32101 058636273

OSTWALD'S KLASSIKER
DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN.
Nr. 177.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER GEGENSTÄNDE DER HÖHEREN GEODÄSIE

VON

CARL FRIEDRICH GAUSS

WILHELM ENGELMANN IN LEIPZIG

074
281

Untersuchungen

über

Gegenstände der höheren Geodäsie

Von

Carl Friedrich Gauß

Herausgegeben

von

J. Frischauf

Mit zwei Textabbildungen

Leipzig
Verlag von Wilhelm Engelmann
1910

Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie.

Von

Carl Friedrich Gauß.

Erste Abhandlung.

[261] Bei den, zum Teil von mir selbst, zum Teil unter meiner Leitung ausgeführten über das ganze Königreich Hannover sich erstreckenden trigonometrischen Vermessungen sind, sowohl in Beziehung auf die Art, wie die Messungen angestellt wurden, als noch mehr in Beziehung auf ihre nachherige mathematische Behandlung und ihre Verarbeitung zu Resultaten, Wege eingeschlagen, die von den sonst gewöhnlichen abweichen. Mein früher gehegter Vorsatz, nach völliger Beendigung der Messungen diese nebst allen von mir angewandten Verfahrungsarten in einem besondern Werke darzulegen, hat, aus Ursachen, deren Auseinandersetzung nicht hierher gehört, bisher nicht zur Ausführung kommen können, und ich wähle daher das Auskunftsmittel, das im theoretischen Teile mir eigentümliche in einer Reihe von Abhandlungen bekannt zu machen, um so lieber, weil ich auf diese Weise die Freiheit behalte, mit Ausführlichkeit manche Untersuchungen zu entwickeln, welche ein selbständiges Interesse darbieten und mit den übrigen in enger Verwandtschaft stehen, auch wenn von denselben bei meinen Messungen keine unmittelbare Anwendung gemacht ist. Dies gilt namentlich von dem größten Teile des Inhalts der gegenwärtigen ersten Abhandlung.

[262] 1.

Von der Aufgabe:

> die Teile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird,

habe ich im Jahre 1822 eine allgemeine Auflösung gegeben, welche Herr Konferenzrat *Schumacher* im 3. Heft der Astronomischen Abhandlungen hat abdrucken lassen. Bei der Anwendung dieser Aufgabe auf die höhere Geodäsie, für welche sie eine vorzüglich ergiebige Hilfsquelle wird, macht sich das Bedürfnis fühlbar, Abbildungen, welche unter der angegebenen Bedingung stehen, durch eine besondere Benennung auszuzeichnen, und ich werde daher dieselben *konforme* Abbildungen oder Übertragungen nennen, indem ich diesem sonst vagen Beiworte eine mathematisch scharf bestimmte Bedeutung beilege.

In der angeführten Schrift ist die allgemeine Auflösung, welche eine willkürliche Funktion einschließt, auch auf mehrere *bestimmte* Flächen angewandt; das letzte dort behandelte Beispiel betrifft die konforme Übertragung der Oberfläche des Umdrehungsellipsoids auf die Kugelfläche, und es ist [Art. 13] zugleich eine solche Bestimmung der arbiträren Funktion angegeben, die zu einer sehr brauchbaren Anwendung auf die höhere Geodäsie benutzt werden kann. Diese Benutzung war a. a. O. nur kurz angedeutet, und eine ausführlichere Entwicklung vorbehalten. Ich werde jedoch anstatt *dieser* speziellen Auflösung eine etwas abgeänderte und für die geodätischen Anwendungen noch viel mehr geeignete Methode zur konformen Übertragung der ellipsoidischen Fläche auf die Kugelfläche in der gegenwärtigen Abhandlung entwickeln und damit zugleich alles zu einer solchen Benutzung erforderliche verbinden.

2.

Die allgemeine Auflösung der Aufgabe, angewandt auf die ellipsoidische und sphärische Fläche, gibt folgende alle konformen Übertragungen der einen auf die andere umfassende Formel (1):

$$T + i \log \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} U = f\left(t + i \log \left\{\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} w \cdot \left(\frac{1 - e \cos w}{1 + e \cos w}\right)^{\frac{1}{2} e}\right\}\right). \quad (1)$$

Es bezeichnen hier

[263] e die Exzentrizität der Ellipse, durch deren Umdrehung um ihre kleine Achse die ellipsoidische Fläche erzeugt wird;

t und $90^\circ - w$ die Länge und Breite eines unbestimmten Punktes auf dieser Fläche, mithin w den Winkel einer in diesem Punkte gegen die Fläche gezogenen Normale mit der kleinen Achse;

T und $90^\circ - U$ die Länge und Breite des entsprechenden Punktes auf der Kugelfläche;

i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$;

f die Charakteristik für eine willkürlich zu wählende Funktion. Die Logarithmen sind immer die hyperbolischen.

Durch m wird das Vergrößerungsverhältnis bezeichnet werden, so verstanden, daß jedes Linearelement auf der ellipsoidischen Fläche sich zu dem entsprechenden Linearelement auf der Kugelfläche verhält wie 1 zu m: dieses Verhältnis ist an jeder Stelle der einen und der andern Fläche ein bestimmtes, für verschiedene Stellen veränderlich.

Die einfachste Auflösung erhält man, indem man die willkürliche Funktion schlechthin ihrem Argumente gleich, oder

$$fv = v$$

setzt, und diese Übergangsart ist in der Tat auch die geeignetste, wenn die *ganze* Oberfläche des Ellipsoids auf die Kugelfläche übertragen werden soll. Für die Anwendung auf geodätische Rechnungen, wo immer nur ein vergleichungsweise sehr kleiner Teil der Erdfläche in Betracht kommt, ist es aber, wie schon a. a. O. bemerkt ist, viel vorteilhafter, der Funktion noch einen konstanten und zwar imaginären Teil beizufügen, oder

$$fv = v - i \log k$$

zu setzen. Es lassen sich dann der Halbmesser der Kugel und die Konstante k so bestimmen, daß die das Vergrößerungsverhältnis ausdrückende Größe m, von deren geringer Ungleichheit innerhalb der Grenzen der dargestellten Fläche die Bequemlichkeit der Anwendung auf geodätische Rechnungen vornehmlich abhängt, für den mittleren Parallelkreis $= 1$, und bis zu einigen Graden Entfernung nach Norden und Süden kaum merklich von 1 verschieden wird; die Abweichung von dem Werte 1 ist nämlich von der zweiten Ordnung in Beziehung [264] auf den Abstand vom mittleren Parallelkreise,

und enthält außerdem noch die Abplattung oder das Quadrat von e als Faktor.

Allein dieser Vorteil läßt sich noch sehr vergrößern, wenn man anstatt jener Bestimmung der willkürlichen Funktion eine etwas abgeänderte, für die Rechnung fast ebenso bequeme wählt, indem man nämlich unter Zuziehung einer zweiten Konstante α,

$$f v = \alpha v - i \log k$$

setzt. Man hat dann in seiner Gewalt, durch zweckmäßige Bestimmung der beiden Konstanten zu bewirken, daß die Abweichung des Vergrößerungsverhältnisses m von dem Werte 1, in Beziehung auf den Abstand vom mittleren Parallelkreise ein Größe der dritten Ordnung wird, ungerechnet den auch hier bleibenden Faktor $e e$.

3.

Die Formel 1 gibt, bei dieser Bestimmung der Funktion f,

$$T = \alpha t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} U = k \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} w^{\alpha} \left(\frac{1 + e \cos w}{1 - e \cos w}\right)^{\frac{1}{2}\alpha e} \quad . \quad . \quad (3)$$

und für m findet man leicht, aus den in der mehrerwähnten Schrift entwickelten Grundsätzen, den Ausdruck

$$m = \frac{\alpha A \sin U \sqrt{(1 - e e \cos w^2)}}{a \sin w} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

wenn durch a die halbe große Achse des Ellipsoids und durch A der Halbmesser der Kugel bezeichnet wird.

Die Differentiation der logarithmisch ausgedrückten Gleichung 3 ergibt

$$\frac{\mathrm{d}\, U}{\sin U} = \frac{\alpha\, \mathrm{d}\, w}{\sin w} - \frac{\alpha\, e e \sin w\, \mathrm{d}\, w}{1 - e e \cos w^2}$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}\, U}{\mathrm{d}\, w} = \frac{\alpha\, (1 - e e) \sin U}{(1 - e e \cos w^2) \sin w} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Ebenso ergibt die Differentiation der Gleichung 4

$$\mathrm{d}\log m = \cot g\, U\, \mathrm{d}\, U - \cot g\, w\, \mathrm{d}\, w + \frac{ee \cos w \cdot \sin w\, \mathrm{d}\, w}{1 - ee \cos w^2}$$

$$= \cot g\, U\, \mathrm{d}\, U - \frac{(1 - ee) \cos w\, \mathrm{d}\, w}{(1 - ee \cos w^2) \sin w}$$

[**265**] folglich, wenn man mit Hilfe von 5 entweder $\mathrm{d}\, U$ oder $\mathrm{d}\, w$ eliminiert,

$$\frac{\mathrm{d}\log m}{\mathrm{d}\, w} = \frac{(1 - ee)\,(\alpha \cos U - \cos w)}{(1 - ee \cos w^2) \sin w} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\frac{\mathrm{d}\log m}{\mathrm{d}\, U} = \cot g\, U - \frac{\cos w}{\alpha \sin U} = \frac{\alpha \cos U - \cos w}{\alpha \sin U} \quad . \quad . \quad (7)$$

Durch eine nochmalige Differentiation der Gleichung 7 erhält man[1])

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}\log m}{\mathrm{d}\, U^2} = -\frac{1}{\sin U^2} + \frac{\cos U \cos w}{\alpha \sin U^2} + \frac{\sin w}{\alpha \sin U} \cdot \frac{\mathrm{d}\, w}{\mathrm{d}\, U}$$

$$= -\frac{1}{\sin U^2} + \frac{\cos U \cos w}{\alpha \sin U^2} + \frac{(1 - ee \cos w^2) \sin w^2}{\alpha\alpha\,(1 - ee) \sin U^2} \quad (8)$$

Soll nun für eine bestimmte Breite (Normalbreite) der Wert von m der Einheit gleich werden, für andere Breiten hingegen nur um Größen der dritten Ordnung von 1 abweichen, die Breitenunterschiede als Größen erster Ordnung betrachtet, so muß, wenn die Normalbreite auf dem Ellipsoid mit P, die entsprechende auf der Kugel mit Q bezeichnet wird, für $w = 90^\circ - P$, $U = 90^\circ - Q$ in Gemäßheit der Gleichungen 4, 7, 8 sein:

$$A = \frac{a \cos P}{\alpha \cos Q \sqrt{(1 - ee \sin P^2)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$\alpha \sin Q = \sin P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$$0 = 1 - \frac{\sin P \sin Q}{\alpha} - \frac{(1 - ee \sin P^2) \cos P^2}{\alpha\alpha\,(1 - ee)}$$

oder, wenn man in letzterer Gleichung für $\sin Q$ seinen Wert aus 10 substituiert,

$$\alpha\alpha = 1 + \frac{ee \cos P^4}{1 - ee} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Durch diese Gleichung ist demnach α gegeben, sobald für P ein bestimmter Wert gewählt ist; Q kann sodann durch Gleichung 10, und A durch Gleichung 9 bestimmt werden; endlich ergibt sich k durch die Substitution von $w = 90^\circ - P$, $U = 90^\circ - Q$ in der allgemeinen Gleichung 3, nämlich

$$k = \frac{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}P)^\alpha}{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}Q)} \cdot \left(\frac{1 - e\sin P}{1 + e\sin P}\right)^{\frac{1}{2}\alpha e} \quad . \quad . \quad (12)$$

4.

Die Berechnung der Konstanten A, α, k und der Normalbreite auf der Kugel Q aus P und e wird man, da alle diese Größen wie Grundlagen für die [**266**] Anwendung auf eine gewisse Zone zu betrachten sind, gern mit besonderer Sorgfalt und Schärfe auszuführen wünschen, und es verdienen daher einige dazu dienliche Umformungen hier einen Platz: eine Umformung wird ohnehin *notwendig*, wenn man von einer bestimmten Normalbreite nicht auf dem Ellipsoid, sondern auf der Kugel, also von einem gegebenen Werte von Q ausgehen, und daraus die übrigen Größen berechnen will.

Führt man drei Hilfswinkel φ, ζ, η ein, so daß

$$\sin\varphi = e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$
$$\operatorname{tang}\zeta = \operatorname{tang}\varphi\cos P^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$
$$\operatorname{tang}\eta = \sin\zeta\operatorname{tang}P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

so wird

$$\alpha = \frac{1}{\cos\zeta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$
$$\sin Q = \cos\zeta\sin P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$
$$\cos\eta\cos Q = \cos P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$
$$\sin\eta = \operatorname{tang}\zeta\operatorname{tang}Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$
$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(P - Q) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\zeta \cdot \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\eta \quad . \quad . \quad (20)$$
$$\sin(2\zeta - \varphi) = e\cos 2Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Die Gleichung 18 folgt leicht aus der Verbindung von 15 und 17; sodann 19 aus der Verbindung von 15, 17, 18; ferner 20 aus 17, 18, 19, endlich 21 aus 14 und 17.

Am schärfsten wird man rechnen, wenn man, in dem Falle wo P gegeben ist, sich der Formeln 14, 15, 20 bedient, um der Reihe nach ζ, η, Q zu bestimmen; für den Fall hingegen, wo Q gegeben ist, mittels der Gleichungen 21, 19, 20 die

Werte von ζ, η, P ableitet: zur Kontrolle mag man dann noch eine oder einige der übrigen Gleichungen benutzen. Führt man noch einen vierten Hilfswinkel Θ ein, nach der Formel

$$\sin \Theta = e \sin P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

so wird

$$\cos \varphi = \cos \zeta \cos \eta \cos \Theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

und die Formeln 9 und 12 erhalten folgende Gestalt[2]):

$$A = \frac{a \cos P}{\alpha \cos \Theta \cos Q} = \frac{a \cos \eta}{\alpha \cos \Theta} = \frac{a \cos \varphi}{\cos \Theta^2} = \frac{a \cos \varphi}{1 - ee \sin P^2}$$

$$k = \frac{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} P)^\alpha}{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} Q) \operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} \Theta)^{\alpha e}}$$

[267] 5.

Ich begleite die Vorschriften dieser ganzen Abhandlung mit einer auf das schärfste durchgeführten numerischen Anwendung, welche andern, die zur Verarbeitung ihrer Messungen die hier vorgetragene Methode benutzen wollen, entweder als Rechnungsmuster zur Konstruktion der erforderlichen Hilfstafeln oder auch schon unmittelbar als Hilfsapparat für einen großen Teil der gemäßigten Zone dienen kann. In den meisten Fällen wird man übrigens sich mit einer *viel* geringern Schärfe begnügen können.

Als Normalbreite wähle ich $52^\circ 40'$, welche ungefähr dem mittleren Parallelkreise des Königreichs Hannover entspricht; da es jedoch in einigen Beziehungen vorteilhafter ist, wenn für die Normalbreite auf der Kugel, als wenn für die auf dem Ellipsoid eine runde Zahl gewählt wird, so setze ich

$$Q = 52^\circ \; 40' \; 0''$$

Die Rechnung führe ich nach den neuesten von *Bessel* aus den Gradmessungen abgeleiteten Erddimensionen (Astronomische Nachrichten 19. Band S. 116), wonach, die Toise zur Einheit angenommen,

$$\log a = 6{,}5148235337$$
$$\log \cos \varphi = 9{,}9985458202$$

Es folgt hieraus, mit Hilfe der zehnzifferigen Logarithmen,

$$\begin{aligned}
\varphi &= 4^\circ\ 41'\ 9''\ 98262 \\
\log e &= 8{,}9122052079 \\
\zeta &= 1^\circ\ 43'\ 26''\ 80402 \\
\eta &= 2\ \ 15\ \ 42\ \ 34083 \\
P &= 52\ \ 42\ \ \ \ 2{,}53251 \\
\log \alpha &= 0{,}0001966553 \\
\Theta &= 3^\circ\ 43'\ 34''\ 24669 \\
\log \frac{1}{k} &= 0{,}0016708804 \\
\log A &= 6{,}5152074703
\end{aligned}$$

Nimmt man das französische gesetzliche Meter als Einheit an, so wird

$$\log A = 6{,}8050274003$$

[**268**] Wählte man hingegen den zehnmillionsten Teil des Erdquadranten selbst, nach obigen Dimensionen, zur Einheit, so würde sein

$$\log A = 6{,}8049902365$$

6.

Die Berechnung der Breite auf der Kugel aus der Breite auf dem Ellipsoid kann füglich nach der Formel 3 geführt werden, wenn sie nur für wenige Fälle gefordert wird; für ausgedehntere Anwendungen hingegen wird der Gebrauch einer Reihe vorteilhaft sein, zu deren Entwicklung hier die nötigen Formeln gegeben werden sollen.

Ich bezeichne eine unbestimmte Breite auf dem Ellipsoid, oder einen unbestimmten Wert von $90^\circ - w$, durch $P + p$, und die entsprechende Breite auf der Kugel, oder den Wert von $90^\circ - U$ durch $Q + q$. Nach dem *Taylor*schen Lehrsatze wird

$$q = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}w} \cdot p - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}U}{\mathrm{d}w^2} \cdot pp + \tfrac{1}{6} \cdot \frac{\mathrm{d}^3 U}{\mathrm{d}w^3} \cdot p^3 - \tfrac{1}{24} \cdot \frac{\mathrm{d}^4 U}{\mathrm{d}w^4} \cdot p^4 +$$

usw.

wo für die Differentialquotienten diejenigen bestimmten Werte zu substituieren sind, welche zu $p = 0$, oder zu $w = 90^\circ - P$, $U = 90^\circ - Q$ gehören. Die sukzessive Entwicklung der unbestimmten Differentialquotienten ergibt

$$\frac{\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,w} = \frac{\alpha\,(1 - ee)\sin U}{(1 - ee\cos w^2)\sin w}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,w^2} = \frac{\alpha\,(1 - ee)\sin U}{(1 - ee\cos w^2)^2 \sin w^2}\{\alpha\,(1 - ee)\cos U - \cos w + ee\,(\cos w^3 - 2\cos w \sin w^2)\}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^3\,U}{\mathrm{d}\,w^3} = \frac{\alpha\,(1 - ee)\sin U}{(1 - ee\cos w^2)^3 \sin w^3}\{&\alpha\,\alpha\,(1 - ee)^2(\cos U^2 - \sin U^2)\\ &- 3\,\alpha\,(1 - ee)\cos U\,(\cos w - ee\,(\cos w^3 - 2\cos w \sin w^2))\\ &+ 2\cos w^2 + \sin w^2 - ee\,(4\cos w^4 - 2\sin w^4)\\ &+ e^4\,(2\cos w^6 - \cos w^4 \sin w^2 + 6\cos w^2 \sin w^4)\}\end{aligned}$$

Die beiden folgenden, welche ich gleichfalls entwickelt habe, setze ich, um den Raum zu schonen, in ihrer unbestimmten Form nicht hierher.

Die Substitution von $w = 90^\circ - P$, $U = 90^\circ - Q$ ergibt dann, wenn zugleich

anstatt $\alpha \sin Q$ der Wert $\sin P$ (nach Gleichung 10) und

anstatt $\alpha \cos Q$ der Wert $\dfrac{\cos P}{\cos \zeta \cos \eta} = \dfrac{\cos \Theta \cos P}{\cos \varphi}$ (nach Gleichung 18, 16, 23)

substituiert, und zur Abkürzung $\cos P = c$, $\sin P = s$ geschrieben wird, [269]

$$\frac{\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,w} = \frac{\cos \varphi}{\cos \Theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,w^2} = -\frac{3\,ee\cos \varphi}{\cos \Theta^3} \cdot cs$$

$$\frac{\mathrm{d}^3\,U}{\mathrm{d}\,w^3} = \frac{ee\cos \varphi}{\cos \Theta^5}\,(3\,cc - 3\,ss + ee\,(12\,ccss + 3\,s^4))$$

$$\frac{\mathrm{d}^4\,U}{\mathrm{d}\,w^4} = \frac{ee\cos \varphi}{\cos \Theta^7} \cdot cs\,(16 - ee\,(49\,cc - 13\,ss) - e^4\,(56\,ccss + 29\,s^4))$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^5\,U}{\mathrm{d}\,w^5} = \frac{ee\cos \varphi}{\cos \Theta^9}\,(&-16\,cc + 12\,ss + ee\,(49\,c^4 - 378\,ccss + 9\,s^4)\\ &+ c^4\,(628\,c^4 ss + 174\,ccs^4 - 54\,s^6)\\ &+ e^6\,(268\,c^4 s^4 + 220\,ccs^6 + 33\,s^8))\end{aligned}$$

Bei dieser Entwicklung von q in eine Reihe nach p ist stillschweigend vorausgesetzt, daß beide Größen in Teilen des dem Halbmesser gleichen Bogens ausgedrückt sind: soll dagegen q Sekunden und p Grade bedeuten, so muß dem ersten Gliede der Reihe der Faktor 3600, dem zweiten der Faktor $\frac{3600\,\pi}{180} = 20\,\pi$, dem dritten der Faktor $3600\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 = \frac{1}{9}\,\pi\pi$ usf. beigefügt werden. Unter dieser Voraussetzung gibt die Anwendung der Formeln auf unser Beispiel folgende Zahlenwerte, welche ich in eine solche Form setze, daß weitgestreckte Dezimalbrüche vermieden werden:

$$\begin{aligned} q = 359556''\,69447 &\cdot \frac{p}{100} \\ + 3041{,}386524 &\cdot \left(\frac{p}{100}\right)^2 \\ - 946{,}260563 &\cdot \left(\frac{p}{100}\right)^3 \\ - 4135{,}396057 &\cdot \left(\frac{p}{100}\right)^4 \\ + 227{,}04342 &\cdot \left(\frac{p}{100}\right)^5 \end{aligned}$$

welche Reihe, da p in der Anwendung nur wenige Einheiten betragen soll, immer sehr schnell konvergiert. Um für die Richtigkeit dieser Zahlen eine Bestätigung zu erhalten, habe ich die Rechnung für $p = -6$ und für $p = +6$, d. i. für

$$\begin{aligned} P + p &= 46^\circ\ 42'\ 2''53251 \text{ und für} \\ P + p &= 58\ \ 42\ \ 2{,}53251 \end{aligned}$$

sowohl nach der Reihe, als nach der endlichen Formel 3 ausgeführt. Die Reihe gibt

[270]
$$\begin{aligned} Q + q &= 46^\circ\ 40'\ 37''69794 \\ Q + q &= 58\ \ 39\ \ 44{,}09285 \end{aligned}$$

die endliche Formel hingegen

$$\begin{aligned} Q + q &= 46^\circ\ 40'\ 37''69794 \\ Q + q &= 58\ \ 39\ \ 44{,}09283 \end{aligned}$$

also so genau übereinstimmend, wie zehnzifferige Logarithmen nur verstatten.

7.

Auf ähnliche Weise läßt sich der Logarithm von m in eine Reihe entwickeln, deren erste Glieder folgende sind:

$$\log m = -\frac{\sin 2\varphi^2}{6\cos\Theta^4}\cdot csp^3 - \frac{\sin 2\varphi^2}{24\cos\Theta^6}(cc + 11\,eess)\,p^4$$
$$+\frac{\sin 2\varphi^2}{120\cos\Theta^8}\cdot\frac{s}{c}\big(2\,cc - 3\,ss - ee\,(40\,c^4 - 20\,ccss$$
$$- 6\,s^4) - e^4\,ss\,(104\,c^4 + 22\,ccss + 3\,s^4)\big)\,p^5$$

Auch das folgende Glied habe ich (auf einem andern Wege) entwickelt, jedoch nur nach dem Hauptbestandteile des Koeffizienten, welcher von der Ordnung ee ist, und dafür gefunden:

$$+\frac{\sin 2\varphi^2}{720\cos\Theta^{10}}\cdot\frac{1}{cc}(2\,c^4 - 18\,ccss - 15\,s^4)\,p^6$$

Der durch diese Reihe ausgedrückte Logarithm ist der hyperbolische, und p wird, wie oben, in Teilen des Halbmessers ausgedrückt verstanden: verlangt man den briggischen Logarithmen, indem man p Grade bedeuten läßt, so muß noch der Modulus als Faktor hinzukommen und $\frac{\pi p}{180}$ für p geschrieben werden. In dieser Gestalt wird für unser Beispiel

$$\log m = -0{,}0049612433\left(\frac{p}{100}\right)^3$$
$$-0{,}0017329876\left(\frac{p}{100}\right)^4$$
$$-0{,}002393772\left(\frac{p}{100}\right)^5$$
$$-0{,}0124746\left(\frac{p}{100}\right)^6$$

[271] Die Anwendung dieser Reihe auf die oben betrachteten einzelnen Fälle gibt

für $p = -6$, $\log m = +0{,}000001050448$
für $p = +6$, $\log m = -0{,}000001096531$

Die endliche Formel 4, welche man auch so schreiben kann

$$m = \frac{\alpha A \cos(Q+q)\sqrt{(1 - ee\sin(P+p)^2)}}{\alpha \cos(P+p)}$$
$$= \frac{\cos\eta \cos(Q+q)\sqrt{(1 - ee\sin(P+p)^2)}}{\cos\Theta \cos(P+p)}$$

gibt, mit zehnzifferigen Logarithmen berechnet, bis auf die zehnte Ziffer genau dasselbe.

8.

Für die umgekehrte Aufgabe, wo q gegeben und p gesucht wird, ist die Entwicklung in eine Reihe noch wesentlicher, da die endliche Formel 3 in diesem Falle nur auf indirektem Wege zum Ziele führen könnte. Der *Taylor*sche Lehrsatz gibt

$$p = \frac{\mathrm{d}\,w}{\mathrm{d}\,U} \cdot q - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}\,w}{2\,\mathrm{d}\,U^2} \cdot qq + \frac{\mathrm{d}^3 w}{6\,\mathrm{d}\,U^3} \cdot q^3 - \text{ usf.}$$

wo für die Differentialquotienten diejenigen bestimmten Werte zu setzen sind, welche zu $q = 0$ oder $U = 90^\circ - Q$, $w = 90^\circ - P$ gehören. Für die unbestimmten Werte der drei ersten Differentialquotienten ergeben sich folgende Ausdrücke[3])

$$\frac{\mathrm{d}\,w}{\mathrm{d}\,U} = \frac{(1 - ee\cos w^2)\sin w}{\alpha(1 - ee)\sin U}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}\,w}{\mathrm{d}\,U^2} = -\frac{(1 - ee\cos w^2)\sin w}{\alpha\alpha(1 - ee)^2 \sin U^2}\big(\alpha(1 - ee)\cos U - \cos w$$
$$+ ee\cos w(\cos w^2 - 2\sin w^2)\big)$$

$$\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}\,U^3} = -\frac{(1 - ee\cos w^2)\sin w}{\alpha^3(1 - ee)^3 \sin U^3}\{\alpha\alpha(1 - ee)^2(2\cos U^2 + \sin U^2)$$
$$- 3\alpha(1 - ee)\cos U\cos w\big(1 - ee(\cos w^2 - 2\sin w^2)\big)$$
$$+ \cos w^2 - \sin w^2 - ee(2\cos w^4 - 12\cos w^2 \sin w^2$$
$$+ 2\sin w^4) + e^4(\cos w^6 - 11\cos w^4 \sin w^2$$
$$+ 6\cos w^2 \sin w^4)\}$$

Die beiden folgenden gleichfalls vollständig entwickelten Koeffizienten setze ich, um den Raum zu schonen, nicht hierher, da sie doch nur Zwischengrößen sind, um zu den End-

resultaten zu gelangen. Diese finden sich nach der Sub- [272]
stitution von $90^\circ - P$, $90^\circ - Q$ anstatt w, U, und nach Anwendung der im 6. Art. angegebenen Umformung von $\alpha \cos U$ und $\alpha \sin U$, indem zugleich zur Abkürzung c, s anstatt $\cos P$, $\sin P$ geschrieben wird, wie folgt:

$$
\begin{aligned}
p = & \frac{\cos \Theta}{\cos \varphi} \cdot q \\
& - \frac{3\,ee}{2 \cos \varphi^2} \cdot csqq \\
& + \frac{ee}{2 \cos \varphi^3 \cos \Theta} \{ - cc + ss + ee(5\,ccss - s^4) \} q^3 \\
& + \frac{ee}{24 \cos \varphi^4 \cos \Theta^2} cs \{ 16 + ee(41\,cc - 77\,ss) - e^4 (101\,ccss \\
& \qquad - 61\,s^4) \} q^4 \\
& + \frac{ee}{120 \cos \varphi^5 \cos \Theta^3} \{ 16\,cc - 12\,ss + ee(41\,c^4 - 522\,ccss \\
& \qquad + 81\,s^4) - e^4 (538\,c^4 ss - 1536\,ccs^4 + 126\,s^6) \\
& \qquad + e^6 (857\,c^4 s^4 - 1030\,ccs^6 + 57\,s^8) \} q^5 + \text{usf.}
\end{aligned}
$$

Die numerischen Werte für unser Beispiel finden sich daraus in ähnlicher Form wie oben, d. i. wenn p in Sekunden, q in Graden ausgedrückt wird,

$$
\begin{aligned}
p = & \; 360443''852122 \left(\frac{q}{100}\right) \\
& - 3052{,}649780 \left(\frac{q}{100}\right)^2 \\
& + 1002{,}642506 \left(\frac{q}{100}\right)^3 \\
& + 4119{,}589282 \left(\frac{q}{100}\right)^4 \\
& - \; 431{,}181623 \left(\frac{q}{100}\right)^5 \text{ usf.}
\end{aligned}
$$

9.

Auf ähnliche Weise ist der hyperbolische Logarithm von m in folgende nach Potenzen von q fortschreitende Reihe ent-

wickelt, wobei der Koeffizient von q^6 nur nach seinem Hauptteile auf anderm Wege abgeleitet ist:

$$\begin{aligned}\log m = &-\frac{2\,ee}{3\cos\varphi\cos\Theta}\cdot csq^3\\ &-\frac{ee}{6\cos\varphi^2\cos\Theta^2}\cdot cc\,(1-7\,eess)\,q^4\\ &+\frac{ee}{30\cos\varphi^3\cos\Theta^3}\cdot\frac{s}{c}\{2\,cc-3\,ss+ee\,(20\,c^4-10\,ccss\\ &\qquad+6\,s^4)-e^4\,(59\,c^4\,ss-8\,ccs^4+3\,s^6)\}\,q^5\\ &+\frac{ee}{180\cos\varphi^4\cos\Theta^4}\cdot\frac{1}{cc}\,(2\,c^4-18\,ccss-15\,s^4)\,q^6\end{aligned}$$

[**273**] Die Zahlenwerte in unserm Beispiele (für den briggischen Logarithmen, und q in Graden ausgedrückt) sind[4])

$$\begin{aligned}\log m = &-0{,}0049796163\;94\left(\frac{q}{100}\right)^3\\ &-0{,}0016150307\;6\;\left(\frac{q}{100}\right)^4\\ &-0{,}0023973954\;\left(\frac{q}{100}\right)^5\\ &-0{,}0125671\;\left(\frac{q}{100}\right)^6\end{aligned}$$

10.

