Une tangente à la courbe gauche du quatrième ordre est coupée par quatre autres tangentes. Il s'ensuit qu'en déplaçant la tangente, en sorte qu'elle décrive la surface développable dont la courbe est l'arête de rebroussement, les points d'intersection décrivent un lieu géométrique, qui

---

[1]) J'ai employé pour la détermination du rang de la courbe la démonstration de M. Reye G. d. L., II p. 156 2e éd. C'est ici le lieu de faire remarquer la différence entre la méthode pour déterminer le rang etc. de la courbe gauche directement, et celle qui consiste à partir des formules de géométrie analytique données par Plücker pour les courbes planes, et à traduire celles-là dans l'espace. La seconde marche est suivie par M. Fiedler, qui en donne des applications heureuses à différents cas.

Digitized by Google

sera en général une courbe nommée courbe double. La courbe double se détermine de la manière suivante.

Considérons un des points principaux P_1 et son plan polaire π_1. La tangente t_1 en un point A de la courbe de base sera donnée par l'intersection du plan tangent α_1 au cône P_1 et du plan tangent α_2 mené par ce même point à un des autres cônes P_2. Comme la génératrice $P_1 A$ rencontre pour la seconde fois la courbe dans un point B, il y aura encore dans le plan α_1 une seconde tangente t_2, intersection de α_1 avec le plan tangent β_2 mené par $P_2 B$ au cône P_2. Comme les plans tangents α_2 et β_2 se coupent dans le plan π_1, les tangentes t_1 et t_2 auront de même leur point d'intersection dans ce plan. La conséquence sera, en supposant la génératrice $P_1 A$ mobile:

Les points d'intersection d'une tangente mobile t à la courbe du quatrième ordre avec les quatre autres tangentes décrivent quatre courbes planes, situées dans les plans principaux; ces courbes seront réelles ou imaginaires avec les cônes du faisceau. Comme une droite dans un plan principal est coupée par huit tangentes (15), et que dans chaque point d'intersection avec la courbe double elle en rencontre deux, chacune de ces courbes planes est du quatrième ordre. Elles couperont la courbe de base dans les points d'intersection de celle-ci avec les plans principaux et pourront y avoir des points d'arrêt. Comme sur chaque cône il y a quatre génératrices tangentes à la courbe gauche, la courbe double passera par les trois points principaux de chaque plan et y aura des points doubles, et comme dans son mouvement la tangente, coïncidente avec la génératrice du cône s'arrêtera en passant par le point de contact, ces points doubles seront des nœuds doubles d'inflexion.

Les points d'arrêt de la courbe montrent qu'elle peut avoir des parties imaginaires; il s'ensuit que dans un des points principaux les deux tangentes d'inflexion peuvent être imaginaires.

17. *Cas particuliers. a.* Le rang de la courbe s'abaisse, quand elle a un point double A. En construisant la surface réglée R^2, lieu géométrique des droites conjuguées à une droite donnée par rapport aux surfaces du faisceau, on voit qu'elle contient A, puisque A est le sommet d'un cône du faisceau. La surface R^2 ayant en outre encore six points d'intersection avec la courbe, le rang de celle-ci sera le sixième. Il s'ensuit encore qu'il y aura dans chacun des deux plans principaux simples une courbe double du troisième ordre, passant par le point double et ayant dans l'autre point principal un point d'inflexion.

b. Quand la courbe de base a un point de rebroussement A, la surface R^2 passera par ce point; comme le point de contact A de toutes les surfaces est dans ce cas un point de R^2 et que la tangente à la courbe est une tangente

Digitized by Google

de R^2, la courbe aura avec R^2 encore cinq points d'intersection, le rang sera donc le cinquième; la courbe double dans le seul plan principal simple sera une conique passant par le point de rebroussement, et ayant pour tangente la tangente de rebroussement; pour arriver au cinquième rang la conique doit être comptée deux fois et la tangente une fois.

c. Quand la courbe se réduit à une cubique gauche, il y a en dehors des deux points d'intersection avec la corde qui comptent doubles, encore quatre points d'intersection avec R^2, le rang de la courbe sera le quatrième et il n'y a pas de courbe double.

18. *Plans stationnaires.* La courbe gauche du quatrième ordre pourra encore avoir des plans stationnaires, contenant quatre points consécutifs de la courbe. En nommant quatre points consécutifs 1, 2, 3, 4, on voit que dans un tel plan seront situées les tangentes 12, 34; un plan stationnaire se trouve donc dans les points de rencontre de la courbe de base avec la courbe double.

En vertu de ce qui précède, on tire donc la conclusion suivante:

La courbe gauche du quatrième ordre aura en général seize plans stationnaires, tangents aux cônes du faisceau dans les points d'intersection avec la courbe double.

Quand la courbe a un point double, ce nombre se réduit à quatre, car les deux plans principaux simples rencontreront la courbe en deux points ordinaires chacun.

Quand la courbe a un point de rebroussement, il y aura un seul plan stationnaire, car le plan principal simple passant par la tangente du point singulier rencontre la courbe dans un seul point ordinaire.

Il est clair que les plans stationnaires peuvent être imaginaires [1]).

19. *Remarques générales.* Dans tout ce qui précède il n'a pas été question des problèmes réciproques à ceux qui ont été traités. Ces considérations réciproques peuvent se déduire directement des résultats trouvés. Ainsi, par exemple, au lieu d'aborder la courbe d'intersection de deux surfaces du second ordre, on peut considérer la surface développable commune de deux surfaces de la seconde classe; et un système de ces surfaces inscrites dans la même surface développable remplace le faisceau de surfaces du second ordre. Cette remarque suffira pour indiquer la voie qu'il faut suivre pour trouver tous les théorèmes, réciproques à ceux déjà trouvés.

Remarquons ensuite que la position des surfaces du second ordre détermi-

---

[1]) La note du n° 14 se rapporte aussi à la méthode employée ici pour trouver les autres propriétés particulières à la courbe gauche du quatrième ordre, l'ordre de la courbe double etc. J'ai partout suivi la méthode géométrique.

Digitized by Google

nant le faisceau, l'une par rapport à l'autre, a toujours été autant que possible exempte de particularités, excepté de celles qui, par l'apparition de points singuliers, méritaient une attention particulière. La généralité des considérations précédentes permet d'en faire des applications à des cas particuliers, par exemple au cas de deux surfaces concentriques et coaxiales. Comme les traités de géométrie descriptive s'occupent surtout de ces cas, il sera superflu de s'en occuper ici.

II. PROJECTION DES COURBES GAUCHES QUI RÉSULTENT DE L'INTERSECTION DES SURFACES DU SECOND ORDRE.

Dans cette partie il sera question de la projection des courbes qui ont été discutées dans la partie précédente, et le but sera surtout d'en étudier les formes diverses. C'est, je crois, M. Fiedler (Darstellende Geometrie II, § 26 3e éd.) qui le premier remarqua les diverses formes des courbes planes du quatrième ordre qui pouvaient s'obtenir par la projection centrale. Le but de ce mémoire étant d'obtenir ces formes indépendamment de théorèmes généraux en partie empruntés à la géométrie analytique, et de se borner aux courbes gauches du quatrième ordre, les méthodes de raisonnement seront dans quelques parties différentes; en outre on trouvera la solution et l'extension des exemples et des problèmes joints par l'auteur au paragraphe précité. Comme auparavant je signalerai dans des notes les analogies et les différences. A cause de sa généralité, la méthode de projection sera celle de la projection centrale.

1. *Projection générale de la courbe.* Soit un centre de projection quelconque C. Par le centre C passera toujours une surface du second ordre contenant la courbe gauche du quatrième ordre g^4. Les tangentes d'inflexion réelles ou imaginaires conjuguées passant par C seront des cordes de g^4. Un plan mené par C coupera le cône projetant en quatre génératrices; il s'ensuit:

La projection centrale de la courbe g^4 est une courbe plane du quatrième ordre p^4 avec deux points doubles D_1 et D_2. Ces points doubles peuvent devenir isolés, ce qui arrivera, quand les tangentes d'inflexion situées sur la surface du second ordre, déterminée par le centre et g^4, coupent la courbe en des points imaginaires conjugués. Si cette surface est elliptique (non réglée), les tangentes d'inflexion étant imaginaires conjuguées, les points doubles seront de même imaginaires conjuguées; une ponctuelle involutoire elliptique les remplacera. Un

Digitized by Google

des points singuliers peut être isolé et l'autre double. La droite $D_1 D_2$ est toujours réelle, c'est la trace du plan tangent en C à la surface, et en même temps la projection centrale de la droite c, conjuguée à C par rapport au faisceau de surfaces du second ordre passant par g^4.

Les tangentes de p^4 seront les projections des tangentes de g^4, les tangentes réelles ou imaginaires des points singuliers de p^4 pourront donc être construites ou représentées [1]).

La forme de la courbe consistera en deux parties, une seule partie, ou bien elle sera tout à fait imaginaire suivant les différents cas cités (I, 12).

La classe de la courbe sera la huitième. Joignons en effet un point P quelconque du plan de p^4 à C. La droite P C pourra être coupée par huit tangentes de g^4 au plus, les plans menés par P C et ces tangentes auront pour traces les tangentes issues de P à la courbe, ce nombre est donc aussi de huit.

2. *Tangentes doubles.* La courbe plane p^4 aura des tangentes doubles. Construisons en effet les cônes du faisceau, dont g^4 est la courbe de base et menons à eux des plans tangents par C; les traces de ces plans auront chacune deux points de contact avec p^4, à savoir aux projections des points de contact des plans tangents et de g^4. Les points d'intersection d'un couple de ces tangentes seront les projections des sommets des cônes. Il est évident qu'il y aura deux raisons pour lesquelles les tangentes peuvent être imaginaires, ou bien parce que les cônes peuvent devenir imaginaires, ou bien parce que le centre de projection est situé à l'intérieur d'un des cônes. Il s'ensuit:

La courbe plane du quatrième ordre à deux points doubles aura au plus huit tangentes doubles, se divisant en couples de deux. Quand la courbe est composée de deux parties coupées par une droite en un nombre pair de points les points d'intersection de ces couples sont réels, mais parmi les couples de tangentes il peut s'en trouver qui sont imaginaires conjuguées. Quand la courbe consiste en une seule partie, deux de ces points sont imaginaires et la courbe aura au plus quatre tangentes doubles. Quand chaque partie de la courbe est coupée par une droite en un nombre impair de points, les quatre points sont imaginaires; alors la courbe ne présente pas de tangentes doubles, mais il y aura toujours deux droites sur lesquelles sont situées des involutions qui représentent les points d'intersection des couples.

De ce qui a été remarqué (I, 12, 13) par rapport aux surfaces du faisceau, on déduit encore:

---

[1]) Dans ce n°. se trouve l'analyse et la solution du probl. 9 de la Géométrie Descriptive de FIEDLER II, p. 360.

Digitized by Google

Une courbe plane du quatrième ordre peut être tout à fait imaginaire. Dans ce cas elle pourra néanmoins avoir des éléments réels, à savoir deux points isolés et quatre tangentes doubles, tandis que deux autres points d'intersection de tangentes doubles sont réels, quoique les tangentes doubles elles-mêmes soient imaginaires conjuguées; les faisceaux de rayons représentant ces dernières sont la projection des intersections du plan polaire de C par rapport aux cônes imaginaires avec ceux-ci.

Une courbe projetée dont aucun des points d'intersection des couples de tangentes doubles n'est réel aura toujours deux points doubles dont l'un peut être isolé.

Remarque. Les couples de tangentes doubles sont des cas particuliers de coniques tangentes en quatre points. On obtient ces coniques en déterminant les plans polaires de C par rapport à toutes les surfaces du faisceau et en projetant la conique de contact.

3. *Cas particuliers de la courbe gauche. a.* Quand la courbe de base du faisceau a un point double ou isolé, la projection présentera, outre les points singuliers nommés, encore un point double ou isolé. Les tangentes de ce dernier point de p^4 seront les projections des tangentes du point singulier de g^4. La classe de la courbe plane, étant selon (II, 1) la même que le rang de la courbe gauche, sera la sixième.

Le nombre de tangentes doubles sera de même inférieur. Comme elles dérivent des cônes du faisceau, un couple de tangentes doubles disparaîtra en même temps qu'un cône, mais en outre le cône double ne comptera pas parmi ceux qui donnent des tangentes doubles; son sommet coïncidant avec le point singulier, les tangentes doubles de la projection se transformeront en deux tangentes passant par le point singulier de la courbe plane. Il y aura donc quatre tangentes doubles.

En appliquant les mêmes raisonnements à la courbe gauche à point de rebroussement, on voit sans peine que la courbe projetée aura deux points doubles ou isolés et un point de rebroussement, que la classe sera la cinquième et qu'il y aura deux tangentes doubles.

b. Quand la courbe de base se transforme en une cubique gauche, il n'y aura qu'une seule corde passant par C; la courbe projetée sera donc du troisième ordre à point double, la classe sera la quatrième et les tangentes doubles disparaîtront tout à fait [1]).

[1]) Dans ce n°. se trouvent la solution et la discussion des problèmes 9, 14 § 26 et 5—9 § 45 de FIEDLER, Géométrie Descriptive II. Le n°. 4 contient la solution et la discussion de la plupart des autres exemples de § 26 et § 45. A cause du caractère synthétique de cette étude, la recherche de la classe et des tangentes doubles devait se faire séparément pour chaque exemple.

Digitized by Google

4. *Positions particulières du centre de projection. a.* Soit d'abord C placé sur une tangente t de g^4. La tangente étant une corde par deux points consécutifs, un des points doubles devient un point de rebroussement. La classe de la courbe sera la septième, puisque la trace du plan tangent mené par t et la droite C P (II, 1) est une droite passant par le point de rebroussement de la courbe projetée. De même le nombre de tangentes doubles diminuera. En construisant comme auparavant (II, 2) les traces des plans tangents aux cônes du faisceau passant par C, on voit que quatre de ces traces sont des tangentes qui passent par le point de rebroussement; les autres seront les tangentes doubles.

b. Soit C le point d'intersection de deux tangentes, en d'autres mots, un point de la courbe double. Par un raisonnement analogue au précédent, on verra que la courbe projetée aura deux points de rebroussement R_1 et R_2; la classe de la courbe deviendra la sixième; il y aura une tangente double. Pour le démontrer, remarquons que C se trouvera nécessairement sur un des plans principaux π_1; en menant les plans tangents par C aux cônes $P_2 P_3 P_4$, dont les sommets sont situés dans π_1, on verra que ces traces seront des tangentes passant respectivement par les points R_1 et R_2; en construisant au contraire les plans tangents au cône dont le sommet n'est pas situé sur π_1, les traces se révèleront comme la droite $R_1 R_2$ et une seule tangente double.

c. Soit C situé sur un des cônes du faisceau. Les deux cordes, qui dans le cas précédent avaient pour traces les points doubles, se confondent; il en est de même des deux points doubles, qui se réunissent dans un nœud double. La classe de la courbe sera toujours la huitième et le nombre de tangentes doubles sera de six; la tangente au nœud double comptée double complètera le nombre jusqu'à huit.

d. Soit C situé sur une des génératrices du cône qui est en même temps une tangente de la courbe g^4 (I, 15 *Rem.*). La projection du point de contact fournira un point de rebroussement comme précédemment; comme la tangente en ce point est la trace du plan tangent du cône et que la courbe est située entièrement du même côté de ce plan tangent, la projection sera un point de rebroussement de seconde espèce, et la classe sera la septième. Parmi les plans tangents menés du point C aux cônes du faisceau, sur lesquels il n'est pas situé, il y en a trois dont les traces passent par le point singulier, les autres engendreront des tangentes doubles au nombre de trois; on peut y ajouter la tangente au point singulier.

e. Quand C est situé sur un plan stationnaire de g^4, la projection p^4 aura un point ondulatoire c.-à-d. un point composé de quatre points consécutifs en ligne droite.

Digitized by Google

f. Soit C situé sur g^4; un plan mené par C coupera g^4 encore en trois points, qui joints à C formeront trois arêtes du cône projetant. Celui-ci sera donc du troisième ordre. Une droite n'ayant jamais plus de deux points communs avec g^4, la courbe projetée p^3 sera du troisième ordre sans points singuliers; d'après (I, 15 *Rem.*) la courbe sera de la sixième classe. Le point C étant situé sur chacun des quatre cônes du faisceau, les plans tangents par C ont pour traces les quatre tangentes menées à la courbe plane par un de ses points, à savoir par la projection de C; la tangente à la projection de C complète l'ordre de p^3 au quatrième.

g. Enfin le point C peut coïncider avec un point principal du faisceau; la projection sera une conique [1]).

5. *Projection particulière des cas particuliers de la courbe.*

α. Soit d'abord donnée la courbe gauche à point double.

a. En vertu des principes précédents on voit que, quand C est situé sur une tangente, la courbe projetée p^4 aura deux points doubles et un point de rebroussement, la classe sera la cinquième (II, 4 *a*), il restera deux tangentes doubles, à savoir les traces des deux plans tangents des cônes simples qui ne passent pas par la tangente donnée.

b. Quand C est situé sur la courbe double, p^4 aura deux points de rebroussement et un point double, la classe sera la quatrième; il y aura une tangente double, trace du plan tangent au cône dont le sommet n'est pas situé dans le plan principal qui contient la courbe double.

c. Quand C est situé sur un des cônes simples, on pourra distinguer plusieurs cas.

En premier lieu C peut se trouver sur une génératrice quelconque. p^4 aura un nœud double et un point double. La classe sera la sixième, les tangentes doubles, au nombre de deux, seront les traces des plans tangents du cône simple sur lequel C n'est pas situé; la tangente au nœud double compte pour deux tangentes doubles.

En second lieu C peut se trouver sur une génératrice de contact. La projection aura un point double et un point de rebroussement de seconde espèce; la classe sera la cinquième; il y aura une tangente double ordinaire provenant d'une génératrice de contact du cône sur lequel C n'est pas situé (II, 4 *d*).

En troisième lieu C peut être situé sur la génératrice passant par le point double; la projection du point double coïncidant avec celle du nœud double engen-

---

[1]) La comparaison des résultats obtenus dans les nos 3, 4, 5 avec le tableau général des courbes du quatrième ordre donné par SALMON-FIEDLER, Höhere ebene Curven 2e éd., Chap. 6 N° 244 et les remarques qui y sont jointes constatent l'identité des résultats.

Digitized by Google

drera une réunion de trois points doubles qu'on pourrait appeler nœud osculatoire. La classe sera la sixième; il y a une tangente double ordinaire comme auparavant.

d. Quand C est situé sur le cône double, on peut encore distinguer deux cas.

En premier lieu C peut être situé sur une génératrice quelconque. Dans la projection se réuniront trois points, ayant trois tangentes distinctes, à savoir la trace du plan tangent à la génératrice projetante et celles des plans menés par C et les tangentes au point double. La projection p' a donc un point triple. La classe de la courbe ne changera pas (sixième classe); les tangentes doubles, au nombre de quatre, sont les traces des plans tangents aux autres cônes du faisceau.

En second lieu C peut se trouver sur une tangente du point double. p' aura un point singulier se composant d'un point de rebroussement, par lequel passe une branche de la courbe; la classe se réduira à la cinquième (II, 4 *a*); il y aura deux tangentes doubles ordinaires, traces des plans tangents aux cônes simples qui ne se confondent pas avec le plan tangent commun.

e. Quand C est situé sur la courbe, la projection sera une courbe du troisième ordre à point double et de la quatrième classe.

β. Soit ensuite donnée la courbe gauche à point de rebroussement. Les formes de la projection pourront se déduire de ce qui précède. Il ne restera qu'un cône simple, ce qui simplifie la recherche des tangentes doubles.

a. Quand C est situé sur une tangente de g', p' aura un point double et deux points de rebroussement, la classe est la quatrième; il y a une seule tangente double, trace du plan tangent au cône simple qui ne contient pas la tangente donnée.

b. Quand C est situé sur la courbe double, p' aura trois points de rebroussement, la classe sera la troisième; une tangente double sera la trace du plan tangent au cône simple le long de la génératrice, qui n'est pas située dans le plan de contact commun.

c. Quand C est situé sur le cône simple, il y a différents cas.

D'abord C peut se trouver sur une génératrice quelconque; p' aura un point de rebroussement et un nœud double; la courbe sera de la cinquième classe, les tangentes doubles ordinaires disparaîtront.

Quand ensuite C est situé sur la génératrice passant par le point de rebroussement, p' aura un point singulier, provenant de la combinaison de deux points doubles consécutifs et d'un point de rebroussement. Comme ce point singulier n'a qu'une tangente, il est à distinguer du cas (α, *d*); on pourrait le nommer nœud tangentiel de rebroussement; la classe de la courbe sera la cinquième.

Quand enfin C est situé sur une tangente de la courbe g', p' aura un point de rebroussement de la première et de la seconde espèce; la classe sera la quatrième.

d. Quand C est situé sur le cône triple, on distingue les deux cas suivants.

Digitized by Google

En premier lieu C peut se trouver sur une génératrice quelconque, p^4 aura un point de rebroussement et une branche de la courbe passant par lui, la classe est la cinquième; il y a deux tangentes doubles, traces des plans tangents au cône simple.

En second lieu C peut se trouver sur la tangente à g^4 dans le point de rebroussement. p^4 aura un point singulier, composé de deux points de rebroussement et d'un point double; ce point singulier ne se distinguera à l'œil en rien des autres points de la courbe; la classe sera la quatrième et il y aura une tangente double.

e. Quand C se trouve sur la courbe, on aura une courbe du troisième ordre à point de rebroussement.

γ. La seule position du point C par rapport à la cubique gauche qu'il importe d'examiner, est le cas où C se trouve sur une tangente, la courbe projetée sera une courbe du troisième ordre à point de rebroussement et de la troisième classe.

Remarque. Dans ce qui précède il a été tacitement admis que le point singulier de la courbe gauche est un point double et non un point isolé. Les raisonnements employés pour les diverses formes des courbes ne subissent pas de changement, quand ce point serait isolé; seulement dans ce cas la forme visible de la courbe sera différente, parce que parmi les tangentes il y en aura qui sont imaginaires. De cette manière on explique l'origine du nœud double situé hors de la courbe et du point triple à deux tangentes imaginaires.

III. CONSTRUCTION ET INTERSECTION DES COURBES PLANES D'APRÈS LES PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE SYNTHÉTIQUE.

Le chapitre précédent a démontré que, par la projection de la courbe de base d'un faisceau de surfaces du second ordre, toutes les formes de courbes du quatrième ordre à deux points doubles au moins peuvent s'obtenir; il importe de considérer les méthodes de construction selon les principes de la géométrie synthétique. En effet, il ne suffit pas qu'on sache d'avance la forme de la projection d'une intersection de surfaces, il importe aussi de pouvoir opérer sur le plan de projection avec un nombre donné d'éléments, afin de se dispenser de recourir à la projection pour obtenir autant de points d'une courbe qu'on voudra, et afin

Digitized by Google

de pouvoir déterminer les points d'intersection qui pourraient être demandés. Le but de cette section sera donc de réunir aussi systématiquement que possible quelques constructions de géométrie; comme auparavant j'indiquerai dans les notes quelques sources.

1. *Génération des courbes.*

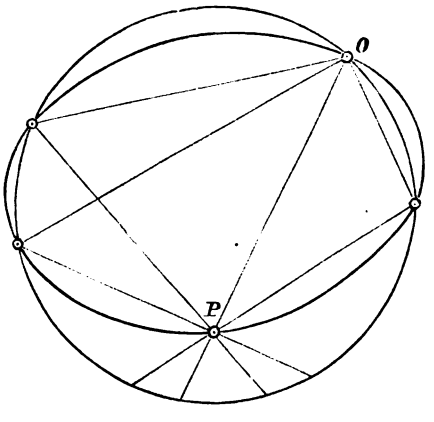
a. Deux faisceaux de rayons projectifs engendrent par l'intersection de leurs rayons homologues une conique.

b. Un faisceau de rayons et un faisceau de coniques qui y est projectif engendrent par l'intersection de leurs éléments homologues une courbe du troisième ordre.

c. Deux faisceaux de coniques projectifs engendrent par l'intersection de leurs coniques homologues une courbe du quatrième ordre.

La démonstration se fait dans les trois cas en déterminant l'intersection de la courbe avec une droite. Dans le premier cas deux ponctuelles projectives sont déterminées sur la droite, dans le second une ponctuelle simple projective à une ponctuelle involutoire, dans le troisième deux ponctuelles involutoires projectives. Les points d'intersection sont les éléments homologues unis des deux formes projectives. Le premier cas donne comme on sait deux éléments unis; la démonstration du troisième se ramène à (I, 6, fig. 1) en projetant les ponctuelles involutoires projectives d'un point O; quant au deuxième cas, en projetant d'un point O les deux ponctuelles (fig. 5), on aura un faisceau de rayons concentrique et projectif à un faisceau involutoire de rayons. Menons un cercle par O, construisons le point central de l'involution P par rapport au cercle; P et O seront les centres de deux faisceaux projectifs, qui engendreront une conique ayant quatre points d'intersection avec le cercle dont O en sera un; les trois autres donnent des rayons par O qui couperont la droite dans les points d'intersection avec la courbe qui sera donc du troisième ordre [1]).

Fig. 5.



Remarque. La démonstration donnée est indépendante de la réalité des points de base des faisceaux de coniques.

2. *Courbes imaginaires.* D'après (I, 12) et (II, 2) les courbes du quatrième et

[1]) Reye (Geometrie der Lage, II 244, 2e éd.) arrive à la génération de courbes du quatrième ordre par un tout autre raisonnement basé sur le système de surfaces du second ordre d'un ordre supérieur à la gerbe (F². Gerbüsch).

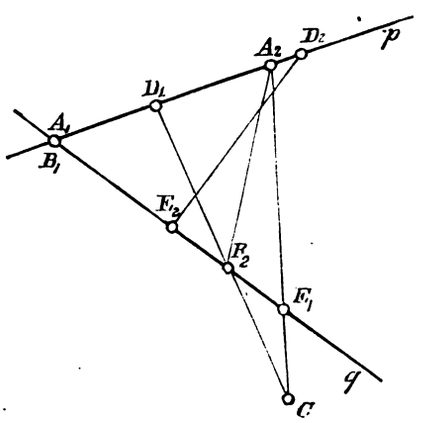
Digitized by Google

du second ordre peuvent être imaginaires; comme le cas peut se présenter dans un faisceau de surfaces du second ordre, et que d'ailleurs il n'est pas nécessaire, qu'une surface réelle ait une intersection réelle avec un plan, deux cas de coniques qui peuvent être imaginaires seront traités ici. Il est clair que les points de ces coniques ne peuvent être donnés que par des involutions à points doubles imaginaires.

a. Soient d'abord données deux ponctuelles involutoires elliptiques, qui sont en même temps un couple de droites conjuguées par rapport à la conique imaginaire. Il sera démontré qu'on pourra construire la polaire d'un point donné par rapport à la conique imaginaire, le pôle d'une droite donnée et l'involution elliptique sur une droite qui représente ses deux points d'intersection avec la conique.