Bei einer weitumfassenden Vermessung, wo die Übertragung vom Sphäroid auf die Kugel oder umgekehrt für sehr viele Punkte vorkommt, wird man, anstatt jedesmal auf die Formeln zurückzukommen, lieber ein für allemal eine ausgedehnte Tafel berechnen. Der Gebrauch einer solchen Tafel wird aber bequemer sein, wenn man ihr die Breite auf der Kugel $Q+q$ zum Argument gibt, als wenn man die Breite auf dem Sphäroid dazu wählen wollte, indem der Übergang von ersterer auf die andere viel häufiger erfordert wird, als der umgekehrte. Für jeden Rechnungserfahrenen wird übrigens die Bemerkung überflüssig sein, daß man behufs Konstruktion einer solchen

Tafel nur eine mäßige Anzahl von Gliedern direkt berechnet, aus denen die übrigen mit eben so großer Schärfe und sehr geringer Mühe durch ein angemessenes Interpolationsverfahren bestimmt werden. Es werden also dafür die im 8. und 9. Artikel mitgeteilten Reihen zur Anwendung kommen, und gerade deswegen ist es vorteilhaft, daß nicht P, sondern Q eine runde Zahl sei.

Ich füge am Schluß dieser Abhandlung eine solche Tafel bei, welcher der Normalwert $Q = 52^\circ 40'$ (wie dem bisher betrachteten Beispiele) zum Grunde liegt, und die durch zwölf Grade, von $46^\circ 40'$ bis $58^\circ 40'$, für alle Werte des Arguments $Q + q$ von Minute zu Minute fortschreitet. Sie gibt den zugehörigen Wert von $P + p$ auf fünf Dezimalen der Sekunde genau; ferner den briggischen Logarithmen von m auf zehn Stellen, nämlich in Einheiten der zehnten Dezimale; endlich auch noch, in Sekunden ausgedrückt, den Wert von $-\frac{\mathrm{d}m}{2m\,\mathrm{d}q}$; der Gebrauch dieser letzten Kolumne wird weiter unten erklärt werden. Ich habe die Tafel deshalb mit so vielen Dezimalen gegeben, damit sie auch für die allerschärfste Berechnung einer trigonometrischen Vermessung, nämlich für eine [**274**] Durchführung derselben mit zehnziffrigen Logarithmen, vollkommen zureiche. Jeder, der diese Tafel zur Berechnung von Messungen innerhalb dieser Zone benutzen will, wird, wenn eine geringere Schärfe ihm genügt (und dies ist allerdings der gewöhnlichste Fall) nach Gefallen einige der letzten Dezimalen weglassen. In welcher Form man übrigens auch die *Resultate* einer Messung darstellen mag, so sollte dies, konsequenter Weise, immer in einer Schärfe geschehen, die der Schärfe der Messungen selbst entsprechend ist, so daß man aus den Zahlen der Resultate immer rückwärts die beobachteten Größen ebenso scharf wieder finden kann, wie sie gemessen waren. Wählt man also dazu ausschließlich die Längen und Breiten, so würde trigonometrischen Messungen, selbst von nur mäßiger Schärfe, durchaus nicht ihr Recht widerfahren, wenn man die Resultate nur in solcher Schärfe ansetzen wollte, wie Längen und Breiten sich auf astronomischem Wege bestimmen lassen: man würde dadurch nur einen falschen Maßstab für die Güte der Arbeit erhalten, und sich oft gerade der durchgreifendsten Prüfungen dieser Güte entäußern[5]).

11.

Die Benutzung der hier betrachteten konformen Übertragung der Ellipsoidfläche auf die Kugelfläche zur Berechnung trigonometrischer Messungen kann auf mehr als eine Art geschehen: in der gegenwärtigen Abhandlung wird nur von der unmittelbaren Benutzung die Rede sein; andere abgeleitete Arten, sie zu jenem Zwecke zu benutzen, sollen einer zweiten Abhandlung vorbehalten bleiben.

Die unmittelbare Benutzung ist im wesentlichen schon in der oben angeführten Schrift kurz angedeutet. Ein auf der Oberfläche des Ellipsoids durch kürzeste oder sogenannte geodätische Linien gebildetes System von Dreiecken wird auf der Oberfläche der Kugel durch ein Dreieckssystem dargestellt, worin die Winkel den entsprechenden auf dem Sphäroid genau gleich sind, die Seiten hingegen, wenn sie nicht Meridianbögen sind, zwar nicht in aller Strenge Bögen größter Kreise werden, aber doch von solchen so wenig abweichen, daß sie in den meisten Fällen als damit ganz zusammenfallend betrachtet werden dürfen, oder daß wenigstens die Abweichung da, wo die größte Genauigkeit gefordert wird, mit aller nötigen Schärfe leicht berechnet werden kann, immer vorausgesetzt, daß

[**275**] erstens die Dreiecke sich nicht gar zu weit von dem Normalparallelkreise entfernen, und

zweitens, daß sie vergleichungsweise, nämlich nach dem Verhältnisse der Seiten zu einem ganzen Erdquadranten, klein sind, wie bei wirklich meßbaren Dreiecken immer der Fall ist.

Dieses genaue Anschmiegen der auf die Kugelfläche übertragenen Dreiecksseiten an größte Kreisbögen findet nun bei der in obigem betrachteten konformen Darstellung in noch viel höherem Grade statt, als bei der a. a. O. vorgeschlagenen. Wo diese [nach Art. 13] bei einem Abstande von $2\frac{1}{2}$ Grad von dem Normalparallelkreise eine linearische Vergrößerung von $\frac{1}{530000}$ ergab, würde die neue Methode nur eine Änderung von $\frac{1}{5800000}$ geben.

Man kann daher das ganze System, nachdem man zuvörderst eine Dreiecksseite auf die Kugelfläche gehörig übertragen hat, ganz so, als wenn es auf dieser selbst läge, mittels der Winkel berechnen, nötigenfalls mit der eben angedeuteten Modifikation, sodann für alle Punkte die Werte der Breiten

und Längen bestimmen, und von diesen mittels der oben gegebenen Formeln oder, vielmehr was die Breiten betrifft, mittels einer solchen Hilfstafel, wie hier beigefügt ist, auf die Breiten und Längen auf der Ellipsoidfläche übergehen.

12.

Es bleibt demnach hier noch übrig, die Bestimmung der Abweichung einer auf die Kugelfläche übertragenen geodätischen Linie von dem zwischen denselben Endpunkten enthaltenen größten Kreisbogen zu entwickeln, wonach sich zugleich in jedem Falle beurteilen läßt, ob die Berücksichtigung dieser Abweichung nötig werde. Man kann diese Aufgabe auf mehr als eine Art behandeln: für den gegenwärtigen Zweck, wo die Reduktion immer nur eine sehr kleine Größe betragen kann, scheint folgende Methode die angemessenste zu sein.

Es sei L die in Rede stehende geodätische Linie auf dem Ellipsoid in unbestimmter Ausdehnung betrachtet, M ihre konforme Darstellung auf der Kugelfläche, F und G die Endpunkte eines bestimmten Stückes von M, endlich N ein durch diese beiden Punkte geführter größter Kreis. Jeder Punkt in N werde bestimmt durch seinen Abstand x von einem zunächst willkürlich auf N gewählten Anfangspunkte; jeder Punkt von M durch seinen senkrechten Abstand y von N und durch das dem Fußpunkte dieses Perpendikels zukommende [**276**] x. Diese Koordinaten sind als in Teilen des Halbmessers ausgedrückt verstanden und müssen demnach noch multipliziert werden mit A, wenn man sie nach ihrer Lineargröße, oder mit 206265″, wenn man sie in Bogenteilen ausgedrückt verlangt.

Ein Element von M wird durch

$$\sqrt{(\cos y^2\, \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)}$$

oder durch $\frac{\cos y}{\cos \psi} \cdot \mathrm{d}x$ ausgedrückt, wenn man

$$\frac{\mathrm{d}y}{\cos y\, \mathrm{d}x} = \operatorname{tang} \psi$$

setzt, wo mithin ψ die Neigung des Elements gegen die Parallele mit N bedeutet. Um die Vorstellung zu fixieren, mag man sich die x von der Rechten nach der Linken, die y von

unten nach oben wachsend denken, wodurch also der Sinn positiver ψ von selbst bestimmt ist.

Das wie oben mit m bezeichnete Vergrößerungsverhältnis beim Übertragen der ellipsoidischen Fläche auf die Kugelfläche kann hier wie eine Funktion von x und y betrachtet werden: die Größe des Elements von L, dem jenes Element von M entspricht, wird

$$= \frac{A \cos y}{m \cos \psi} \cdot \mathrm{d}x$$

sein, und wenn zur Abkürzung

$$\log \operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2} y) = u$$
$$\frac{\cos y}{m} = n$$

gesetzt wird, wo mithin n gleichfalls Funktion von x und y oder, was auf eins hinausläuft, von x und u sein wird, so hat man

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

und das Element von L

$$= \frac{An}{\cos \psi} \cdot \mathrm{d}x$$

Die Natur der Linie M wird also durch die Bedingung bestimmt, daß zwischen irgendwelchen bestimmten Grenzen das Integral $\int \frac{n}{\cos \psi} \mathrm{d}x$ oder

$$\int n \sqrt{\left(1 + \frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}x^2}\right)} \mathrm{d}x$$

[**277**] ein Minimum werden soll, wofür nach den Regeln der Variationsrechnung sich die Gleichung ergibt

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}u} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}x^2}\right)} \mathrm{d}x = \mathrm{d} \frac{\frac{n \mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}x^2}\right)}}$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\cos\psi} = \mathrm{d} \cdot n \sin\psi$$

Unter $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}u}$ ist der partielle Differentialquotient verstanden. Diese Formel ist streng und allgemeingültig. Für unsern Zweck aber, wo bloß das zwischen F und G liegende Stück der Kurve M in Betracht kommt, in deren sämtlichen Punkten u und ψ nur sehr kleine Werte haben können, dürfen wir 1 anstatt $\cos\psi$ und $\operatorname{tang}\psi$ anstatt $\sin\psi$ schreiben, mithin

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}u} \cdot \mathrm{d}x = \mathrm{d} \cdot n \operatorname{tang}\psi$$

oder

$$n \operatorname{tang}\psi = \int \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}x + \text{Konst.}$$

setzen, zugleich aber auch in dieser Formel anstatt der Werte, welche n und $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}u}$ in der Linie M haben, diejenigen anwenden, welche in den korrespondierenden Punkten der Linie N (für $u = 0$ oder $y = 0$) stattfinden und folglich mit den Werten $\frac{1}{m}$ und $-\frac{\mathrm{d}m}{mm\,\mathrm{d}u} = -\frac{\mathrm{d}m}{mm\,\mathrm{d}y}$ übereinstimmen.

Zur bequemeren Ausführung der weiteren Entwicklungen sollen jetzt die Abszissen von dem Punkte F an gezählt, oder in diesem Punkte $x = 0$, in G hingegen $x = h$ gesetzt werden; ich setze ferner $\frac{\mathrm{d}m}{m\,\mathrm{d}y} = l$, welches im allgemeinen zwar Funktion von x und y ist, hier aber bloß nach seinem in der Linie N oder für $y = 0$ geltenden Werte, also als Funktion von x allein betrachtet wird; endlich seien ψ^0, m^0, l^0, die bestimmten Werte von ψ, m, l in dem Punkte F, und ψ', m', l' die in dem Punkte G. Die obige Formel wird hiernach

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{m \operatorname{tang}\psi^0}{m^0} - m \int \frac{l}{m}\,\mathrm{d}x$$

wo die Integration von $x = 0$ anfängt. Nehmen wir nun an, daß l und m in folgende nach Potenzen von x fortschreitende Reihen

[278]
$$l = l^0 + \lambda x + \lambda' xx + \text{ usw.}$$
$$m = m^0 (1 + \mu x + \mu' xx + \text{ usw.})$$

entwickelt sind, so ergibt die Rechnung

$$\begin{aligned}\tang \psi = {} & (1 + \mu x + \mu' xx + \text{ usw.}) \tang \psi^0 \\ & - l^0 x - \tfrac{1}{2}(\lambda + l^0 \mu) xx - (\tfrac{1}{3}\lambda' + \tfrac{1}{6}\lambda\mu - \tfrac{1}{6} l^0 \mu\mu \\ & + \tfrac{2}{3} l^0 \mu') x^3 - \text{ usw.}\end{aligned}$$

und hieraus, weil $u = \int \tang \psi \cdot \mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}u = {} & (x + \tfrac{1}{2}\mu xx + \tfrac{1}{3}\mu' x^3 + \text{ usw.}) \tang \psi^0 \\ & - \tfrac{1}{2} l^0 xx - \tfrac{1}{6}(\lambda + l^0 \mu) x^3 - (\tfrac{1}{12}\lambda' + \tfrac{1}{24}\lambda\mu \\ & - \tfrac{1}{24} l^0 \mu\mu + \tfrac{1}{6} l^0 \mu') x^4 - \text{ usw.}\end{aligned}$$

wo keine Konstante hinzuzufügen ist, weil für $x = 0$ auch $u = 0$ wird. Da nun auch für $x = h$, $u = 0$ wird, so folgt aus dieser Gleichung

$$\tang \psi^0 = \tfrac{1}{2} l^0 h + (\tfrac{1}{6}\lambda - \tfrac{1}{12} l^0 \mu) hh + (\tfrac{1}{12}\lambda' - \tfrac{1}{24}\lambda\mu) h^3 + \text{ usw.}$$

Wird in der Gleichung für ψ auch anstatt x der Wert h, und statt $\tang \psi^0$ der eben gefundene substituiert, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\tang \psi' = {} & - \tfrac{1}{2} l^0 h - (\tfrac{1}{3}\lambda + \tfrac{1}{12} l^0 \mu) hh - (\tfrac{1}{4}\lambda' + \tfrac{1}{24}\lambda\mu \\ & - \tfrac{1}{12} l^0 \mu\mu + \tfrac{1}{6} l^0 \mu') h^3 \text{ usw.}\end{aligned}$$

Da

$$l' = l^0 + \lambda h + \lambda' hh + \text{ usw.}$$
$$m' = m^0 (1 + \mu h + \mu' hh + \text{ usw.})$$

so wird

$$\begin{aligned}(\tfrac{1}{3} l^0 + \tfrac{1}{6} l') h \sqrt[6]{\frac{m^0}{m'}} = {} & \tfrac{1}{2} l^0 h + (\tfrac{1}{6}\lambda - \tfrac{1}{12} l^0 \mu) hh \\ & + (\tfrac{1}{6}\lambda' - \tfrac{1}{36}\lambda\mu + \tfrac{7}{144} l^0 \mu\mu - \tfrac{1}{12} l^0 \mu') h^3 \text{ usw.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-(\tfrac{1}{6} l^0 + \tfrac{1}{3} l') h \sqrt[6]{\frac{m'}{m^0}} = {} & - \tfrac{1}{2} l^0 h - (\tfrac{1}{3}\lambda + \tfrac{1}{12} l^0 \mu) hh \\ & - (\tfrac{1}{3}\lambda' + \tfrac{1}{18}\lambda\mu - \tfrac{5}{144} l^0 \mu\mu + \tfrac{1}{12} l^0 \mu') h^3 \text{ usw.}\end{aligned}$$

also in den beiden ersten Gliedern oder bis auf die Ordnung hh mit obigen Werten von $\tang \psi^0$, $\tang \psi'$ übereinstimmend: diese bequemen Ausdrücke können daher als hinreichend scharfe

Werte dieser Tangenten, oder unter Hinzufügung des Faktors 206265″ als die Werte der Winkel ψ^0, ψ' selbst angenommen werden.

Die Länge der Linie L selbst, zwischen den Punkten auf dem Ellipsoid, denen auf der Kugel die Punkte F, G entsprechen, ist das Integral

$$[279] \qquad A\int \frac{\cos y}{m \cos \psi} \, \mathrm{d}x$$

von $x = 0$ bis $x = h$ ausgedehnt; es wird aber immer erlaubt sein, darin sowohl $\cos y$ als $\cos \psi = 1$ zu setzen und für m denjenigen Wert, welcher in der Linie N oder für $y = 0$ gilt, wodurch also das Integral

$$= A\int \frac{\mathrm{d}x}{m^0 (1 + \mu x + \mu' x x + \text{ usw.})}$$

$$= \frac{A}{m^0} (h - \tfrac{1}{2} \mu h h + (\tfrac{1}{3} \mu \mu - \tfrac{1}{3} \mu') h^3 - \text{ usw.})$$

wird. Es ist immer zureichend, den bis auf die Ordnung hh damit übereinstimmenden Wert

$$\frac{Ah}{\sqrt{m^0 m'}}$$

dafür anzunehmen[6]).

13.

Die Bestimmung der Größen l^0, l' geschieht auf folgende Weise. Es sei χ der Winkel, welchen an irgend einer Stelle des größten Kreisbogens N dieser in dem Sinne wachsender x mit dem Meridian in dem Sinne von Norden nach Süden genommen macht, den Winkel von diesem zu jenem in dem Sinne von der Linken nach der Rechten gezählt; es sei ferner S die Breite an jener Stelle, T die Länge von einem beliebigen Meridian an ostwärts gerechnet. Man hat dann daselbst

$$\mathrm{d}S = -\cos \chi \cdot \mathrm{d}x + \sin \chi \cdot \mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}T = -\frac{\sin \chi}{\cos S} \mathrm{d}x - \frac{\cos \chi}{\cos S} \mathrm{d}y$$

und folglich den partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\mathrm{d}m}{m\,\mathrm{d}y} = \sin\chi \cdot \frac{\mathrm{d}m}{m\,\mathrm{d}S} - \frac{\cos\chi}{\cos S} \cdot \frac{\mathrm{d}m}{m\,\mathrm{d}T}$$

Da nun bei unserer konformen Übertragung m von der Länge unabhängig oder $\frac{\mathrm{d}m}{m\,\mathrm{d}T} = 0$ ist, so wird

$$l = \sin\chi \cdot \frac{\mathrm{d}m}{m\,\mathrm{d}S}.$$

Bezeichnet man die Werte von χ in den Punkten F und G mit V^0 und $180^0 + V'$ (so daß nach gewöhnlichem Sprachgebrauche V^0 das Azimuth des größten Kreisbogens FG in F, und V' das Azimuth des größten Kreisbogens [**280**] GF in G bedeutet); imgleichen die (immer negativen) Werte von $\frac{206265''\,\mathrm{d}m}{2\,m\,\mathrm{d}S}$ in denselben Punkten mit $-k^0$, $-k'$, so wird

$$206265''\,l^0 = -2\,k^0 \sin V^0$$
$$206265''\,l' = +2\,k' \sin V'$$

Die im vorhergehenden Artikel gegebenen Ausdrücke für ψ^0, ψ', in Sekunden verwandelt, werden daher, wenn man die von der Einheit hier nur unmerklich abweichenden Faktoren $\sqrt[6]{\frac{m^0}{m'}}$, $\sqrt[6]{\frac{m'}{m^0}}$ wegläßt,

$$\psi^0 = -\tfrac{1}{3}h\,(2\,k^0 \sin V^0 - k' \sin V')$$
$$\psi' = -\tfrac{1}{3}h\,(2\,k' \sin V' - k^0 \sin V^0)$$

Die dieser Abhandlung beigefügte Tafnl gibt in der letzten Kolumne unter der Überschrift k die Werte von k^0, k' für die entsprechenden Werte von S, die in der ersten Kolumne unter der Überschrift $Q + q$ aufzusuchen sind; da k immer positiv ist, und $\sin V^0$, $\sin V'$ immer entgegengesetzte Zeichen haben, so wird ψ^0 negativ, ψ' positiv, wenn G westlich von F liegt und umgekehrt: bei der Berechnung erinnere man sich, daß in diesen Formeln h als in Teilen des Halbmessers ausgedrückt verstanden wird, also der in irgend einem Längenmaße gegebene Abstand der Punkte F, G zuvor mit dem in gleichem Maße ausgedrückten Werte von A zu dividieren ist.

Da in unserer konformen Übertragung der Ellipsoidfläche auf die Kugelfläche ein Meridian auf jener wiederum durch einen Meridian auf dieser dargestellt wird, so ist klar, daß jedes Element von L dieselbe Neigung gegen den Meridian hat wie das entsprechende Element von M, und daß folglich die Azimuthe der geodätischen Linie in ihren beiden Endpunkten bzw. $V^0 + \psi^0$ und $V' + \psi'$ sein werden: sind aber umgekehrt diese gegeben, so werden sie auf die Kugelfläche reduziert durch Anbringung von $-\psi^0$, $-\psi'$, und für die Berechnung dieser stets fast ganz verschwindenden Reduktionen ist es offenbar ganz gleichgültig, wenn man in den obigen Formeln anstatt V^0, V' die Azimuthe auf dem Ellipsoid anwendet[7]).

14.

Um nach den gegebenen Vorschriften die Reduktionen der Richtungen, behufs der Übertragung vom Ellipsoid auf die Kugel oder umgekehrt, berechnen zu [281] können, ist zwar eine genäherte Kenntnis der Größe der Linien, der orientierten Azimuthe, und der Breiten der Endpunkte erforderlich, was nur durch eine vorläufige Berechnung der Dreiecke zu erhalten ist: allein dieser Umstand ist durchaus unerheblich, da eine vorläufige schon die Ausführung der Messungen Schritt für Schritt begleitende Berechnung ohnehin in vielen Beziehungen rätlich und zur Zentrierung der exzentrisch gemessenen Winkel, sowie zur Bestimmung des sphärischen oder sphäroidischen Exzesses der Winkelsumme jedes Dreiecks sogar notwendig ist: ja für den ersten Zweck wird, bei der Geringfügigkeit jener Reduktionen, schon eine ganz rohe Annäherung immer zureichen, während das scharfe Zentrieren zuweilen, bei etwas beträchtlicher Exzentrizität der Standpunkte eine viel weiter getriebene Annäherung erfordern kann. Ich habe die Vorschriften deshalb entwickelt, damit man, *wenn* man jene Reduktionen berücksichtigen will, alles zu ihrer schärfsten Berechnung nötige bereit finde, oder wenn man sie *nicht* berücksichtigen will, leicht und bestimmt übersehen könne, wie wenig man dadurch aufopfert. Bei dem ganzen Hannoverschen Dreieckssystem sind die Reduktionen durchgehends so äußerst gering, daß ihre Berücksichtigung als gänzlich überflüssig erscheint, und in der ganzen Ausdehnung der Zone von zwölf Breitengraden, für welche ich den Hilfsapparat beifüge, bleiben sie noch unterhalb derjenigen Bogensekundenteile, auf welche

man sich bei den meisten Messungen in der Rechnung zu beschränken pflegt. Um dies recht evident hervortreten zu lassen, füge ich hier noch die numerische Rechnung für ein Paar Beispiele bei.

In dem Hannoverschen Dreieckssystem kommen die größten Reduktionen vor bei den Richtungen der Seiten des Dreiecks Brocken-Hohehagen-Inselsberg, welches Dreieck zugleich das größte und das von dem Normalparallelkreise am entferntesten liegende ist; bei allen übrigen Dreiecksseiten überschreiten die Reduktionen nirgends zwei Tausendteile der Sekunde, und die meisten erreichen nicht einmal den Wert 0″001.

Es ist für diese Punkte

	Breite						
	auf dem Ellipsoid			auf der Kugel			k
Brocken	51°	48′	2″	51°	46′	3″	0″164
Hohehagen	51	28	31	51	26	35	0,303
Inselsberg	50	51	9	50	49	16	0,687

[282] Die Logarithmen der Seiten des Dreiecks in Toisen sind

Hohehagen-Inselsberg	4,6393865
Inselsberg-Brocken	4,7353929
Brocken-Hohehagen	4,5502669

Die Azimuthe sind

Standpunkt Brocken			
Inselsberg	5°	42′	22″
Hohehagen	58	49	8
Standpunkt Hohehagen			
Brocken	238	9	2
Inselsberg	324	23	1
Standpunkt Inselsberg			
Hohehagen	144	55	51
Brocken	185	35	21

Man braucht hierbei zwischen Werten auf dem Sphäroid und denen auf der Kugel nicht zu unterscheiden, da für die Logarithmen der Abstände erst in der achten oder neunten

Dezimale, für die Azimuthe erst in den Tausendteilen der Sekunde Ungleichheit eintritt, und für unsern Zweck Logarithmen mit vier Dezimalen und Azimuthe in Minuten schon überflüssig genau sind. Die Rechnung nach obigen Formeln gibt hiermit folgende Reduktionen, wie sie mit ihren Zeichen zu den Azimuthen auf dem Sphäroid addiert werden müssen, um die Azimuthe auf der Kugel zu erhalten!

Brocken-Inselsberg	+ 0″00055
Brocken-Hohehagen	+ 0,00196
Hohehagen-Brocken	— 0,00238
Hohehagen-Inselsberg	— 0,00332
Inselsberg-Hohehagen	+ 0,00428
Inselsberg-Brocken	— 0,00083

Die Winkel des Dreiecks auf dem Sphäroid (zwischen den geodätischen Linien) empfangen also zur Reduktion auf die Winkel des Kugeldreiecks (zwischen größten Kreisbögen) die Änderungen

[283]	Brocken	+ 0″00141
	Hohehagen	— 0,00094
	Inselsberg	— 0,00511

Ein zweites Beispiel entlehne ich aus der trigonometrischen Vermessung der Schweiz*), wo das größte Hauptdreieck zwischen den Punkten Chasseral, Suchet, Berra eben an die Grenze der Ausdehnung unserer Hilfstafel fällt. Wir haben für diese Punkte

	Breite						
	auf dem Ellipsoid			auf der Kugel			
Chasseral	47°	8′	1″	47°	6′	33″	6″137
Suchet	46	46	23	46	44	57	6,948
Berra	46	40	36	46	39	11	7,173

Die Logarithmen der Dreiecksseiten in Metern sind

Suchet-Berra	4,7474503
Berra-Chasseral	4,7133766
Chasseral-Suchet	4,7808768

*) Ergebnisse der trigonometrischen Vermessungen in der Schweiz, herausgegeben von *J. Eschmann.* Zürich 1840. S. 79, 99, 189, 190, 106.

Die Azimuthe

	Standpunkt Chasseral		
Suchet	48°	36′	41″
Berra	349	21	54
	Standpunkt Suchet		
Chasseral	228	10	40
Berra	280	47	19
	Standpunkt Berra		
Suchet	101	18	40
Chasseral	169	27	22

Hieraus ergeben sich die Reduktionen der Sphäroid-Azimuthe auf die Kugel-Azimuthe

[284]	Chasseral-Suchet	+ 0″04536
	Chasseral-Berra	— 0,00966
	Suchet-Chasseral	+ 0,06221
	Suchet-Berra	+ 0,01014
	Berra-Suchet	— 0,04717
	Berra-Chasseral	— 0,06039

also auch hier ohne Einfluß auf die Rechnung, die in dem angeführten Werke auf Zehntel der Sekunde geführt ist.

15.

Die in den Art. 12 und 13 behandelte Aufgabe ist zwar durch die gegebenen Vorschriften mit einer für die Anwendung überflüssig ausreichenden Genauigkeit aufgelöst; indessen ist es doch der Mühe wert, und zur gleichmäßigen Vollendung einer in der Folge mitzuteilenden Untersuchung sogar notwendig, für einen speziellen Fall die Genauigkeit noch um eine Ordnung weiter zu treiben: dieser spezielle Fall steht unter der Bedingung, daß die Linie N in einem zwischen F und G liegenden Punkte H den Normalparallelkreis treffe. Es ist in diesem Falle vorteilhafter, den Anfangspunkt der x, nicht wie oben in F, sondern in H zu setzen, wodurch bewirkt wird, daß bei der Entwicklung von l und m in nach Potenzen von x fortschreitende Reihen in der erstern das erste und zweite Glied, in der andern das zweite und dritte ausfallen, oder daß sie folgende Form haben:

$$l = \lambda x x + \lambda' x^3 + \text{ usw.}$$
$$m = 1 + \mu x^3 + m' x^4 + \text{ usw.}$$

Für unsern Zweck wird von den Koeffizienten in diesen Reihen nur der eine λ erforderlich sein, wofür sich aus der im 9. Art. für $\log m$ gegebenen Formel verbunden mit den Entwicklungen des 13. Art. leicht folgender Ausdruck ableiten läßt:

$$l = -\frac{2\,ee \cos P \sin P \sin \chi \cos \chi^2}{\cos \varphi \cos \Theta}$$

in welcher e, P, φ, Θ ihre oben erklärten Bedeutungen behalten, und für χ das in dem Punkte H stattfindende Azimuth des Bogens N zu setzen ist.

Werden obige Reihen bei der Integration der Gleichungen

$$[285] \quad \mathrm{d} \cdot \frac{\operatorname{tang} \psi}{m} = -\frac{l\,\mathrm{d}x}{x}$$
$$\mathrm{d}u = \operatorname{tang} \psi \cdot \mathrm{d}x$$

angewandt, so ergibt sich

$$\operatorname{tang} \psi = \mathfrak{A}\,(1 + \mu x^3 + \mu' x^4 + \text{usw.}) - \tfrac{1}{3}\lambda x^3 - \tfrac{1}{4}\lambda' x^4 - \text{usw.}$$
$$u = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}\,(x + \tfrac{1}{4}\mu x^4 + \tfrac{1}{5}\mu' x^5 + \text{usw.}) - \tfrac{1}{12}\lambda x^4 - \tfrac{1}{20}\lambda' x^5 - \text{usw.}$$

Die durch die Integration eingeführten Konstanten, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, lassen sich durch die Bedingung bestimmen, daß $u = 0$ werden muß für die beiden Werte von x, welche den Punkten F, G entsprechen. Es seien diese Werte $x = -\frac{1}{2}(h - \delta)$ und $x = +\frac{1}{2}(h + \delta)$, wo δ den Wert von $2x$ in dem mitten zwischen F und G liegenden Punkte ausdrückt und, allgemein zu reden, eine Größe von derselben Ordnung wie h ist, oder von einer höhern, wenn H dieser Mitte sehr nahe liegt. Man leitet hieraus leicht folgenden auf die Ordnung h^3 (einschl.) genauen Ausdruck für $\mathfrak{A}$ ab

$$\mathfrak{A} = \frac{\lambda\,((h + \delta)^4 - (h - \delta)^4)}{192\,h} = \tfrac{1}{24}\lambda\delta\,(hh + \delta\delta).$$

Substituiert man diesen in der Reihe für $\operatorname{tang} \psi$ und legt dann der Veränderlichen x die bestimmten Werte $-\frac{1}{2}(h - \delta)$,

$+\frac{1}{2}(h+\delta)$ bei, so ergibt sich, gleichfalls auf die dritte Ordnung genau,

$$\begin{aligned} \operatorname{tang}\psi^{\circ} &= \tfrac{1}{24}\lambda h(hh - 2h\delta + 3\delta\delta) \\ \operatorname{tang}\psi' &= -\tfrac{1}{24}\lambda h(hh - 2h\delta + 3\delta\delta) \end{aligned}$$

In dem speziellen Fall der in der Folge zu entwickelten Untersuchung kommt übrigens zu der oben bezeichneten Bedingung noch der Umstand hinzu, daß der Normalparallelkreis mitten inne liegt zwischen den beiden Parallelkreisen, auf welchen sich die Punkte F, G befinden, und infolge dieses Umstandes werden schon die abgekürzten Ausdrücke

$$\begin{aligned} \operatorname{tang}\psi^{\circ} &= \tfrac{1}{24}\lambda h^3 \\ \operatorname{tang}\psi' &= -\tfrac{1}{24}\lambda h^3 \end{aligned}$$

auf die dritte Ordnung genau sein, wie sich leicht auf folgende Art zeigen läßt. Bezeichnet man die Breite von F mit $Q+q$, die von G mit $Q-q$, so geben die sphärischen Dreiecke F, H, Pol und G, H, Pol die Gleichungen

[286] $$\begin{aligned} \sin(Q+q) &= \sin Q\cos\tfrac{1}{2}(h-\delta) + \cos Q\sin\tfrac{1}{2}(h-\delta)\cos\chi \\ \sin(Q-q) &= \sin Q\cos\tfrac{1}{2}(h+\delta) - \cos Q\sin\tfrac{1}{2}(h+\delta)\cos\chi \end{aligned}$$

und ihre Summe mit $2\cos Q$ dividiert

$$\operatorname{tang} Q\cdot(\cos q - \cos\tfrac{1}{2}h\cdot\cos\tfrac{1}{2}\delta) = -\cos\tfrac{1}{2}h\sin\tfrac{1}{2}\delta\cos\chi.$$

Da nun offenbar $\cos q - \cos\frac{1}{2}h\cdot\cos\frac{1}{2}\delta$ eine Größe zweiter Ordnung ist, so wird auch $\sin\frac{1}{2}\delta\cos\chi$, und $\delta\cos\chi$ von dieser Ordnung sein, mithin, da λ den Faktor $\cos\chi^2$ impliziert, $\lambda hh\delta$ von der vierten, und $\lambda h\delta\delta$ von der fünften Ordnung; hierdurch ist also die Weglassung dieser Glieder gerechtfertigt.

Das Endresultat dieser Entwicklung ist demnach, unter der angegebenen Voraussetzung, in folgenden Formeln enthalten, wo anstatt der Tangenten von ψ°, ψ' die Bögen selbst geschrieben sind:

$$\psi^{\circ} = -\frac{ee\cos P\sin P\sin\chi\cos\chi^2 h^3}{12\cos\varphi\cos\Theta}$$

$$\psi' = +\frac{ee\cos P\sin P\sin\chi\cos\chi^2 h^3}{12\cos\varphi\cos\Theta}$$

16.

Die Berechnung des Dreieckssystems auf der Kugel zerfällt in drei Hauptstücke:

1) die Ausgleichung der Winkel nach allen den Bedingungsgleichungen, welche die Beschaffenheit des Systems darbietet.
2) die Berechnung der sämtlichen Dreiecksseiten.
3) die Bestimmung der Längen und Breiten der Dreieckspunkte, in Verbindung mit der Orientierung der von jedem derselben ausgehenden Dreiecksseiten.

Die Verwandlung der Längen und Breiten auf der Kugel in die wahren Längen und Breiten auf dem Sphäroid geschieht dann für die Längen durch die Division mit dem konstanten Divisor α, für die Breiten mittels der hier beigefügten Hilfstafel oder einer andern auf ähnliche Weise besonders konstruierten, wenn man einen andern Normalparallelkreis zu wählen Ursache hat.

Mit Übergehung der beiden ersten auf bekannten Gründen beruhenden Geschäfte füge ich hier noch einiges in Beziehung auf das dritte bei, welches sich auf die Auflösung der Aufgabe reduziert*): aus der in Bogenteilen ausgedrückten [287] Größe einer Dreiecksseite r, ihrem Azimuthe T an dem Anfangspunkte, und der Breite dieses Anfangspunktes S, abzuleiten das Azimuth der Seite an dem andern Endpunkte $T' \pm 180^0$, die Breite desselben S' und den Längenunterschied beider Punkte λ. Da dies nichts weiter ist als die Auflösung eines sphärischen Dreiecks, so verdient diese Aufgabe nur deshalb hier einen Platz, weil die gewöhnlich gebrauchten Formeln hier einiger Umformung bedürfen, wenn man in den Resultaten (nach der Bemerkung im 10. Art.) dieselbe Genauigkeit erreichen will, in welcher r gegeben ist, ohne mehrzifferige Logarithmen zu Hilfe zu nehmen. Um unter den verschiedenen Auflösungsarten nach jedesmaligem Bedürfnis wählen zu können, setze ich zuvörderst diejenigen hierher, die auf den bekannten elementaren Formeln der sphärischen Trigonometrie beruhen.

---

*) Da diese Aufgabe hier wie eine für sich bestehende betrachtet wird, so können ohne Nachteil einige Buchstaben hier in anderer Bedeutung als oben gebraucht werden.

Erste Methode

$$\tang s = \cos T \tang r$$
$$\tang \lambda = \frac{\tang T \sin s}{\cos (S - s)}$$
$$\tang S' = \cos \lambda \tang (S - s)$$
$$\sin T' = \frac{\sin T \cos S}{\cos S'}$$

Zweite Methode

$$\tang R = \frac{\tang S}{\cos T}$$
$$\tang T' = \frac{\tang T \cos R}{\cos (R - r)}$$
$$\tang S' = \cos T' \tang (R - r)$$
$$\sin \lambda = \frac{\sin r \sin T}{\cos S'} = \frac{\sin r \sin T'}{\cos S}$$

Dritte Methode

$$\sin (45^\circ + \tfrac{1}{2} S') \sin \tfrac{1}{2} (T' + \lambda) = \sin \left(45^\circ + \tfrac{1}{2} (S + r)\right) \sin \tfrac{1}{2} T$$
$$\sin (45^\circ + \tfrac{1}{2} S') \cos \tfrac{1}{2} (T' + \lambda) = \sin \left(45^\circ + \tfrac{1}{2} (S - r)\right) \cos \tfrac{1}{2} T$$
$$\cos (45^\circ + \tfrac{1}{2} S') \sin \tfrac{1}{2} (T' - \lambda) = \cos \left(45^\circ + \tfrac{1}{2} (S + r)\right) \sin \tfrac{1}{2} T$$
$$\cos (45^\circ + \tfrac{1}{2} S') \cos \tfrac{1}{2} (T' - \lambda) = \cos \left(45^\circ + \tfrac{1}{2} (S - r)\right) \cos \tfrac{1}{2} T$$

In Beziehung auf die Kürze der Rechnung hat die dritte Methode einigen Vorzug vor den beiden andern, während diese im allgemeinen die Resultate ein wenig schärfer geben können, namentlich λ immer mit völlig genügender Schärfe: T' wird aber, wenn es einem rechten Winkel nahekommt, durch die erste Methode vergleichungsweise nur ungenau bestimmt. Verlangt man aber alle drei Resultate mit gleichmäßiger und, aus dem Gesichtspunkte des 10. Art. betrachtet, [**288**] zureichender Schärfe, so ist zu einer direkten strengen Auflösung folgende Umformung am vorteilhaftesten, wobei die beiden ersten Formeln dieselben bleiben wie in der ersten Methode.

Vierte Methode

$$\tang s = \cos T \tang r$$
$$\tang \lambda = \frac{\tang T \sin s}{\cos (S - s)}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{tang} t &= \sin T \sin r \operatorname{tang}(S - s) \\
\sin \tau &= \sin T \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} r \sin s \\
\sin \sigma &= \operatorname{tang} t \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \lambda \cos(S - s) \\
S' &= S - s - \sigma \\
T' &= T - t - \tau
\end{aligned}$$

Diese vierte Methode läßt für die Schärfe nichts zu wünschen übrig; aber die unmittelbar in dieser Form geführte Rechnung erfordert ein etwas beschwerliches Interpolieren bei Bestimmung der kleinen Bögen durch die Logarithmen der Tangenten oder Sinus; man kann jedoch diesem Übelstande leicht ausweichen, indem man die trigonometrischen Funktionen in Reihen entwickelt, wodurch man in den Stand gesetzt wird, ohne Nachteil für die Schärfe, die Rechnungen mittels der Logarithmen der Zahlen zu führen. Es wird zureichend sein, von dieser Verwandlung nur die Hauptmomente hierher zu setzen.

Es sei

$$\begin{aligned}
r \cos T &= s^{\circ} \\
r \sin T &= v
\end{aligned}$$

Es wird dann, wenn zur Abkürzung die Größe des Bogens von einer Sekunde in Teilen des Halbmessers oder der Bruch $\frac{\pi}{648000}$ durch ϱ bereichnet und r wie eine Größe erster Ordnung betrachtet wird, bis auf Größen fünfter Ordnung (ausschließlich) genau

$$s = s^{\circ}(1 + \tfrac{1}{3}\varrho\varrho rr - \tfrac{1}{3}\varrho\varrho s^{\circ}s^{\circ}) = s^{\circ}(1 + \tfrac{1}{3}\varrho\varrho vv)$$

Setzt man dann ferner

$$v \operatorname{tang}(S - s) = t^{\circ}$$

$$\frac{v}{\cos(S - s)} = \lambda^{\circ}$$

so wird

$$[289] \quad \begin{aligned}
t &= t^{\circ}(1 - \tfrac{1}{6}\varrho\varrho rr - \tfrac{1}{3}\varrho\varrho t^{\circ}t^{\circ}) \\
\lambda &= \lambda^{\circ}(1 - \tfrac{1}{6}\varrho\varrho s^{\circ}s^{\circ} - \tfrac{1}{3}\varrho\varrho t^{\circ}t^{\circ}) \\
\sigma &= \tfrac{1}{2}\varrho v t^{\circ}(1 - \tfrac{1}{12}\varrho\varrho rr - \tfrac{1}{4}\varrho\varrho s^{\circ}s^{\circ} - \tfrac{1}{4}\varrho\varrho t^{\circ}t^{\circ}) \\
\tau &= \tfrac{1}{2}\varrho v s^{\circ}(1 + \tfrac{5}{12}\varrho\varrho rr - \tfrac{1}{2}\varrho\varrho s^{\circ}s^{\circ})
\end{aligned}$$

für t und λ auf die fünfte, für σ und τ auf die sechste Ordnung (ausschließlich) genau. Noch bequemer und ebenso genau ist es, hierbei sogleich die Logarithmen zu gebrauchen, wodurch die Formeln, wenn man zur Abkürzung das Produkt der Größe $\frac{1}{12}\varrho\varrho$ in den Modulus der briggischen Logarithmen mit μ bezeichnet, folgende Gestalt erhalten:

$$\begin{aligned}
\log s &= \log s^{\circ} + 4\mu rr - 4\mu s^{\circ} s^{\circ} \\
\log t &= \log t^{\circ} - 2\mu rr - 4\mu t^{\circ} t^{\circ} \\
\log \lambda &= \log \lambda^{\circ} - 2\mu s^{\circ} s^{\circ} - 4\mu t^{\circ} t^{\circ} \\
\log \sigma &= \log \tfrac{1}{2}\varrho v t^{\circ} - \mu rr - 3\mu s^{\circ} s^{\circ} - 3\mu t^{\circ} t^{\circ} \\
\log \tau &= \log \tfrac{1}{2}\varrho v s^{\circ} + 5\mu rr - 6\mu s^{\circ} s^{\circ}
\end{aligned}$$

Diese fünf Formeln in Verbindung mit den vorhergehenden für s°, t°, λ° bilden eine fünfte Auflösungsart, deren Eigentümliches es ist, daß genäherte Werte der Größen s, t, λ, σ, τ durch kleine sehr leicht zu berechnende an den Logarithmen anzubringende Korrektionen zu scharfen erhoben werden. Die hierbei vorkommenden konstanten Logarithmen sind

$$\begin{aligned}
\log \varrho &= 4{,}6855748668 \quad (-10) \\
\log \tfrac{1}{2}\varrho &= 4{,}3845448712 \quad (-10) \\
\log \mu &= 7{,}9297527989 \quad (-20)
\end{aligned}$$

oder wenn jene Korrektionen sofort als Einheiten der siebenten Dezimale erscheinen sollen

$$\log \mu = 4{,}9297527989 \quad (-10)$$

von welchen Logarithmen jedoch hier nur die ersten Ziffern zur Anwendung kommen[8]).

17.

Viel einfacher lassen sich aber die Relationen zwischen den Größen r, S, S', T, T', λ ausdrücken, wenn man von dem Mittel der beiden Breiten [**290**] und der beiden Azimuthe ausgeht. Schreiben wir

$$\tfrac{1}{2}(S+S') = B, \quad \tfrac{1}{2}(T+T') = A, \quad S - S' = b, \quad T - T' = a$$

so haben wir zuförderst die Formeln

$$\begin{aligned}
\sin \tfrac{1}{2} r \sin A &= \sin \tfrac{1}{2}\lambda \cos B \\
\sin \tfrac{1}{2} r \cos A &= \cos \tfrac{1}{2}\lambda \sin \tfrac{1}{2} b
\end{aligned}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}r\sin\tfrac{1}{2}a = \sin\tfrac{1}{2}\lambda\sin B$$
$$\cos\tfrac{1}{2}r\cos\tfrac{1}{2}a = \cos\tfrac{1}{2}\lambda\cos\tfrac{1}{2}b$$

wonach man also, wenn A, B, r als gegeben betrachtet werden, a und λ durch die Formeln

$$\sin A\,\mathrm{tang}\,B\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}r = \sin\tfrac{1}{2}a$$
$$\frac{\sin A\sin\frac{1}{2}r}{\cos B} = \sin\tfrac{1}{2}\lambda$$

und sodann b aus

$$\frac{\cos A\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}r}{\cos\frac{1}{2}a} = \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}b$$

oder

$$\frac{\cos A\sin\frac{1}{2}r}{\cos\frac{1}{2}\lambda} = \sin\tfrac{1}{2}b$$

bestimmt. Anstatt dieser Formeln wird man aber, wegen der Kleinheit von r, a, λ, b, lieber die folgenden anwenden, welche viel bequemer und bis auf die fünfte Ordnung (ausschließlich) genau sind:

$$a^{\circ} = r\sin A\,\mathrm{tang}\,B$$
$$\lambda^{\circ} = \frac{r\sin A}{\cos B}$$
$$b^{\circ} = r\cos A$$
$$\log a = \log a^{\circ} + \mu rr + \tfrac{1}{2}\mu a^{\circ}a^{\circ}$$
$$\log\lambda = \log\lambda^{\circ} - \tfrac{1}{2}\mu rr + \tfrac{1}{2}\mu\lambda^{\circ}\lambda^{\circ}$$
$$\log b = \log b^{\circ} + \tfrac{1}{2}\mu a^{\circ}a^{\circ} + \mu\lambda^{\circ}\lambda^{\circ}$$

wo, wie man sieht, die dritte Korrektion der Summe der ersten und der doppelten zweiten gleich ist.

Für unsere Aufgabe geben zwar diese Formeln keine direkte Auflösung: indessen kann man sie als Kontrolle oder als konzentrierte übersichtliche Inhaltswiederholung der direkten Auflösung gebrauchen. Wer aber in numerischen Rechnungen einige Gewandtheit besitzt, wird sie auch leicht zu einer indirekten Auflösung benutzen können und dieser, zumal wo anderer Zwecke wegen eine grob genäherte schon vorangegangen ist, wegen ihrer Bequemlichkeit und Schärfe vor allen andern Auflösungen den Vorzug geben[9]).

Zweite Abhandlung.

[**303**] Die Aufgabe, aus der Größe der Seite eines Dreiecks auf der Erdoberfläche, dem Azimuthe an dem einen Endpunkte und der geographischen Breite dieses Endpunktes abzuleiten das Azimuth an dem andern Endpunkte, dessen Breite und den Längenunterschied beider Punkte, gehört zu den Hauptgeschäften der höheren Geodäsie. Für den Fall der Kugelfläche ist der Zusammenhang zwischen jenen sechs Größen am Schluß der ersten Abhandlung in der einfachsten und zur schärfsten Rechnung geeigneten Form aufgestellt, welche auch leicht zu einer bequemen Auflösung der Aufgabe selbst benutzt werden kann. Es wird dadurch das Verlangen nach dem Besitz einer analogen unmittelbar für die Ellipsoidfläche gültigen Auflösungsart erweckt, und der Zweck der gegenwärtigen Abhandlung ist, eine solche zu entwickeln. Vorher soll jedoch erst die Auflösung für den Fall der Kugelfläche in ein noch helleres Licht gestellt werden. Des bequemeren Zurückweisens wegen lasse ich die Zahlenbezeichnung der Artikel sich an die erste Abhandlung anschließen.

18.

Um den Grad der Genauigkeit, welcher durch die Formeln des 17. Art. erreicht wird, besser beurteilen zu können, werden noch die Glieder der nächstfolgenden Ordnung entwickelt werden müssen; es ist jedoch wohl der Mühe [**304**] wert, das Verfahren anzugeben, nach welchem diese Entwicklung beliebig weit getrieben werden kann.

Ich erlaube mir an den dort gebrauchten Bezeichnungen einige Abänderungen, teils des bequemeren Druckes wegen, teils um den verschiedenen Bezeichnungen in den einzelnen Teilen der gegenwärtigen Abhandlung etwas mehr Symmetrie geben zu können. Zunächst bedeute hier

r die Entfernung der beiden Punkte voneinander, den Halbmesser der Kugel als Einheit angenommen.

$B+\frac{1}{2}b$ und $B-\frac{1}{2}b$ die Breite am ersten und zweiten Endpunkte von r.

$T+\frac{1}{2}t$ und $T-\frac{1}{2}t\pm 180^\circ$ das Azimuth des zweiten und ersten Endpunktes, bzw. vom ersten und zweiten aus.

l den Längenunterschied.

Es wird angenommen, daß das Azimuth von Süden nach Westen zu gezählt und l als positiv betrachtet wird, wenn der zweite Punkt westlicher liegt als der erste.

Es soll ferner gesetzt werden

$$\beta = r \cos T$$
$$\tau = r \sin T \cdot \operatorname{tang} B$$
$$\lambda = \frac{r \sin T}{\cos B}$$

welche Größen dasselbe ausdrücken, was im 17. Art. mit b^0, a^0, λ^0 bezeichnet war, nämlich die bis auf die dritte Ordnung (ausschließlich) genauen Werte von b, t, l, und zwischen denen die Gleichung

$$rr + \tau\tau = \beta\beta + \lambda\lambda$$

stattfindet. Die Ordnungen werden hier immer so verstanden, daß r wie eine Größe erster Ordnung betrachtet wird.

Zur Abkürzung wird noch geschrieben

$$\frac{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} r}{r} = m$$
$$\frac{2 \sin \frac{1}{2} r}{r} = n$$

Zu der beabsichtigten Entwicklung gelangen wir am leichtesten durch Benutzung der Umwandlung der Formel

$$x = \sin y$$

[**305**] in die Reihe

$$\log y = \log x + \tfrac{1}{6} xx + \tfrac{11}{180} x^4 + \tfrac{191}{5670} x^6 + \tfrac{2497}{113400} x^8 + \text{ usw.}$$

welche man leicht aus der bekannten

$$y = x(1 + \tfrac{1}{6} xx + \tfrac{3}{40} x^4 + \tfrac{5}{112} x^6 + \tfrac{35}{1152} x^8 + \text{ usw.})$$

ableitet. Wendet man dieselbe zuvörderst an auf die Gleichung

$$\operatorname{tang} B \cdot \sin T \cdot \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} r = \sin \tfrac{1}{2} t$$

oder

$$\tfrac{1}{2} m \tau = \sin \tfrac{1}{2} t$$

indem man $x = \frac{1}{2} m \tau$, $y = \frac{1}{2} t$ setzt, so wird (I)

$$\log t = \log \tau + \log m + \tfrac{1}{24} m m \tau \tau + \tfrac{11}{2880} m^4 \tau^4 + \tfrac{191}{362880} m^6 \tau^6 + \tfrac{2497}{29030400} m^8 \tau^8 + \text{usw.}$$

Ebenso, aus der Anwendung auf die Gleichung

$$\frac{\sin T \sin \frac{1}{2} r}{\cos B} = \sin \tfrac{1}{2} l$$

oder

$$\tfrac{1}{2} n \lambda = \sin \tfrac{1}{2} l$$

ergibt sich (II)

$$\log l = \log \lambda + \log n + \tfrac{1}{24} n n \lambda \lambda + \tfrac{11}{2880} n^4 \lambda^4 + \tfrac{191}{362880} n^6 \lambda^6 + \tfrac{2497}{29030400} n^8 \lambda^8 + \text{usw.}$$

Die dritte Anwendung wird gemacht auf die Gleichung

$$\frac{\cos B \operatorname{tang} \frac{1}{2} l}{\operatorname{tang} T} = \sin \tfrac{1}{2} b$$

nachdem derselben vermöge der Substitutionen

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} l = \frac{n \lambda}{2 \sqrt{(1 - \frac{1}{4} n n \lambda \lambda)}}$$

$$\frac{\cos B}{\operatorname{tang} T} = \frac{\beta}{\lambda}$$

folgende Gestalt gegeben ist

$$\frac{n \beta}{2 \sqrt{(1 - \frac{1}{4} n n \lambda \lambda)}} = \sin \tfrac{1}{2} b$$

Es ergibt sich dann (III)

[306]
$$\begin{aligned}
\log b = {} & \log \beta + \log n + \tfrac{1}{8} n n \lambda \lambda + \tfrac{1}{64} n^4 \lambda^4 \\
& \quad + \tfrac{1}{384} n^6 \lambda^6 + \tfrac{1}{2048} n^8 \lambda^8 + \text{usw.} \\
& + \tfrac{1}{24} \beta \beta (n n + \tfrac{1}{4} n^4 \lambda \lambda + \tfrac{1}{16} n^6 \lambda^4 \\
& \qquad + \tfrac{1}{64} n^8 \lambda^6 + \text{usw.}) \\
& + \tfrac{11}{2880} \beta^4 (n^4 + \tfrac{1}{2} n^6 \lambda \lambda + \tfrac{3}{16} n^8 \lambda^4 + \text{usw.}) \\
& + \tfrac{191}{362880} \beta^6 (n^6 + \tfrac{3}{4} n^8 \lambda \lambda + \text{usw.}) \\
& + \tfrac{2497}{29030400} \beta^8 (n^8 + \text{usw.}) \\
& + \text{usw.}
\end{aligned}$$

oder, indem man die Glieder gleicher Ordnung zusammenfaßt,

$$\begin{aligned}\log b = \log \beta &+ \log n \\ &+ \tfrac{1}{24}\, nn\,(\beta\beta + 3\,\lambda\lambda) \\ &+ \tfrac{1}{2880}\, n^4\,(11\,\beta^4 + 30\,\beta\beta\lambda\lambda + 45\,\lambda^4) \\ &+ \tfrac{1}{362880}\, n^6\,(191\,\beta^6 + 693\,\beta^4\lambda\lambda \\ &\qquad + 945\,\beta\beta\lambda^4 + 945\,\lambda^6) \\ &+ \tfrac{1}{29030400}\, n^8\,(2497\,\beta^8 + 11460\,\beta^6\lambda\lambda \\ &\qquad + 20790\,\beta^4\lambda^4 + 18900\,\beta\beta\lambda^6 + 14175\,\lambda^8) \\ &+ \text{usw.}\end{aligned}$$

Um die Gleichungen I, II, III in eine ganz entwickelte Gestalt zu bringen, wird man in denselben noch substituieren

$$\begin{aligned}\log m &= \tfrac{1}{12}\, rr + \tfrac{7}{1440}\, r^4 + \tfrac{31}{90720}\, r^6 + \tfrac{127}{4838400}\, r^8 + \text{usw.} \\ mm &= 1 + \tfrac{1}{6}\, rr + \tfrac{17}{720}\, r^4 + \tfrac{31}{10080}\, r^6 + \text{usw.} \\ m^4 &= 1 + \tfrac{1}{3}\, rr + \tfrac{3}{40}\, r^4 + \text{usw.} \\ m^6 &= 1 + \tfrac{1}{2}\, rr + \text{usw.} \\ &\text{usw.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log n &= -\tfrac{1}{24}\, rr - \tfrac{1}{2880}\, r^4 - \tfrac{1}{181440}\, r^6 - \tfrac{1}{9676800}\, r^8 - \text{usw.} \\ nn &= 1 - \tfrac{1}{12}\, rr + \tfrac{1}{360}\, r^4 - \tfrac{1}{20160}\, r^6 + \text{usw.} \\ n^4 &= 1 - \tfrac{1}{6}\, rr + \tfrac{1}{80}\, r^4 - \text{usw.} \\ n^6 &= 1 - \tfrac{1}{4}\, rr + \text{usw.} \\ &\text{usw.}\end{aligned}$$

Wir erhalten demnach für die Logarithmen von t, l, b oder vielmehr für die Unterschiede dieser Logarithmen von den genäherten Werten $\log \tau$, $\log \lambda$, $\log \beta$, zusammengesetzte Reihen, welche fortschreiten

für $\log t$ nach den geraden Potenzen von τ und r, und deren Produkten,
für $\log l$ ebenso nach λ und r,
für $\log b$ nach β, λ und r,

[**307**] und die beigebrachten Zahlen enthalten diese Entwicklung bis zu den Größen der achten Ordnung (einschließlich), daher t, l, b selbst dadurch bis zu den Größen der neunten Ordnung einschließlich oder der elften Ordnung ausschließlich bestimmt werden.

Die Entwicklung von $\log b$ kann auch auf eine andere Art, nämlich nach den Potenzen von β, τ und r geschehen. Setzt man

$$z = \operatorname{tang} y$$

so wird

$$y = z - \tfrac{1}{3} z^3 + \tfrac{1}{5} z^5 - \tfrac{1}{7} z^7 + \tfrac{1}{9} z^9 - \text{ usw.}$$

und hieraus

$$\log y = \log z - \tfrac{1}{3} zz + \tfrac{13}{90} z^4 - \tfrac{251}{2835} z^6 + \tfrac{3551}{56700} z^8 - \text{ usw.}$$

Wendet man diese Reihe an auf die Gleichung

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} b = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} t}{\operatorname{tang} B \cdot \operatorname{tang} T}$$

nachdem man derselben vermöge der Substitutionen

$$\operatorname{tang} B \cdot \operatorname{tang} T = \frac{\tau}{\beta}$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} t = \frac{m\tau}{2\sqrt{(1 - \frac{1}{4} mm\tau\tau)}}$$

folgende Gestalt gegeben hat

$$\frac{\beta m}{2\sqrt{(1 - \frac{1}{4} mm\tau\tau)}} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} b$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\log b = \log \beta + \log m + \tfrac{1}{8} mm\tau\tau &+ \tfrac{1}{64} m^4\tau^4 + \tfrac{1}{384} m^6\tau^6 \\
&+ \tfrac{1}{2048} m^8\tau^8 + \text{ usw.} \\
- \quad \tfrac{1}{12} \quad \beta\beta\,(mm &+ \tfrac{1}{4} m^4\tau\tau + \tfrac{1}{16} m^6\tau^4 \\
&+ \tfrac{1}{64} m^8\tau^6 + \text{ usw.}) \\
+ \quad \tfrac{13}{1440} \quad \beta^4\,(m^4 &+ \tfrac{1}{2} m^6\tau\tau + \tfrac{3}{16} m^8\tau^4 \\
&+ \text{ usw.}) \\
- \quad \tfrac{251}{181440} \quad \beta^6\,(m^6 &+ \tfrac{3}{4} m^8\tau\tau + \text{ usw.}) \\
+ \quad \tfrac{3551}{14515200} \quad \beta^8\,(m^8 &+ \text{ usw.}) \\
+ \text{ usw.}
\end{aligned}$$

oder, indem man die Glieder gleicher Ordnung zusammenfaßt,

$$
\begin{aligned}
[308]\quad \log b = \log \beta &+ \log m \\
&- \tfrac{1}{24}\, mm\,(2\,\beta\beta - 3\,\tau\tau) \\
&+ \tfrac{1}{2880}\, m^4\,(26\,\beta^4 - 60\,\beta\beta\tau\tau + 45\,\tau^4) \\
&- \tfrac{1}{362880}\, m^6\,(502\,\beta^6 - 1638\,\beta^4\tau\tau \\
&\qquad\qquad + 1890\,\beta\beta\tau^4 - 945\,\tau^6) \\
&+ \tfrac{1}{29030400}\, m^8\,(7102\,\beta^8 - 30120\,\beta^6\tau\tau \\
&+ 49140\,\beta^4\tau^4 - 37800\,\beta\beta\tau^6 + 14175\,\tau^8) \\
&- \text{usw.}
\end{aligned}
$$

Durch Substitution der oben gegebenen Werte von $\log m$, mm, m^4 usw. erhält man hieraus die gesuchte Reihe, welche sich übrigens auch aus der ersteren nach β, λ, r fortschreitenden unmittelbar ableiten läßt, indem man $rr - \beta\beta - \tau\tau$ für $\lambda\lambda$ substituiert.

19.

Für unsern Zweck reicht es hin, die Formeln nur bis zur vierten Ordnung (einschließlich) genau aufzustellen, nämlich

$$
\begin{aligned}
\log t &= \log \tau + \tfrac{1}{24}\,(2\,rr + \tau\tau) + \tfrac{1}{2880}\,(14\,r^4 + 20\,rr\tau\tau + 11\,\tau^4) \\
\log l &= \log \lambda - \tfrac{1}{24}\,(rr - \lambda\lambda) - \tfrac{1}{2880}\,(r^4 + 10\,rr\lambda\lambda - 11\,\lambda^4) \\
\log b &= \log \beta - \tfrac{1}{24}\,(rr - \beta\beta - 3\,\lambda\lambda) - \tfrac{1}{2880}\,(r^4 + 10\,rr\beta\beta \\
&\qquad + 30\,rr\lambda\lambda - 11\,\beta^4 - 30\,\beta\beta\lambda\lambda - 45\,\lambda^4)
\end{aligned}
$$

Anstatt der letzten Formel kann man auch eine der folgenden gebrauchen:

$$
\begin{aligned}
\log b &= \log \beta + \tfrac{1}{24}\,(2\,rr - 2\,\beta\beta + 3\,\tau\tau) + \tfrac{1}{2880}\,(14\,r^4 - 40\,rr\beta\beta \\
&\qquad + 60\,rr\tau\tau + 26\,\beta^4 - 60\,\beta\beta\tau\tau + 45\,\tau^4) \\
\log b &= \log \beta + \tfrac{1}{24}\,(2\,\lambda\lambda + \tau\tau) - \tfrac{1}{2880}\,(12\,\beta\beta\lambda\lambda - 12\,\beta\beta\tau\tau \\
&\qquad - 14\,\lambda^4 - 32\,\lambda\lambda\tau\tau + \tau^4) \\
\log b &= \log \beta + \tfrac{1}{24}\,(2\,\lambda\lambda + \tau\tau) - \tfrac{1}{2880}\,(12\,rr\tau\tau - 12\,rr\tau\tau \\
&\qquad - 26\,\lambda^4 - 8\,\lambda\lambda\tau\tau - 11\,\tau^4)
\end{aligned}
$$

In allen diesen Formeln sind r, β, λ, τ, b, l, t als in Teilen des Halbmessers ausgedrückt und die Logarithmen als hyperbolische zu verstehen. Sollen dagegen jene sieben Größen in Bogensekunden ausgedrückt, und die Logarithmen die briggischen sein, so erleiden die Formeln weiter keine Veränderung,

als daß der gemeinschaftliche Zahlenkoeffizient der Glieder zweiter Ordnung $\frac{1}{24}$ in $\frac{1}{2}\mu$, und der gemeinschaftliche Zahlenkoeffizient der Glieder vierter Ordnung $\frac{1}{2880}$ in ν verwandelt werden muß, wo μ, ν die Produkte der Größen $\frac{1}{12}\varrho\varrho$ und $\frac{1}{2880}\varrho^4$ [**309**] in den Modulus der briggischen Logarithmen bezeichnen, ϱ in der im Art. 16 angegebenen Bedeutung genommen (und damit auch μ). Man hat für diese konstanten Faktoren

$$\log \mu = 7{,}9297527989\ (-20)$$
$$\log \nu = 4{,}9206912908\ (-30)$$

Bis zu den Gliedern zweiter Ordnung stimmen diese Resultate mit den im 17. Art. gegebenen überein. Der Zweck der vorstehenden weiteren Entwicklung war nur, klar hervortreten zu lassen, daß selbst zur schärfsten Rechnung die Glieder zweiter Ordnung völlig zureichen: in der Tat kommt in dem ganzen Hannoverschen Dreieckssysteme kein Fall vor, wo die Glieder vierter Ordnung den Betrag von zwei Einheiten der zehnten Dezimale erreichten, und nur ein paar Fälle, wo sie *eine* Einheit der zehnten Dezimale überschreiten.