Les droites données étant p et q, on déterminera les points conjugués de leur point d'intersection (A_1 sur p, B_1 sur q) sur les deux involutions; la droite $A_2 B_2$ sera la polaire de ($B_1 A_1$) (fig. 6). Soit à déterminer la polaire d'un point C. Tirons la droite $C B_2$ qui coupe p en D_1; en déterminant sur p le point D_2 conjugué à D_1, D_2 sera le pôle de $C B_2$. De même on construira le pôle E_2 de $C A_2$. La droite $D_2 E_2$ est la polaire de C. La construction réciproque donne le pôle d'une droite donnée. En construisant les polaires de deux points d'une droite, on trouvera, par leurs intersections avec la droite, deux points conjugués aux points donnés, qui suffisent pour déterminer la ponctuelle involutoire sur cette droite.

Fig. 6.



b. Soient en second lieu données trois droites p, q, r avec leurs ponctuelles involutoires elliptiques (fig. 7). On pourra comme auparavant construire les polaires a, b, c des points d'intersection $q r$, $p r$, $p q$; le triangle abc, étant le triangle polaire du triangle pqr, doit être perspectif à ce dernier, condition à laquelle les ponctuelles données doivent suffire. Si la condition est remplie, le problème précédent peut se résoudre. Pour déterminer la polaire d'un point donné D, tirons D A qui coupera p en E_1, le point E_2 conjugué à E_1 sera le pôle de D A, de la même manière le pôle F_2 de D B se construit; la droite $F_2 E_2$ sera la polaire de D et la construction se continuera comme dans l'exemple précédent [1]).

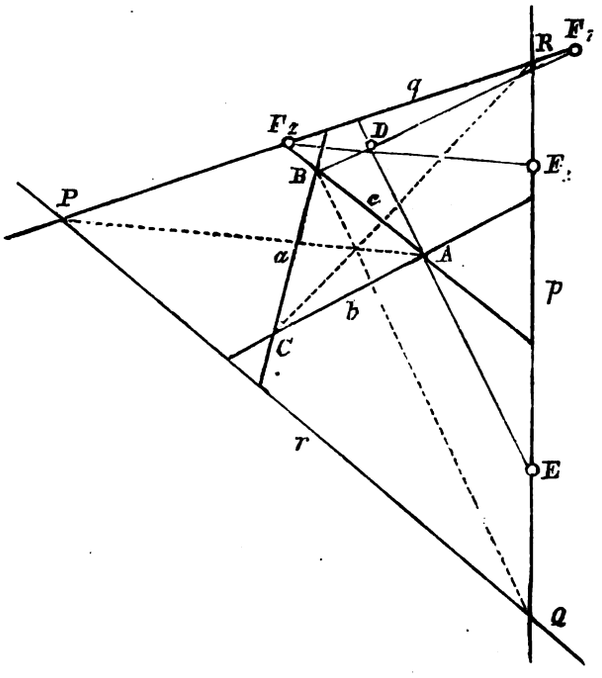
[1]) Ces données de coniques imaginaires ont été choisies en harmonie avec les problèmes qui suivront. La théorie des coniques imaginaires et les données possibles font l'objet de la quatrième partie de Steiner-Schröter, Theorie der Kegelschnitte p. 413 etc. 2e éd., Les cas traités ici y appartiennent.

Digitized by Google

3. *Points doubles.*

a. Soient A_1 et A_2 les centres des deux faisceaux de rayons projectifs qui engendrent une conique; le rayon du faisceau A_1 homologue à $A_2 A_1$ sera une tangente à la conique et réciproquement. Figurons-nous que la conique devrait être engendrée par deux faisceaux concentriques; tous les rayons de A_2 passant par A_1, les rayons homologues de A_1 auront tous le caractère de tangentes, c.-à-d. $A_1 A_2$ est un point double et la conique à point double est identique avec deux droites réelles ou imaginaires passant par $A_1 A_2$. Ces droites seront les rayons unis des deux faisceaux concentriques, ces rayons pouvant être considérés comme ayant trois points d'intersection avec la conique.

Fig. 7.



b. La transition aux courbes du troisième ordre montre que les tangentes au centre du faisceau de rayons et aux points de base du faisceau de coniques peuvent se construire de la manière suivante. Soient $A_1 B_1 C_1 D_1$ et A_2 les points de base des faisceaux. En menant la conique $A_1 B_1 C_1 D_1 A_2$, le rayon du faisceau A_2, homologue à cette conique, sera une tangente de la courbe du troisième ordre c^3; de même les coniques homologues aux rayons $A_2 A_1$, $A_2 B_1$, $A_2 C_1$, $A_2 D_1$ auront pour tangentes dans les points de base les tangentes à c^3 dans ces points. En faisant coïncider le point A_2 avec A_1, on voit que toutes les tangentes aux coniques du faisceau en ce point ont deux points coïncidents en commun avec c^3; ce point $(A_1 A_2)$ sera donc un point double. Le faisceau de tangentes étant concentrique et projectif au faisceau de rayons, il y aura deux rayons unis réels ou imaginaires; ceux-là, étant les rayons du faisceau A_2 tangentes aux coniques qui y sont homologues, seront les tangentes au point double de c^3. La différence du point isolé et du point double se voit clairement par cette construction; de même le point de rebroussement paraît, quand les deux faisceaux ont leurs rayons unis coïncidents.

c. En appliquant les méthodes de raisonnement des deux cas précédents à

Digitized by Google

la courbe du quatrième ordre c^4, engendrée par les deux faisceaux projectifs $A_1 B_1 C_1 D_1$, $A_2 B_2 C_2 D_2$ on voit sans peine:

Les tangentes aux coniques du faisceau $A_2 B_2 C_2 D_2$ homologues aux coniques $A_1 B_1 C_1 D_1 A_2 \ldots$ etc. seront en même temps des tangentes à la courbe c^4 dans les points A_2, B_2, C_2, D_2.

Quand un point de base d'un des faisceaux coïncide avec un point de base de l'autre, ce point sera un point singulier de c^4. Les tangentes aux coniques homologues des deux faisceaux formeront deux faisceaux de rayons projectifs concentriques.

Selon que leurs rayons unis seront réels, imaginaires ou coïncidents, le point singulier sera double, isolé ou de rebroussement [1]).

4. *Formes générales des courbes planes.* En comparant les méthodes de construction des courbes planes à celles de la projection des courbes gauches, on voit que la plupart des formes mentionnées dans la section (II) peuvent être obtenues au moyen de faisceaux projectifs. La méthode précédente mène aux courbes planes du quatrième ordre à deux ou trois points singuliers et aux courbes du troisième ordre avec ou sans points singuliers, de sorte qu'il reste seulement les cas ou deux ou trois points singuliers coïncident. Il est à remarquer que la construction directe contient encore le cas de deux points doubles imaginaires conjugués.

En effet, comme la démonstration de l'ordre de la courbe est indépendante de la réalité des points de base des faisceaux, il se peut que deux de ces points de base imaginaires conjugués d'un des faisceaux coïncident avec les points de base imaginaires conjugués de l'autre. Il y aura en ce cas une droite réelle sur laquelle deux ponctuelles involutoires identiques marquent l'existence de deux points doubles imaginaires. Les autres formes peuvent s'obtenir en donnant une position particulière aux faisceaux générateurs, ce dont les exemples suivants donneront la preuve.

5. *Cas particuliers. a.* Quand les deux faisceaux sont composés de coniques passant par deux points $B_1 C_1$ et $B_2 C_2$ et tangentes à la même droite a dans le même point A, cette droite et ce point étant les mêmes pour les deux faisceaux, ce point A sera un nœud double de c^4; les deux points doubles seront consécutifs.

b. Quand les deux faisceaux sont composés de coniques, ayant le même cercle

[1]) J'ai donné la construction des tangentes au point double d'une courbe du quatrième ordre dans un article inséré dans le Journal de Crelle, T. CII p. 166. J'ai tâché ici de montrer clairement l'analogie des constructions dans les courbes de divers ordres.

Digitized by Google

osculateur dans un point et que ce cercle osculateur est le même pour les deux faisceaux, la courbe aura dans ce point un nœud osculatoire; il y aura en effet une réunion de trois points doubles consécutifs.

c. Soit F_1 un faisceau de rayons en involution, dont le centre est A. En menant une conique du second faisceau F_2 par A, on voit qu'il y a deux tangentes en A, à savoir le couple de rayons de l'involution homologue à la conique. A est donc un point double. Qu'on s'imagine maintenant ce point A, coïncidant avec un point de base du faisceau F_2, le point double deviendra un point triple, puisque les tangentes différentes se maintiennent. Au lieu de deux faisceaux de rayons projectifs (III, 3 *c*), nous aurons ici un faisceau de rayons simples, projectif à un faisceau de rayons en involution. Pour construire les éléments correspondants coïncidents, on peut appliquer la construction de (III, 1); ces rayons coïncidents, au nombre de trois, sont les tangentes au point triple; la construction montre en même temps que deux des tangentes ou toutes les trois peuvent coïncider, ce qui arrivera, si le cercle et la conique de la fig. 5 auront un contact ou une osculation. Dans ces deux derniers cas il y aura un point de rebroussement avec une branche de la courbe passant par lui, ou une combinaison de deux points de rebroussement avec un point double; ce dernier point ne diffère pas visiblement d'un point ordinaire de la courbe.

d. Les exemples donnés suffiront pour montrer de quelle manière les cas particuliers peuvent se présenter. Un cas particulier mérite cependant d'être relevé, c'est la génération d'une courbe du quatrième ordre par deux faisceaux involutoires de rayons à centres différents. D'après ce qui précède, les centres des deux faisceaux seront des points doubles. Les tangentes qu'on peut tirer de ces points doubles à la courbe seront les couples de rayons d'un des faisceaux, homologues aux rayons doubles de l'autre; et réciproquement on voit qu'on pourra tirer quatre tangentes d'un des points doubles à la courbe, et que deux des points de contact sont en ligne droite avec l'autre point double. Les tangentes au point double seront le couple de rayons d'un des faisceaux homologue au couple particulier de l'autre, qui passe par le premier centre.

La génération de la courbe du troisième ordre à point double au moyen d'un faisceau involutoire de rayons et d'un faisceau ordinaire qui lui est projectif est une conséquence directe de la construction précédente.

6. *Intersection d'une conique avec une courbe du troisième ou quatrième ordre.* La génération précédente des courbes du troisième et du quatrième ordre donne lieu à de nombreux problèmes d'intersection, dont je choisirai ceux qui trouveront une application dans les problèmes de géométrie descriptive de la section IV. On suppose d'abord que les courbes sont données, d'après ce qui précède,

Digitized by Google

par leurs faisceaux générateurs. Le cas le plus général qui sera examiné sera celui de l'intersection d'une courbe du quatrième ordre c^4 avec une conique passant pár ses deux points doubles.

Soient les faisceaux générateurs donnés par les points $A\,B\,C_1\,D_1$, $A\,B\,C_2\,D_2$ et soit c^2 la conique qui passe par les points A et B. Les coniques du premier faisceau couperont c^2 chacune en deux points; les cordes d'intersection passeront toutes par un même point P_1 et formeront un faisceau de rayons, projectif au premier faisceau de coniques; de même les coniques du second faisceau engendreront un faisceau de rayons P_2 projectif au faisceau P_1. Les faisceaux P_1 et P_2 engendreront une conique dont les points d'intersection avec c^2 coïncident avec les points d'intersection de c^2 et de c^4. Le problème est ainsi ramené à l'intersection de deux coniques (I, 1); il s'ensuit:

Une conique passant par les points doubles d'une courbe du quatrième ordre détermine avec elle encore quatre points d'intersection, qui seront réels ou deux à deux imaginaires conjugués; en tout cas il y aura deux cordes toujours réelles sur lesquelles les points d'intersection sont représentés par des involutions.

L'intersection d'une courbe du troisième ordre c^3 avec une conique passant par deux points de base du faisceau de coniques générateur peut être considérée comme un corollaire de la construction donnée. La conique c^2 passant par les points de base A et B sera coupée par chacune des coniques en deux points, qui, comme précédemment, engendreront le faisceau de rayons P_1. Ce faisceau est dans ce cas projectif au faisceau de rayons générateur de la courbe du troisième ordre; la conique résultante coupera c^2 et c^3 dans des points coïncidents; on en déduit:

Une conique passant par deux points de base du faisceau de coniques générateur d'une courbe du troisième ordre aura avec elle encore quatre points d'intersection au plus, qui peuvent deux à deux être imaginaires conjugués.

Comme les points doubles d'une courbe du quatrième ordre sont deux points réunis, le nombre total de points d'intersection dans le premier cas est de huit, dans le second cas de six [1]).

7. *Construction d'une courbe du troisième ordre.* Dans la plupart des problèmes les faisceaux générateurs ne sont pas donnés, mais la courbe est déterminée par un certain nombre de points. Pour la construction des coniques le cas n'offre aucune difficulté; quand on a choisi le premier faisceau de rayons, le centre du

[1]) Une théorie plus complète des points d'intersection de deux courbes se trouve dans le mémoire précité du Journal de Crelle CII, pag. 163—167, où j'ai pris pour base une construction plus générale. Les deux exemples donnés ici sont des cas particuliers du probl. 5 *b* de ce mémoire. La construction des points d'intersection d'une droite et d'une courbe du quatrième ordre dans ce travail-là est réciproque à celle donnée ici.

Digitized by Google

second sera un point quelconque de la conique. Pour les courbes d'un degré supérieur le choix du premier faisceau déterminera celui du second, comme la construction suivante fera voir. Cette construction remarquable, qui sans doute peut être étendue à un grand nombre de cas, est due à M. Reye [1]). A cause de sa portée je la reproduirai ici dans ses caractères généraux.

Soient donnés huit points indiqués par les chiffres 1, 2 .... 8. Choisissons comme points de base du premier faisceau 1, 2, 3, 4 et admettons d'abord que 5 soit le centre du faisceau de rayons générateur. Il est clair qu'une courbe du troisième ordre passant par ces huit points sera déterminée, car, pour arrêter la projectivité du faisceau de coniques et du faisceau de rayons, on peut considérer comme homologues les rayons 5—6, 5—7, 5—8 et les coniques passant par ces mêmes points 6, 7, 8 et qui seront nommées c_6^2, c_7^2, c_8^2. Mais en même temps il se révèle, que cette courbe n'est pas la seule, car en construisant le rayon l du faisceau 5 homologue à la conique 1 2 3 4 5 (c_5^2), on pourra mener une conique par les points 6, 7, 8 et tangente à l en 5; cette conique c^2 sera le lieu géométrique de tous les centres du second faisceau générateur des courbes du troisième ordre passant par les huit points donnés. En effet, en nommant A un point de c^2, on voit que le faisceau A — 6 7 8 5 sera projectif au faisceau 5 — 6 7 8, l et que les rayons homologues se coupent sur des points de la courbe du troisième ordre. On pourra donc faire passer une courbe du troisième ordre par un neuvième point encore, car, en remplaçant le point 8 par un point 9, on voit qu'on pourra construire une seconde conique qui contiendra les points 5 6 7 9 et aura donc un quatrième point commun avec c^2. Ce point sera le centre du faisceau de rayons. Pour le déterminer, on pourra construire le rayon l' de 5, homologue à c_9^2, qui coupera c^2 en un point P; la droite P — 9 coupera c^2 encore dans un second point Q, centre du faisceau de rayons. Un faisceau de coniques passant par quatre points d'une courbe du troisième ordre détermine donc sur elle un seul point fixe, centre du faisceau générateur de rayons.

8. *Intersection de deux courbes du troisième ordre.* Les principes précédents mènent à la construction de l'intersection de deux courbes du troisième ordre c_1^3 et c_2^3, dont une passe par les points de base du faisceau de coniques générateur de l'autre. Soient donnés les points de base A B C D de c_1^3 et imaginons-nous que c_2^3 passe par ces points et un cinquième point E de c_1^3. Le faisceau A B C D déterminera sur c_1^3 et c_2^3 un point; ce seront les centres Q_1 et Q_2 des faisceaux de rayons générateurs des deux courbes; ces faisceaux, étant

[1]) Geometrie der Lage II, 210.

Digitized by Google

projectifs tous les deux au faisceau A B C D, engendreront une conique passant par Q_1 et Q_2 dont les points d'intersection avec c_1^3 seront identiques avec ceux de c_1^3 et de c_2^3. En construisant ceux de c_1^3 et de la conique, on voit que ces deux courbes ont en commun les points Q_1 et E; et en choisissant A B Q_1 E pour points de base d'un faisceau générateur de c_1^3, le problème se ramène au second problème du n°. 6. Le nombre de points d'intersection sera donc de quatre en dehors de ceux déjà donnés; le nombre total est donc de neuf.

9. *Courbes unicursales du troisième et du quatrième ordre.* Les courbes unicursales du troisième ordre c.-à-d. celles qui ont un point double ou de rebroussement, se construisent plus facilement, quand ce point singulier se trouve parmi les données du problème. On n'aura alors plus besoin de chercher le centre du faisceau de rayons, ce centre coïncidant avec le point singulier. Pour la construction il faudra encore six points, à savoir les trois autres points de base du faisceau générateur de coniques et trois points pour régler le rapport projectif des deux faisceaux; cela s'accorde avec les trois conditions renfermées dans un point double.

Les courbes unicursales du quatrième ordre sont celles à trois points doubles; chez elles aussi la construction est très simple, quand les points doubles sont donnés. Soient en effet A, B, C les trois points doubles, et D_1 le quatrième point de base du premier faisceau. Une conique par A, B, C, D_1 ayant en dehors de ces points encore un seul point d'intersection E avec la courbe du quatrième ordre (III, 6), une conique du second faisceau passera par A, B, C, E et un point quelconque D_2 de la courbe; il s'ensuit:

Une courbe du quatrième ordre à trois points doubles est déterminée et peut être construite par les trois points doubles et cinq points ordinaires. On choisit pour points de base des faisceaux générateurs les trois points doubles et deux des points donnés; les trois autres points règlent le rapport projectif des deux faisceaux.

10. *Construction des courbes du quatrième ordre à deux points doubles.* La projection d'une courbe gauche du quatrième ordre aura en général deux points doubles (II, 1); il est donc surtout important de pouvoir construire celle-ci avec des éléments donnés. Un raisonnement analogue à celui du n°. 7 fait prévoir que du choix d'un des faisceaux dépendra le choix du second. Menons en effet une conique par les deux points doubles A et B et les deux autres points de base du premier faisceau C_1 et D_1; cette conique coupera la courbe du quatrième ordre c^4 encore en deux points E et F, de sorte qu'on pourra encore choisir librement un point de base C_2 du second faisceau, l'autre point sera déterminé comme le dernier point d'intersection de c^4 avec la conique A B E F C_2. La construction offre un

Digitized by Google

exemple de l'application de la méthode de Reye aux courbes d'un ordre supérieur [1]).

Soient donnés deux points doubles A, B et sept points ordinaires qu'on nommera 1, 2, 3....7. En choisissant comme points de base des deux faisceaux générateurs A.B.1.2 et provisoirement A.B.3.4., le rapport projectif des deux faisceaux est déterminé par les points 5, 6, 7. On verra néanmoins que, quand le point 3 est supposé fixe, le point 4 parcourt un lieu géométrique. Nommons la conique du faisceau A B 1 2 qui passe par le point 4, c_4^2 et construisons une courbe du quatrième ordre c_1^4 dont les trois points doubles sont A, B, 3, qui contient encore les points 5, 6, 7 et qui soit tangente dans le point 4 à la tangente de la conique d_4^2 du faisceau A B 3 4, qui est homologue à c_4^2. D'après (9) une courbe du quatrième ordre peut être construite avec trois points doubles et cinq points, la courbe c_1^4 est donc déterminée, et on voit que le quatrième point de base du second faisceau peut avoir sur elle toutes les positions possibles; la courbe c_1^4 est donc le lieu géométrique du quatrième point de base du faisceau A B 3...; pour chacune des positions de ce point on pourra construire une courbe du quatrième ordre passant par les points donnés.

On peut assujetir la courbe à contenir un huitième point ordinaire 8; pour trouver dans ce cas le quatrième point de base, on détermine la conique c_8^2 du faisceau A B 1 2 et la conique homologue d_8^2 de A B 3 4. La conique d_8^2 coupera c_1^4 dans un point P et enfin une conique menée par les points A B 3 P 8 coupera c_1^4 dans le quatrième point Q du second faisceau générateur.

Remarque. Les paragraphes 7—10 de cette section contiennent un grand nombre de cas particuliers; de même il peut se trouver dans les données des éléments imaginaires. D'après les remarques faites en d'autres endroits, on pourra maintenant sans peine exécuter les constructions dans ces cas et apporter les simplifications nécessaires dans les constructions générales. Les problèmes de géométrie descriptive en donneront des exemples.

---

[1]) J'ai donné cette construction dans l'étude citée, Journal de Crelle CII p. 168. Pour conserver l'unité dans la présente étude, je la reproduis ici à peu près dans la même forme; en effet, il est surtout essentiel de pouvoir construire la courbe du quatrième ordre à deux points doubles.

Digitized by Google

IV. SOLUTION DE QUELQUES PROBLÈMES SUR LA CONSTRUCTION ET L'INTERSECTION DES SURFACES DU SECOND ORDRE.

En résumant le contenu de la seconde et de la troisième section, on voit que, tandis que la seconde contient les éléments nécessaires pour connaître la forme des projections des courbes d'intersection de surfaces du second ordre, la troisième fait clairement voir le nombre d'éléments dont on doit disposer pour pouvoir les construire. La solution de problèmes compliqués de géométrie résulte nécessairement de la combinaison de ces deux principes, comme je le montrerai par les problèmes dont j'indiquerai la solution. Ces problèmes peuvent naturellement être augmentés d'un nombre quelconque d'autres; autant que possible j'en ai choisi quelques-uns que je n'ai pas vu résolus dans les traités de géométrie descriptive.

L'intention de cette étude étant d'indiquer seulement la solution de ces problèmes et non de l'effectuer, j'ai donné quelque généralité aux données; il sera facile d'en déduire autant de problèmes particuliers plus simples qu'on voudra; les figures jointes aux solutions ont seulement pour but de venir en aide à la considération stéréométrique. Pour éviter cependant les complications autant que possible, la méthode de projection sera celle de la projection orthogonale. Le principe général fréquemment appliqué sera celui de l'invariabilité des rapports projectifs par la projection, de sorte que, par exemple, deux faisceaux projectifs dans l'espace se projettent dans un plan comme des faisceaux projectifs; un faisceau de coniques situé dans un plan se projette dans un autre plan comme un faisceau de coniques, et ainsi de suite. Il sera ensuite naturel de diviser la solution de chaque problème en deux parties, la solution stéréométrique et la solution descriptive ou graphique. Cela posé les problèmes suivants peuvent être discutés.

Problème I. Etant données deux surfaces du second ordre S_1^2 et S_2^2, déterminer les projections d'une section plane d'une surface du second ordre S_3^2, passant par un point A et appartenant au faisceau $S_1^2 S_2^2$. Chacune des surfaces est donnée par trois diamètres conjugués.

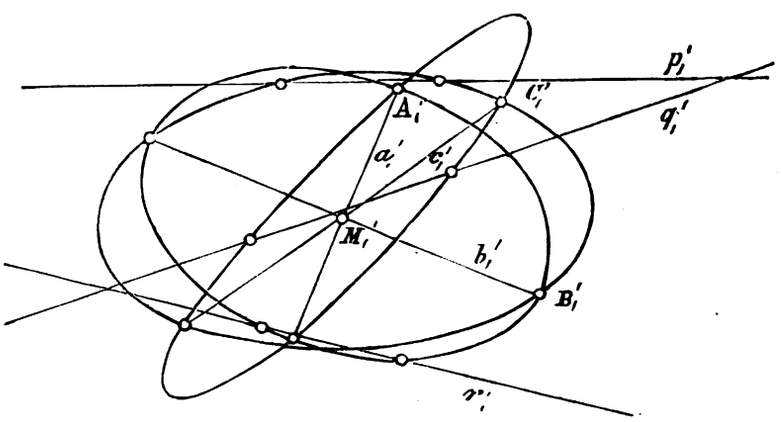
a. Soit donné le plan α passant par A. Ce plan coupera chacune des sections diamétrales en deux points, qui pourront être construits comme les points d'intersection d'une droite avec une conique, donnée par ses deux diamètres conjugués. Les intersections m_1 et m_2 de α avec S_1^2 et S_2^2 étant alors données par

Digitized by Google

six points chacune, on construira la conique passant par A et appartenant au faisceau de coniques $m_1^2 m_2^2$; cette conique est la section demandée.

b. Soient M_1 et M_2 les centres de S_1^2 et de S_2^2 et $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ les extrémités de leurs demi-diamètres conjugués. D'après le principe général mentionné, les projections de ces demi-diamètres sur le premier plan de projection seront deux systèmes de trois droites $a'_1 b'_1 c'_1$ et $a'_2 b'_2 c'_2$ passant par M'_1 et M'_2, et ces droites seront deux à deux les demi-diamètres conjugués des coniques, premières projections des sections diamétrales des surfaces. Dans la fig. 8 la projection de ces sections de la surface S_1^2 est représentée. Construisons ensuite

Fig. 8.



les premières projections $p'_1 q'_1 r'_1$ des intersections du plan α avec les plans $B_1 M_1 C_1$, $A_1 M_1 C_1$, $A_1 M_1 B_1$, et les points d'intersection de p'_1 avec la conique $[b'_1 c'_1]$, de q'_1 avec $[a'_1 c'_1]$ et de r'_1 avec $[a'_1 b'_1]$; la construction donnera six points de m'_1, première projection de la conique d'intersection de α et de S_1^2. De même on pourra construire les intersections des droites $p'_2 q'_2 r'_2$ et des coniques $[b'_2 c'_2]$, $[a'_2 c'_2]$, $[a'_2 b'_2]$. En menant une droite l' par A' et en construisant son intersection avec les deux coniques m'_1 et m'_2, dont chacune est plus que suffisamment déterminée par six points, on trouvera un point de la première projection de la conique demandée comme le point conjugué à A' de l'involution déterminée sur l' par le faisceau de coniques $m'_1 m'_2$. On peut mener des droites par A' jusqu'à ce qu'on connaisse un nombre suffisant de points. La première projection étant connue, on construira la seconde projection par la condition que la conique demandée soit située dans le plan α.

Le problème admet une solution toujours réelle, quoiqu'il puisse arriver que les droites $p'_1 q'_1 r'_1 \ldots$ coupent les coniques mentionnées dans des points imaginaires. En effet, d'après (III, 2 *b*) on pourra construire sur l' un nombre suffisant de points des ponctuelles involutoires elliptiques, déterminées sur elle par m'_1 et m'_2; on construira ensuite les points accouplés communs aux deux involutions. Le point conjugué harmonique de A' par rapport à ce couple de points sera un second point de la projection de la conique demandée.