20.

Wenn unsere Formeln, welche nicht von der Breite und dem Azimuth an dem einen Orte, sondern von dem Mittelwerte dieser Größen an den beiden Orten ausgehen, zur Auflösung der zu Anfang dieser Abhandlung aufgeführten Aufgabe benutzt werden sollen, so wird dies auf eine indirekte Art oder richtiger durch stufenweise beliebig weit getriebene Annäherung geschehen müssen. Der Gang der Arbeit besteht darin, daß man von irgendeinem genäherten Werte von T ausgeht (wofür man in Ermangelung aller anderweitigen Kenntnis oder Schätzung zuerst das gegebene Azimuth an dem ersten Orte annehmen kann) und daraus einen viel schärferen ableitet; mit diesem dann dieselbe Rechnung wiederholt und damit so lange fortfährt, bis man zu stehenden Resultaten gelangt. Man hat dabei zu beachten, daß bei den ersten Rechnungen nur 4 oder 5 Ziffern der Logarithmen berücksichtigt zu werden brauchen, und dabei β und τ anstatt der korrigierten b und t angewandt werden dürfen, daher man auch, bei diesen ersten Rechnungen, sich um λ und l noch nicht zu bekümmern braucht. Die Formeln sind so, wenn für den ersten Ort die

Breite mit B°, das Azimuth mit T° bezeichnet wird, der Reihe nach folgende:

$$\beta = r \cos T$$
$$B = B^{\circ} - \tfrac{1}{2}\beta$$
$$\tau = r \sin T \operatorname{tang} B$$
$$T = T^{\circ} - \tfrac{1}{2}\tau$$

[310] Nachdem man dahin gelangt ist, daß bei dem Gebrauch von fünfzifferigen Logarithmen der Wert von T sich nicht mehr ändert, berechnet man λ nach der Formel

$$\lambda = r \sin T \sec B$$

und führt dann eine neue Rechnung mit sieben Dezimalen, wobei man die logarithmischen Korrektionen mittels der Formeln

$$\log b = \log \beta + \mu\lambda\lambda + \tfrac{1}{2}\mu\tau\tau$$
$$\log t = \log \tau + \mu r r + \tfrac{1}{2}\mu\tau\tau$$

zuzieht und $B = B^{\circ} - \frac{1}{2}b$, $T = T^{\circ} - \frac{1}{2}t$ setzt. Eine nochmalige Wiederholung wird in der Regel dieselben oder kaum merklich geänderte Resultate wiedergeben, und dann erst wird auch noch die Berechnung von l nach der Formel

$$\log l = \log \lambda - \tfrac{1}{2}\mu r r + \tfrac{1}{2}\mu\lambda\lambda$$

beigefügt. Um die Schnelligkeit der Annäherung (die hauptsächlich von der Kleinheit von r abhängt, an einem Beispiele zu zeigen, setze ich die Hauptmomente der Rechnung für den Übergang von dem Dreieckspunkte Brocken zu dem Punkte Inselsberg hierher. Es ist dies die größte Dreiecksseite in dem Hannoverschen Dreieckssystem, viel größer, als sonst bei trigonometrischen Operationen vorzukommen pflegen.

Bei der nach den Grundlagen der ersten Abhandlung bearbeiteten konformen Darstellung auf der Kugelfläche ist die Breite des Brockens $B^{\circ} = 51^{\circ}46'3''6345$; das Azimuth der Seite Brocken-Inselsberg $T^{\circ} = 5^{\circ}42'21''7704$; der Logarithm dieser Seite in Toisen $= 4{,}7353929$ oder in Teilen des Halbmessers $= 8{,}22018543$ oder in Bogensekunden, wie bei unsern Formeln vorausgesetzt ist, $\log r = 3{,}5346106$. Setzt man zuerst $T = 5^{\circ}42'$, so wird

$$\beta = 3408''$$
$$B = 51^{\circ}17'40''$$
$$\tau = 424''$$

und folglich ein genäherterer Wert

$$T = 5^\circ 38' 50''$$

[311] Die hiermit wiederholte Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} \beta &= 3407''9 \\ B &= 51^\circ 17' 39''7 \\ \tau &= 420''55 \\ T &= 5^\circ 38' 51''5 \end{aligned}$$

Mit diesem Werte von T wird nun die schärfere Rechnung angefangen und dabei zugleich die logarithmische Korrektion mit zugezogen. Es findet sich, in Einheiten der siebenten Dezimale

$$\begin{aligned} \mu rr &= 99{,}76 \\ \mu\lambda\lambda &= 2{,}47 \\ \mu\tau\tau &= 1{,}50 \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned} \mu\lambda\lambda + \tfrac{1}{2}\mu\tau\tau &= +3 \\ \mu rr + \tfrac{1}{2}\mu\tau\tau &= +101 \\ -\tfrac{1}{2}\mu rr + \tfrac{1}{2}\mu\lambda\lambda &= -49 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \log\beta &= 3{,}5324974 \\ \log b &= 3{,}5324977 \\ b &= 3407''9852 \\ B &= 51^\circ 17' 39''6419 \\ \log\tau &= 2{,}6238492 \\ \log t &= 2{,}6238593 \\ t &= 420''5904 \\ T &= 5^\circ 38' 51''4752 \end{aligned}$$

Eine nochmalige Wiederholung der Rechnung mit diesem Werte von T bringt bei b gar keine Änderung hervor, und t verwandelt sich in $420''5898$. Man erhält daher

Breite des Punktes Inselsberg

$$B^\circ - b = 50^\circ 49' 15''6493$$

Azimuth der Dreiecksseite Inselsberg-Brocken

$$T^\circ - t + 180^\circ = 185^\circ 35' 21''1806$$

[312] Endlich findet sich

$$\log \lambda = 2{,}7315487$$
$$\log l = 2{,}7315438$$
$$\log l = 538''\ 9442 = 0^{\circ} 8' 58''\ 9442.$$

Die Bequemlichkeit dieses Verfahrens wird allerdings erst dann in ihrer vollen Größe fühlbar, wenn man sich die Hilfen des kleinen Mechanismus bei Handhabung derartiger Methoden zu eigen gemacht hat, wozu eine Anweisung hier nicht an ihrem Platze sein würde. Ich begnüge mich hier nur anzudeuten, daß, was in obigem Beispiele wie eine viermalige Rechnung erscheint, nicht in der Form von vier getrennten Rechnungen, sondern wie eine einzige geschrieben werden soll, indem man bei jeder neuen Überarbeitung nur die letzten Ziffern ergänzt oder verbessert. Jedenfalls braucht man immer nur die letzte Rechnung aufzubewahren, und gerade darin besteht ein großer Vorteil, zumal bei Messungen von bedeutendem Umfange, daß man dann den ganzen wesentlichen Kern der Berechnung für alle Dreiecksseiten im möglich kleinsten Raume und in der übersichtlichsten zu beliebiger Prüfung der Richtigkeit geeignetsten Form besitzt.

21.

Ich gehe jetzt zu der Hauptaufgabe selbst über, welche für die Ellipsoidfläche eine ähnliche Methode fordert, wie für die Kugelfläche im vorhergehenden gegeben ist. Die Auflösung dieser allerdings etwas verwickelten Aufgabe soll hier auf zwei ganz voneinander verschiedenen Wegen abgeleitet werden. Da die eine Ableitung, mit welcher der Anfang gemacht werden wird, sich auf diejenige konforme Übertragung der Ellipsoidfläche auf die Kugelfläche gründet, deren Theorie in der ersten Abhandlung entwickelt ist, so kann die Auffindung dieser Auflösung wie die *erste mittelbare* Benutzung dieser Theorie für die Zwecke der höheren Geodäsie betrachtet werden (vergl. Art. 11).

Es mögen demnach jetzt durch $B + \frac{1}{2} b$ und $B - \frac{1}{2} b$ die Breiten zweier Punkte auf der Ellipsoidfläche bezeichnet werden; ihr Längenunterschied durch l; das zwischen ihnen enthaltene Stück einer geodätischen Linie (und zwar hier nach beliebiger Einheit gemessen) durch r; die Azimuthe der Linie am

ersten und zweiten Endpunkte durch $T+\frac{1}{2}t$ und $T-\frac{1}{2}t\pm 180^\circ$. Es handelt sich also darum, b, l und t aus r, B und T zu finden durch Formeln, welche den oben [**313**] für die Kugelfläche gegebenen analog sind und in dieselben übergehen, wenn man die Exzentrizität $=0$ oder die beiden Halbachsen der erzeugenden Ellipse unter sich gleich und $=1$ setzt.

Die Breite des der konformen Übertragung auf die Kugelfläche zugrunde liegenden Normalparallelkreises bezeichne ich (wie oben Art. 3) mit P für die Ellipsoidfläche und mit Q für die Kugelfläche; zugleich nehme ich an, dieser Normalparallelkreis sei so gewählt, daß Q dem arithmetischen Mittel der Breiten der beiden betreffenden Punkte auf der Kugelfläche gleich wird: diese Breiten selbst seien $Q+\frac{1}{2}q$ und $Q-\frac{1}{2}q$. Es sollen ferner a, A, α, e, φ, Θ dieselben Bedeutungen behalten, wie in der ersten Abhandlung, Art. 2, 3, 4 ff.; es bedeuten nämlich

a die halbe große Achse des Ellipsoids oder den Halbmesser des Äquators,
A den Halbmesser der Kugel,
$1:\alpha$ das konstante Verhältnis der Längenunterschiede auf dem Ellipsoid zu den entsprechenden auf der Kugel,
$e=\sin\varphi$ die Exzentrizität der erzeugenden Ellipse,
$\sin\Theta=e\sin P$.

Den zwischen den beiden Punkten auf der Kugelfläche enthaltenen Größtekreisbogen bezeichne ich mit s; die Azimuthe dieses Bogens am ersten und zweiten Endpunkte mit $U+\frac{1}{2}u$ und $U-\frac{1}{2}u\pm 180^\circ$. Erwägt man nun noch, daß der Längenunterschied zwischen beiden Punkten $=\alpha l$ ist, so findet man zunächst die vier strengen Formeln

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}s\cdot\cos U &= \cos\tfrac{1}{2}\alpha l\cdot\sin\tfrac{1}{2}q\\
\sin\tfrac{1}{2}s\cdot\sin U &= \sin\tfrac{1}{2}\alpha l\cdot\cos Q\\
\cos\tfrac{1}{2}s\cdot\cos\tfrac{1}{2}u &= \cos\tfrac{1}{2}\alpha l\cdot\cos\tfrac{1}{2}q\\
\cos\tfrac{1}{2}s\cdot\sin\tfrac{1}{2}u &= \sin\tfrac{1}{2}\alpha l\cdot\sin Q
\end{aligned}$$

und hieraus die näherungsweise richtigen

$$q=s\cdot\cos U\left(1+\tfrac{1}{24}qq-\tfrac{1}{24}ss+\tfrac{1}{8}\alpha\alpha ll\right)\quad\ldots\quad(1)$$

$$\alpha l=s\cdot\frac{\sin U}{\cos Q}\left(1-\tfrac{1}{24}ss+\tfrac{1}{24}\alpha\alpha ll\right)\quad\ldots\quad(2)$$

$$u=s\cdot\sin U\cdot\operatorname{tang}Q\left(1+\tfrac{1}{12}ss+\tfrac{1}{24}uu\right)\quad\ldots\quad(3)$$

Es ist unnötig zu erinnern, daß in diesen drei Gleichungen l, q, s, u in Teilen des Halbmessers ausgedrückt verstanden werden. Man sieht leicht, daß sie [**314**] bis auf die fünfte Ordnung (ausschließlich) richtig sind, indem s wie eine Größe erster Ordnung betrachtet wird, und daß man, ohne den Grad der Schärfe zu vermindern, in den eingeklammerten Gliedern rechter Hand statt q, αl und u auch $s \cdot \cos U$, $s \cdot \frac{\sin U}{\cos Q}$, $s \cdot \sin U \cdot \operatorname{tang} Q$ substituieren darf.

22.

Es müssen nun zuvörderst die Größen B, b, T, t, r, welche auf der Ellipsoidfläche ihre Bedeutung haben, mit ihren Korrelaten auf der Kugelfläche Q, q, U, u, As verglichen werden. Alle dafür hier aufzustellenden Gleichungen werden bis wenigstens auf die dritte Ordnung (einschließlich) genau sein, und daß dieser Bedingung genügt werde, wird sich aus der Entwicklung selbst leicht erkennen lassen.

Wendet man die im 8. Art. gegebene Reihe auf unsere beiden Punkte an, so müssen die dort allgemein mit p und q bezeichneten Größen nach unserer jetzigen Bezeichnung ausgedrückt werden

für den ersten Punkt durch $B + \frac{1}{2} b - P$ und $\frac{1}{2} q$
für den zweiten Punkt durch $B - \frac{1}{2} b - P$ und $-\frac{1}{2} q$

und wir haben demnach die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} B + \tfrac{1}{2} b = P &+ \frac{\cos \Theta}{2 \cos \varphi} \cdot q - \frac{3\, ee}{8 \cos \varphi^2} \cdot \cos P \cdot \sin P \cdot qq \\ &+ \frac{ee}{16 \cos \varphi^3 \cos \Theta} (- \cos P^2 + \sin P^2 \\ &+ ee\,(5 \cos P^2 \cdot \sin P^2 - \sin P^4))\, q^3 \\ B - \tfrac{1}{2} b = P &- \frac{\cos \Theta}{2 \cos \varphi} \cdot q - \frac{3\, ee}{8 \cos \varphi^2} \cdot \cos P \cdot \sin P \cdot qq \\ &- \frac{ee}{16 \cos \varphi^3 \cos \Theta} (- \cos P^2 + \sin P^2 \\ &+ ee\,(5 \cos P^2 \cdot \sin P^2 - \sin P^4))\, q^3 \end{aligned}$$

Durch Addition und Subtraktion ergibt sich also

$$B = P - \frac{3\,ee}{8\cos\varphi^2} \cdot \cos P \cdot \sin P \cdot qq \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$b = \frac{\cos\Theta}{\cos\varphi} \cdot q + \frac{ee}{8\cos\varphi^3\cos\Theta}\big(-\cos P^2 + \sin P^2$$
$$+ ee\,(5\cos P^2 \cdot \sin P^2 - \sin P^4)\big)\,q^3 \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Man sieht übrigens leicht, daß die Gleichung (4) um Größen vierter, die Gleichung (5) hingegen nur um Größen fünfter Ordnung ungenau ist.

Um T und t mit U und u zu vergleichen, werden die am Schluß des 15. Art. entwickelten Formeln benutzt werden müssen, denen eine Voraussetzung [**315**] zugrunde lag, welcher in der gegenwärtigen Untersuchung genügt ist. Man hat dabei nur zu erwägen, daß die dortigen ψ^0 und ψ' nichts anderes sind, als hier $T+\frac{1}{2}t-(U+\frac{1}{2}u)$ und $T-\frac{1}{2}t-(U-\frac{1}{2}u)$; ferner das dortige h dasselbe was hier s; endlich daß das dortige χ von der hier mit U bezeichneten Größe im allgemeinen nur um eine Größe zweiter Ordnung verschieden sein kann, jedenfalls aber der Unterschied wenigstens von der ersten Ordnung ist. Es ergibt sich so, auf die dritte Ordnung einschließlich genau

$$T + \tfrac{1}{2}t = U + \tfrac{1}{2}u - \frac{ee\cos P \cdot \sin P \cdot \sin U \cdot \cos U^2}{12\cos\varphi\cos\Theta} \cdot s^3$$

$$T - \tfrac{1}{2}t = U - \tfrac{1}{2}u + \frac{ee\cos P \cdot \sin P \cdot \sin U \cdot \cos U^2}{12\cos\varphi\cos\Theta} \cdot s^3$$

und folglich, ebenso genau,

$$T = U \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$t = u - \frac{ee\cos P \cdot \sin P \cdot \sin U \cdot \cos U^2}{6\cos\varphi\cos\Theta} \cdot s^3 \quad \ldots \quad (7)$$

Die Vergleichung der Länge der geodätischen Linie auf dem Ellipsoid mit dem Größtekreisbogen auf der Kugel ist zwar in Art. 15 für den in Rede stehenden Fall nicht besonders entwickelt: es ist jedoch sehr leicht, dies zu ergänzen. Es ist nämlich in den dortigen Bezeichnungen die Länge des geodätischen Bogens

$$= A\int \frac{\cos y}{m\cos\psi} \cdot \mathrm{d}x$$

welche Integration von $x = -\frac{1}{2}(h - \delta)$ bis $x = +\frac{1}{2}(h + \delta)$ auszudehnen ist. Da y und ψ nur Größen von der dritten Ordnung sind, so sieht man leicht, daß die Weglassung des Faktors $\frac{\cos y}{\cos \psi}$ in dem Werte des Integrals nur einen Fehler der siebenten Ordnung hervorbringen kann. Jene Länge ist also, bis auf die fünfte Ordnung einschließlich genau,

$$\begin{aligned} = A\int\frac{\mathrm{d}x}{m} &= A\int \mathrm{d}x\,(1 - \mu x^3 - \mu' x^4) \\ &= A\,(x - \tfrac{1}{4}\mu x^4 - \tfrac{1}{5}\mu' x^5) + \text{Konst.} \\ &= A\,\{h - \tfrac{1}{8}(h^3\delta + h\delta^3)\,\mu - \tfrac{1}{80}(h^5 + 10\,h^3\delta\delta \\ &\qquad + 5\,h\delta^4)\,\mu'\} \end{aligned}$$

Die Koeffizienten μ, μ' lassen sich angeben, wenn man in der Reihe

$$\begin{aligned} m = 1 &- \frac{2\,ee\cos P\cdot\sin P}{3\cos\varphi\cos\Theta}\cdot q^3 \\ &- \frac{ee\cos P^2}{6\cos\varphi^2\cos\Theta^2}(1 - 7\,ee\sin P^2)\,q^4\ldots \end{aligned}$$

(welche von selbst aus der Art 9 gegebenen folgt) für q die Substitution macht

$$[316]\quad q = -\cos\chi\cdot x - \tfrac{1}{2}\operatorname{tang} Q\cdot\sin\chi^2 xx\ \ldots$$

(deren leichte Ableitung hier weggelassen werden kann), und das Resultat mit der Reihe

$$m = 1 + \mu x^3 + \mu' x^4\ \ldots$$

zusammenhält. Für unsern gegenwärtigen Zweck ist jedoch mehr nicht nötig, als nachzuweisen, daß die gesuchte Länge des geodätischen Bogens von Ah nicht mehr als um eine Größe fünfter Ordnung abweicht. Da nun ersichtlich $h^5 + 10\,h^3\delta\delta + 5\,h\delta^4$ eine solche Größe ist, so braucht der entwickelte Wert von μ' nicht hierhergesetzt zu werden. Für μ aber ergibt sich der Wert

$$\mu = \frac{2\,ee\cos P\cdot\sin P}{3\cos\varphi\cos\Theta}\cdot\cos\chi^3$$

und da $\delta \cos \chi$ nach Art. 15 eine Größe zweiter Ordnung ist, so wird offenbar auch $(h^3 \delta + h \delta^3)\, \mu$ eine Größe fünfter Ordnung.

Wir haben demnach, da h dasselbe bedeutet, was jetzt mit s bezeichnet ist, bis auf die fünfte Ordnung ausschließlich genau

$$s = \frac{r}{A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Endlich, damit alles für die weitere Entwicklung Erforderliche hier beisammen sei, setze ich noch folgende schon in der ersten Abhandlung (Art. 4, 6 und 3) gebrauchte strenge richtige Gleichungen hierher:

$$A = \frac{a \cos \varphi}{\cos \Theta^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$\cos Q = \frac{\cos \Theta \cos P}{\alpha \cos \varphi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$\sin Q = \frac{\sin P}{\alpha}$$

und die aus der Verbindung dieser beiden hervorgehende

$$\operatorname{tang} Q = \frac{\cos \varphi \operatorname{tang} P}{\cos \Theta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

23.

Zur Erreichung unseres Zweckes brauchen nun bloß diese Gleichungen gehörig kombiniert zu werden.

[317] Zuvörderst ergibt sich aus der Verbindung der Gleichungen (1), (2), (3), daß $qq + \alpha\alpha ll - uu - ss$ eine Größe vierter Ordnung ist, daher man anstatt (2) auch schreiben kann

$$l = \frac{s \cdot \sin U}{\alpha \cdot \cos Q} \left(1 - \tfrac{1}{24} qq + \tfrac{1}{24} uu\right)$$

oder wenn man nach (8), (9) und (10)

$$s = \frac{r \cos \Theta^2}{a \cos \varphi}, \qquad \alpha \cos Q = \frac{\cos \Theta \cos P}{\cos \varphi}$$

schreibt,

$$l = \frac{r \cos \Theta \sin U}{a \cos P} (1 - \tfrac{1}{24} qq + \tfrac{1}{24} uu).$$

Es wird ferner $\frac{\cos \Theta}{\cos P} = \frac{\sqrt{(1 - ee \sin P^2)}}{\cos P}$ mittels der Gleichung (4) und durch eine leichte Rechnung entwickelt in

$$\frac{\cos \Theta}{\cos P} = \frac{\sqrt{(1 - ee \sin B^2)}}{\cos B} (1 + \frac{3\, ee \sin P^2}{8\,(1 - ee \sin P^2)} \cdot qq)$$

was bis auf die vierte Ordnung ausschließlich genau ist. Wir haben daher, wenn zugleich T für U geschrieben wird, gemäß der Gleichung (6),

$$l = \frac{r\sqrt{(1 - ee \sin B^2)} \cdot \sin T}{a \cos B} (1 - \frac{1 - 10\, ee \sin P^2}{24\,(1 - ee \sin P^2)} \cdot qq + \tfrac{1}{24} uu)$$

Nachdem in dem eingeklammerten Teile noch substituiert ist $\frac{\cos \varphi}{\sqrt{(1 - ee \sin P^2)}} \cdot b$ für q, sodann t für u und endlich B für P, was alles, nach Gleichung (5), (7), (4), wie man leicht sieht, geschehen kann, ohne den Grad der Genauigkeit zu vermindern, und wenn wir außerdem, zur Abkürzung,

$$\sqrt{(1 - ee \sin B^2)} = k$$

schreiben, so erhalten wir (I)

$$l = \frac{kr \sin T}{a \cos B} (1 - \frac{(1 - 10\, ee \sin B^2) \cos \varphi^2}{24\, k^2} \cdot bb + \tfrac{1}{24} tt)$$

24.

Auf ähnliche Weise verwandelt sich Gleichung (1) in

$$q = s \cos U (1 - \tfrac{1}{12} qq + \tfrac{1}{12} ss + \tfrac{1}{8} uu)$$

und daher Gleichung (5) in

$$[318] \quad b = \frac{r \cos \Theta^3 \cos U}{a \cos \varphi^2} \{1 - [\tfrac{1}{24} + \frac{ee}{8 \cos \varphi^2 \cos \Theta^2} (\cos P^2 - \sin P^2 - ee (5 \cos P^2 \sin P^2 - \sin P^4))] qq + \tfrac{1}{12} ss + \tfrac{1}{8} uu\}$$

Für $\cos \Theta^3 = (1 - ee \sin P^2)^{\frac{3}{2}}$ findet man leicht die mittels (4) so weit, wie hier nötig ist, geführte Entwicklung

$$\cos \Theta^3 = (1 - ee \sin B^2)^{\frac{3}{2}} (1 - \frac{9 e^4 \cos P^2 \sin P^2}{8 \cos \varphi^2 (1 - ee \sin P^2)} \cdot qq),$$

wodurch die vorhergehende Gleichung sich verwandelt in

$$b = \frac{r (1 - ee \sin B^2)^{\frac{3}{2}} \cos U}{a \cos \varphi^2} \{1 - [\tfrac{1}{12} + \frac{ee}{8 \cos \varphi^2 (1 - ee \sin P^2)} (\cos P^2 - \sin P^2 + ee (4 \cos P^2 \sin P^2 + \sin P^4))] qq + \tfrac{1}{12} ss + \tfrac{1}{8} uu\}$$

oder in einer etwas veränderten Form

$$b = \frac{r k^3 \cos U}{a \cos \varphi^2} \{1 - \frac{1}{24 \cos \varphi^2 (1 - ee \sin P^2)} (2 + ee - (8 ee - 14 e^4) \sin P^2 - 9 e^4 \sin P^4) qq + \tfrac{1}{12} ss + \tfrac{1}{8} uu\}.$$

Schreibt man nun noch hierin

$$\frac{\cos \varphi \cdot b}{\sqrt{(1 - ee \sin P^2)}} \text{ anstatt } q, \quad \text{wegen (5)}$$

$$\frac{rr (1 - ee \sin P^2)^2}{aa \cos \varphi^2} \text{ anstatt } ss, \quad \text{wegen (8) und (9)}$$

T und t anstatt U und u, wegen (6) und (7)

und zuletzt

B für P wegen (4),

was alles ohne Nachteil für die Genauigkeit geschehen kann, so erhält man (II)

$$b = \frac{rk^3}{a\cos\varphi^2}\cdot\cos T\{1 - \frac{1}{24\,k^4}(2 + ee - (8\,ee - 14\,e^4)\sin B^2$$
$$- 9\,e^4\sin B^4)\cdot bb + \frac{k^4}{12\,aa\cos\varphi^2}\cdot rr + \tfrac{1}{8}\,tt\}$$

25.

Aus den Gleichungen (1) und (3) erhellt, daß qqu von $s^3\cos U^2\sin U\,\mathrm{tang}\,Q$, oder nach (11), von

$$\frac{s^3\cos\varphi\cos U^2\sin U\cdot\mathrm{tang}\,P}{\cos\Theta}$$

nur um eine Größe fünfter Ordnung verschieden ist: es ist daher verstattet, die Gleichung (7) auch so zu schreiben

$$t = u\,(1 - \frac{ee\cos P^2}{6\cos\varphi^2}\cdot qq),$$

[319] oder wenn man für u den Wert aus (3) substituiert, und nach (8), (9), (11)

$$s = \frac{r\cos\Theta^2}{a\cos\varphi} = \frac{r\cos\Theta\,\mathrm{tang}\,P}{a\,\mathrm{tang}\,Q}$$

setzt

$$t = \frac{r\cos\Theta\,\mathrm{tang}\,P\cdot\sin U}{a}(1 + \tfrac{1}{24}\,uu + \tfrac{1}{12}\,ss - \frac{ee\cos P^2}{6\cos\varphi^2}\cdot qq).$$

Für $\cos\Theta\cdot\mathrm{tang}\,P = \sqrt{(1 - ee\sin P^2)}\cdot\mathrm{tang}\,P$ findet man nach (4) den so weit wie hier nötig ist entwickelten Wert

$$\sqrt{(1 - ee\sin B^2)}\cdot\mathrm{tang}\,B\,(1 + \frac{3\,ee - 6\,e^4\sin P^2 + 3\,e^4\sin P^4}{8\cos\varphi^2\,(1 - ee\sin P^2)}\cdot qq)$$

und folglich

$$t = \frac{rk\,\mathrm{tang}\,B\sin U}{a}(1 + \frac{5\,ee + (4\,ee - 14\,e^4)\sin P^2 + 5\,e^4\sin P^2}{24\cos\varphi^2\,(1 - ee\sin P^2)}\cdot qq$$
$$+ \tfrac{1}{12}\,ss + \tfrac{1}{24}\,uu).$$

Macht man nun noch hierin dieselben Substitutionen, wie im vorhergehenden Art., so erhält man als Endresultat (III)

$$t = \frac{rk \operatorname{tang} B \cdot \sin T}{a} \Big(1 + \frac{5\,ee + (4\,ee - 14\,e^4) \sin B^2 + 5\,e^4 \sin B^4}{24\,k^4} \cdot bb$$
$$+ \frac{k^4}{12\,aa \cos \varphi^2} \cdot rr + \tfrac{1}{24}\,tt\Big).$$

Die drei Formeln I, II, III enthalten im wesentlichen die Auflösung unserer Aufgabe. Daß sie bis zur dritten Ordnung einschließlich genau sind, steht durch ihre Ableitung unmittelbar fest. Daß aber in der Wirklichkeit ihre Genauigkeit noch eine Ordnung weiter reicht, oder daß der Fehler jeder der Formeln von der fünften Ordnung ist, würde sich leicht durch einige ergänzende Zwischenentwicklungen oder auch dadurch dartun lassen, daß in den Ausdrücken ihrer Natur nach keine Größen gerader Ordnung stattfinden können: ich halte mich jedoch dabei nicht auf, da die *zweite* in den folgenden Artikeln (26—32) auszuführende Ableitung der Formeln dasselbe Resultat von selbst in sich begreift.

26.

Diese Untersuchung ist wie eine selbständige von allem vorhergehenden unabhängige zu betrachten, und es sollen daher zur Bequemlichkeit und zur Verhütung von Ungewißheiten alle dabei zu verwendenden Bezeichnungen, so wie sie auftreten, erst erklärt werden. Meistens werden diejenigen Buchstaben, welche schon in der ersten Ableitung gebraucht sind, ihre dortige Bedeutung behalten, doch werden ein paar derselben (u und s), da sie dort bloß Hilfsgrößen vorstellen, [320] die in den Resultaten nicht mehr erscheinen, hier ohne Übelstand zu anderm Zweck benutzt werden dürfen.

Durch die zwei Punkte der Ellipsoidfläche, auf welche die Aufgabe sich bezieht, werde eine geodätische Linie, zunächst von unbestimmter Ausdehnung, geführt, und auf derselben ein beliebiger Anfangspunkt gewählt. Das Stück jener Linie von dem Anfangspunkte bis zu einem unbestimmten Punkte werde durch u bezeichnet; der Winkel, welchen an letzterem Punkte die geodätische Linie mit dem Meridian macht, jene in dem Sinne wachsender u, diesen von Norden nach Süden genommen, durch X; Breite und Länge des unbestimmten Punktes

durch Y und Z. Ich nehme an, daß die Längen von Westen nach Osten, die Azimuthe X in dem Sinn von Süden nach Westen zu wachsen. Werden nun noch, wie immer bisher, halbe große Achse und Exzentrizität der erzeugenden Ellipse durch a und e bezeichnet, so hat man, aus bekannten Gründen

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}u} = -\frac{\cos X\,(1 - ee \sin Y^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 - ee)\,a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u} = -\frac{\sin X\,(1 - ee \sin Y^2)^{\frac{1}{2}}}{a \cos Y} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Es ist ferner nach einem bekannten Lehrsatze die Größe

$$\frac{\sin X \cos Y}{\sqrt{(1 - ee \sin Y^2)}}$$

für alle Punkte derselben geodätischen Linie konstant, und hieraus, wenn man logarithmisch differentiiert

$$\begin{aligned} \operatorname{cotang} X\,\mathrm{d}X &= \left(\operatorname{tang} Y - \frac{ee \cos Y \sin Y}{1 - ee \sin Y^2}\right) \mathrm{d}Y \\ &= \frac{(1 - ee) \operatorname{tang} Y}{1 - ee \sin Y^2} \cdot \mathrm{d}Y \end{aligned}$$

folglich, aus der Verbindung mit (1),

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}u} = -\frac{\sin X \operatorname{tang} Y\,(1 - ee \sin Y^2)^{\frac{1}{2}}}{a} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Wir wollen jedoch unsere Aufgabe allgemeiner fassen und

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}u} = x, \quad \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}u} = y, \quad \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u} = z$$

setzen, indem wir zunächst nur voraussetzen, daß x, y, z irgendwelche gegebene Funktionen der beiden Veränderlichen X und Y sind. Es entstehe ferner durch neue Differentiation

$$[321] \qquad \begin{aligned} \mathrm{d}x &= x'\,\mathrm{d}X + x''\,\mathrm{d}Y \\ \mathrm{d}y &= y'\,\mathrm{d}X + y''\,\mathrm{d}Y \\ \mathrm{d}z &= z'\,\mathrm{d}X + z''\,\mathrm{d}Y \end{aligned}$$

und dann durch nochmalige Differentiation

$$\begin{aligned} dx' &= x'''\,dX + x''''\,dY, & dx'' &= x''''\,dX + x^{\mathrm{v}}\,dY \\ dy' &= y'''\,dX + y''''\,dY, & dy'' &= y''''\,dX + y^{\mathrm{v}}\,dY \\ dz' &= z'''\,dX + z''''\,dY, & dz'' &= z''''\,dX + z^{\mathrm{v}}\,dY \end{aligned}$$

Es wird demnach, insofern Z, implizite, nur eine Funktion von u ist,

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{du} &= z \\ \frac{ddZ}{du^2} &= xz' + yz'' \\ \frac{d^3Z}{du^3} &= xxz' + xy'z'' + x''yz' + yy''z'' + xxz''' \\ &\qquad + 2\,xyz'''' + yyz^{\mathrm{v}}. \end{aligned}$$

Die sukzessiven Differentialquotienten von X und Y lassen sich auf dieselbe Art entwickeln oder unmittelbar aus denen von Z ableiten, wenn man nur darin für z ohne und mit Akzenten bzw. x und y ebenso akzentuiert substituiert.