Digitized by Google

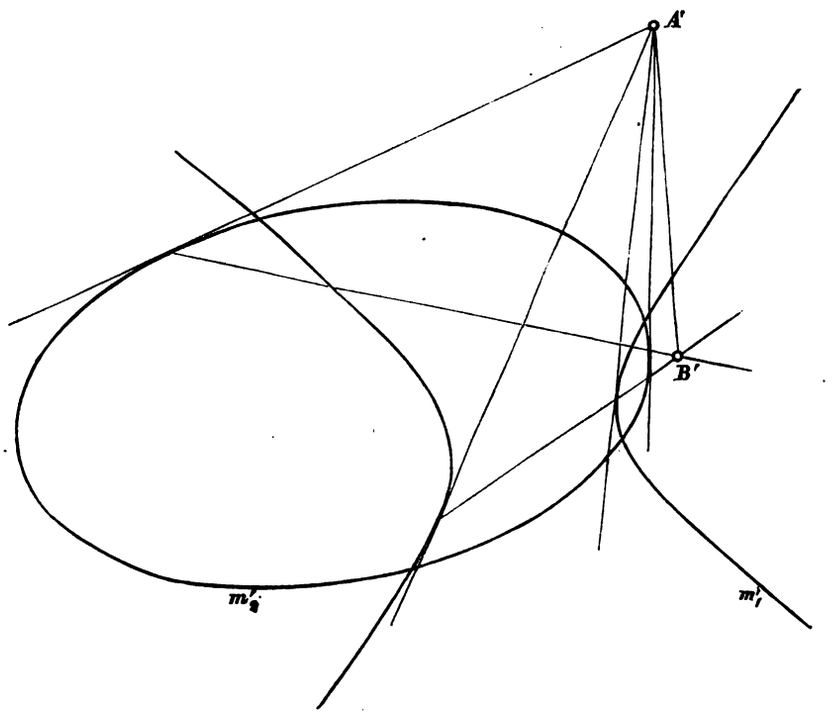
Le problème sera du second degré.

Problème II. Les données étant celles du problème précédent, construire le plan tangent à la surface S_3^2 dans le point A.

a. Ce plan contiendra les tangentes de toutes les coniques de contour de S_3^2 passant par A; pour le déterminer il suffira d'en construire deux; par cette remarque le problème est ramené en principe au problème précédent.

b. Pour exécuter la construction on mènera par A un plan α parallèle au premier plan de projection et l'on appliquera à ce cas particulier la construction de la première projection des deux groupes de six points d'intersection, indiquée d'une manière générale dans le problème précédent. La projection première de la tangente par A′ peut se construire sans qu'on ait besoin de points de la conique d'intersection de α avec S_3^2 (voir la fig. 9). Déterminons pour la trouver les polaires de A′ par rapport à m'_1 et m'_2; ces polaires se couperont en un point B′ conjugué à A′ par rapport au faisceau de coniques $m'_1 m'_2$. La droite A′B′ sera la première projection de la tangente demandée; comme le plan α est parallèle au premier plan de projection, la seconde trace de α sera sa seconde projection. En menant en second lieu un plan β parallèle au second plan de projection, on obtiendra de même les projections de la seconde tangente, le plan sera déterminé et l'on pourra en construire les traces.

Fig. 9.



Les remarques du problème précédent sur la réalité des points obtenus s'appliquent aussi à cette solution.

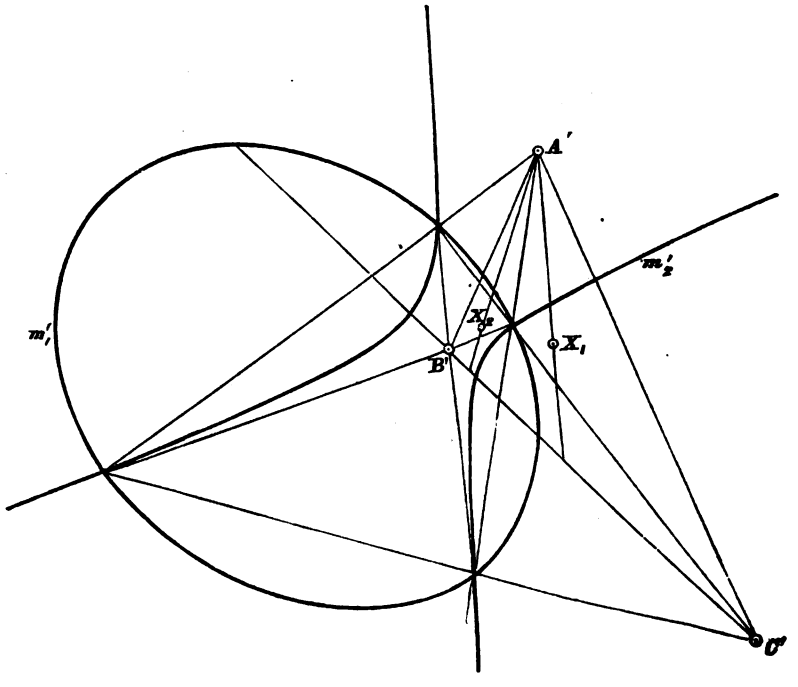
Problème III. Les données étant celles du problème précédent, déterminer dans le plan tangent à S_3^2 en A les tangentes d'inflexion de S_3^2.

Digitized by Google

a. Le plan tangent α pourra être construit comme dans le problème précédent; l'intersection de α avec le faisceau de surfaces sera un faisceau de coniques, déterminé par les deux coniques d'intersection de α avec S_1^2 et S_2^2. A étant un des trois points principaux de ce faisceau, il s'agit de construire les deux droites passant par A et formant une conique spéciale du faisceau, problème qui sera visiblement du second degré.

b. Ayant déterminé les traces du plan tangent α comme dans le problème précédent, on construira la première projection de l'intersection de α avec S_1^2 et S_2^2 comme au problème I *b*. En employant les mêmes notations, on aura dans le premier plan de projection le point A' et les coniques m'_1 et m'_2. Le point A' étant un point principal de la projection du faisceau de coniques situé dans α, on construira la polaire commune a' de A' par rapport à m'_1 et m'_2.

Fig. 10.



Ces deux coniques engendrent sur a' deux ponctuelles involutoires; les points conjugués accouplés de ces deux involutions seront les autres points principaux B' C' du faisceau. On prendra ensuite encore un point quelconque X_1 et construira son point conjugué par rapport au faisceau (Problème II); la droite A' X_2, étant la polaire de X_1 par rapport à la conique représentée par les deux droites cherchées et ces deux droites étant d'ailleurs conjuguées harmoniques relativement à A' B' et A' C', on construira les rayons doubles du faisceau involutoire de rayons A'. B' C'. X_1 X_2, ces rayons doubles sont les tangentes d'inflexion demandées en première projection. La seconde projection se déterminera sans peine par la condition qu'elles sont situées dans le plan α.

Dans chacune des constructions particulières qui composent ce problème il peut se rencontrer des éléments imaginaires. Il a déjà été démontré que la con-

Digitized by Google

struction du plan tangent α peut néanmoins s'exécuter; il est facile de voir que les constructions suivantes n'offriront de même pas d'obstacles. Si les deux coniques m'_1 et m'_2 sont imaginaires, on pourra (III, 2 *b*) construire la polaire de A', et déterminer les points B' C' comme les éléments accouplés toujours réels de deux ponctuelles involutoires elliptiques; le reste de la construction s'exécutera de la même manière.

Il se peut aussi que les points B' C' sont imaginaires ce qui arrivera si les coniques m'_2 et m'_1 ont seulement deux points réels communs; dans ce cas on construira les rayons conjugués accouplés de deux involutions; une de ces deux involutions a pour rayons doubles $A'X_1$ et $A'X_2$, l'autre sera déterminée par l'involution elliptique dont B' et C' sont les points doubles imaginaires.

Enfin il se peut que l'involution $A' . B' C' . X_1 X_2$ soit elliptique; dans ce cas la surface S_3^2 est une surface non réglée, les tangentes d'inflexion sont imaginaires.

Problème IV. Exécuter la même construction pour un plan tangent passant par un point à l'infini et déterminé par la direction d'une droite.

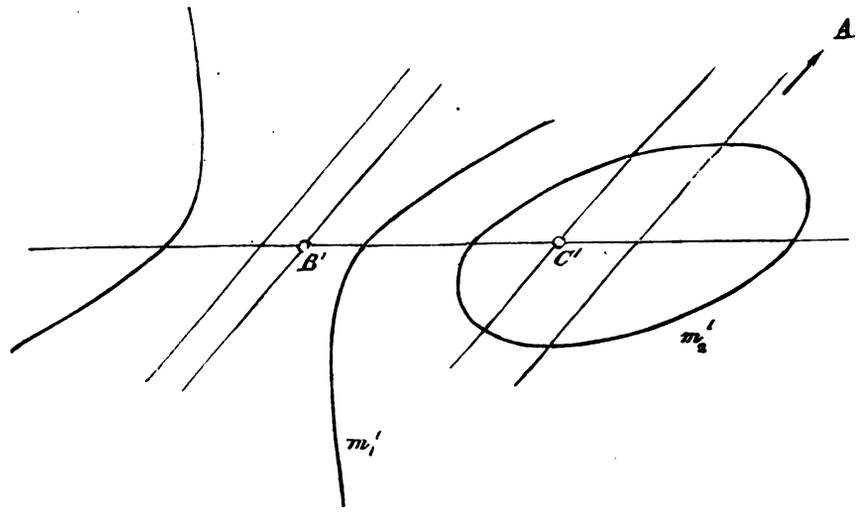
a. Il faudra d'abord construire le plan tangent par le point à l'infini; le problème II en donne la solution. La modification qui se présente ici consiste en ce qu'on aura à mener deux plans par la droite (ou parallèle à la droite); au lieu d'une conique appartenant à un faisceau et passant par un point, on aura une conique dont une asymptote est parallèle à la droite donnée; cette asymptote sera une tangente de S_3^2 passant par le point à l'infini, et on peut la construire sans qu'on ait besoin de la conique. En exécutant deux fois la construction, le plan tangent α est déterminé. L'intersection de ce plan α avec S_1^2 et S_2^2 se composera de deux coniques, dont le diamètre commun est conjugué à la direction de la droite donnée. Cette direction, étant un des points principaux du faisceau de coniques dans α, les autres points B' et C' seront construits sur le diamètre commun comme dans le problème précédent et de même les droites parallèles à la direction donnée qui sont la solution du problème. Au lieu de mener deux plans par la droite donnée, on peut remplacer un des deux par le plan à l'infini.

b. La solution graphique se déduit des précédentes. Soit un des plans menés par le point à l'infini le plan à l'infini lui-même. Pour la représentation de son intersection avec S_1^2 et S_2^2, construisons sur le premier plan de projection les asymptotes de $[b'_1 c'_1]$, $[a'_1 c'_1]$, $[a'_1 b'_1]$ (voir Probl. I et la fig. 8); ce seront les projections des asymptotes des sections diamétrales; soient les asymptotes de $[b'_1 c'_1]$ $k'_1 l'_1$; en construisant leurs premières traces par la condition que k_1 et l_1 sont situées dans le plan $M_1 B_1 C_1$, on aura deux points de l'intersection du cône asymptote de S_1^2 avec le premier plan de projection; il sera ensuite possible d'en construire encore quatre. On devra se figurer le second cône asymptote trans-

Digitized by Google

porté parallèlement à lui-même avec son sommet dans M_1. La construction des asymptotes dans le premier plan de projection se fera alors en tirant par M'_1 les droites $a'_3 b'_3 c'_3$ parallèles à $a'_2 b'_2 c'_2$ et en répétant l'opération de la construction des asymptotes avec les coniques $[b'_2 c'_3]$, $[a'_3 c'_3]$, $[a'_3 b'_3]$. Leurs points d'intersection respectifs avec les traces des plans menés par M_1 parallèles aux plans $B_2 M_2 C_2$, $A_2 M_2 C_2$, $A_2 M_2 B_2$, seront six points de la conique d'intersection du cône asymp-

Fig. 11.



tote parallèle à celui de la surface S_2^2. Menons maintenant une droite par M_1 parallèle à la droite donnée; soit P' sa trace première et construisons comme au problème II le point qui y est conjugué par rapport aux deux coniques trouvées Q'; P'Q' sera une droite parallèle au plan tangent par le point à l'infini.

En menant un plan quelconque β par la droite donnée, on pourra exécuter la construction de la fig. 9 avec cette différence que, le point A' étant à l'infini, on construira dans les coniques m'_1 et m'_2 les diamètres conjugués à cette direction; leur intersection B' sera un point d'une droite parallèle à la direction de A', et qui sera la première projection de l'asymptote située dans le plan β. Un plan mené par AB parallèle à P'Q' sera le plan tangent par le point à l'infini.

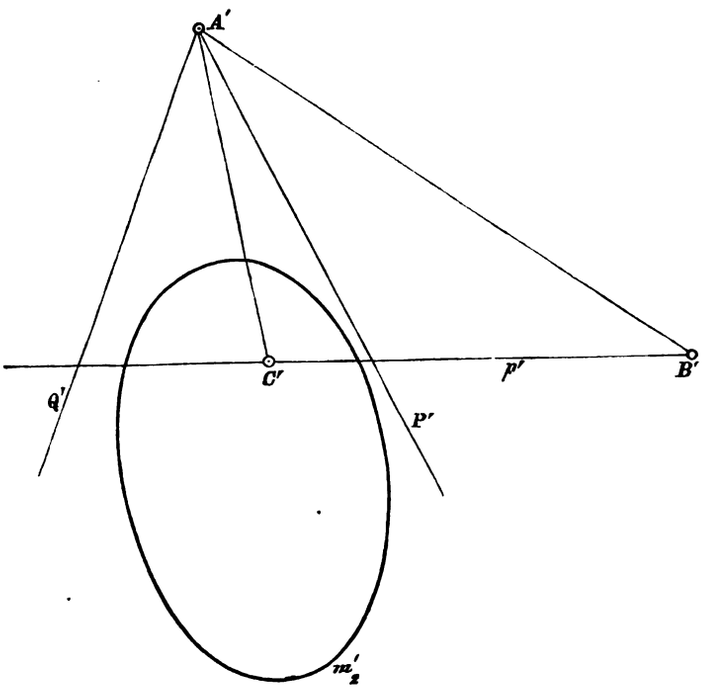
Dans ce plan il faudra exécuter la construction du problème IV. La fig. 10 sera cependant remplacée par la fig. 11, conformément à ce qui a été remarqué dans la solution stéréométrique. Les remarques quant aux éléments imaginaires, faites dans le problème précédent peuvent se répéter; il est clair que dans la première construction des asymptotes imaginaires seront représentées par des faisceaux involutoires elliptiques.