27.

Es seien nun die *bestimmten* Werte, welche die vier Größen u, X, Y, Z in den beiden Punkten annehmen, auf welche unsere Aufgabe sich bezieht, der Reihe nach,

für den ersten Punkt	$R-\frac{1}{2}r$,	$T+\frac{1}{2}t$,	$B+\frac{1}{2}b$,	$L+\frac{1}{2}l$
für den zweiten Punkt	$R+\frac{1}{2}r$,	$T-\frac{1}{2}t$,	$B-\frac{1}{2}b$,	$L-\frac{1}{2}l$

und ebenso, für denjenigen Punkt der geodätischen Linie, welcher zwischen jenen in der Mitte liegt, bzw. R, T, B, L, wo demnach die Kursivtypen T, B, L von den Antiqua T, B, L wohl unterschieden werden müssen.

Es mögen ferner die in der Gestalt von Funktionen von X und Y erscheinenden achtzehn unbestimmten Größen

$$\begin{aligned} &x,\ x',\ x'',\ x''',\ x'''',\ x^{\mathrm{v}} \\ &y,\ y',\ y'',\ y''',\ y'''',\ y^{\mathrm{v}} \\ &z,\ z',\ z'',\ z''',\ z'''',\ z^{\mathrm{v}} \end{aligned}$$

[322] durch die Substitution $X = T$, $Y = B$ die bestimmten Werte

$$\begin{array}{l} f,\ f',\ f'',\ f''',\ f'''',\ f^{\mathrm{v}} \\ g,\ g',\ g'',\ g''',\ g'''',\ g^{\mathrm{v}} \\ h,\ h',\ h'',\ h''',\ h'''',\ h^{\mathrm{v}} \end{array}$$

annehmen; hingegen durch die Substitution $X = T$, $Y = B$ folgende

$$\begin{array}{l} \mathrm{f},\ \mathrm{f}',\ \mathrm{f}'',\ \mathrm{f}''',\ \mathrm{f}'''',\ \mathrm{f}^{\mathrm{v}} \\ \mathrm{g},\ \mathrm{g}',\ \mathrm{g}'',\ \mathrm{g}''',\ \mathrm{g}'''',\ \mathrm{g}^{\mathrm{v}} \\ \mathrm{h},\ \mathrm{h}',\ \mathrm{h}'',\ \mathrm{h}''',\ \mathrm{h}'''',\ \mathrm{h}^{\mathrm{v}} \end{array}$$

Durch den *Taylor*schen Lehrsatz wird der Wert von Z für $u = R - \frac{1}{2} r$ in die Reihe

$$\mathrm{L} - \tfrac{1}{2} r \cdot \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u} + \tfrac{1}{8} rr \cdot \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u^2} - \tfrac{1}{48} r^3 \cdot \frac{\mathrm{d}^3 Z}{\mathrm{d}u^3} + \text{ usw.}$$

entwickelt, und der für $u = R + \frac{1}{2} r$ in

$$\mathrm{L} + \tfrac{1}{2} r \cdot \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u} + \tfrac{1}{8} rr \cdot \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u^2} + \tfrac{1}{48} r^3 \cdot \frac{\mathrm{d}^3 Z}{\mathrm{d}u^3} + \text{ usw.,}$$

wo für die Differentialquotienten diejenigen bestimmten Werte gesetzt werden müssen, welche dem Werte $u = R$ entsprechen, also

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\mathrm{u}} = \mathrm{h}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u^2} = \mathrm{fh}' + \mathrm{gh}''$$

$$\frac{\mathrm{d}^3 Z}{\mathrm{d}u^3} = \mathrm{ff}'\mathrm{h}' + \mathrm{fg}'\mathrm{h}'' + \mathrm{f}''\mathrm{gh}' + \mathrm{gg}''\mathrm{h}'' + \mathrm{ffh}''' + 2\,\mathrm{fgh}'''' + \mathrm{ggh}^{\mathrm{v}},$$

Da nun jene beiden Werte von Z bzw. $= L + \frac{1}{2} l$ und $L - \frac{1}{2} l$ sind, so erhält man

$$L = \mathrm{L} + \tfrac{1}{8}(\mathrm{fh}' + \mathrm{gh}'')\, rr \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$l = -\,\mathrm{h}r - \tfrac{1}{24}(\mathrm{ff}'\mathrm{h}' + \mathrm{fg}'\mathrm{h}'' + \mathrm{f}''\mathrm{gh}' + \mathrm{gg}''\mathrm{h}'' + \mathrm{ffh}''' + 2\,\mathrm{fgh}'''' + \mathrm{ggh}^{\mathrm{v}})\, r^3 \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

wo die erstere Gleichung bis auf Größen der vierten, die andere bis auf Größen der fünften Ordnung ausschließlich genau ist*).

[323] Wenn man erwägt, daß in der obigen Entwicklung in Beziehung auf Z nichts weiter vorausgesetzt ist, als daß es eine von u abhängige veränderliche Größe ist, deren Differentialquotient $\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u} = z$ durch irgend eine Funktion von X und Y ausgedrückt werde, so kann man die gefundenen Resultate auch unmittelbar auf jede andere in gleichem Falle sich befindende veränderliche Größe, namentlich auf X oder Y selbst, übertragen, wenn man nur anstatt L, L, l, und der verschieden akzentuierten h bzw. T, T, t und die verschiedenen f, oder B, B, b, und die verschiedenen g einschiebt. Zunächst gibt uns demnach die Gleichung (4), von welcher hier sonst kein direkter Gebrauch gemacht wird, folgende beiden, gleichfalls bis zur vierten Ordnung ausschließlich genauen:

$$T = \mathrm{T} + \tfrac{1}{8}(\mathrm{ff}' + \mathrm{f}''\mathrm{g})\,rr$$
$$B = \mathrm{B} + \tfrac{1}{8}(\mathrm{fg}' + \mathrm{gg}'')\,rr.$$

Man schließt hieraus zuvörderst, daß h und h, als die Werte von z, je nachdem man T und B, oder T und B für X und Y substituiert, voneinander um eine Größe zweiter Ordnung verschieden sind, und zwar wird dieser Unterschied, bis auf die vierte Ordnung ausschließlich genau, bestimmt durch die Formel

$$h = \mathrm{h} + \tfrac{1}{8}(\mathrm{ff}' + \mathrm{f}''\mathrm{g})\,rr \cdot \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}X}\right) + \tfrac{1}{8}(\mathrm{fg}' + \mathrm{gg}'')\,rr\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}Y}\right),$$

wo für die partiellen Differentialquotienten $\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}X}\right)$ und $\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}Y}\right)$, oder z', z'' ihre bestimmten Werte bei $X = \mathrm{T}$, $Y = \mathrm{B}$ anzunehmen sind, nämlich h′ und h″. Es ist also, bis auf die vierte Ordnung genau,

$$\mathrm{h} = h - \tfrac{1}{8}(\mathrm{ff}'\mathrm{h}' + \mathrm{fg}'\mathrm{h}'' + \mathrm{f}''\mathrm{gh}' + \mathrm{gg}''\mathrm{h}'')\,rr,$$

---

*) Die Bemessung der Ordnungen geschieht so, daß $\frac{r}{a}$ wie eine Größe erster Ordnung betrachtet wird. Man erkennt leicht, daß die Koeffizienten von r, rr, r^3 usw. die Divisoren a, aa, a^3 usw. implizieren.

und vermöge der Substitution dieses Wertes in der Gleichung (5) wird bis auf die fünfte Ordnung ausschließlich genau

$$l = -hr + \tfrac{1}{24}(2\,\mathrm{ff'h'} + 2\,\mathrm{fg'h''} + 2\,\mathrm{f''gh'} + 2\,\mathrm{gg''h''} - \mathrm{ffh'''} - 2\,\mathrm{fgh''''} - \mathrm{ggh^{V}})\,r^3.$$

Aus gleichen Gründen wie h von h, werden auch f, f′, f″ usw. g, g′, g″ usw. h′, h″ usw. von f, f', f'' usw. g, g', g'' usw. h', h'' usw. bzw. um Größen zweiter Ordnung verschieden sein, und man kann daher in dem eben gegebenen Ausdruck für l anstatt jener Größen die letzteren ohne Verminderung des Grades der Genauigkeit substituieren. Es ist also gleichfalls bis auf die fünfte Ordnung ausschließlich genau

[324] $$l = -hr + \tfrac{1}{24}(2\,ff'h' + 2\,f''gh' + 2\,fg'h'' + 2\,gg''h'' - ffh''' - 2\,fgh'''' - ggh^{V})\,r^3. \quad (6)$$

Der obigen Bemerkung zufolge darf man nun auch in dieser Gleichung l mit t oder mit b vertauschen, wenn man nur

anstatt	$h,\ h',\ h'',\ h''',\ h'''',\ h^{V}$
im ersteren Falle	$f,\ f',\ f'',\ f''',\ f'''',\ f^{V}$
und im anderen	$g,\ g',\ g'',\ g''',\ g'''',\ g^{V}$

setzt, so daß man hat

$$t = -fr + \tfrac{1}{24}(2\,ff'f' + 2\,f'f''g + 2\,ff''g' + 2\,f''gg'' - fff''' - 2\,ff''''g - f^{V}gg)\,r^3 \quad (7)$$

$$b = -gr + \tfrac{1}{24}(2\,ff'g' + 2\,f''gg' + 2\,fg'g'' + 2\,gg''g'' - ffg''' - 2\,fgg'''' - ggg^{V})\,r^3. \quad (8)$$

28.

Die drei Formeln (6), (7), (8) enthalten bereits das Wesentliche zur Auflösung unserer Aufgabe, so daß zu ihrer Vervollständigung nur noch eine mechanische Rechnung, nämlich die Entwicklung der Werte der verschiedenen Differentialquotienten und deren Substitution übrig bleibt. Jene Entwicklung gibt, indem wir sofort anstatt der unbestimmten Werte x, x' usw. y usw. die zu $X = T$, $Y = B$ gehörigen bestimmten f, f' usw., g usw. schreiben und zur Abkürzung noch setzen

$$\cos B = c$$
$$\sin B = s$$
$$\sqrt{(1 - ee \sin B^2)} = k$$

folgende achtzehn Werte:

$$f = -\frac{k \sin T}{ac} \cdot s$$

$$f' = -\frac{k \cos T}{ac} \cdot s$$

$$f'' = -\frac{\sin T}{akcc} \cdot (1 - 2\,eess + ees^4)$$

$$f''' = +\frac{k \sin T}{ac} \cdot s$$

$$f'''' = -\frac{\cos T}{akcc} \cdot (1 - 2\,eess + ees^4)$$

$$f^{\mathrm{v}} = -\frac{\sin T}{ak^3c^3} \cdot \big((2 - 3\,ee)\,s + (ee + 2\,e^4)\,s^3 - (2\,ee + e^4)\,s^5 + e^4 s^7\big)$$

[325] $$g = -\frac{k^3 \cos T}{a(1 - ee)}$$

$$g' = +\frac{k^3 \sin T}{a(1 - ee)}$$

$$g'' = +\frac{3\,kee \cos T}{a(1 - ee)} \cdot cs$$

$$g''' = +\frac{k^3 \cos T}{a(1 - ee)}$$

$$g'''' = -\frac{3\,kee \sin T}{a(1 - ee)} \cdot cs$$

$$g^{\mathrm{v}} = +\frac{3\,ee \cos T}{a(1 - ee)k} \cdot \big(1 - (2 + 2\,ee)ss + 3\,ees^4\big)$$

$$h = -\frac{k \sin T}{ac}$$

$$h' = -\frac{k \cos T}{ac}$$

$$h'' = -\frac{\sin T}{acck} \cdot (1 - ee)\, s$$

$$h''' = +\frac{k \sin T}{ac}$$

$$h'''' = -\frac{\cos T}{acck} \cdot (1 - ee)\, s$$

$$h^{\mathrm{v}} = -\frac{(1 - ee) \sin T}{ac^3 k^3} \cdot (1 + ss - 2\, ees^4).$$

29.

Wir wollen nun die drei Gleichungen (7), (8), (6) in folgende Form setzen

$$t = -fr\,(1 + Frr)$$
$$b = -gr\,(1 + Grr)$$
$$l = -hr\,(1 + Hrr)$$

wo

$$-fr - \frac{k \sin T \cdot \tang B}{a} \cdot r$$

$$-gr = \frac{k^3 \cos T}{a\,(1 - ee)} \cdot r$$

$$-hr = \frac{k \sin T}{a \cos B} \cdot r$$

bzw. die genäherten und bis auf die dritte Ordnung ausschließlich genauen Werte von t, b, l sind, die zur Abkürzung mit τ, β, λ bezeichnet werden sollen. Jede der Größen F, G, H ist das Aggregat von sieben Teilen, nämlich

[326] $$F = -\tfrac{1}{12} f' f' - \frac{f' f'' g}{12 f} - \tfrac{1}{12} f'' g' - \frac{f'' g g''}{12 f} + \tfrac{1}{24} f f''' + \tfrac{1}{12} f'''' g + \frac{f^{\mathrm{v}} g g}{24 f}$$

$$G = -\frac{f f' g'}{12 g} - \tfrac{1}{12} f' g' - \frac{f g' g''}{12 g} - \tfrac{1}{12} g'' g'' + \frac{f f g'''}{24 g} + \tfrac{1}{12} f g'''' + \tfrac{1}{24} g g^{\mathrm{v}}$$

$$H = -\frac{ff'h'}{12h} - \frac{f''gh'}{12h} - \frac{fg'h''}{12h} - \frac{gg''h''}{12h} + \frac{ffh'''}{24h} + \frac{fgh''''}{12h} + \frac{ggh^{\mathrm{V}}}{24h}.$$

30.

Die Werte der sieben Bestandteile von F ergeben sich der Reihe nach

$$1)\quad -\frac{kk\cos T^2}{12\,aacc}\cdot ss$$

$$2)\quad -\frac{kk\cos T^2}{12\,aa(1-ee)cc}\cdot(1-2\,eess+ees^4)$$

$$3)\quad +\frac{kk\sin T^2}{12\,aa(1-ee)cc}\cdot(1-2\,eess+ees^4)$$

$$4)\quad +\frac{eekk\cos T^2}{4\,aa(1-ee)^2}\cdot(1-2\,eess+ees^4)$$

$$5)\quad -\frac{kk\sin T^2}{24\,aacc}\cdot ss$$

$$6)\quad +\frac{kk\cos T^2}{12\,aa(1-ee)cc}\cdot(1-2\,eess+ees^4)$$

$$7)\quad +\frac{kk\cos T^2}{24\,aa(1-ee)^2cc}\cdot(2-3\,ee+(ee+2\,e^4)ss-(2\,ee+e^4)s^4).$$

Hier destruieren die Bestandteile 2 und 6 einander; 1, 4 und 7 vereinigen sich zu

$$+\frac{kk\cos T^2}{24\,aa(1-ee)^2}\cdot(2+3\,ee+(2\,ee-12\,e^4)ss+5\,e^4s^4)$$

die Bestandteile 3 und 5 hingegen zu

$$+\frac{kk\sin T^2}{24\,aa(1-ee)cc}\cdot(2-(1+3\,ee)ss+2\,ees^4)$$

oder, da $2 - (1 + 3\,ee)ss + 2\,ees^4$ identisch ist mit $2\,cckk + (1 - ee)ss$, zu

$$+ \frac{k^4 \sin T^2}{12\,aa\,(1 - ee)} + \frac{kk \sin T^2}{24\,aacc} \cdot ss$$

Indem man nun noch $\frac{k^4 \sin T^2}{12\,aa\,(1 - ee)}$ in

$$\frac{k^4}{12\,aa\,(1 - ee)} - \frac{k^4 \sin T^2}{12\,aa\,(1 - ee)}$$

verwandelt, und alles vereinigt, erhält man

$$F = \frac{k^4}{12\,aa\,(1 - ee)} + \frac{kk \sin T^2 \operatorname{tang} B^2}{24\,aa}$$
$$+ \frac{kk \cos T^2}{24\,aa\,(1 - ee)^2} \cdot (5\,ee + (4\,ee - 14\,e^4)ss + 5\,e^4 s^4)$$

[327] und hieraus, in Gemäßheit von $t = \tau\,(1 + Frr)$,

$$t = \tau\,\{1 + \frac{k^4}{12\,aa\,(1 - ee)} \cdot rr + \tfrac{1}{24}\,\tau\tau + \frac{1}{24\,k^4}(5\,ee$$
$$+ (4\,ee - 14\,e^4)ss + 5\,e^4 s^4)\,\beta\beta\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

31.

Für die sieben Bestandteile von G ergeben sich folgende Werte:

1) $+ \frac{kk \sin T^2}{12\,aacc} \cdot ss$

2) $+ \frac{kk \sin T^2}{12\,aa\,(1 - ee)\,cc} \cdot (1 - 2\,eess + ees^4)$

3) $- \frac{eekk \sin T^2}{4\,aa\,(1 - ee)} \cdot ss$

4) $- \frac{3\,e^4\,kk \cos T^2}{4\,aa\,(1 - ee)^2} \cdot ccss$

5) $- \frac{kk \sin T^2}{24\,aacc} \cdot ss$

$$6)\quad +\frac{eekk\sin T^2}{4aa(1-ee)}\cdot ss$$

$$7)\quad -\frac{eekk\cos T^2}{8aa(1-ee)^2}\cdot(1-(2+2ee)ss+3eees^4).$$

Hier destruieren die Teile 3 und 6 einander; die übrigen vereinigen sich, indem man einerseits 1, 2 und 5, anderseits 4 und 7 zusammenfaßt in

$$+\frac{kk\sin T^2}{24aa(1-ee)cc}\cdot(2+(1-5ee)ss+2eees^4)$$
$$-\frac{eekk\cos T^2}{8aa(1-ee)^2}\cdot(1-(2-4ee)ss-3eees^4).$$

Das erste Glied verwandelt sich, da $2+(1-5ee)ss+2eees^4$ mit $2eekk+3(1-ee)ss$ identisch ist, in

$$\frac{k^4\sin T^2}{12aa(1-ee)}+\frac{kk\sin T^2}{8aacc}\cdot ss.$$

Lösen wir hier

$$\frac{k^4\sin T^2}{12aa(1-ee)}\quad\text{in}\quad\frac{k^4}{12aa(1-ee)}-\frac{kk\cos T^2}{12aa(1-ee)}\cdot(1-eess)$$

auf, so gibt die Vereinigung aller Teile

$$G=\frac{k^4}{12aa(1-ee)}+\frac{kk\sin T^2\operatorname{tang}B^2}{8aa}-\frac{kk\cos T^2}{24aa(1-ee)^2}\cdot$$
$$(2+ee-(8ee-14e^4)ss-9e^4s^4)$$

und hieraus, in Gemäßheit von $b=\beta(1+Grr)$,

$$b=\beta\{1+\frac{k^4}{12aa(1-ee)}\cdot rr+\tfrac{1}{8}\tau\tau-\frac{1}{24k^4}\cdot(2+ee$$
$$-(8ee-14e^4)ss-9e^4s^4)\beta\beta\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(10)$$

[328] 32.

Endlich ergeben sich die Werte der sieben Bestandteile von H folgendermaßen:

$$1)\quad -\frac{kk\cos T^2}{aacc}\cdot ss$$

$$2)\quad -\frac{kk\cos T^2}{12\,aa\,(1-ee)cc}\cdot(1-2\,eess+ees^4)$$

$$3)\quad +\frac{kk\sin T^2}{12\,aacc}\cdot ss$$

$$4)\quad +\frac{eekk\cos T^2}{4aa\,(1-ee)}\cdot ss$$

$$5)\quad -\frac{kk\sin T^2}{24\,aacc}\cdot ss$$

$$6)\quad +\frac{kk\cos T^2}{12\,aacc}\cdot ss$$

$$7)\quad +\frac{kk\cos T^2}{24\,aa\,(1-ee)cc}\cdot(1+ss-2\,ees^4)$$

Die Glieder 1 und 6 destruieren einander; die übrigen ergeben durch ihre Vereinigung

$$H=\frac{kk\sin T^2}{24\,aacc}\cdot ss-\frac{kk\cos T^2}{24\,aa\,(1-ee)}\cdot(1-10\,eess)$$

woraus, in Gemäßheit von $l=\lambda\,(1+Hrr)$ hervorgeht

$$=\lambda\left(1+\tfrac{1}{24}\,\tau\tau-\frac{1-ee}{24\,k^4}\cdot(1-10\,eess)\beta\beta\right)\quad\ldots\ldots\quad(11)$$

Die Formeln 9, 10, 11, welche die Auflösung unserer Aufgabe in sich fassen, unterscheiden sich von den Formeln III, II, I (Artt. 25, 24, 23) bloß darin, daß jene innerhalb der Parenthesen da τ und β haben, wo in diesen t und b steht, was, wie man leicht sieht, in den Endresultaten nur Unterschiede fünfter Ordnung hervorbringt: da nun jene, wie aus ihrer Ableitung erhellt, bis zur fünften Ordnung ausschließlich genau sind, so ist bewiesen, daß auch die nach der ersten Methode gefundenen Formeln I, II, III (Art. 23—25) dieselbe Genauigkeit besitzen.

33.

Zur numerischen Berechnung wird man die Formeln 9, 10, 11 lieber in folgende logarithmische Form bringen, bei welcher

offenbar der Grad der Genauigkeit unverändert bleibt; M bezeichnet darin den Modulus des gewählten Logarithmensystems:

$$[329]\quad \log t = \log \tau + \frac{Mk^4}{12\,aa\,(1-ee)}\cdot rr + \tfrac{1}{24}M\tau\tau$$
$$+\frac{M}{24\,k^4}\left(5\,ee + (4\,ee - 14\,e^4)\,ss + 5\,e^4 s^4\right)\beta\beta$$
$$\log b = \log \beta + \frac{Mk^4}{12\,aa\,(1-ee)}\cdot rr + \tfrac{1}{8}M\tau\tau$$
$$-\frac{M}{24\,k^4}\left(2 + ee - (8\,ee - 14\,e^4)\,ss - 9\,e^4 s^4\right)\beta\beta$$
$$\log l = \log \lambda + \tfrac{1}{24}M\tau\tau - \frac{(1-ee)M}{24\,k^4}(1 - 10\,eess)\beta\beta$$

Da, wie man leicht sieht, in allen bisher entwickelten Formeln die Größen t, τ, b, β, l, λ als in Teilen des Halbmessers ausgedrückt angenommen sind, so wird man, wenn jene in Sekunden ausgedrückt und dieselben Bezeichnungen für sie beibehalten werden sollen, den Formeln für τ, β, λ (Art. 29) noch den Faktor $\frac{1}{\varrho}$ beifügen müssen; in den Gleichungen 9, 10, 11 hingegen, sowie in den daraus abgeleiteten logarithmischen, muß den Gliedern, die $\tau\tau$ oder $\beta\beta$ enthalten, noch der Faktor $\varrho\varrho$ zugesetzt werden, wo ϱ (ebenso wie oben Art. 16 und 19) die Größe des Bogens von einer Sekunde in Teilen des Halbmessers bedeutet. Behält man nun auch noch μ in der oben gebrauchten Bedeutung bei, nämlich

$$\mu = \tfrac{1}{12}M\varrho\varrho$$

und schreibt zur Abkürzung

$$(1)\quad = \frac{k}{a\,\varrho}$$
$$(2)\quad = \frac{k^3}{a\,(1-ee)\,\varrho}$$
$$(3)\quad = \frac{Mk^4}{12\,aa\,(1-ee)}$$
$$(4)\quad = \frac{\mu}{2\,k^4}\left(5\,ee + (4\,ee - 14\,e^4)\,ss + 5\,e^4 s^4\right)$$

$$(5) \quad = \frac{\mu}{2k^4}(2 + ee - (8\,ee - 14\,e^4)ss - 9\,e^4 s^4)$$

$$(6) \quad = \frac{(1 - ee)\mu}{2k^4}(1 - 10\,eess)$$

$$(7) \quad = \tfrac{1}{2}\mu$$

so ist unsere Auflösung in folgenden sechs Formeln enthalten:

$$\begin{aligned}
\tau &= (1)\, r \sin T \operatorname{tang} B \\
\beta &= (2)\, r \cos T \\
\lambda &= (1)\, r \sin T \sec B \\
\log t &= \log \tau + (3)\, rr + (4)\, \beta\beta + (7)\, \tau\tau \\
\log b &= \log \beta + (3)\, rr - (5)\, \beta\beta + 3\,(7)\, \tau\tau \\
\log l &= \log \lambda - (6)\beta\beta + (7)\, \tau\tau
\end{aligned}$$

[330] 34.

Von den sieben Koeffizienten (1), (2) usw. ist der letzte konstant, nämlich

$$\begin{aligned}
\log \quad (7) &= 7{,}6287228032\,(-20) \\
\log 3\,(7) &= 8{,}1058440580\,(-20)
\end{aligned}$$

die übrigen werden, sobald bestimmte Werte für die Dimensionen des Ellipsoids gewählt sind, Funktionen der Breite B und lassen sich also in eine Tafel bringen, deren Argument B ist. Steht eine solche Tafel zu Gebote, so ist die Rechnung nach dieser Methode für das Ellipsoid eben so bequem, wie die Rechnung für die Kugel.

Ich füge am Schlusse dieser Abhandlung eine solche Tafel für die Zone von 51° bis 54° bei, in welcher die Werte von B von Minute zu Minute fortschreiten, und bemerke dazu folgendes.

Von den Ellipsoidelementen ist die Tafel nur insofern abhängig, als darin eine bestimmte Abplattung oder ein bestimmter Wert von e zugrunde gelegt ist, derjenige nämlich, welchen die letzte von *Bessel* ausgeführte Rechnung ergeben hat, und der auch der der ersten Abhandlung beigefügten Tafel zugrunde liegt (s. Art. 5). Damit der Zahlenwert von a bloß von der Abplattung abhängig werde, ist als Einheit nicht die Toise oder ein sonstiges willkürliches Maß angenommen,

sondern der zehnmillionste Teil des Erdmeridians, wonach also a unmittelbar durch e mittels der Gleichung

$$\pi a \left(1 - \frac{1}{4} ee - \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 16} e^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 15}{4 \cdot 16 \cdot 36} e^6 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 15 \cdot 35}{4 \cdot 16 \cdot 36 \cdot 64} e^8 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 15 \cdot 35 \cdot 63}{4 \cdot 16 \cdot 36 \cdot 64 \cdot 100} e^{10} - \text{usw.}\right) = 20000000$$

deren Gesetz offenbar ist, gefunden werden kann, oder mittels der ihr gleichgeltenden

$$a = \frac{20000000}{\pi} \left(1 + \frac{1}{4} ee + \frac{7}{64} e^4 + \frac{15}{256} e^6 + \frac{579}{16384} e^8 + \frac{1515}{65536} e^{10} + \text{usw.}\right.$$

Man findet so, mit jenem Werte von e,

$$a = 6376851{,}447$$
$$\log a = 6{,}8046062999$$

Es versteht sich, daß bei Anwendung unserer Tafel auch r erst in derselben Einheit ausgedrückt sein muß; um dies zu erreichen, wird man (gemäß dem von [**331**] *Bessel* in Toisen angegebenen Werte von a, Art. 5), wenn r ursprünglich in Toisen ausgedrückt war, zu dem Logarithmen hinzuzusetzen haben

$$0{,}2897827662$$

oder, wenn r ursprünglich in französischen gesetzlichen Metern gegeben war, wird von dem Logarithmen subtrahiert werden müssen

$$0{,}0000371638.$$

Die Glieder, welche die Faktoren (3), (4) usw. enthalten, können als Korrektionen betrachtet werden, durch welche die genäherten Logarithmen $\log \tau$, $\log \beta$, $\log \lambda$ in die berichtigten $\log t$, $\log b$, $\log l$ verwandelt werden. Diese Korrektionen sind in allen Fällen, für welche unsere Methode angewandt werden soll, nur sehr kleine Dezimalbrüche, und da jene Logarithmen in der Regel siebenzifferig gerechnet werden, so ist es bequem, auch jene Korrektionen sofort in Einheiten der siebenten

Dezimale ausgedrückt zu erhalten. Dies geschieht, indem man den Koeffizienten (3), (4) usw. anstatt der im vorhergehenden Art. angegebenen Werte zehnmillionenmal größere beilegt, oder ihre Logarithmen um sieben Einheiten vergrößert. Auf diese Weise sind sie in unserer Tafel angesetzt, und so wird denn auch

$$\log\ (7) = 4{,}62872\ (-10)$$
$$\log 3\,(7) = 5{,}10584\ (-10)$$

gesetzt werden. Übrigens sind auch so noch (3), (4), (5), (6), ebenso wie (1) und (2) echte Brüche, oder ihre Logarithmen an sich negativ: in der Tafel stehen sie aber nach üblicher Art, indem sämtlichen Logarithmen 10 Einheiten geborgt sind.

35.

Von der Benutzung unserer Formeln zur Auflösung der zu Anfang dieser Abhandlung aufgestellten Aufgabe gilt nun alles, was oben (Art. 20) in Beziehung auf dieselbe Aufgabe für die Kugelfläche gesagt ist, fast unverändert und unter geringen Modifikationen. Bezeichnet man die wirklich gegebenen Größen, nämlich die Breite und das Azimuth an dem ersten Orte, mit B° und T°, so wird man zuerst, von einem genäherten Werte von T ausgehend (wofür man in [**332**] Ermangelung aller andern Kenntnis T° annehmen mag), die vier Formeln berechnen

$$\beta = (2)\, r \cos T$$
$$B = B^{\circ} - \tfrac{1}{2}\beta$$
$$\tau = (1)\, r \sin T \operatorname{tang} B$$
$$T = T^{\circ} - \tfrac{1}{2}\tau$$

und zwar wird man den Wert von (2), der aus der Tafel mit dem Argument B entnommen werden sollte, das erstemal mit dem Argument B° entnehmen können, wenn man nicht durch Schätzung einen schon mehr genäherten Wert von B antizipieren zu können glaubt; den Wert von (1) nimmt man aus der Tafel mit dem eben gefundenen Werte von B.

Dieselbe Rechnung wiederholt man mit dem durch die vierte Gleichung gefundenen Werte von T, indem man (1) und (2) mit dem schon verbesserten B aus der Tafel entlehnt; und so macht man nötigenfalls eine abermalige Wiederholung, bis

das Resultat zum Stehen kommt, d. i. bis man durch die vierte Formel denselben Wert von T wiedererhält, von dem man zuletzt ausgegangen war. Zu allen diesen Rechnungen wird man nur fünfzifferige Logarithmen verwenden.

Bei den weiteren Wiederholungen wird man die Rechnung mit siebenzifferigen Logarithmen führen, die logarithmischen Korrektionen von $\log \tau$ und $\log \beta$ mit zuziehen, und $B = B^0 - \frac{1}{2} b$, $T = T^0 - \frac{1}{2} t$ setzen. Erst wenn auch diese Rechnung stehende Resultate gegeben hat, wird man auch λ und l nach den am Schluß des 33. Art. gegebenen Formeln berechnen. Zur Erläuterung dieser Vorschriften mögen hier die Hauptmomente eines Beispiels stehen, welches ebenso wie oben Art. 20 bei der sphärischen Rechnung von der Dreiecksseite Brocken-Inselsberg hergenommen ist.

Bei der ellipsoidischen Rechnung ist die Breite des Brockens

$$= 51^0\ 48'\ \ 1''\ 9294 = B^0$$

das Azimuth der Reite Brocken-Inselsberg

$$= \ \ 5^0\ 42'\ 21''\ 7699 = T^0$$

Der Logarithmus der Dreiecksseite in Toisen ist bis auf die siebente Dezimale derselbe, wie in der konformen Darstellung auf der Kugelfläche, nämlich $= 4{,}7353929$, folglich in der unserer Hilfstafel zugrunde liegenden Einheit $\log r = 5{,}0251757$.

[**333**] Wenn man, behufs der ersten Annäherung, $T = 5^0 42' 22''$, und aus der Tafel mit Argument $51^0 48'$ den Logarithmen von $(2) = 8{,}51004$ setzt, so findet sich $\beta = 3412''$, $B = 51^0 19' 36''$; und, wenn man hiermit $\log (1) = 8{,}50893$ setzt, $\tau = 425$ und $T = 5^0 38' 49''$. Eine neue Rechnung mit diesem Werte, wobei man (mit dem vorher gefundenen Werte von B) $\log (2) = 8{,}51007$ setzt, ergibt

$$\beta = 3413'', \quad B = 51^0 19' 35'', \quad \tau = 420''\ 5, \quad T = 5^0 38' 51''\ 5$$

Mit dem gefundenen Werte von B entlehnt man aus der Tafel

$$\begin{aligned} \log (1) &= 8{,}5089337 \\ \log (2) &= 8{,}5100716 \\ \log (3) &= 1{,}94876 \\ \log (4) &= 3{,}32553 \\ \log (5) &= 4{,}92770 \\ \log (6) &= 4{,}61132 \end{aligned}$$

Mit $T = 5^\circ 38' 51'' 5$ findet sich zuvörderst $\log \beta = 3{,}5331341$, oder $\beta = 3412'' 983$, und indem man hier noch einmal β anstatt b anwendet, $B = 51^\circ 19' 35'' 4379$. Hiermit ferner $\log \tau = 2{,}6238475$. Hiernächst findet man, in Einheiten der siebenten Dezimale

$$\begin{aligned}
(3)\, rr &= 99{,}80 \\
(4)\, \beta\beta &= 2{,}46 \\
(5)\, \beta\beta &= 98{,}62 \\
(6)\, \beta\beta &= 47{,}60 \\
3\,(7)\, \tau\tau &= 2{,}26 \\
(7)\, \tau\tau &= 0{,}75
\end{aligned}$$

und hiermit die logarithmischen Korrektionen

$$\begin{aligned}
\text{von} \quad \log \beta \; &. \; . \; . \; . \; . \; . \; + 3 \\
\log \tau \; &. \; . \; . \; . \; . \; . \; + 103 \\
\log \lambda \; &. \; . \; . \; . \; . \; . \; - 47
\end{aligned}$$

Man hätte diese Rechnung auch schon mit den früheren Werten von $\log \beta$ und $\log \tau$ machen können, ohne ein anderes Resultat zu erhalten; es würde dann sogleich mit $\log b = 3{,}5331344$ der Wert von $b = 3412'' 985$, und $B = 51^\circ 19' 35'' 4369$ [**334**] sich ergeben haben. Auf $\log \tau$ hat dies keinen ändernden Einfluß; wir haben mithin $\log t = 2{,}6238578$, $t = 420'' 5889$, $T = 5^\circ 38' 51'' 4755$. Wollte man mit diesem Werte von T die Rechnung noch einmal durchgehen, so würde B keine Änderung erleiden; für $\log \tau$ würde man finden 2,6238470, also $\log t = 2{,}6238573$, $t = 420'' 5884$, mithin $T = 5^\circ 38' 51'' 4757$. Eine nochmalige Rechnung mit diesem Werte würde gar keine Änderung hervorbringen, und offenbar hätte man auch bei dem vorhergehenden Resultate schon stehen bleiben können, da bei der Anwendung siebenzifferiger Logarithmen die vierte Dezimale der Sekunde um eine oder einige Einheiten schwankend bleiben kann. Das Endresultat ist also

$$\begin{aligned}
&\text{Breite von Inselsberg} = B^\circ - b = 50^\circ 51' 8'' 9444 \\
&\text{Azimuth der Seite Inselsberg-Brocken} = 180^\circ + T^\circ - t \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 185^\circ 35' 21'' 1815.
\end{aligned}$$

Endlich findet sich für den Längenunterschied

$$\log \lambda = 2{,}7313519$$
$$\log l = 2{,}7313472$$
$$l = 538''\,7002 = 0^{\circ}\,8'\,58''\,7002$$

Es ist übrigens nicht nötig, hier die am Schluß des Art. 20 gemachten Bemerkungen zu wiederholen, welche auch hier ihre vollkommene Geltung behalten.

[335—340] Tafel.

B	log (1)	log (2)	log (3)	log (4)	log (5)	log (6)
51° 0′	8.5089417	8.5100959	1.94879	3.32421	4.92773	4.61145
10	8.5089376	8.5100835	1.94877	3.32488	4.92771	4.61138
20	8.5089335	8.5100711	1.94876	3.32556	4.92770	4.61132
30	8.5089293	8.5100587	1.94874	3.32623	4.92768	4.61125
40	8.5089252	8.5100463	1.94872	3.32691	4.92766	4.61118
50	8.5089211	8.5100340	1.94871	3.32757	4.92765	4.61111
52 0	8.5089170	8.5100217	1.94869	3.32824	4.92763	4.61104
10	8.5089129	8.5100094	1.94868	3.32891	4.92761	4.61097
20	8.5089088	8.5099971	1.94866	3.32957	4.92760	4.61090
30	8.5089047	8.5099848	1.94864	3.33024	4.92758	4.61083
40	8.5089006	8.5099725	1.94863	3.33090	4.92756	4.61076
50	8.5088965	8.5099603	1.94861	3.33155	4.92755	4.61070
53 0	8.5088925	8.5099481	1.94859	3.33221	4.92753	4.61063
10	8.5088884	8.5099359	1.94858	3.33286	4.92751	4.61056
20	8.5088843	8.5099237	1.94856	3.33352	4.92750	4.61049
30	8.5088803	8.5089115	1.94854	3.33417	4.92748	4.61042
40	8.5088762	8.5098994	1.94853	3.33481	4.92746	4.61035
50	8.5088722	8.5098873	1.94851	3.33546	4.92745	4.61029
54 0	8.5088682	8.5098752	1.94850	3.33611	4.92743	4.61022

Anzeigen

über die beiden Abhandlungen

von

Carl Friedrich Gauß.

Erste Abhandlung. Göttingische gelehrte Anzeigen. 1843. Nov. 6. Überreicht der königlichen Sozietät am 23. Oktober.

[347] Bei dem trigonometrischen Teile der von dem Verf. in den Jahren 1821—1827 ausgeführten Gradmessung und bei den späteren damit zusammenhängenden und über das ganze Königreich Hannover sich erstreckenden trigonometrischen Vermessungen sind, sowohl in Beziehung auf die Art, wie die Messungen angestellt wurden, als noch mehr in Beziehung auf ihre nachherige mathematische Behandlung und ihre Verarbeitung zu Resultaten, Wege eingeschlagen, die von den sonst betretenen abweichen. Manches von diesen dem Hofrat *Gauß* eigentümlichen Methoden ist zwar bereits zur Öffentlichkeit gebracht, teils von ihm selbst in verschiedenen vorlängst erschienenen Aufsätzen, teils durch andere, welche nach mündlichen oder brieflichen Mitteilungen bei ihren eigenen trigonometrischen Messungen Anwendungen davon gemacht hatten. Allein der erheblichere Teil jener Methoden, diejenigen, welche sich am meisten von den sonst gebräuchlichen unterscheiden, und deren Verständnis eine tiefere mathematische Begründung erfordert, ist bisher noch nicht dargestellt. Des Verf. früheren Vorsatz, nach völliger Beendigung der Messungen diese selbst nebst allen von ihm angewandten Verfahrungsarten in einem besonderen Werke darzulegen, haben Umstände, deren Auseinandersetzung nicht hierher gehört, zurzeit noch prokrastiniert, und er hat deshalb das Auskunftsmittel gewählt, das im theoretischen [348] Teile ihm eigen-

tümliche in einer Reihe von einzelnen Abhandlungen bekannt zu machen. Es wird dadurch noch der Vorteil gewonnen, daß auf diese Art manche ein selbständiges Interesse darbietende Untersuchungen, welche mit den übrigen in enger Verwandtschaft stehen, sie vorbereiten und in ein helleres Licht setzen, auch wenn von denselben bei den in Rede stehenden Messungen selbst keine unmittelbare Anwendung gemacht ist, doch mit größerer Ausführlichkeit entwickelt werden können, als bei dem früheren Plane mit einer gleichmäßigen Behandlung der Gegenstände verträglich sein würde.

In die Klasse solcher Untersuchungen gehört namentlich diejenige, welche den Gegenstand der vorliegenden *ersten* Abhandlung ausmacht. Den Hauptinhalt derselben bildet eine Methode, nach welcher ein System von Dreiecken auf der Oberfläche eines Umdrehungsellipsoids, ohne etwas von der Schärfe aufzuopfern, so berechnet werden kann, als wenn es auf einer Kugelfläche sich befände. Diese Methode findet ihre Grundlage in der Auflösung eines viel umfassenderen Problems, welche der Verf. in einer 1822 geschriebenen und von Herrn Konferenzrat *Schumacher* im dritten Heft der Astronomischen Abhandlungen zum Druck beförderten Denkschrift gegeben hat, unter dem Titel: *Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Teile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird.* Der Verf. hat diejenigen Darstellungen einer Fläche auf einer andern, welche der angegebenen Bedingung Genüge leisten, zur Abkürzung des Vortrags, und weil sie überhaupt als eine sehr reiche Hilfsquelle für die Rechnungen der höheren Geodäsie eine besondere Benennung wohl verdienen, mit dem Namen *konforme Darstellungen* belegt, welches sonst vage Beiwort also hier immer in einer präzis bestimmten Bedeutung zu verstehen ist. *Mercator*s und die stereographische Projektion sind bekannte Beispiele konformer Darstellungen der Kugelfläche auf der Ebene.

Es ist kaum nötig, zu bemerken, daß die Ähnlichkeit in den kleinsten (unendlich kleinen) Teilen wohl unterschieden werden muß von der Ähnlichkeit in allen endlichen Teilen. Die letztere ist nur in speziellen Fällen zu erreichen möglich, wenn nämlich die erste Fläche entweder auf die zweite selbst oder auf eine ihr ähnliche abgewickelt werden kann; im allgemeinen aber, wo die Konformität *nur* in der Ähnlichkeit der kleinsten Teile besteht, ist das *Vergrößerungsverhältnis*,

d. i. das Verhältnis, in welchem die auf beiden Flächen ein-
[349] ander entsprechenden unendlich kleinen Linien zueinander stehen, eine nach Verschiedenheit der Stellen in den Flächen veränderliche Zahl. In *Mercator*s Projektion z. B. ist die Vergrößerungszahl desto größer, je entfernter vom Äquator, in der stereographischen Projektion, je entfernter vom Augenpunkte die betreffenden Stellen sind.

Von jeder gegebenen Fläche sind auf einer andern gegebenen Fläche unendlich viele konforme Darstellungen möglich; die allgemeine Auflösung umfaßt sie sämtlich, indem sie eine arbiträre Funktion enthält, welche nach Gefallen oder den jedesmaligen Zwecken gemäß bestimmt werden kann. Wenn nur ein Teil der einen Fläche übertragen werden soll, ist es in der Regel am vorteilhaftesten, eine solche konforme Darstellung zu wählen, bei welcher innerhalb der darzustellenden Fläche die Ungleichheiten des Vergrößerungsverhältnisses in den möglich engsten Grenzen bleiben.

Die Aufgabe der konformen Übertragung der Ellipsoidfläche auf die Kugelfläche ist in der angeführten Schrift unter den Beispielen besonders abgehandelt, und der allgemeinen Auflösung sind zwei spezielle beigefügt, wovon die eine vorzugsweise für die Darstellung der ganzen Ellipsoidfläche geeignet, die andere hingegen weit zweckmäßiger ist, wenn (wie es immer bei bestimmten Anwendungen auf die Geodäsie der Fall ist) nur ein mäßiger Teil der als ellipsoidisch betrachteten Erdfläche auf eine Kugelfläche konform übertragen werden soll. In wie hohem Grade diese zweite Darstellungsart der oben ausgesprochenen Forderung genügt, ist aus einem a. a. O. aufgestellten Beispiele abzunehmen, wo die Veränderlichkeit des Vergrößerungsverhältnisses innerhalb einer Zone von fünf Breitengraden nur $\frac{1}{530000}$ beträgt. Es sind ferner daselbst die Hauptzüge der Methode, wie überhaupt eine konforme Übertragung zur Berechnung eines Dreieckssystems benutzt werden kann, im allgemeinen angedeutet, die eigentliche Ausführung aber und die Anwendung auf diese bestimmte Übertragungsart einer späteren Bearbeitung vorbehalten.

Die gegenwärtige Abhandlung ist nun dazu bestimmt, diese Verpflichtung auszulösen, obwohl nicht ganz in derselben Art, wie sie eingegangen war: es wird nämlich darin nicht die eben erwähnte, sondern eine davon verschiedene dritte spezielle Auflösung der Aufgabe zugrunde gelegt, durch welche der beabsichtigte Zweck noch vollkommener erreicht wird. In

diesen Blättern müssen wir uns damit begnügen, nur im allgemeinen einen Begriff davon zu geben.

[350] Ein System von Dreiecken auf dem Sphäroid, dessen Seiten sogenannte geodätische Linien sind, wird bei einer konformen Übertragung auf die Kugelfläche durch ein analoges Dreieckssystem dargestellt, worin die Winkel, wie schon aus dem Begriffe der Konformität von selbst folgt, den entsprechenden Winkeln des ersteren Systems *genau* gleich sind, während die Seiten zwar nicht in mathematischer Schärfe Bögen von größten Kreisen werden, aber doch davon nur sehr wenig abweichen. Kann man nun bewirken, daß diese Abweichungen in dem ganzen Umfange des Systems nach Maßgabe der in die Berechnung zu legenden Genauigkeit wie ganz verschwindend betrachtet werden dürfen, so ist klar, daß nachdem eine Seite des sphäroidischen Systems auf die Kugelfläche übertragen ist, man ohne weiteres das ganze System wie eines von gewöhnlichen sphärischen Dreiecken berechnen darf, und nur am Schluß von den Längen und Breiten auf der Kugelfläche auf die Längen und Breiten auf dem Sphäroid zurückzugehen braucht, insofern man die Endresultate der Messung in dieser Form verlangt. Dieser Übergang wird entweder mittels der Formeln, welche die gewählte Übertragungsart darbietet, geschehen können, oder mittels einer im voraus berechneten Hilfstafel. In den Fällen hingegen, wo jene Abweichung merklich genug wird, um eine Berücksichtigung zu verdienen, wird jeder aus den Messungen hervorgegangene Winkel vor der scharfen Berechnung auf der Kugel erst einer kleinen Reduktion bedürfen, und die Arbeit wird dadurch nur unbedeutend vergrößert werden, wenn die Zahlwerte der Reduktionen sich mit Leichtigkeit berechnen lassen.

Die in der vorliegenden Abhandlung entwickelte Übertragungsart ist so beschaffen, daß die Abweichung derjenigen Kurve, durch welche ein geodätischer Bogen auf der Kugelfläche dargestellt wird, von Größtenkreisbogen zwischen denselben Endpunkten, immer wie ganz verschwindend zu betrachten ist in der Nähe eines bestimmten Parallelkreises (Normalparallelkreises), welchen man nach Gefallen wählen kann, und, wenn man die ganze Rechnungsanlage von vorn her für ein bestimmtes Dreieckssystem selbst ausführt, am schicklichsten ungefähr durch die Mitte des ganzen Systems legen mag. Je weiter man sich von diesem Normalparallelkreise nach Norden oder Süden entfernt, desto größer können

jene Abweichungen werden, die übrigens daneben zugleich von der Größe der Dreiecksseiten und von ihrer Lage gegen den Meridian abhängig sind; immer aber bleiben sie, selbst bei sehr beträchtlicher Entfernung von dem Normalparallelkreise, [351] noch so geringfügig, daß man ihre Berücksichtigung bei den meisten Messungen kaum der wenn auch leichten Mühe wert halten wird.

In der Abhandlung ist die Theorie aller dieser und anderer damit zusammenhängenden Rechnungen vollständig entwickelt, an einer durchgehenden Musterrechnung erläutert und mit einer Hilfstafel begleitet, die allerdings zunächst für diejenige Zone bestimmt ist, in welcher das Hannoversche Dreieckssystem liegt, aber auch ohne weiteres für Messungen benutzt werden kann, die diese Zone weit überschreiten; sie erstreckt sich nämlich über eine Zone von zwölf Breitengraden, in deren Mitte der gewählte Normalparallelkreis von 52° 40′ Breite liegt. Diese Tafel ist mit einer Schärfe berechnet, die ausreicht, selbst wenn ein Dreieckssystem mit zehnzifferigen Logarithmen berechnet werden soll, also mit einer viel größeren Schärfe, als man in den meisten Fällen beibehalten wird: indessen schien die kleine Raumersparnis, die durch Weglassung von ein paar Dezimalen gewonnen sein würde, zu unerheblich, um beim Abdruck etwas davon zu unterdrücken.

Merklich und unmerklich sind bei Rechnungsoperationen relative Begriffe, und es ist also wohl der Mühe wert, sie nach ein paar aus der Abhandlung entlehnten Beispielen auf ein bestimmtes Maß zurückzuführen.

In dem Hannoverschen Dreieckssysteme ist das größte Dreieck, welches auch zugleich am weitesten von dem Normalparallelkreise abliegt, dasjenige, welches zwischen den Punkten Brocken, Hohehagen, Inselsberg gebildet wird. In diesem kommen daher auch die größten Werte der Richtungsreduktionen vor, und zwar bei der Seite Hohehagen-Inselsberg, wo die Reduktion des Azimuths an dem ersteren Endpunkte $-0''00332$, am andern $+0''00428$ beträgt. In dem ganzen Systeme kommen nur noch zwei andere Dreiecksseiten vor, wo die Reduktionen $0''001$ übersteigen, bei allen übrigen bleiben sie unter dieser Größe.

Das größte Hauptdreieck der trigonometrischen Vermessungen der Schweiz ist das zwischen den Punkten Chasseral, Suchet, Berra enthaltene; es berührt eben die südliche Grenze, bis zu welcher die Hilfstafel sich erstreckt, so daß die Rich-

tungsreduktionen sich noch mittels derselben berechnen lassen. Die größte Reduktion ist die, welche das Azimuth von Chasseral in Suchet trifft, und beträgt $+ 0''06221$.

Es ist hieraus ersichtlich, daß in der ganzen Zone, worin das Hannoversche Dreieckssystem liegt, die Reduktion ganz wegfällt, wenn die Rechnung auf [352] Hundertteile der Sekunde geführt wird, und daß man sogar in der ganzen Zone von zwölf Graden, welche die Hilfstafel umfaßt, die Berücksichtigung der Reduktionen unterlassen kann, wenn man in der Rechnung nur Zehntel der Sekunde notiert.

Zweite Abhandlung. Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1846. September 28. Überreicht am 1. September.

In der ersten Abhandlung war eine neue Methode, die geodätischen Messungen zu behandeln, vorgetragen, deren Haupteigentümlichkeit darin besteht, daß die meisten Rechnungen ganz oder fast ganz ebenso geführt werden, als befände sich das Dreieckssystem nicht auf einer sphäroidischen, sondern auf einer Kugelfläche, und zwar ohne allen Abbruch für die äußerste Schärfe der Resultate. Eine der Hauptaufgaben im Gebiete der geodätischen Rechnungen, nämlich aus der Größe einer als geodätische Linie auftretenden Dreiecksseite, der Breite des einen Endpunktes, und dem Azimuthe, unter welchem daselbst der andere Endpunkt erscheint, abzuleiten die Breite dieses andern Endpunktes, das dortige Azimuth der Dreiecksseite, und den Längenunterschied der beiden Punkte, reduziert sich bei jener Behandlungsweise auf die bloße Auflösung eines sphärischen Dreiecks. Ein paar Seiten sind gleichwohl dieser Aufgabe in der erwähnten Abhandlung aus dem Grunde gewidmet, weil die gewöhnlichen Formeln der sphärischen Trigonometrie, wenn man nicht zu mehrzifferigen Logarithmen greifen will, nicht immer ausreichen würden, den Resultaten eine ganz genügende Schärfe zu geben, und deshalb gewisse Umformungen jener Formeln notwendig werden. Außerdem aber verstattet der Umstand, daß die Seiten solcher Dreiecke, deren Winkel wirklich gemessen werden, immer in Vergleich zu den Dimensionen des ganzen [353] Erdkörpers nur kleine Größen sein können, solche Umwandlungen der Formeln, welche die Geschmeidigkeit und Bequemlichkeit derselben sehr vergrößern; ja, wenn gleich diese Umwandlungen

eigentlich nur Näherungsformeln sind, so können sie doch nicht bloß ebenso große, sondern selbst größere Schärfe gewähren, als die absolut strengen Formeln, was man nicht paradox finden wird, wenn man erwägt, daß die letzteren doch immer mittels der trigonometrischen Tafeln zur Ausübung kommen müssen, deren Schärfe keine absolute, sondern durch die Anzahl der Dezimalziffern begrenzt ist. Unter den verschiedenen in der ersten Abhandlung mitgeteilten für den angedeuteten Zweck bestimmten Formeln zeichnet sich nun besonders die am Schluß derselben aufgeführte Kombination dadurch aus, daß sie den Zusammenhang jener sechs Quantitäten in der zur Rechnung möglich bequemsten Gestalt aufstellt und eine Schärfe gewährt, die auch bei den größten wirklich meßbaren Dreiecken überflüssig ausreicht. Es mußte dadurch das Verlangen nach dem Besitz analoger, unmittelbar für die Ellipsoidfläche geltender Formeln erweckt werden, und die Entwicklung derselben bildet den Hauptinhalt der gegenwärtigen *zweiten* Abhandlung.

Während die Auffindung der erwähnten für die Kugelfläche gültigen Formeln auf ganz elementarischen Sätzen beruhte, erfordert hingegen die Ermittlung ihrer Gegenstücke auf der Ellipsoidfläche eine Reihe ziemlich verwickelter Operationen, und es muß daher ohne Zweifel angenehm sein, wenn mehr als ein Weg, zu demselben Ziele zu gelangen, nachgewiesen wird. Der Verf., welcher alle diese Untersuchungen schon vor mehr als dreißig Jahren zu seinem Privatgebrauch durchgeführt und nur bisher zur Veröffentlichung noch keine besondere Veranlassung gefunden hatte, teilt nun in der vorliegenden Abhandlung *zwei* unter sich durchaus verschiedene, aber zuletzt zu ganz gleichen Resultaten führende Ableitungsarten mit, von denen eine in der Theorie der konformen Übertragung der Ellipsoidfläche auf die Kugelfläche wurzelt. In dieser Beziehung schließt sich die zweite Abhandlung auch an die erste an, obwohl übrigens beide insofern als gänzlich unabhängig voneinander zu betrachten sind, als man freie Wahl behält, die geodätischen Rechnungen entweder bloß nach der in der ersten Abhandlung oder bloß nach der in der zweiten Abhandlung gelehrten Methode zu führen.

Die Aufgabe, von der geographischen Lage eines Punktes auf der Sphäroidfläche zu der eines andern Punktes überzugehen, der mit jenem durch eine [**354**] geodätische Linie von bekannter Größe und Richtung verbunden ist, ist schon seit

langer Zeit vielfältig behandelt, und um unter verschiedenen Methoden zu seinem Gebrauch passend zu wählen, muß man allerdings mancherlei Umstände berücksichtigen. Es ist z. B. erheblich dabei, ob man die Aufgabe nur für einen oder einige wenige konkrete Fälle aufzulösen hat oder für sehr viele. In der letzteren Voraussetzung wird es von Wichtigkeit sein, daß die Methode jedesmal die möglich größte Bequemlichkeit und Übersichtlichkeit der Definitivrechnung gewähre, wenn auch die Anwendbarkeit der Methode vielleicht erst gewisse allgemeine Vorbereitungsarbeiten erfordern sollte. Ebenso wichtig ist der Umstand, ob man die Resultate einer ausgedehnten trigonometrischen Vermessung alle in der Form von geographischer Länge und Breite, und zwar ausschließlich *nur* in *dieser* Form verlange, oder ob daneben die Resultate für die Lage sämtlicher Punkte auch noch in einer andern Form, z. B. der der rechtwinkligen Koordinaten, aufgestellt werden; im letzteren Fall wird es weniger notwendig sein, die geographische Lage mit der alleräußersten Schärfe anzugeben.

Die von *Dusejour*, *Legendre*, *Delambre* u. a. gegebenen Formeln berücksichtigen nur die erste Potenz der Abplattung, was allerdings in praktischer Hinsicht von nicht großer Erheblichkeit sein wird, da einmal die Abplattung des Erdsphäroids nur ein kleiner Bruch ist. Es ist daher auch nicht die Meinung, es als einen in praktischer Beziehung wichtigen Vorzug geltend zu machen, daß die neue Methode von der Kleinheit der Abplattung ganz unabhängig ist. Die besseren unter jenen Methoden mögen allerdings eine in den meisten Fällen zureichende Schärfe gewähren, obwohl man einen in mathematischer Beziehung genügenden Nachweis dafür vermißt. Dagegen darf man behaupten, daß die neue Methode, wenn die nötigen Erfordernisse bereit sind, eine bequemere und nach ihrem wesentlichen Inhalt in einem bedeutend kleineren Raum zu konzentrierende Rechnung ergibt. *Bessels* im Jahre 1825 gegebene Auflösung trägt das Gepräge einer großen mathematischen Vollendung und ist auch gar nicht abhängig von der Voraussetzung, daß die Entfernung der beiden Punkte voneinander im Vergleich zu den Dimensionen des ganzen Erdsphäroids klein sei. In theoretischer Rücksicht ist dies ohne Zweifel ein Vorzug dieser Methode; bei Beurteilung des praktischen Wertes hat man aber folgende Umstände in Betracht zu ziehen. Die Methode macht gar keinen Unterschied zwischen dem Fall großer und dem Fall kleinerer Entfernungen,

sondern erfordert für alle Fälle gleich lange Rechnungen, [355] verzichtet also auf die Vorteile, die man in dem letzteren in der Ausübung ungleich häufiger vorkommenden Falle bei dem Gebrauch anderer Methoden von diesem Umstande ziehen kann. Der nützliche Gebrauch der *Bessel*schen Methode wird sich also auf den Fall beschränken, wo die beiden Punkte nicht unmittelbar durch die Seite eines wirklich gemessenen Dreiecks zusammenhängen, sondern wo der Zusammenhang durch eine größere Reihe von Dreiecken vermittelt ist. Allein dann muß man mit Recht fragen, wie denn die *Data* zu der Aufgabe erlangt werden sollen, nämlich die wirkliche Länge der die beiden Punkte verbindenden geodätischen Linie, und der Winkel, welchen sie an dem einen Endpunkte mit dem Meridian macht? Diese Bestimmung durch eine bloß *sphärische* Berechnung der Übergangsdreiecke zu machen (wie *Bessel* bei der wenig ausgedehnten preußischen Gradmessung getan hat), würde bei einer viel größeren Entfernung nicht mehr zulässig bleiben: soll aber dieser Übergang sphäroidisch gerechnet werden, so wird dies schon für sich allein ebenso viel Arbeit erfordern, als wenn man gleich von jedem folgenden Punkt Breite, Länge und das rückwärts geltende Azimuth bestimmt. Übrigens gelten diese Bemerkungen auch von *Ivory*s Auflösungsmethode, die mit der von *Bessel* viele Ähnlichkeit hat, aber das eigentlich praktische Bedürfnis wenig berücksichtigt.

Über die in der vorliegenden Abhandlung gegebene Methode möge hier noch folgendes bemerkt werden.

Die Formeln geben unmittelbar die *Differenzen* zwischen den beiden Breiten und den beiden Azimuthen, so wie den Längenunterschied, und eben hierauf beruht, bei der Kleinheit dieser Differenzen (insofern rücksichtlich der Azimuthe das eine von der Südseite, das andere von der Nordseite des Meridians gezählt wird) die Schärfe der Rechnung, ohne mehrstellige Logarithmen zu erfordern. Die Symmetrie und Einfachheit der Formeln hingegen beruht darauf, daß sie zunächst nicht von der Breite und dem Azimuthe an dem einen Endpunkte, sondern von dem Mittel der beiden Breiten und dem Mittel der beiden Azimuthe abhängen. Es folgt daraus, daß die Formeln, zur Auflösung der Aufgabe, wie sie oben ausgesprochen ist, nur vermöge eines indirekten Verfahrens oder einer sukzessiven Annäherung benutzt werden können. Geübte und mit den Hilfen des kleinen Mechanismus derartiger Operationen vertraute Rechner werden in diesem Umstande

kaum eine Unbequemlichkeit finden, zumal da man annehmen kann, daß fast immer zu der Zeit, wo die scharfe Ausführung der Rechnung [**356**] vorgenommen werden soll, sehr genäherte Werte der zu bestimmenden Größen schon vorliegen. Genau genommen haben übrigens auch alle andern Auflösungsarten des Problems, namentlich auch die *Bessel*sche, teilweise diesen Charakter indirekter Operationen. Der wesentlichste Umstand bleibt aber der, daß von den wiederholten Annäherungen nur die letzte, die den ganzen Kern der Rechnung vollständig enthält, aufbewahrt zu werden braucht, und daß diese eine Kürze und Übersichtlichkeit hat, wie keine andere Methode.