Digitized by Google

Problème V. Déterminer l'intersection de deux surfaces non réglées du second ordre S_1^2 et S_2^2, données comme dans les problèmes précédents. Mêmes notations.

a. Menons par le point B_1 un plan tangent α_1 à la surface S_1^2. Les tangentes conjuguées dans α_1 formeront un faisceau involutoire, dont les couples de rayons conjugués sont parallèles aux couples de diamètres conjugués de la section $A_1 M_1 C_1$. Ce plan α_1 coupera S_2^2 en une conique m_2. L'involution B_1 pouvant être considérée comme une ellipse infiniment petite, aura avec m_2 une intersection; les cordes communes de ces deux coniques passeront par un des autres points principaux et des ponctuelles involutoires elliptiques représenteront sur elles les quatre points d'intersection imaginaires de la courbe du quatrième ordre avec α_1. Menant ensuite un plan β par une des cordes communes trouvées, on pourra construire l'intersection de β avec S_1^2 et S_2^2; ces coniques ayant deux points communs imaginaires conjugués, les autres points communs peuvent être construits. On pourra déterminer de cette manière autant de points qu'on voudra.

Fig. 12.



Pour construire la projection, il suffira de connaître la projection de huit points ordinaires de la courbe et les deux points doubles de la projection (III, 10). La construction des deux derniers points sera un cas particulier du problème précédent; il s'agit de construire les traces premières des tangentes d'inflexion, passant par un point à l'infini déterminé par la direction d'une droite perpendiculaire au premier plan de projection.

b. Le faisceau involutoire par B_1 se projette dans le premier plan de projection en faisceau involutoire par B', parallèle aux diamètres conjugués de $[a'_1 c'_1]$. La projection de la conique d'intersection de α_1 avec S_2^2 (m'_2) se construit comme auparavant (Problème II). Pour construire les cordes communes

Digitized by Google

de l'ellipse infiniment petite B', et de la conique m'_2 (voir la figure 12), on détermine la polaire de B' par rapport à m'_2, le faisceau B' et la conique m'_2 déterminent sur elle deux ponctuelles involutoires dont les points conjugués accouplés A' et C' seront les autres points principaux du faisceau B' m'_2. La construction des cordes communes s'exécutera alors comme au problème III. Dans la position donnée ici les cordes passent par A'; il est clair que A' peut être situé à l'intérieur de m'_2; alors les cordes réelles passeront par C'. Les cordes réelles étant construites, la ponctuelle involutoire sur elles est déterminée, et quatre points imaginaires de la courbe sont donnés en projection.

En menant maintenant par la corde A P un plan β on pourra déterminer la projection de l'intersection de ce plan avec S_1^2 et S_2^2. Les coniques ainsi construites et projetées n'_1 et n'_2 auront pour secante commune A' P'; les points de la sécante, passant par les deux autres points communs de n'_1 et de n'_2, s'obtiendront en déterminant sur une droite variable le point conjugué à son point d'intersection avec A' P' dans l'involution engendrée par le faisceau $n'_1 n'_2$.

La construction des points doubles se rattache tout à fait à la solution du problème précédent.

Problème VI. Etant donnés deux points principaux A et B d'un faisceau de surfaces du second ordre, sommets des deux cônes imaginaires, déterminer les deux autres cônes.

Les cônes imaginaires sont donnés par leurs premières traces, celles-ci étant pour chaque cône deux ponctuelles involutoires, qui sont en même temps des droites conjuguées.

a. Déterminons les plans polaires de A B par rapport aux deux cônes, leur intersection sera la droite *d*, conjuguée à l'arête A B du tétraèdre principal; les cônes déterminent sur *d* deux involutions elliptiques, dont les points conjugués accouplés seront les sommets toujours réels des deux autres cônes C et D. En menant le plan A B D, on aura dans ce plan la conique imaginaire, section du cône B, qui se réduira à un faisceau involutoire de rayons et un deuxième faisceau provenant de l'intersection du cône A. A, B, D seront les points principaux du faisceau de coniques, engendré par le faisceau de surfaces du second ordre, auquel appartiennent les cônes. Le troisième couple de droites qui forme une conique particulière du faisceau passera par D et l'on pourra le construire (Problème III). Les premières traces de ces droites donneront deux points de la trace première du cône D; elles suffisent pour la construction, car cette trace est une conique appartenant à un faisceau donné par deux coniques imaginaires. On répétera la construction pour le plan A B C.

b. (Comparez la fig. 6). Soient P' la trace première de la droite A B et $[p\,q]$,

Digitized by Google

$[r\,s]$ les ponctuelles involutoires conjuguées qui déterminent les premières traces des cônes A et B. On construit la polaire a de P' par rapport à $[p\,q]$, comme la construction (III, 2 a) l'indique et ensuite on fera de même pour construire la polaire b de P' par rapport à $[r\,s]$; l'intersection des plans A a et B b, droite dont la première trace passe par le point d'intersection de a et de b, peut être construite en première projection.

Appelons cette droite C D; sa première projection contiendra deux ponctuelles elliptiques, projections de son intersection avec les cônes A et B. Pour les obtenir on projettera de A' la ponctuelle involutoire déterminée par $[p\,q]$ sur a et de B' la ponctuelle déterminée sur b par $[r\,s]$. Ces deux faisceaux de rayons seront coupés par C' D' dans les ponctuelles involutoires désirées; les points conjugués accouplés sont C' et D'. Pour construire les traces du cône D, menons le plan A B D, et déterminons sur sa première trace c les ponctuelles involutoires, qui représentent les intersections imaginaires de celle-ci avec $[p\,q]$, $[r\,s]$; en projetant la première de A' et la seconde de B', nous aurons deux faisceaux involutoires de rayons, constituant les coniques particulières d'un faisceau dont D' est le troisième point principal. Les deux droites réelles passant par D' se construisent comme dans le problème III et ce seront les premières projections de deux génératrices du cône D. Leurs traces premières Q', R' sont deux points de la conique d'intersection du cône D avec le premier plan. On obtient un troisième point de cette conique, en tirant par Q' une droite l, en construisant les involutions déterminées sur elle par $[p\,q]$, $[r\,s]$, et en déterminant les points conjugués accouplés des deux involutions; le point conjugué harmonique de Q' par rapport aux deux points accouplés est un point de la conique et ainsi de suite.

La même construction donne la conique d'intersection du cône C.

Problème VII. Un cilindre elliptique et un cône du second ordre étant donnés, déterminer la direction des diamètres des paraboloïdes appartenant au faisceau, engendré par ces deux surfaces.

a. Un cilindre étant un cône à sommet situé à l'infini, on peut considérer comme connu dans le plan à l'infini un des points principaux du faisceau de coniques qui s'y trouve; les deux autres points principaux seront les points de contact des deux autres paraboloïdes du faisceau. La direction de ces points de contact est en même temps celle du diamètre des paraboloïdes. Le problème rentre donc par son principe dans les problèmes précédents; la différence consiste dans l'exécution.

b. Du sommet du cône on tire une droite a parallèle aux génératrices du cilindre et ayant pour trace première A'. Par A' menons des parallèles aux dia-

Digitized by Google

mètres conjugués de la première trace du cilindre; le faisceau involutoire, qui se révèle ainsi, peut être considéré comme une ellipse infiniment petite qui, en combinaison avec la conique, première trace du cône, détermine un faisceau dont A′ est un point principal.

La construction des autres points principaux B′ et C′ se fera comme dans le problème V et la figure 10. Ces points étant connus, on les joindra au sommet du cône et la direction des diamètres des paraboloïdes sera connue. Un de ces paraboloïdes sera hyperbolique, l'autre elliptique, selon que les faisceaux de rayons passant par B′ ou C′ se trouveront dans un de ces deux cas.

Pour obtenir une section parabolique d'une de ces deux surfaces, on pourra mener un plan parallèle à une des deux directions construites et ensuite appliquer la construction du problème I.

Le problème se simplifie, quand le cilindre donné est hyperbolique; les deux paraboloïdes pourront être alors hyperboliques.

Problème VIII. Etant données trois droites a, b, c et sur chacune d'elles deux points, construire un nombre illimité de points de la courbe gauche du quatrième ordre située sur la surface du second ordre, déterminée par a, b, c et passant par deux autres points donnés sur celle-ci.

a. Soient A, D; B, E; C, F; les points sur a, b, c et G, H ceux en dehors d'elles. On pourra construire des points de la courbe demandée, aussitôt qu'on aura construit une seconde surface S_2^2 sur laquelle elle doit être située. Cette détermination peut se faire de la manière suivante. Tirons la droite G H et menons les plans A D B; E C F; ces plans couperont G H dans les points P et Q; les sections de ces plans avec S_2^2 seront ensuite déterminées par les points A D B P, E C F Q et par la condition que les coniques, menées par ces points, doivent avoir l'intersection des plans construits pour corde commune. Le faisceau de coniques A D B P et celui E C F Q déterminent sur cette intersection une involution; les points conjugués accouplés seront deux points de chacune des coniques et la surface S_2^2 sera suffisamment connue. Comme les deux surfaces sont réglées, on pourra successivement déterminer l'intersection d'une droite d'une des surfaces avec l'autre et réciproquement. On pourra appliquer ce qui a été remarqué dans le problème V quant aux points doubles de la projection de la courbe.

b. La solution de la construction de la surface S_2^2 peut être exécutée en projection. En effet, étant données les projections des points, on construira les plans A D B $= \alpha$, C E F $= \beta$ et la première projection d' de leur intersection sera connue. De même on construira la première projection des points d'intersection de G H avec α et β. Les deux faisceaux de coniques précités seront

Digitized by Google

déterminés en projection première par les points A' D' B' P', C' E' F' Q'; les deux involutions qui peuvent se construire sur d' ont deux points conjugués accouplés réels ou imaginaires conjugués, et la projection des deux coniques est connue.

Tout plan, mené par une droite de la surface, déterminée par les droites a, b, c, coupera S_2^2 en une conique, dont cinq points pourront être construits en projection, à savoir le point d'intersection avec G H, et les points où les droites d'intersection avec α et β couperont les coniques connues de S_2^2.

Le nombre de points qu'on peut construire est donc illimité.

La description graphique de la projection de la courbe exige la construction des points doubles, problème déjà traité.

Il est à remarquer que le problème peut s'exécuter de la même manière, si les points A D, C F, G H sont imaginaires.

Problème IX. Soient données une surface réglée R^2 et neuf points situés sur elle; le point A appartient à une cubique gauche c^3 située sur R^2, les points B, C, D, E à une courbe du quatrième ordre c^4 sur R^2, et les points L, M, N, P sont des points d'intersection de ces deux courbes. Construire les autres points d'intersection de c^3 et de c^4.

La surface réglée est donnée par trois droites d'un système.

a. Après avoir construit les neuf points, dont on peut admettre comme situés sur des directrices données de R^2 B, L sur b, C, M sur c, D, N sur d, on projette les courbes du point commun P. Des deux cubiques gauches, passant par les points A, L, M, N, P, choisissons celle dont les droites du système b, c, d sont des cordes (I, 4). Les rayons projetants qui joignent P à c^3 seront les génératrices d'un cône du second ordre; ceux qui joignent P à c^4 seront celles d'un cône du troisième ordre sans génératrices doubles (II, 4 f); on aura à déterminer les génératrices communes aux deux cônes. Les génératrices communes connues sont P L, P M, P N et la droite p du système b, c, d passant par P, puisque sur cette droite se trouve encore un point de chacune des courbes; les génératrices à déterminer seront donc au nombre de deux (III, 6). Ces deux génératrices couperont R^2, chacune en un second point, ces points donnent la solution du problème.

b. Pour déterminer les projections des neuf points donnés, tirons deux droites a et f du système auquel n'appartiennent pas b, c, d, et sur la première d'elles prenons les points A et E, sur l'autre le point P. On peut maintenant construire les premières projections des droites P A, P B, ... etc., comme celle de la droite p appartenant au système b, c, d. En nommant les premières traces de ces droites A', B' .... P' on aura dans le premier plan de projection une conique passant par les cinq points A', L', M', N', P' et une courbe du troisième ordre passant par les points B', C', D', E', L', M', N', P', tandis qu'un neuvième

Digitized by Google

point de cette dernière sera donné par la trace première F' de la droite *f*. Reste à construire les deux autres points communs des deux courbes.

La construction de (III, 7) donne la solution suivante. On choisit pour points de base du premier faisceau, qui engendre la courbe du troisième ordre, L'M'N'P' et détermine le centre Q du faisceau de rayons générateur d'après la méthode indiquée. En construisant le rayon du faisceau Q homologue à la conique L'M'N'P'A', on trouvera deux points d'intersection G et H de ce rayon avec la conique nommée; ce sont les points d'intersection des deux courbes. La droite PG coupera la surface R^2 en un second point qu'on détermine aisément en construisant le plan G*f*. Il en est de même de PH.