Die Formeln für die Auflösung der Aufgabe auf der Sphäroidfläche unterscheiden sich von denen für die Kugelfläche lediglich dadurch, daß gewisse Zwischengrößen, die bei diesen konstant sind, bei jenen von der Breite abhängig werden; diese lassen sich folglich in eine Hilfstafel bringen, deren Argument die Breite bildet. Steht eine solche Hilfstafel zu Gebote, so wird in jedem konkreten Falle die Rechnung auf der Sphäroidfläche ganz ebenso leicht, wie auf der Kugelfläche. Für die Zone von 51—54 Grad Breite, welche für das Hannoversche Dreieckssystem ausreicht, ist eine solche Hilfstafel am Schlusse der Abhandlung beigefügt, und zwar nach demjenigen Werte der Abplattung, welchen *Bessel* aus allen bisherigen Gradmessungen abgeleitet hat, und der auch schon in der ersten Abhandlung zugrunde gelegt war. Wer dieselbe Methode auf ein außerhalb dieser Zone liegendes Dreieckssystem anwenden wollte, würde damit anfangen müssen, jene Hilfstafel für seinen Zweck weiter auszudehnen, oder, falls er eine andere Abplattung zugrunde legen wollte, sich erst eine neue Hilfstafel zu konstruieren. Wo es die Bearbeitung eines großen Dreieckssystems gilt, kommt eine solche vorgängige Hilfsarbeit gar nicht in Betracht, und die darauf gewandte Mühe wird durch die Bequemlichkeit der Benutzung reichlich ersetzt. Für den Fall hingegen, wo man nur eine oder ein paar konkrete Auflösungen der in Rede stehenden Aufgabe suchen soll, hat die Methode nicht vorzugsweise bestimmt sein sollen.

Anmerkungen.

1) *Zu S. 7.* Art. 3. Die Gleichung (8) kann durch eine einfache ersetzt werden.

Aus (6) folgt: Für das Nullwerden des zweiten Differentialquotienten vom m genügt es, wenn

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,w}(\alpha \cos U - \cos w) = -\alpha \sin U \frac{\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,w} + \sin w = 0,$$

also

$$\frac{\alpha^2 \cos Q^2 (1 - e^2)}{1 - e^2 \sin P^2} = \cos P^2, \quad \alpha^2 \cos Q^2 = \alpha^2 - \sin P^2.$$

2) *Zu S. 9.* Art. 4. Es ist

$$\alpha^2 = 1 + \operatorname{tang} \varphi^2 \cos P^4 = 1 + \operatorname{tang} \zeta^2 = \frac{1}{\cos \zeta^2}$$

$$\cos Q^2 = 1 - \cos \zeta^2 \sin P^2 = \sin \zeta^2 + \cos \zeta^2 \cos P^2$$

$$= \sin \zeta^2 \sin P^2 + \cos P^2 = (1 + \sin \zeta^2 \operatorname{tang} P^2) \cos P^2,$$

also $\quad \cos P = \cos \eta \cos Q$ für $\operatorname{tang} \eta = \sin \zeta \operatorname{tang} P$.

Aus $\cos P^2 + \sin P^2 = \cos P^2 + \dfrac{\sin Q^2}{\cos \zeta^2}$ folgt

$$1 = \cos \eta^2 \cos Q^2 + \sin Q^2 (1 + \operatorname{tang} \zeta^2),$$

also $\quad \sin \eta = \operatorname{tang} \zeta \operatorname{tang} Q.$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(P - Q)^2 = \frac{1 - \cos (P - Q)}{1 + \cos (P - Q)}.$$

$$\cos (P - Q) = \frac{\cos P^2}{\cos \eta} + \sin P^2 \cos \zeta = \frac{1 + \operatorname{tang} P^2 \cos \eta \cos \zeta}{(1 + \operatorname{tang} P^2) \cos \eta}.$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(P-Q)^2 = \frac{\sin\eta^2(1-\cos\zeta)-\sin\zeta^2\cos\eta\,(1-\cos\eta)}{\sin\eta^2(1+\cos\zeta)+\sin\zeta^2\cos\eta\,(1+\cos\eta)}$$

$$= \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\eta^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\zeta^2\,\frac{\cos\frac{1}{2}\eta^2-\cos\frac{1}{2}\zeta^2\cos\eta}{\sin\frac{1}{2}\eta^2+\sin\frac{1}{2}\zeta^2\cos\eta} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\eta^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\eta^2.$$

$$\sin(2\zeta-\varphi) = 2\operatorname{tang}\zeta\cos\zeta^2\cos\varphi-(2\cos\zeta^2-1)\,e$$

$$\operatorname{tang}\zeta = \operatorname{tang}\varphi\cos P^2$$

$$\sin(2\zeta-\varphi) = e-2\,e\cos\zeta^2\sin P^2 = e\cos 2\,Q.$$

Bequemer wird die Rechnung durch Reihenentwicklung. Es ist

$$\sin(P-Q) = \sin P\cos Q-\cos P\sin Q$$

$$= \frac{\sin P\sqrt{\alpha^2-\sin P^2}-\sin P\cos P}{\alpha}.$$

Wird $\dfrac{e^2}{1-e^2} = \delta$, $s = \sin P$, $c = \cos P$ gesetzt,

so ist

$$\alpha^2-\sin P^2 = c^2(1+\delta\,c^2),\quad \alpha = (1+\delta\,c^4)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sin(P-Q) = sc\left((1+\delta\,c^2)^{\frac{1}{2}}-1\right)(1+\delta\,c^4)^{-\frac{1}{2}}$$

$$(1+\delta\,c^2)^{\frac{1}{2}} = 1+\tfrac{1}{2}\delta\,c^2-\tfrac{1}{8}\delta^2c^4+\tfrac{1}{16}\delta^3c^6-\cdots$$

$$(1+\delta\,c^4)^{-\frac{1}{2}} = 1-\tfrac{1}{2}\delta\,c^4+\tfrac{3}{8}\delta^2c^8-\cdots$$

$$\sin(P-Q) = \tfrac{1}{4}\sin 2\,P\,c^2\,\delta\,\big(1-\tfrac{1}{4}c^2(1+2\,c^2)\,\delta$$
$$+\tfrac{1}{8}c^4(1+c^2+3\,c^4)\,\delta^2+\cdots\big),$$

$$P-Q = \tfrac{1}{4}\sin 2\,P\,c^2\,\delta\,\big(1-\tfrac{1}{4}c^2(1+2\,c^2)\,\delta$$
$$+\tfrac{1}{24}c^4(3+4\,c^2+8\,c^4)+\cdots\big),$$

wodurch Q durch P bestimmt ist.

Durch Umkehrung nach der Formel von *Lagrange* erhält man, $c = \cos Q$ gesetzt,

$$P = Q+\tfrac{1}{4}\sin 2\,Q\,c^2\,\delta\,\big(1-\tfrac{1}{4}c^2(7-6\,c^2)\,\delta$$
$$+\tfrac{1}{24}c^4(99-176\,c^2+80\,c^4)\,\delta^2+\cdots\big)$$

Ist P bestimmt, so erhält man, $c = \cos P$ gesetzt,

$$\alpha = 1+\tfrac{1}{2}c^4\,\delta-\tfrac{1}{8}c^8\,\delta^2+\tfrac{1}{16}c^{12}\,\delta^3-\cdots$$

Für $Q = 52^\circ\, 40'$ erhält man

	P	$\alpha - 1$ in Einheiten der 10. Stelle
Glied mit δ	$122''89504$	4530206
» »	$\delta^2 - 0,36393$	-1026
» »	$\delta^3 + 0,00141$	$+1$
$P - Q =$	$122''53252$	$\alpha - 1 = 0,0004529181$

übereinstimmend mit *Gauß*' 10stelliger Rechnung.

3) *Zu S. 14.* Art. 8. Die Formel für $\frac{d^2 w}{d U^2}$ hat bei *Gauß* ein falsches Vorzeichen, ebenso in der Formel für $\frac{d^3 w}{d U^3}$, der Faktor von $\alpha^2 (1 - e^2)^2$ ist durch $2 \cos U^2 + \sin U^2$ zu ersetzen (Original und Bd. IV).

4) *Zu S. 16.* Art. 3—10. Bezeichnet man mit R den Krümmungshalbmesser des Meridians, mit N die Länge der Normale eines durch w bestimmten Punktes bis zum Durchschnitt mit der Achse des Sphäroids, so ist die Vergrößerungszahl im

$$\text{Meridian } \frac{A\, d U}{R\, d w}, \quad \text{Parallel } \frac{\alpha A \sin U}{N \sin w},$$

also

$$\frac{A\, d U}{R\, d w} = \frac{\alpha A \sin U}{N \sin w} = m,$$

und

$$\frac{A\, d U}{d w} = R m;$$

wo

$$R = \frac{a (1 - e^2)}{(1 - e^2 \cos w^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad N = \frac{a}{(1 - e^2 \cos w^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Differentiiert man die drittletzte Gleichung wiederholt und setzt $w = w_0 = 90^\circ - P$, so erhält man

$$\frac{A\, d U}{d w} = R, \quad \frac{A\, d^2 U}{d w^2} = \frac{d R}{d w}, \quad \frac{A\, d^3 U}{d w^3} = \frac{d^2 R}{d w^2},$$

$$\frac{A\,\mathrm{d}^4 U}{\mathrm{d}\,w^4} = \frac{\mathrm{d}^3 R}{\mathrm{d}\,w^3} + \frac{R\,\mathrm{d}^3 m}{\mathrm{d}\,w^3},$$

$$\frac{A\,\mathrm{d}^5 U}{\mathrm{d}\,w^5} = \frac{\mathrm{d}^4 R}{\mathrm{d}\,w^4} + \frac{4\,\mathrm{d}^3 m}{\mathrm{d}\,w^3} \cdot \frac{\mathrm{d}\,R}{\mathrm{d}\,w} + \frac{R\,\mathrm{d}^4 m}{\mathrm{d}\,w^4}, \ldots$$

Bezeichnet man mit S den Meridianbogen zwischen den Poldistanzen w_0 und w, setzt $w - w_0 = d$, so ist

$$S = R\,d + \frac{\mathrm{d}\,R}{\mathrm{d}\,w}\frac{d^2}{2!} + \frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\,w^2}\frac{d^3}{3!} + \cdots$$

$$A\,(U - U_0) = S + \frac{R\,\mathrm{d}^3 m}{\mathrm{d}\,w^3}\frac{d^4}{4!}$$

$$+ \left(\frac{R\,\mathrm{d}^4 m}{\mathrm{d}\,w^4} + \frac{4\,\mathrm{d}\,R}{\mathrm{d}\,w}\frac{\mathrm{d}^3 m}{\mathrm{d}\,w^3}\right)\frac{d^5}{5!} + \cdots,$$

wo in den Koeffizienten der Potenzen von $d\ w = w_0$ zu setzen ist.

$$\frac{\mathrm{d}\,R}{\mathrm{d}\,w} = -\tfrac{3}{2}\,\frac{e^2 R \sin 2\,w}{1 - e^2 \cos w^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\,w^2} = -\tfrac{3}{2}\,\frac{e^2 R}{(1 - e^2 \cos w^2)^2}\left(2 \cos 2\,w - 2\,e^2 \cos w^2 (4 - 3 \cos w^2)\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}^3 R}{\mathrm{d}\,w^3} = \frac{3\,e^2 R \sin 2\,w}{(1 - e^2 \cos w^2)^3}\left(2 + \tfrac{1}{2}\,e^2\,(-15 + 22 \cos w^2)\right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{2}\,e^4 \cos w^2\,(-20 + 9 \cos w^2)\right).$$

U weicht von w nur um Glieder mit e^2 ab, vernachlässigt man die Glieder mit e^4, so ist

$$\frac{\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,w} = 1 + e^2 f(w), \quad \text{also} \quad \frac{\mathrm{d}\,w}{\mathrm{d}\,U} = 1 - e^2 f(U)$$

und von $n = 1$ an

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}\,U}{\mathrm{d}\,w^{n+1}} = -\frac{\mathrm{d}^{n+1}\,w}{\mathrm{d}^{n+1}\,U}, \quad \frac{\mathrm{d}^n\,m}{\mathrm{d}\,w^n} = \frac{\mathrm{d}^n\,m}{\mathrm{d}\,U^n},$$

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}\,U}{\mathrm{d}\,w^{n+1}} = \frac{1}{a}\,\frac{\mathrm{d}^n\,R}{\mathrm{d}\,w^n} + \frac{\mathrm{d}^n\,m}{\mathrm{d}\,w^n}.$$

Für die Entwicklung der höheren Differentialquotienten von m (und damit auch jener von U) setze man in Art. 3 Gleichung (3)

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} U = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} w \cdot \varepsilon^v,$$

wo $\varepsilon = 2{,}718\ldots$ die Basis der natürlichen Logarithmen ist. Dann ist mit Vernachlässigung der Glieder mit e^4, $\alpha = 1 + \beta$ gesetzt,

$$\beta = \tfrac{1}{2} e^2 c^4, \quad \frac{\varepsilon^v - 1}{\varepsilon^v + 1} = \tfrac{1}{2} v$$

$$v = \log \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} U_0}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} w_0} + \beta \log \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} w}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} w_0} + e^2 (\cos w - \cos w_0)$$

$$U = w + v \sin w, \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} U_0 = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} w_0 \left(1 + \beta \frac{\operatorname{cotg} w_0}{\sin w_0}\right);$$

damit wird

$$v = \beta \left(\frac{\operatorname{cotg} w_0}{\sin w_0} + \log \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} w}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} w_0}\right) + e^2 (\cos w - \cos w_0).$$

Wird dieser Ausdruck in

$$\frac{\sin U}{\sin w} = 1 + v \cos w$$

gesetzt, so folgt

$$\frac{\operatorname{cotg} w_0}{\sin w_0} + \log \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} w}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} w_0} = T$$

gesetzt,

$$\frac{\sin U}{\sin w} = 1 + \beta \cos w\, T + e^2 \cos w\, (\cos w - \cos w_0),$$

dabei ist

$$\frac{\mathrm{d} \sin w\, T}{\mathrm{d} w} = \cos w\, T + 1, \quad \frac{\mathrm{d} \cos w\, T}{\mathrm{d} w} = -\sin w\, T + \operatorname{cotg} w.$$

Damit wird

$$m = \frac{\alpha A}{a} \left(1 + \tfrac{1}{4} e^2 + \beta \cos w\, T + e^2 \left(\tfrac{1}{4} \cos 2w - \cos w_0 \cos w\right)\right).$$

Aus diesem Ausdruck erhält man leicht die höheren Differentialquotienten, in welchen $\alpha A : a = 1$ gesetzt werden darf. Für den sechsten ist zunächst

$$\frac{d^6 m}{d w^6} = \beta \left(- \cos w\, T - 1 - \frac{15}{\sin w^2} - 114 \frac{\operatorname{cotg} w^2}{\sin w^2} \right.$$
$$\left. - 120 \frac{\operatorname{cotg} w^4}{\sin w^2} \right) + e^2 (- 16 \cos 2 w + \cos w_0 \cos w),$$

also für $$w = w_0 = 90^0 - P$$

$$\frac{d^6 m}{d w^6} = \tfrac{1}{2} e^2 c^4 \left(- \frac{s^2}{c^2} - 1 - \frac{15}{c^2} - \frac{114 s^2}{c^4} - \frac{120 s^4}{c^6} \right)$$
$$+ e^2 (- 15 s^2 + 16 c^2)$$
$$= - e^2 \left(8 c^2 + 57 s^2 + \frac{60 s^4}{c^2} \right) + e^2 (- 15 s^2 + 16 c^2)$$
$$= \frac{4 e^2}{c^2} (2 c^4 - 18 s^2 c^2 - 15 s^4),$$

welcher Ausdruck mit dem *Gauß*schen (Art. 7) übereinstimmt, wenn man nach Analogie mit den vorausgehenden $4 e^2$ durch $\sin 2 \varphi^2 : \cos \Theta$[10] ersetzt.

Zur Erläuterung der *Gauß*schen Kugel möge noch angeführt werden: Auf dem Sphäroid werde eine schmale Zone, deren Mittelparallel die Breite P besitzt, herausgeschnitten. In der Länge $t = 180^0$ werde diese Zone längs des Meridians aufgeschnitten und vom Mittelpunkte der Zone (bestimmt durch $t = 0$, $w = 90 - P$) aus auf der *Gauß*schen Kugel zur Deckung gebracht. Der Parallelkreis vom Umfange $2 \alpha \pi A \cos Q$ kann nur durch Zusammenbiegen auf dem Kugelkreis des Umfanges $2 \pi A \cos Q$ zur Deckung gebracht werden; dabei fällt zuletzt ein Stück von der Länge $(\alpha - 1) 2 \pi A \cos Q$ mit dem bereits auf der Kugel liegenden zusammen. In der Praxis wird nur ein verhältnismäßig kleiner Teil der ganzen Zone benötigt. Die Meridianbögen des Sphäroids müssen (wegen $R_0 < A$) aufgebogen werden. Bei dieser Biegung erleiden die Winkel und Längen der Seiten (kürzeste Linien) der Dreiecke auf der erwähnten schmalen Zone keine Änderung — innerhalb des Grades einer vorgeschriebenen Genauigkeit, die die zulässige

Breite der Zone bestimmt. Bei einer Breite von zwei Meridiangraden erreicht der Unterschied $A(U - U_0) - S$ noch nicht die Größe von 0,0005 m.

Bezüglich dieser Abwicklung der sphäroidischen Zone auf die Kugel vgl. Note zu Art. 12 Heft 5 von *Ostwalds* Klassikern.

5) *Zu S. 17.* Art. 10. Bei Zeile 6 von unten S. 273 des Bandes IV von *Gauß'* Werke ist das Wort »genau« wegzulassen. Für die Anfangs- und Endwerte dieser Tafel (Summa gegen 4°) ist noch das Glied mit q^6 zu berücksichtigen. Es ist

$$\frac{\mathrm{d}^6 U}{\mathrm{d} w^6} = -\frac{\mathrm{d}^6 w}{\mathrm{d} U^6} = -4 e^2 \frac{s}{c} (14 c^2 - 3 s^2).$$

Für $q = 6°$ erhält man $-4{,}3$ Einheiten der fünften Stelle der *Gauß*schen Tafel. Mit Rücksicht auf die ausführlichere (von $Q + q = 44° 20'$ bis 61°) und dabei überdies bequemer eingerichtete Tafel von Dr. *O. Schreiber* (»Die konforme Doppelprojektion der trigonometrischen Abteilung der königl. preußischen Landesaufnahme«. Berlin 1897) wurde in diesem Hefte die *Gauß*sche Tafel weggelassen.

6) *Zu S. 23.* Art. 12. Die *Gauß*schen Korrektionen der Winkel und Seiten eines Dreiecks setzen nur h als kleine Größe I. Ordnung voraus, ohne zu berücksichtigen, daß p oder q selbst klein der I. Ordnung sein können*). Für größere Werte von h, die mit p oder q von derselben Ordnung vorausgesetzt werden, erfordern die *Gauß*schen Formeln eine Ergänzung, die der Herausgeber in der »Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen« Jahrgang 1909 geliefert hat.

Die im Art. 12 mitgeteilten Näherungsausdrücke können zur Bestimmung der Ordnung der in den Formeln dieses Artikels vernachlässigten Größen dienen.

1) Wird in der Gleichung

$$\frac{\mathrm{d} n}{\mathrm{d} u} \cdot \frac{\mathrm{d} x}{\cos \psi} = \mathrm{d} n \sin \psi$$

$\cos \psi = 1$ gesetzt, so wird, da ψ von der Ordnung $e^2 q^2 h$, $\frac{\mathrm{d} n}{\mathrm{d} u}$ von der Ordnung $e^2 q^2$ ist, im Resultate ein Fehler von der Ordnung $e^6 q^6 h^3$ bewirkt. Von gleicher Ordnung ist der Fehler, wenn $\sin \psi = \psi = \operatorname{tang} \psi$ gesetzt wird.

---

*) Dazu ist auch *Gauß* in Art. 15 und 22 seiner »Untersuchungen . . .« genötigt.

2) $$n = \frac{\cos y}{m}, \quad \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,u} = \cos y$$

$$\frac{\mathrm{d}\,n}{\mathrm{d}\,u} = -\frac{\sin y}{m}\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,u} + \cos y\,\frac{\mathrm{d}\frac{1}{m}}{\mathrm{d}\,u}$$

$$\mathrm{d}\,n = -\frac{\sin y \cos y}{m}\,\mathrm{d}\,u + \cos y \cdot \mathrm{d}\frac{1}{m}\,.$$

y ist von der Ordnung e^2 IV. Ordnung,
$y = u +$ Größe e^6 XII. Ordnung;

$$\sin y \cos y\,\mathrm{d}\,u = \sin y \cos y\,\mathrm{d}\,y = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}\sin y^2,$$

das Integral von der Ordnung e^4 VIII; mit diesem Fehler kann

$$n = \frac{1}{m}$$

gesetzt werden.

3) In der Gleichung

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{m \operatorname{tang}\psi^0}{m^0} - m\int\frac{l}{m}\,\mathrm{d}\,x$$

ist das Integral längs der Linie der Punkte M zu erstrecken; dieses kann ersetzt werden durch das Integral längs der Linie der Punkte N. Denn l ist eine Größe der Ordnung $e^2 q^2$; wird l nach Potenzen von y entwickelt, so ist

$$l = l_0 + \left(\frac{\mathrm{d}\,l}{\mathrm{d}\,y}\right)_0 y + \cdot\cdot$$

$$\frac{\mathrm{d}\,l}{\mathrm{d}\,y} = \frac{\mathrm{d}\,l}{\mathrm{d}\,q}\sin\chi;$$

wird daher l in der Linie der Punkte N genommen, d. h. durch l_0 ersetzt, so ist der Fehler von der Ordnung $e^2 q\,y$, also der Fehler im obigen Integral von der Ordnung e^4. VI.

Die Werte von tang ψ^0 und tang ψ'

$$\operatorname{tang}\psi^0 = \tfrac{1}{2}\,l^0 h + (\tfrac{1}{6}\,\lambda - \tfrac{1}{12}\,l^0\mu)\,h^2 + \cdots$$

und für tang ψ' weichen von den genauen Werten nur um Größen e^4. VI. Ordnung nach q und h ab. Untersucht man aber

die Ordnungszahl der Glieder dieser Reihen für tang ψ^0 und tang ψ', so erhält man

$l^0 h$	ist	von	der	Ordnung	$e^2 \cdot q^2 h$
λh^2	»	»	»	»	$e^2 \cdot q h^2$
$l^0 \mu h^2$	»	»	»	»	$e^4 \cdot q^4 h^2$
$\lambda \mu h^3$	»	»	»	»	$e^4 \cdot q^3 h^3$
$\lambda' h^3$	»	»	»	»	$e^2 \cdot h^3$ usw.

Daraus folgt die Gleichung

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{m \operatorname{tang} \psi^0}{m^0} - m \int \frac{l}{m} \, \mathrm{d}x,$$

wobei das letzte Integral in der Linie der Punkte N zu nehmen ist. Diese Gleichung kann ohne Schädigung des Grades der Genauigkeit durch

$$\operatorname{tang} \psi = \operatorname{tang} \psi_0 - \int l \, \mathrm{d}x$$

ersetzt werden. Dabei kann

$$l = l^0 + \lambda x + \lambda' x^2 + \ldots$$

so weit fortgesetzt werden, bis die oben angesetzte Fehlergrenze (e^4. VI. Ordnung) erreicht wird.

Wenn *Gauß* als Werte

$$\operatorname{tang} \psi^0 = (\tfrac{1}{3} l^0 + \tfrac{1}{6} l') h, \quad \operatorname{tang} \psi' = -(\tfrac{1}{6} l^0 + \tfrac{1}{3} l') h$$

ansetzt, d. i. Glieder der Ordnung $e^2 q^2 h$, so ist das erste Fehlerglied $\mp \frac{1}{12} \lambda' h^3$, d. h. es wird ein Glied der Ordnung $e^2 h^3$ vernachlässigt, welche Vernachlässigung nur dann gestattet ist, wenn h gegen q eine kleine Größe ist. Ist aber h mit q von derselben Ordnung, so muß das Glied $\mp \frac{1}{12} \lambda h^3$ noch dazu genommen werden, um ψ^0 und ψ' genau auf e^2. III. Ordnung zu erhalten.

Aus der vorigen Gleichung für tang ψ folgt:

$$\psi^0 = \left(\frac{l^0}{1 \,.\, 2} + \frac{\lambda h}{2 \,.\, 3} + \frac{\lambda' h^2}{3 \,.\, 4} + \frac{\lambda'' h^3}{4 \,.\, 5} + \ldots \right) h$$

$$\psi' = -\left(\frac{l^0}{2} + \frac{\lambda h}{3} + \frac{\lambda' h^2}{4} + \frac{\lambda'' h^3}{5} + \ldots \right) h.$$

Für Werte q oder h vom 5. Grade an ist e als kleine Größe erster Ordnung zu betrachten, es können daher diese Reihen bis einschließlich der Glieder mit h^7 fortgesetzt werden.

Wegen

$$\frac{l^0}{3}+\frac{l'}{6}=\frac{l^0}{2}+\frac{\lambda h}{6}+\frac{\lambda' h^2}{6}+\ldots$$

$$\frac{l^0}{6}+\frac{l'}{3}=\frac{l^0}{2}+\frac{\lambda h}{3}+\frac{\lambda' h^2}{3}+\ldots$$

wird

$$\psi^0=\left(\frac{l^0}{3}+\frac{l'}{6}\right)h-\frac{\lambda' h^3}{12}-\frac{7\lambda'' h^4}{60}-\ldots$$

$$\psi'=-\left(\frac{l^3}{6}+\frac{l'}{3}\right)h+\frac{\lambda' h^3}{12}+\frac{2\lambda'' h^4}{15}+\ldots$$

Ist $l_{\frac{1}{2}}$ der Wert von l für die Mitte von FG,

$$l_{\frac{1}{2}}=l^0+\frac{\lambda h}{2}+\frac{\lambda' h^2}{4}+\frac{\lambda'' h^3}{8}+\ldots,$$

so ist wegen

$$\frac{l^0}{6}+\frac{l_{\frac{1}{2}}}{3}=\frac{l^0}{2}+\frac{\lambda h}{6}+\frac{\lambda' h^2}{12}+\frac{\lambda'' h^3}{24}+\frac{\lambda''' h^4}{48}+\ldots$$

$$\frac{l_{\frac{1}{2}}}{3}+\frac{l'}{6}=\frac{l^0}{2}+\frac{\lambda h}{3}+\frac{\lambda' h^2}{4}+\frac{5\lambda'' h^3}{24}+\frac{3\lambda''' h^4}{16}+\ldots,$$

$$\psi^0=\left(\frac{l^0}{6}+\frac{l_{\frac{1}{2}}}{3}\right)h+\frac{\lambda'' h^4}{120}+\frac{\lambda''' h^5}{80}+\ldots$$

$$\psi'=-\left(\frac{l_{\frac{1}{2}}}{3}+\frac{l'}{6}\right)h+\frac{\lambda'' h^4}{120}+\frac{\lambda''' h^5}{48}+\ldots$$

Für den Bogen s auf dem Sphäroide lautet der genaue Ausdruck

$$s=A\int\frac{\cos y}{m\cos\psi}\,\mathrm{d}x.$$

Wird $\cos y$ und $\cos\psi=1$ gesetzt, so ist der Fehler e^4 mit einer Größe VIII. bezüglich VI. Ordnung; im Integral daher von der Ordnung e^4. VII. Mit solchem Fehler kann daher

$$s = A \int \frac{\mathrm{d}x}{m}$$

gesetzt werden. Wird m statt in der Linie M in der Linie N genommen, so ist der Fehler von der Ordnung $e^2 y q^2$, also in s von der Ordnung e^4. VII.

Damit wird

$$s = \frac{Ah}{m^0}[1 - \tfrac{1}{2}\mu h - \tfrac{1}{3}(\mu' - \mu^2)h^2 - \tfrac{1}{4}(\mu'' - 2\mu\mu' + \mu^3)h^3 - \ldots].$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\mu h^2 &= \text{Ordnung } e^2 q^2 h^2, \\
\mu' h^3 &= \text{Ordnung } e^2 q h^3, \quad \mu^2 h^3 = \text{Ordnung } e^4 q^4 h^3, \\
\mu'' h^4 &= \text{Ordnung } e^2 h^4, \quad \mu\mu' h^4 = \text{Ordnung } e^4 q^3 h^4, \quad \mu^3 h^4 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \text{Ordnung } e^6 q^6 h^4 \text{ usw.}
\end{aligned}$$

Sollen daher die Glieder mit e^2. IV. Ordnung berücksichtigt werden, so muß

$$s = \frac{Ah}{m_0}(1 - \tfrac{1}{2}\mu h - \tfrac{1}{3}\mu' h^3 - \tfrac{1}{4}\mu'' h^3)$$

gesetzt werden; dieser Ausdruck kann aber so weit fortgesetzt werden, bis die Fehlergrenze e^4. VII. erreicht wird. In dem *Gauß*schen Näherungsausdrucke

$$s = \frac{Ah}{\sqrt{m^0 m'}}$$

werden die Glieder mit $\mu' h^3$, $\mu'' h^4$, welche mit dem Gliede mit μh^2 von derselben Ordnung sind, vernachlässigt.

In den Gliedern von μh^2 an kann $m_0 = 1$ gesetzt werden, der Fehler ist von der Ordnung e^4. VII.

Für die Berechnung von s empfiehlt sich der Ausdruck

$$s = \frac{Ah}{(m)},$$

$$\frac{6}{(m)} = \frac{1}{m^0} + \frac{4}{m_{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{m'}$$

wo $m_{\frac{1}{2}}$ die Vergrößerungszahl in der Mitte von FG bedeutet.

Diese Formel berücksichtigt noch das Glied mit μ'', und das Hauptglied des Fehlers beträgt

$$+\frac{A\mu''' h^5}{120}.$$

Mit einem Fehler der Ordnung $e^4 . q^6$ in (m) also $e^4 .$ VII in s kann

$$6(m) = m^0 + 4 m_{\frac{1}{2}} + m'$$

gesetzt werden.

Ist s gegeben, und wird h gesucht, so erhält man mit gleicher Fehlerordnung

$$\sigma = \frac{m_0 s}{A}$$

gesetzt,

$$h = \sigma + \tfrac{1}{2}\mu\sigma^2 + \tfrac{1}{3}\mu'\sigma^3 + \tfrac{1}{4}\mu''\sigma^4 + \ldots$$

Werden nur die Glieder mit $e^2 .$ IV berücksichtigt, so wird

$$h = \frac{(m)s}{A}$$

gerechnet.

Da bei dieser Abbildung die Koeffizienten λ, λ', λ'' .., μ, μ', μ'' .. ziemlich komplizierte Ausdrücke sind, so sind die Korrektionen ψ^0 und ψ' nach

$$\psi^0 = \left(\frac{l^0}{6} + \frac{l_{\frac{1}{2}}}{3}\right)h, \quad \psi' = -\left(\frac{l_{\frac{1}{2}}}{3} + \frac{l'}{6}\right)h$$

und s mittels (m) zu rechnen, falls die erste Näherung genügt.

7) *Zu S. 25.* Art. 13. Um die Winkelkorrektionen mittels der Größen ψ^0 und ψ' bezüglich des Vorzeichens richtig zu erhalten, dient folgende Betrachtung. Mit einem Fehler der Ordnung $e^6 .$ XII ist $u = y$. Die Voraussetzung $\cos y = 1$ ersetzt den Bereich der Kugelfläche längs der Linie FG durch jenen eines berührenden Zylinders. Für diese abgewickelte Kurve $y = f(x)$ der Punkte M ist

$$y = \frac{x(h-x)}{2}X, \quad X = l^0 + \frac{\lambda}{3}(x+h) + \frac{\lambda'}{6}(x^2 + hx + h^2) + \ldots$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\psi, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -l.$$

Bei der Abbildung der »Untersuchungen . .« ist im ganzen Intervalle $x = 0$ bis $x = h$ das y negativ, $-l$ positiv, die Kurve der Punkte M konkav gegen die x-Achse; in diesem Intervalle hat y ein Minimum (absolut größter Wert). Daß y immer negativ ist, folgt aus

$$\frac{l + l'}{2} = l^0 + \frac{\lambda}{2}(x + h) + \frac{\lambda'}{2}(x^2 + h^2),$$

welche Größe immer negativ ist. Dieser Ausdruck bleibt auch, im Falle alle Koeffizienten λ, λ', . . positiv sind, noch negativ, wenn dessen Glieder durch die des Ausdruckes für X ersetzt werden.