Problème X. Une surface réglée du second ordre est donnée comme dans le problème précédent. Sur cette surface sont donnés six points D, E, F, G, H, I, points communs de deux courbes du quatrième ordre, situées sur la surface; chaque courbe est encore déterminée par les points $B_1 C_1$ et $B_2 C_2$. Construire les deux autres points communs des deux courbes.

a. Après avoir construit les dix points, auxquels on peut, comme dans le problème précédent assigner des positions particulières, on les projette du point commun D des deux courbes. Les rayons projetants qui joignent D aux points des courbes c_1^4 et c_2^4 seront les génératrices de deux cônes du troisième ordre sans génératrices doubles; ces cônes auront en commun les génératrices DE, DF, DG, DH, DI et les deux droites passant par D et situées sur la surface réglée R^2. Ils auront donc encore deux génératrices communes (III, 8) qui couperont R^2 dans les deux points désirés.

b. La surface R^2 étant donnée par les trois droites *b*, *c*, *d* comme auparavant, les projections des points donnés seront construites; on peut en prendre quelques-uns sur *b*, *c*, *d* et déterminer les autres en construisant des droites de l'autre système. On peut maintenant construire les premières traces des droites DE, ... DI, DB_1, DB_2, DC_1, DC_2 et celles des droites *p* et *q* passant par D et situées sur R^2. Cela fait, onze points se trouveront sur le premier plan, à savoir: E', F', G', H', I', P', Q', points communs à deux courbes planes du troisième ordre, et $B'_1 C'_1$, $B'_2 C'_2$, un couple de points de chacune d'elles. Les autres points communs sont à construire.

Pour l'effectuer, qu'on se rapporte au principe (III, 8) de la construction des courbes du troisième ordre. Considérons comme points de base d'un faisceau commun aux deux courbes E'F'G'H' et construisons de chacune d'elles le centre du faisceau de rayons projectifs. Les faisceaux dont T'_1 et T'_2 sont les centres engendreront une conique c^2, qui aura en commun avec la première courbe c_1^3 les points T'_1, I', P', Q'; on peut construire les autres points comme au problème précédent; les

Digitized by Google

droites qui les joignent au point D, couperont la surface R^2 dans les points demandés.

Problème XI. Etant donnés le plan tangent α commun aux surfaces d'un faisceau, le point de contact A de toutes les surfaces, et cinq points de la courbe de base; déterminer les sommets des autres cônes du faisceau.

a. Soient donnés les points B, C, D, E, F. Le cône double du faisceau est déterminé complètement par les génératrices A B, A C, A D, A E, A F et coupera le plan α en deux droites conjuguées a_1 et a_2 du faisceau involutoire, engendré dans α par le faisceau de surfaces. Il s'agit d'obtenir deux autres rayons conjugués. Pour cela, menons par A un rayon b_1 et construisons les intersections c et d des plans A C E et B D F avec α. Le plan A C E contient en dehors de ces points la droite c passant par le point A; le plan B D F contient, outre ces points, le point d'intersection $b_1 d$; les deux faisceaux de coniques dans ces plans auront dans leur intersection une corde commune, qu'on connaîtra complètement en construisant les points conjugués accouplés P_1 et P_2 des deux ponctuelles involutoires provenant sur cette droite des deux faisceaux. La conique B D F P_1 P_2 coupera le plan α dans deux points dont un sera le point $b_1 d$; l'autre détermine le rayon conjugué b_2 de b_1. Le faisceau involutoire étant déterminé, les rayons doubles seront les génératrices des deux autres cônes tangents à α.

Le sommet d'un de ces cônes simples pourra être déterminé de la manière suivante. Soit p un des rayons doubles. Menons le plan p B, il coupera le cône double en deux génératrices et les coniques A C E P_1 P_2 et B D F P_1 P_2 chacune encore en un point. Ces deux derniers points déterminent avec B, A et la tangente p une conique, qui sera coupée par chacune des génératrices du cône double encore en un point; la droite qui les joint coupe p dans le sommet du cône demandé.

b. Je passerai rapidement sur l'exécution graphique, parce qu'elle rentre en grande partie dans les problèmes précédents. La trace première du cône double est connue par les traces des droites; la trace du plan α la coupera en deux points, ce qui donne les droites a'_1 et a'_2; le problème VIII contient la construction des points conjugués accouplés sur l'intersection de deux plans; la projection des coniques A C E P_1 P_2 et B D F P_1 P_2 sera donc connue. En construisant l'intersection de la dernière projection avec d', la première projection du faisceau involutoire A' sera connue et les rayons doubles p' et q' pourront de même être construits. Le problème VIII contient aussi la construction de la conique située dans le plan mené par p, auquel on peut donner une position particulière, et la détermination du sommet d'un cône simple n'offrira plus d'obstacles.

Problème XII. Les données étant comme dans le problème précédent, construire une projection de la courbe de base du faisceau.

a. La solution du problème précédent a donné deux surfaces du faisceau, qui

Digitized by Google

permettent de construire la projection de leur intersection; on peut cependant employer une autre méthode, méthode qui s'applique aussi à la solution du problème VIII. Prenons le point B pour sommet d'un cône dont la courbe de base sera la directrice; ce cône sera du troisième ordre et aura pour génératrice double A B (II, 5 α). Un plan mené par A B coupera le cône double A en une seconde génératrice et de même le cône du troisième ordre. Le point d'intersection de ces deux génératrices sera un point de la courbe. En considérant A B comme l'axe de rotation du plan, on pourra obtenir un nombre quelconque de points de la courbe.

b. On construira d'abord les premières traces des droites A B, A C, A D, A E, A F qu'on nommera B'_1, C'_1, D'_1, E'_1, F'_1. En second lieu on construira les premières traces des droites B C, B D, B E, B F et celles des plans B a_1, B a_2. Appelant ces points C'_2, D'_2, E'_2, F'_2 et ces droites p_1 et p_2, on aura dans le premier plan de projection une conique c^2 déterminée par les cinq points B'_1, C'_1, D'_1, E'_1, F'_1 et une courbe du troisième ordre c^3 ayant pour point double B'_1 pour tangentes en ce point p_1 et p_2 et pour points ordinaires C'_2, D'_2, E'_2, F'_2. Cette dernière courbe peut se construire d'après les principes (III, 9). On choisira pour points de base du faisceau générateur de coniques les points B'_1 C'_2 D'_2 E'_2 et comme centre du faisceau de rayons le point double B'_1. Leur rapport projectif sera déterminé, en considérant comme homologues les rayons p_1 et p_2 aux coniques qui y sont tangentes, et le rayon $B'_1 F'_2$ à la conique passant par F'_2. La projectivité des faisceaux étant arrêtée, il n'y aura pas d'inconvénient à déterminer le point d'intersection d'une droite l par B'_1 avec c^3, car, en déterminant la conique du faisceau homologue avec elle, elle coupera celle-ci dans un seul point hors B'_1 (P); l coupera aussi la conique c^2 en un seul point hors B'_1 (Q). La droite l peut être la première trace d'un plan par B A. Le point d'intersection de A Q et de B P sera un point de la courbe gauche.

On pourra ainsi continuer la construction.

Remarque générale. Il va sans dire que les problèmes donnés peuvent être augmentés d'une foule d'autres, et en même temps ceux qui sont traités dans les pages précédentes donnent lieu à une foule de cas particuliers, qu'on peut choisir pour simplifier l'exécution des opérations graphiques indiquées dans le texte; les principes généraux exposés au commencement contiennent le germe qui pourra servir à les poser et à les résoudre. Les exemples donnés peuvent suffire pour donner une idée des méthodes de solution et de l'emploi des méthodes de géométrie synthétique dans la géométrie descriptive [1]).

[1]) Il m'a été impossible de consulter le second volume de la Géométrie descriptive de M. Chr. Wiener, parce qu'il ne m'est parvenu que très peu de temps avant la correction des épreuves.

Tilbourg, Octobre 1887.

Digitized by Google

DÉMONSTRATION DIRECTE DE LA LOI LIMITE POUR LES ERREURS DANS LE PLAN ET DANS L'ESPACE

PAR

CH. M. SCHOLS.

Dans le chapitre V du mémoire sur la *Théorie des erreurs dans le plan et dans l'espace* [1]), j'ai développé la loi limite des erreurs dans le plan et dans l'espace en partant de cette loi pour les erreurs linéaires. Les mêmes raisonnements et les mêmes développements qui donnent cette dernière loi peuvent être appliqués aux erreurs dans le plan et dans l'espace et donner ainsi une démonstration plus directe de cette loi limite; c'est ce que je me propose de faire voir dans ce qui suit.

Supposons donc que nous ayons un certain nombre s de causes indépendantes les unes des autres et produisant des erreurs qui peuvent avoir toutes les directions possibles dans un plan. Désignons ces erreurs par leurs projections $x_1 y_1$ $x_2 y_2 \ldots . x_s y_s$ sur deux axes rectangulaires dans ce plan et leurs probabilités par:

$$f_1(x_1 y_1)\, dx_1\, dy_1 \qquad f_2(x_2 y_2)\, dx_2\, dy_2 \ldots . f_s(x_s y_s)\, dx_s\, dy_s$$

La probabilité P de l'erreur résultante, dont les projections sur les mêmes axes sont:

$$X = x_1 + x_2 + \ldots . + x_s = \Sigma x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$Y = y_1 + y_2 + \ldots . + y_s = \Sigma y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

sera exprimée par:

$$P = \Sigma f_1(x_1 y_1)\, dx_1\, dy_1\, f_2(x_2 y_2)\, dx_2\, dy_2 \ldots . . f_s(x_s y_s)\, dx_s\, dy_s . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

où la sommation doit s'étendre à toutes les valeurs de $x_1 x_2 \ldots x_s$ et de $y_1 y_2 \ldots y_s$

[1]) Voir ces Annales Tome II p. 147.

Digitized by Google

qui satisfont aux relations (1) et (2). En éliminant de la formule (3) les quantités x_1 et y_1 à l'aide de (1) et (2) nous trouvons:

$$P = dX\,dY \int \ldots \int f_1 (X - x_2 \ldots - x_s, Y - y_2 \ldots - y_s) f_2 (x_2 y_2)\, dx_2\, dy_2 \ldots f_s (x_s y_s)\, dx_s\, dy_s. \quad (4)$$

Afin de pouvoir intégrer cette expression, nous remplaçons dans la formule de Fourier:

$$f_1 (u v) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, d\omega' \int\int f_1 (x_1 y_1)\, e^{\omega (u - x_1)\sqrt{-1}}\, e^{\omega' (v - y_1)\sqrt{-1}}\, dx_1\, dy_1$$

les quantités u et v par $X - x_2 \ldots - x_s$ et $Y - y_2 \ldots - y_s$, ce qui donne:

$$f_1 (X - x_2 \ldots - x_s, Y - y_2 \ldots - y_s) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, d\omega' \int\int f_1 (x_1 y_1)\, e^{\omega (X - \Sigma x)\sqrt{-1}}\, e^{\omega' (Y - \Sigma y)\sqrt{-1}}\, dx_1\, dy_1$$

et par suite nous trouvons pour (4):

$$P = \frac{dX\,dY}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, d\omega' \int \ldots \int e^{\omega (X - \Sigma x)\sqrt{-1}}\, e^{\omega' (Y - \Sigma y)\sqrt{-1}} f_1 (x_1 y_1)\, dx_1\, dy_1 f_2 (x_2 y_2)\, dx_2\, dy_2 \ldots$$
$$\ldots f_s (x_s y_s)\, dx_s\, dy_s$$

ou bien:

$$P = \frac{dX\,dY}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\omega X \sqrt{-1} + \omega' Y \sqrt{-1}}\, T_1\, T_2 \ldots T_s\, d\omega\, d\omega'. \quad (5)$$

en posant en général:

$$T = \int\int f(xy)\, e^{-(\omega x + \omega' y)\sqrt{-1}}\, dx\, dy =$$

$$= \int\int f(xy) \left[1 - (\omega x + \omega' y)\sqrt{-1} - \tfrac{1}{2}(\omega x + \omega' y)^2 + \tfrac{1}{6}(\omega x + \omega' y)^3 \sqrt{-1} + \tfrac{1}{24}(\omega x + \omega' y)^4 - \ldots\right] dx\, dy.$$

Représentons maintenant par $k_{n.n'}$ la valeur de l'intégrale $\int\int x^n y^{n'} f(xy)\, dx\, dy$.

Observons de plus qu'on a: $\int\int f(xy)\, dx\, dy = k_{0.0} = 1$ et que les quantités $k_{1.0}$ et $k_{0.1}$ sont égales à zéro, lorsque nous supposons que les erreurs ne contiennent pas de parties constantes, ce qui n'ôte rien à la généralité. L'intégration donne alors:

$$T = 1 - \tfrac{1}{2}[\omega^2 k_{2.0} + 2\omega\omega' k_{1.1} + \omega'^2 k_{0.2}] + \tfrac{1}{6}[\omega^3 k_{3.0} + 3\omega^2 \omega' k_{2.1} + 3\omega\omega'^2 k_{1.2} + \omega'^3 k_{0.3}]\sqrt{-1} +$$
$$+ \tfrac{1}{24}[\omega^4 k_{4.0} + 4\omega^3 \omega' k_{3.1} + 6\omega^2 \omega'^2 k_{2.2} + 4\omega\omega'^3 k_{1.3} + \omega'^4 k_{0.4}] - \ldots.$$

ou bien en prenant le logarithme:

Digitized by Google

$$\log T = -\tfrac{1}{2}[\omega^2 k_{2.0} + 2\omega\omega' k_{1.1} + \omega'^2 k_{0.2}] + \tfrac{1}{6}[\omega^3 k_{3.0} + 3\omega^2\omega' k_{2.1} + 3\omega\omega'^2 k_{1.2} + \omega'^3 k_{0.3}]\sqrt{-1} +$$
$$+ \tfrac{1}{24}[\omega^4 (k_{4.0} - 3k_{2.0}^2) + 4\omega^3\omega' (k_{3.1} - 3k_{2.0}k_{1.1}) + 6\omega^2\omega'^2 (k_{2.2} - k_{2.0}k_{0.2} - 2k_{1.1}^2) +$$
$$+ 4\omega\omega'^3 (k_{1.3} - 3k_{1.1}k_{0.2}) + \omega'^4 (k_{0.4} - 3k_{0.2}^2)] - \ldots.$$

Si l'on écrit cette formule pour toutes les erreurs élémentaires en nombre s, on trouve pour la somme:

$$\log. T_1 T_2 \ldots T_s = -\tfrac{1}{2}[\omega^2 \Sigma k_{2.0} + 2\omega\omega' \Sigma k_{1.1} + \omega'^2 k_{0.2}] + \tfrac{1}{6}[\omega^3 \Sigma k_{3.0} + 3\omega^2\omega' \Sigma k_{2.1} + 3\omega\omega'^2 \Sigma k_{1.2} +$$
$$+ \omega'^2 \Sigma k_{0.3}]\sqrt{-1} + \tfrac{1}{24}[\omega^4 \Sigma (k_{4.0} - 3k_{2.0}^2) + 4\omega^3\omega' \Sigma (k_{3.1} - 3k_{2.0}k_{1.1}) +$$
$$+ 6\omega^2\omega'^2 \Sigma (k_{2.2} - k_{2.0}k_{0.2} - 2k_{1.1}^2) + 4\omega\omega'^3 \Sigma (k_{1.3} - 3k_{1.1}k_{0.2}) + \omega'^4 \Sigma (k_{0.4} - 3k_{0.2}^2)] - \ldots.$$

Dans cette expression les quantités $\Sigma k_{2.0}$ et $\Sigma k_{0.2}$ désignent les carrés des valeurs moyennes de l'erreur résultante projetée sur l'axe des X et l'axe des Y; nous les remplacerons donc par M_X^2 et M_Y^2. En prenant pour axes des coordonnées les axes principaux de l'erreur résultante, la quantité $\Sigma k_{1.1}$ devient égale à zéro, de sorte que nous pouvons écrire:

$$\log T_1 T_2 \ldots T_s = -\tfrac{1}{2}\omega^2 M_X^2 - \tfrac{1}{2}\omega'^2 M_Y^2 + Q_3 + Q_4 + \ldots.$$

et par suite:

$$T_1 T_2 \ldots T_s = e^{-\frac{1}{2}\omega^2 M_X^2 - \frac{1}{2}\omega'^2 M_Y^2 + Q_3 + Q_4 + \ldots.}$$

en désignant par Q_3, Q_4 etc. l'ensemble des termes qui contiennent ω et ω' à la 3me, 4me puissance, etc.

En substituant cette expression au produit $T_1 T_2 \ldots T_s$ dans (5), nous trouvons:

$$P = \frac{dX\,dY}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, d\omega'\, e^{\omega X\sqrt{-1} + \omega' Y\sqrt{-1} - \frac{1}{2}\omega^2 M_X^2 - \frac{1}{2}\omega'^2 M_Y^2 + Q_3 + Q_4 + \ldots.}$$

et en remplaçant les variables ω et ω' par d'autres: λ et λ', définies par les équations:

$$\omega M_X - \frac{X}{M_X}\sqrt{-1} = \lambda \qquad\qquad \omega' M_Y - \frac{Y}{M_Y}\sqrt{-1} = \lambda'$$

l'expression de P se change en:

$$P = \frac{dX\,dY}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda\, d\lambda'}{M_X M_Y} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda'^2 - \frac{X^2}{2M_X^2} - \frac{Y^2}{2M_Y^2} + Q_3 + Q_4 + \cdots} =$$
$$= \frac{dX\,dY}{(2\pi)^2 M_X M_Y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X^2}{M_X^2} + \frac{Y^2}{M_Y^2}\right)} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda'^2} e^{Q_3 + Q_4 + \cdots} d\lambda\, d\lambda'.$$

En remplaçant $e^{Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6 + \cdots}$ par $1 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + (Q_6 + \frac{1}{2}Q_3^2) + \ldots$ et en remarquant qu'on a:

Digitized by Google

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2} e^{-\frac{1}{2}\lambda'^2} d\lambda\, d\lambda' = 2\pi$$

nous trouvons enfin pour P:

$$P = \frac{dX\, dY}{2\pi M_X M_Y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X^2}{M_X^2}+\frac{Y^2}{M_Y^2}\right)}[1 + V_3 + V_4 + \ldots.] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

dans laquelle:

$$V_3 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Q_3\, e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda'^2}\, d\lambda\, d\lambda'$$

$$V_4 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Q_4\, e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda'^2}\, d\lambda\, d\lambda'$$

Pour développer ces dernières expressions nous n'avons besoin que de remplacer dans Q_3, Q_4 etc. les quantités ω et ω' par leurs valeurs:

$$\omega = \frac{1}{M_X}\left(\lambda + \frac{X}{M_X}\sqrt{-1}\right) \qquad \omega' = \frac{1}{M_Y}\left(\lambda' + \frac{Y}{M_Y}\sqrt{-1}\right)$$

et d'intégrer, ce qui se fait sans difficultés. Cette intégration nous donne:

$$V_3 = \tfrac{1}{6}\left[\frac{\Sigma k_{3.0}}{M_X^3}\left(\frac{X^3}{M_X^3} - 3\frac{X}{M_X}\right) + 3\frac{\Sigma k_{2.1}}{M_X^2 M_Y}\left(\frac{X^2}{M_X^2} - 1\right)\frac{Y}{M_Y} + 3\frac{\Sigma k_{1.2}}{M_X M_Y^2}\cdot\frac{X}{M_X}\left(\frac{Y^2}{M_Y^2} - 1\right) + \frac{\Sigma k_{0.3}}{M_Y^3}\left(\frac{Y^3}{M_Y^3} - 3\frac{Y}{M_Y}\right)\right]$$

$$V_4 = \tfrac{1}{24}\left[\frac{\Sigma(k_{4.0} - 3k_{2.0}^2)}{M_X^4}\left(\frac{X^4}{M_X^4} - 6\frac{X^2}{M_X^2} + 3\right) + 4\frac{\Sigma(k_{3.1} - 3\,k_{2.0}\,k_{1.1})}{M_X^3 M_Y}\left(\frac{X^3}{M_X^3} - 3\frac{X}{M_X}\right)\frac{Y}{M_Y} + \right.$$

$$+ 6\frac{\Sigma(k_{2.2} - k_{2.0}\,k_{0.2} - 2k_{1.1}^2)}{M_X^2 M_Y^2}\left(\frac{X^2}{M_X^2} - 1\right)\left(\frac{Y^2}{M_Y^2} - 1\right) + 4\frac{\Sigma(k_{1.3} - 3\,k_{1.1}\,k_{0.2})}{M_X M_Y^3}\frac{X}{M_X}\left(\frac{Y^3}{M_Y^3} - 3\frac{Y}{M_Y}\right) +$$

$$\left. + \frac{\Sigma(k_{0.4} - 3\,k_{0.2}^2)}{M_Y^4}\left(\frac{Y^4}{M_Y^4} - 6\frac{Y^2}{M_Y^2} + 3\right)\right].$$

Supposons maintenant que le nombre s des causes devienne très grand. Les sommes $\Sigma k_{2.0}, \Sigma k_{0.2}, \Sigma k_{3.0}, \Sigma k_{2.1} \ldots . \Sigma(k_{4.0} - 3\,k_{2.0}^2), \Sigma(k_{3.1} - 3\,k_{2.0}\,k_{1.1}) \ldots .$ etc. étant des sommes de s termes, peuvent être considérées comme des quantités de l'ordre s; les valeurs moyennes $M_X = \sqrt{\Sigma k_{2.0}}$ et $M_Y = \sqrt{\Sigma k_{0.2}}$ sont alors de l'ordre $\sqrt{s}$, d'où il suit que V_3 et V_4 sont de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{s}}$ et $\frac{1}{s}$ [1]); ces dernières quantités décroissent par conséquence, lorsque s croît et approchent d'autant plus de zéro que s est plus grand; de sorte que, lorsque le nombre s des causes devient de

---

[1]) On trouve en général que V_n est de l'ordre $\left(\frac{1}{s}\right)^{\frac{1}{2}(a+b)}$ où a et b sont déterminés par la formule: $3a + b = n$, de manière que a est un nombre entier et que b est égal à 0,1 ou 2.

Digitized by Google

plus en plus grand, la quantité entre parenthèses dans (6) converge de plus en plus vers l'unité et la probabilité de l'erreur résultante vers:

$$P = \frac{dX\,dY}{2\pi M_X M_Y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X^2}{M_X^2} + \frac{Y^2}{M_Y^2}\right)}$$

ce qui correspond à la formule (64) du mémoire cité.

Comme la dernière formule peut être écrite sous la forme:

$$P = \frac{dX}{M_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{X^2}{2M_X^2}} \frac{dY}{M_Y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Y^2}{2M_Y^2}}$$

on retrouve le théorème fondamental; *l'erreur dans le plan qui résulte d'un grand nombre de causes indépendantes les unes des autres, suit la même loi, que la résultante de ses deux projections sur les axes principaux, considérées comme des erreurs indépendantes.*

Pour les erreurs dans l'espace on peut suivre tout à fait le même développement sauf à mettre dans chaque formule une variable de plus correspondant à la troisième coordonnée Z. Il ne sera pas nécessaire d'écrire de nouveau toutes ces formules; il suffira de donner le résultat auquel on arrive. Pour la formule (6) on trouve de cette manière:

$$P = \frac{dX\,dY\,dZ}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} M_X M_Y M_Z} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X^2}{M_X^2} + \frac{Y^2}{M_Y^2} + \frac{Z^2}{M_Z^2}\right)} [1 + V_3 + V_4 + \text{etc.}] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

où V_3 V_4 etc. sont des expressions analogues à celles qui précèdent; seulement elles sont un peu plus compliquées par suite de la troisième coordonnée. Pour V_3 on trouve par exemple:

$$V_3 = \frac{1}{6}\left[\frac{\Sigma k_{3.0.0}}{M_X^3}\left(\frac{X^3}{M_X^3} - 3\frac{X}{M_X}\right) + \frac{\Sigma k_{0.3.0}}{M_Y^3}\left(\frac{Y^3}{M_Y^3} - 3\frac{Y}{M_Y}\right) + \frac{\Sigma k_{0.0.3}}{M_Z^3}\left(\frac{Z^3}{M_Z^3} - 3\frac{Z}{M_Z}\right) + 6\frac{\Sigma k_{1.1.1}}{M_X M_Y M_Z}\cdot\frac{X}{M_X}\cdot\frac{Y}{M_Y}\cdot\frac{Z}{M_Z} + \right.$$
$$+ 3\frac{\Sigma k_{2.1.0}}{M_X^2 M_Y}\left(\frac{X^2}{M_X^2} - 1\right)\frac{Y}{M_Y} + 3\frac{\Sigma k_{0.2.1}}{M_Y^2 M_Z}\left(\frac{Y^2}{M_Y^2} - 1\right)\frac{Z}{M_Z} + 3\frac{\Sigma k_{1.0.2}}{M_X M_Z^2}\frac{X}{M_X}\left(\frac{Z^2}{M_Z^2} - 1\right) + 3\frac{\Sigma k_{1.2.0}}{M_X M_Y^2}\frac{X}{M_X}\left(\frac{Y^2}{M_Y^2} - 1\right) +$$
$$\left. + 3\frac{\Sigma k_{0.1.2}}{M_Y M_Z^2}\frac{Y}{M_Y}\left(\frac{Z^2}{M_Z^2} - 1\right) + 3\frac{\Sigma k_{2.0.1}}{M_X^2 M_Z}\left(\frac{X^2}{M_X^2} - 1\right)\frac{Z}{M_Z}\right].$$

Les valeurs de V_3 et V_4 sont des quantités de même ordre de grandeur que celles qui entraient dans la formule (6), de sorte que ces quantités decroissent et convergent vers zéro, lorsque s devient de plus en plus grand et que par conséquence la formule (7) converge vers:

Digitized by Google

$$P = \frac{dX\,dY\,dZ}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\,M_X\,M_Y\,M_Z}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X^2}{M_X^2}+\frac{Y^2}{M_Y^2}+\frac{Z^2}{M_Z^2}\right)}$$

ce qui correspond à la formule (63) de mon mémoire sur la théorie des erreurs dans le plan et dans l'espace.

En écrivant la dernière formule sous la forme:

$$P = \frac{dX}{M_X\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{X^2}{2M_X^2}}\cdot\frac{dY}{M_Y\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{Y^2}{2M_Y^2}}\cdot\frac{dZ}{M_Z\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{Z^2}{2M_Z^2}}$$

on retrouve le théorème fondamental pour les erreurs dans l'espace dans le cas de la loi limite.

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Pag.

J. CARDINAAL. Application des principes de la géométrie synthétique à la solution des problèmes de la géométrie descriptive . . . . . 151.

I. Intersection des surfaces du second ordre . . . . . 152.

II. Projection des courbes gauches qui résultent de l'intersection des surfaces du second ordre. 165.

III. Construction et intersection des courbes planes d'après les principes de la géométrie synthétique . . . . . 171.

IV. Solution de quelques problèmes sur la construction et l'intersection des surfaces du second ordre . . . . . 181.

CH. M. SCHOLS. Démonstration directe de la loi limite pour les erreurs dans le plan et dans l'espace . . . . . 195.

Digitized by Google

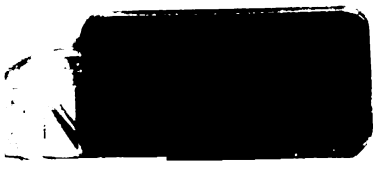
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google





Digitized by Google

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
505DEL C001
ANNALES DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE DE DELF
1-3 1884-88
3 0112 026532793

Digitized by Google