Ergänzung zur Note des Art. 12, ferner zu Art. 15 und 22. Für die Berechnung der Korrektionen des Azimuthes und der Größe des Bogens s mit Zuziehung der Größen $l_{\frac{1}{2}}$ und $m_{\frac{1}{2}}$ sind Näherungswerte der Breite und des Azimuthes der Mitte der Seite FG nötig. Diese Größen lassen sich mit genügender Genauigkeit auf die folgende Art bestimmen.

Im sphärischen Dreiecke ABC sei D die Mitte von AB, $CD = d$, in den Teildreiecken ACD und BCD sollen die Winkel bei C mit C_1 und C_2, die Winkel bei D mit D_1 und D_2, die sphärischen Exzesse mit E_1 und E_2 bezeichnet werden. Dabei werden $a - b$, c, C als kleine Größen erster Ordnung vorausgesetzt.

1) Bestimmt man im Dreiecke ACD $\cos b$, im Dreiecke BCD $\cos a$, so erhält man

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{c}{2} \cos d$$

$$\cos d = \cos \frac{a + b}{2} \frac{\cos \frac{a - b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}.$$

Mit Fehler IV. Ordnung ist

$$\cos d = \cos \frac{a + b}{2} \left(1 + 2 \sin \frac{c^2}{4} - 2 \sin \frac{a - b^2}{4}\right)$$

$$= \cos \frac{a + b}{2} \left(1 + \tfrac{1}{8} \sin a \sin b\, C^2\right).$$

Mit Fehler II. Ordnung ist

$$\sin a \sin b = \sin \frac{a+b^2}{2},$$

$$\cos d = \cos \frac{a+b}{2} + \tfrac{1}{8} \sin \frac{a+b^2}{2} \cdot \cos \frac{a+b}{2} C^2;$$

$$d = \frac{a+b}{2} - z, \quad z = \tfrac{1}{16} \sin (a+b) C^2,$$

$$d = \frac{a+b}{2} - \tfrac{1}{16} \sin (a+b) C^2.$$

Ferner ist

$$2 \cos d = \cos a + \cos b + \tfrac{1}{4} \cos \frac{a+b}{2} c^2.$$

2) Aus

$$\sin C_1 \sin d = \sin A \sin \frac{c}{2}, \quad \sin C_2 \sin d = \sin B \sin \frac{c}{2},$$

$$\sin c \sin A = \sin C \sin a, \quad \sin c \sin B = \sin C \sin b$$

folgt

$$\sin \frac{C_1 - C_2}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{\sin \frac{c}{2}}{\sin d} \frac{\sin C}{\sin c} \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2},$$

$$C_1 - C_2 = \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{a+b}{2} (a-b) C.$$

3) Verlängert man AB, und ist B' der Außenwinkel von B, so ist

$$D_2 = A + C_1 - E_1, \quad D_2 = B' - C_2 + E_2,$$

$$D = \frac{A+B'}{2} + \frac{C_1 - C_2}{2} - \frac{E_1 - E_2}{2}.$$

$$\operatorname{tang} \frac{E_1}{2} = \frac{\operatorname{tang} \frac{d}{2} \operatorname{tang} \frac{b}{2} \sin C_1}{1 + \operatorname{tang} \frac{d}{2} \operatorname{tang} \frac{b}{2} \cos C_1}$$

$$= \frac{\sin \frac{d}{2} \sin \frac{b}{2} \sin C_1}{\cos \frac{d-b}{2} - 2 \sin \frac{d}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{C_1{}^2}{2}}$$

und ebenso für E_2.

Nun ist $$d = \frac{a+b}{2} - \varkappa, \quad \varkappa = \text{II. Ordnung}$$

$$\cos\frac{d-b}{2} = \cos\frac{d-a}{2} + \text{III. Ordnung.}$$

Mit Fehler IV. Ordnung ist daher

$$\operatorname{tang}\frac{E_1 - E_2}{2} = \sin\frac{d}{2}\left(\sin\frac{b}{2}\sin C_1 - \sin\frac{a}{2}\sin C_2\right).$$

$$\sin\frac{a}{2} = \sin\frac{a+b}{4} + \cos\frac{a+b}{4}\frac{a-b}{4} - \tfrac{1}{2}\sin\frac{a+b}{4}\left(\frac{a-b}{4}\right)^2 -,$$

$$\sin\frac{b}{2} = \sin\frac{a+b}{4} - \cos\frac{a+b}{4}\frac{a-b}{4} - \tfrac{1}{2}\sin\frac{a+b}{4}\left(\frac{a-b}{4}\right)^2 +,$$

also mit Fehler IV. Ordnung

$$\operatorname{tang}\frac{E_1 - E_2}{2} = \sin\frac{a+b^2}{4}(C_1 - C_2) - \tfrac{1}{8}\sin\frac{a+b}{2}(a-b)\,C;$$

damit wird mit Fehler IV. Ordnung

$$D_2 = \frac{A+B'}{2} + \frac{1+\cos\frac{a+b^2}{2}}{8\sin\frac{a+b}{2}}(a-b)\,C.$$

Bezeichnet man mit ψ^0 und ψ' die sphärischen Breiten von F und G, mit λ ihren Längenunterschied, mit $\psi_{\frac{1}{2}}$ die sphärische Breite der Mitte von FG, mit α das Azimuth von FG in F, mit α' das Azimuth von GF in G, so ist

$$\psi_{\frac{1}{2}} = \frac{\psi^0 + \psi'}{2} + \tfrac{1}{16}\sin(\psi^0 + \psi')\,\lambda^2;$$

die zu dieser Breite zugehörige Größe $T_{\frac{1}{2}} = \sin\psi_{\frac{1}{2}}$

$$2\,T_{\frac{1}{2}} = T^0 + T' + \tfrac{1}{4}\sin\frac{\psi^0 + \psi'}{2}\,h^2.$$

Die Größe $\chi_{\frac{1}{2}}$ der Mitte von FG

$$\chi_{\frac{1}{2}} = \frac{\alpha + \alpha'}{2} - 90^0 - \frac{1+\sin\frac{\psi^0+\psi'^2}{2}}{8\cos\frac{\psi^0+\psi'}{2}}(\psi' - \psi^0)\,\lambda,$$

diese Größe wird nur bei der Abbildung der »Untersuchungen . .« benötigt.

Für die Berechnung dieser letzteren Korrektionen genügen dreistellige Logarithmen.

Damit erhält man die in Artikel 15 und 22 der »Untersuchungen . .« gelieferten Formeln der Azimuth- und Längenkorrektionen. Ist $Q = \frac{\psi^0 + \psi'}{2}$, $\psi^0 - \psi' = \delta$, so ist die Breite in $F = Q + \frac{\delta}{2}$, in $G = Q - \frac{\delta}{2}$, in der Mitte von $FG = Q + \varkappa$. *Gauß* gibt (Art. 9)

$$\log m = A_3 q^3 + A_4 q^4 + \ldots,$$

also

$$l = (3 A_3 q^2 + 4 A_4 q^3 + \ldots) \sin \chi.$$

Daraus folgt:

$m_{\frac{1}{2}} = 1 +$ VI. Ordnung, $m^0 + m' = 2 +$ IV. Ordnung, also
$s = Ah +$ V. Ordnung (Gleichung 8 des Art. 22)
$l_{\frac{1}{2}} =$ IV. Ordnung;

mit Fehlern V. Ordnung ist die Azimuthkorrektion:

$$\text{in } F = \tfrac{1}{6} l^0 h + \frac{\lambda'' h^4}{120}, \text{ in } G = -\tfrac{1}{6} l' h + \frac{\lambda'' h^4}{120};$$

deren Unterschied

$$\frac{A_3}{4} \delta^2 h \sin \frac{\chi^0 + \chi'}{2} + \text{V. Ordnung},$$

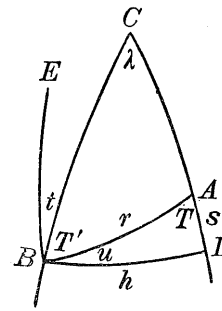
Summe = IV. Ordnung.

Damit ist auch erwiesen, daß in Art. 22 der Fehler der Gleichung (6) eine Größe der IV. Ordnung, der Fehler der Gleichung (7) eine Größe der V. Ordnung beträgt, und daß, wie *Gauß* in Art. 25 erklärt, der Fehler jeder der drei Formeln I, II, III von der fünften Ordnung ist.

8) *Zu S. 34.* Art. 16. »Vierte Methode«. Im sphärischen Dreiecke ABC werde

$$C = \lambda,\ a = 90^\circ - S',\ b = 90^\circ - S,\ c = r$$

gesetzt. Der Außenwinkel von A werde mit T, der Winkel B mit T' bezeichnet. Die Aufgabe lautet: Aus den Seiten b und c und dem eingeschlossenen Winkel A sind die übrigen Stücke des sphärischen Dreiecks zu bestimmen. Im vorliegenden Falle ist die Seite c klein der ersten Ordnung, also auch der Winkel C und der Unterschied der Seiten a und b.



Zerlegt man das Dreieck ABC durch die von B ausgehende Höhe $BD = h$ in zwei rechtwinklige ABD und BCD, so sind die Seiten des Dreiecks ABD klein der ersten Ordnung, also dessen Fläche und der Exzeß τ von der zweiten Ordnung; gleiches gilt von dem Unterschiede $BC - CD = \sigma$. Zieht man $BE \perp BD$ und setzt Winkel $CBE = t$, so ist t die Meridiankonvergenz im Punkte B. *Gauß* führt die Lösung auf die Berechnung von $AD = s$, λ, t, τ, σ zurück. Dabei wird am häufigsten der Satz angewendet: In einem bei C rechtwinkligen Dreiecke ABC ist

$$\text{I.} \quad \cos A = \cos a \sin B.$$

Es ist

1) $$\operatorname{tang} s = \cos T \operatorname{tang} r,$$

daraus

1') $$\cos T \sin r = \cos h \sin s.$$

$$\operatorname{tang} h = \cos (S - s) \operatorname{tang} \lambda = \operatorname{tang} T \sin s,$$

daraus

2) $$\operatorname{tang} \lambda = \frac{\operatorname{tang} T \sin s}{\cos (S - s)}.$$

Nach dem Satze I folgt für das Dreieck CBD $\cos \lambda = \cos h \cos t$, $\sin t = \sin \lambda \sin (S - s)$; also

$$\operatorname{tang} t = \cos h \operatorname{tang} \lambda \sin (S - s);$$

wird aus 1') $\cos h$ genommen und für $\operatorname{tang} \lambda$ aus 2) der Wert gesetzt, so folgt

3) $$\operatorname{tang} t = \sin T \sin r \operatorname{tang} (S - s).$$

Bestimmung von τ. Bezeichnet man den Winkel ABD mit u, so ist

$$u + T' + t = 90^\circ, \quad u + T = 90^\circ + \tau,$$

also

$$\tau = T - (T' + t).$$

$u = 90^\circ - (T' + t)$, der obige Satz I zweimal auf das Dreieck ABD angewendet gibt

$$\sin(T' + t) = \cos s \sin T, \quad \cos(T' + t) = \frac{\cos T}{\cos h},$$

also

$$\sin\tau = \sin T \cos T \left(\frac{1}{\cos h} - \cos s\right) = \sin T \cos T \left(\frac{1 - \cos r}{\cos h}\right),$$

und wenn $\cos h$ aus 1') genommen wird,

4) $$\sin\tau = \sin T \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} r \sin s.$$

Bestimmung von σ. Es ist

$$BC - CD = \sigma = S - s - S'.$$

Aus $\operatorname{tang} S' = \cos\lambda \operatorname{tang}(S - s)$ folgt

$$\sin S' \cos(S - s) = \cos\lambda \sin(S - s) \cos S',$$

damit wird

$$\sin\sigma = \sin(S - s) \cos S' (1 - \cos\lambda),$$

also wegen $$\cos S' = \frac{\sin r \sin T}{\sin\lambda},$$

5) $$\begin{aligned}\sin\sigma &= \sin(S - s) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\lambda \sin r \sin T \\ &= \operatorname{tang} t \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\lambda \cos(S - s).\end{aligned}$$

Die »vierte Methode« hat vor den gewöhnlichen Lösungen (erste bis dritte Methode) den Vorzug, daß man mit siebenstelligen Logarithmen eine Genauigkeit erreichen kann, die bei den drei ersten kaum mit zehnstelligen erreicht werden kann. Das von *Gauß* gerügte »etwas beschwerliche Interpolieren«

fällt gegenwärtig durch die den Logarithmentafeln beigefügten S- und T-Zahlen weg.

Zur Prüfung der Leistungsfähigkeit dieser Methode wurden für das von *Gauß* in Art. 20 (Zweite Abhandlung) mitgeteilte Beispiel (zu seiner »fünften« Methode) die Werte s, λ und t siebenstellig mit den Tafeln von *Schrön* und zehnstellig mit dem Thesaurus von *Vega**) gerechnet. Für σ und τ genügt sogar eine fünfstellige Rechnung. Es ist die Berechnung des Dreieckspunktes Inselsberg vom Brocken aus, der größten Seite (rund 106 km) im Hannoverschen Dreieckssystem**), auszuführen.

Siebenstellig $s = 3407''.6403$, $\lambda = 538''.9442.5$, $t = 417''.7773$
Zehnstellig $s = 3407''.64035$, $\lambda = 538''.9443.2$, $t = 417''.77721$.

Mit gleichem Grade von Genauigkeit werden diese Größen nach den *Gauß*schen Näherungsformeln (Reihenentwicklung mit Vernachlässigung der Glieder V. Ordnung) erhalten. Die Rechnung nach diesen letzteren Formeln ist noch bequemer, für die Glieder III. Ordnung (im Logarithmus also II. Ordnung) genügt selbst für dieses Beispiel eine vierstellige Rechnung.

9) *Zu S. 35.* Art. 17. Die indirekte fünfte Methode bildet den Ausgang der »Zweiten Abhandlung«. Ihre Vorzüge vor der »vierten Methode« sind in der größeren Einfachheit der Reihenentwicklungen bei Beschränkung auf die kleinen Größen dritter Ordnung und in dem Umstande begründet, daß die vernachlässigten Größen fünfter Ordnung rund 1:32 jener der »vierten Methode« sind. Der Nachteil, daß die fünfte Methode keine direkte Auflösung gibt, wird durch den Umstand, daß hierbei bereits ziemlich genaue Näherungswerte der Unbekannten vorhanden sind, größtenteils aufgehoben.

---

*) Statt der direkten Bestimmung eines kleinen Bogens aus dem Logarithmus der Tangente wurden zur Vermeidung einer unbequemen Interpolation für die zwei Nachbarstellen log T gerechnet.

**) In Preußen ist die größte Dreiecksseite (Schneekoppe—Schneeberg) 98 km lang, in Österreich-Ungarn 133 km (Hum—Giovannichio).

Anhang.

I.

Die geodätische Linie wird so definiert: Ist AB ein Element derselben, BD eine unendlich kleine (geradlinige) Verlängerung von AB, so ist das nächste Element BC die Normalprojektion von BD auf die Fläche.

Da der Winkel der beiden aufeinander folgenden Elemente AB und BC unendlich klein ist, so kann $BD = BC$ gesetzt werden.

Sind die Koordinaten x, y, z des Punktes A der geodätischen Linie durch deren Länge s von einem gegebenen Anfang bestimmt, wird $AB = BC = h$ gesetzt, so ist für den Punkt B, dessen Koordinaten x_1, y_1, z_1 durch $s + h$ bestimmt sind,

$$x_1 = x + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} h + \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}s^2} \frac{h^2}{2} + \ldots \text{ usw.};$$

für den Punkt C, dessen Koordinaten x_2, y_2, z_2 durch $s + 2h$ bestimmt sind,

$$x_2 = x + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} 2h + \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}s^2} 2h^2 + \ldots \text{ usw.}$$

Die Koordinaten für den Punkt D sind

$$x + 2(x_1 - x) = x + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} 2h + \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}s^2} h^2 + \ldots \text{ usw.}$$

Der Punkt D liegt in der Normale des Punktes C, seine Koordinaten ξ, η, ζ leisten den Gleichungen

$$\xi - x_2 + p_2(\zeta - z_2) = 0, \quad \eta - y_2 + q_2(\zeta - z_2) = 0,$$

wo p_2 und q_2 die partiellen Differentialquotienten der Gleichung

$$z = f(x, y)$$

der krummen Fläche für den Punkt C bedeuten.

Entwickelt man die obigen Gleichungen in Potenzreihen nach h, so erhält man

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2} + p\frac{d^2z}{ds^2}\right)h^2 + \ldots = 0, \quad \left(\frac{d^2y}{ds^2} + q\frac{d^2z}{ds^2}\right)h^2 + \ldots = 0,$$

also

$$\frac{d^2x}{ds^2} + p\frac{d^2z}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{ds^2} + q\frac{d^2z}{ds^2} = 0;$$

welche Gleichungen mit jenen der kürzesten Linie identisch sind, wie aus Heft Nr. 5 *Ostwalds* Klassiker Art. 14 unmittelbar hervorgeht, wenn für die unabhängige Variable w die Länge s gewählt und

$$\delta z = p\,\delta x + q\,\delta y$$

gesetzt wird.

Ist die Fläche eine Rotationsfläche, so kann deren Gleichung durch

$$f(z) = x^2 + y^2$$

dargestellt werden, wenn die Rotationsachse als z-Achse gewählt wird. Dann ist

$$f'(z)p = 2x, \quad f'(z)q = 2y;$$

durch Elimination von $f'(z)$ aus den Differentialgleichungen der Kürzesten erhält man

$$x\frac{d^2y}{ds^2} - y\frac{d^2x}{ds^2} = 0,$$

woraus

$$x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds} = C$$

folgt, wo C eine Konstante bedeutet.

Ist M ein Punkt der Rotationsfläche, v sein Abstand von der Achse, λ der Längenunterschied, so ist

$$x = v\cos\lambda, \quad y = v\sin\lambda.$$

Setzt man diese Werte in die vorige Gleichung, so erhält man

$$v^2 d\lambda = C ds.$$

Ist α der Winkel, unter dem die Kürzeste im Punkte M den Meridian schneidet, so ist das Element des Parallelkreises $v\,\mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}s \sin\alpha$, also

$$v \sin\alpha = C.$$

Nach den Bezeichnungen des Art. 26 und Einbeziehung von $1:a$ in die Konstante C erhält man

$$\frac{\sin X \cos Y}{\sqrt{1 - e^2 \sin Y^2}} = C. \quad \text{Art. 26.}$$

II.

Die geodätische Linie und der Vertikalschnitt auf einer Fläche.

Die Gleichung der Fläche sei

$$2z = Ax^2 + By^2 + Z, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wo Z die Glieder dritter und höherer Ordnung nach x und y enthält. Die xy-Ebene ist die Berührungsebene im Koordinatenanfang, die Ebenen xz und yz sind Hauptschnittsebenen. Zieht man durch den Koordinatenanfang kürzeste Linien, ist α der Winkel des Anfangselementes mit der x-Achse, so kann jeder Punkt (x, y, z) der Fläche durch die Länge s der Kürzesten vom Anfange und den Winkel α dargestellt werden. Für sehr kleine Werte von s ist

$$x = s\cos\alpha, \quad y = s\sin\alpha, \quad 2z = (A\cos\alpha^2 + B\sin\alpha^2)s^2.$$

Aus den Gleichungen der geodätischen Linie

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2} + p\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}s^2} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2} + q\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}s^2} = 0$$

folgt durch Differentiation

$$\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}s^3} + \left(\frac{dp}{dx}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{dp}{dy}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}s^2} + p\frac{\mathrm{d}^3z}{\mathrm{d}s^3} = 0,$$

also für $s = 0$

$$\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}s^3} + A\cos\alpha\,(A\cos\alpha^2 + B\sin\alpha^2) = 0,$$

ebenso

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}s^3} + B\sin\alpha\,(A\cos\alpha^2 + B\sin\alpha^2) = 0.$$

Dies gibt in der Näherung, wo Z noch nicht benötigt wird, wenn

$$A \cos \alpha^2 + B \sin \alpha^2 = U$$

gesetzt wird, folgende Werte

$$\begin{aligned} x &= s \cos \alpha - A \cos \alpha \, U \frac{s^3}{6} \\ y &= s \sin \alpha - B \sin \alpha \, U \frac{s^3}{6} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2) \\ z &= U \frac{s^2}{2} \cdot \end{aligned}$$

Eine beliebige auf der Fläche liegende Linie kann durch Hinzufügung einer Gleichung zwischen α und s dargestellt werden. Soll diese Linie ein Normalschnitt mit der Fläche sein, der mit der xz-Ebene den Winkel β bildet, so ist

$$x \sin \beta - y \cos \beta = 0$$

die Gleichung dieser Ebene.

Für deren Durchschnitt mit der Fläche (2) erhält man

$$\sin (\beta - \alpha) = U (A \cos \alpha \sin \beta - B \sin \alpha \cos \beta) \frac{s^2}{6} + \ldots \quad (3)$$

aus welcher Gleichung α als Funktion von s folgt, wo β konstant ist. In erster Näherung kann man im Koeffizienten von s^2 $\alpha = \beta$ setzen, dies gibt

$$\alpha - \beta = - (A \cos \beta^2 + B \sin \beta^2) (A - B) \sin 2\beta \frac{s^2}{12} \quad \ldots \quad (3')$$

Wird dieser Wert von α in die Gleichungen (2) gesetzt, so erhält man die Koordinaten x, y, z des Punktes des Normalschnittes in der Form

$$x = \xi (s), \quad y = \eta (s), \quad z = \zeta (s) \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Das Linienelement $\mathrm{d}\sigma$ des Normalschnittes ist

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2,$$

wo $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ aus den Gleichungen (4) erhalten werden. Man erhält

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \mathrm{d}s^2 + m^2 \left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right)^2 \mathrm{d}s^2,$$

wobei $m^2 = s^2 - \frac{1}{3} A B s^4 + \ldots$ (es genügt das Anfangsglied s^2). Setzt man für $\frac{d\alpha}{ds}$ aus (3′) den Wert, so erhält man in erster Näherung

$$\sigma - s = (A - B)^2 (A \cos \beta^2 + B \sin \beta^2) \sin 2\beta^2 \frac{s^5}{360} \quad \ldots \quad (5)$$

Ist die Fläche ein Sphäroid, die xz-Ebene der Meridian, so ist

$$A = \frac{1}{R}, \quad B = \frac{1}{N}, \quad A - B = \frac{e^2 \cos \varphi^2}{1 - e^2} B,$$

wo φ die Breite des Koordinatenanfangs ist.

Vernachlässigt man die höheren Potenzen von e, so erhält man

$$\alpha - \beta = -\frac{e^2}{12} \cos \varphi^2 \sin 2\beta \left(\frac{s}{a}\right)^2$$

$$\sigma - s = \frac{e^4}{360} \cos \varphi^4 \sin 2\beta^2 \frac{s^5}{a^4}.$$

Für $s = 1^\circ$, $\varphi = 45^\circ$, $\beta = 45^\circ$ wird $\alpha - \beta = 0''.0174$, $\sigma - s = 3 : 10^{10}$ m.

Auf diese Unterschiede hat zuerst *J. Soldner* 1810 aufmerksam gemacht, die Näherungsausdrücke für das Sphäroid hat *Bessel* (ohne Beweis) in den »Astronomischen Nachrichten« Nr. 3 und 330 mitgeteilt. Obige Darstellung ist nach *J. Weingarten* (in dem Werke von *J. J. Baeyer* »Das Messen auf der sphäroidischen Erdoberfläche« Berlin 1862) gegeben, für das Sphäroid wurden auch die Glieder höherer Ordnung entwickelt. Dessen allgemeine Darstellung der ersten Näherung ist fast übereinstimmend mit der von *Gauß* (Nachlaß, Bd. IX, Notiz [12.], S. 94 und 95), nur die x-Achse hat daselbst eine unbestimmte Lage in der Berührungsebene. *Gauß*' Notiz dürfte aus der Zeit um 1820 stammen.

III.

Von *J. Soldner* und *J. G. F. Bohnenberger* wurde für die Berechnung geodätischer Vermessungen das Erdsphäroid zentral auf die das Sphäroid im Mittelparallel berührende Kugel abgebildet. Diese überaus einfache Abbildung weicht von der

zugehörigen konformen *Gauß*schen in Breite (im Sinne *Zentral-Gauß*) nur um den Betrag

$$-\frac{e^4}{6}(\sin\varphi - \sin\varphi_0)^3 \cos\varphi$$

ab, wo φ die Breite, φ_0 die Mittelbreite bedeutet. Ausführlich wurde diese Abbildung in der »Zeitschrift für Vermessungswesen«, 1908, in den zwei Aufsätzen: »Zur Abbildung des Erdsphäroids« und: »Zur Berechnung sphäroidischer Dreiecke« vom Herausgeber behandelt.

Der Mittelpunkt der Hilfskugel ist der Durchschnittspunkt C_0 der Normalen des Mittelparallels mit der Achse, der Halbmesser die Länge der Normalen

$$N_0 = \frac{a}{(1 - e^2 \sin\varphi_0{}^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ist M ein Punkt des Sphäroids, C der Durchschnitt seiner Normale mit der Achse, so wird der Punkt M auf der Kugel in M' durch Verlängerung der Geraden $C_0 M$ abgebildet. Ist O der Mittelpunkt des Sphäroids, so ist

$$O\,C_0 = e^2 N_0 \sin\varphi_0, \quad O\,C = e^2 N \sin\varphi$$
$$C_0\,C = e^2 (N \sin\varphi - N_0 \sin\varphi_0).$$

Wird der Winkel $C_0 M C = \psi$ gesetzt, so ist

$$\sin\psi = \frac{C_0\,C \cos\varphi}{C_0\,M}.$$

Ist φ' die *sphärische* Breite des Punktes M, so ist

$$\varphi = \varphi' + \psi.$$
$$C_0 M^2 = CM^2 - 2\,CM C_0\,C \sin\varphi + C_0\,C^2.$$

Für kleine Werte von $\varphi - \varphi_0$ kann

$$\sin\psi = \psi = e^2(\sin\varphi - \sin\varphi_0)\cos\varphi$$
$$= e^2(\sin\varphi' - \sin\varphi_0)\cos\varphi'.$$

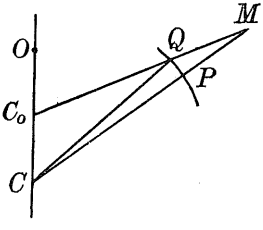
$$C_0 M = CM - CM C_0\,C \sin\varphi, \quad N = a(1 + \tfrac{1}{2} e^2 \sin\varphi^2)$$

gesetzt werden, daraus folgt

$$C_0 M = N_0 - \tfrac{1}{2} a e^2 (\sin\varphi - \sin\varphi_0)^2.$$

IV.

Von einem Punkte M_0 (in beliebiger Höhe), dessen Breite φ_0 ist, wird nach einem Punkte M, dessen Breite φ und Höhe h (über dem Meere) ist, visiert. Der Fußpunkt von M der Normale auf das Sphäroid sei P. Die Visierebene ist durch die Normale des Punktes M_0 und durch den Punkt M bestimmt, die Gerade MC_0 schneide das Sphäroid im Punkte Q.



Die Punkte C_0, C, M, also mit ihnen auch die Punkte P und Q, liegen in einer Ebene (Meridian). Da die Beobachtung in der Vertikalebene $C_0 M_0 M$ geschieht, so wird statt des Punktes P der Punkt Q auf dem Sphäroid erhalten, also ein Breitenfehler $-\triangle\varphi$ gemacht, der durch den Bogen PQ bestimmt werden kann.

Bezeichnet man den Winkel PCQ mit u, so kann wegen der Kleinheit von h gegen C_0M und CM der Winkel $C_0MC = \psi$ gesetzt werden. Ist φ_1 die durch Beobachtung erhaltene Breite, so ist

$$\psi = e^2(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_0)\cos\varphi_1,$$
$$PQ = h\psi = Nu = R\triangle\varphi,$$

also

$$\triangle\varphi = \frac{h}{R}\psi = \frac{h}{R}e^2(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_0)\cos\varphi_1.$$

Wird die sphäroidische Seite zwischen dem Fußpunkte von M_0 und dem Punkte Q auf die Hilfskugel vom Halbmesser N_0 übertragen, so erhält man ein sphärisches Dreieck ABC, wo AB das Bild dieser Seite, und C das Bild des Poles ist. $AC = 90^\circ - \varphi_0$, $BC = 90 - \varphi'_1$. Winkel $C = l$ ist der Längenunterschied. Wird $AB = s$ gesetzt, statt φ'_1 der Kürze halber φ gesetzt, so ist

$$\operatorname{cotg} A = \frac{\operatorname{tang}\varphi\cos\varphi_0}{\sin l} - \sin\varphi_0 \operatorname{cotg} l.$$

Differentiiert man diese Gleichung, wo l konstant ist, so erhält man

$$-\frac{\mathrm{d}A}{\sin A^2} = \frac{\cos\varphi_0\,\mathrm{d}\varphi}{\cos\varphi^2\sin l} = \frac{\cos\varphi_0\,\mathrm{d}\varphi}{\cos\varphi\sin s\sin A}.$$

Nun ist

$$\sin\varphi = \sin\varphi_0 \cos s + \cos\varphi_0 \sin s \cos A,$$

also näherungsweise, $\cos s = 1$ gesetzt,

$$\sin\varphi - \sin\varphi_0 = \cos\varphi_0 \sin s \cos A;$$

daraus folgt

$$\mathrm{d}A = -\frac{\cos\varphi_0{}^2 \sin A \cos A}{\cos\varphi\,(\sin\varphi - \sin\varphi_0)}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Berücksichtigt man die geringen Unterschiede der zusammengehörigen Werte auf dem Sphäroid und der auf der Hilfskugel, so kann $\mathrm{d}\varphi = -\triangle\varphi$ gesetzt werden, setzt man in $\triangle\varphi$ überdies $R = a$, so erhält man die Azimuthverbesserung

$$+\frac{h}{2\,a}\,e^2 \cos\varphi_0{}^2 \sin 2\,A.$$

Diese Verbesserung des Azimuths wegen der Höhe h des Objektes wurde von *Joan. Theophil. Frider. Bohnenberger* 1826 in seiner Tübinger Universitätsschrift: »De computandis dimensionibus trigonometricis in superficie terrae spheroidica institutis« (übersetzt von *E. Hammer*, Stuttgart, 1885), aber mit unrichtigem Vorzeichen aufgestellt. Im Briefe von *Gauß* an *Olbers*, Göttingen, 14. Mai 1826, erklärt *Gauß*, daß diese Korrektion schon bei mäßigen Höhen immer größer ist als die *Bessel*sche; der größte Betrag in seinem System ist von Lichtenberg zum Brocken — 0″041. Im Nachlaß (Bd. IX, S. 95) wird obige Näherungsformel mitgeteilt. Bei der Landesvermessung des Königreichs Württemberg scheint diese Korrektion vernachlässigt worden zu sein, mindestens wird sie in der Bearbeitung von *C. Kohler* (Stuttgart, 1858) nicht erwähnt.

Liegt der Punkt B östlich von A, so ist der sphärische Winkel A das nordöstliche Azimuth von B. Liegt der Punkt B westlich von A, so ist $360^\circ - A$ das nordöstliche Azimuth von B. *Gauß* zählt in seinen »Untersuchungen« das Azimuth südwestlich, beide Azimuthe unterscheiden sich um $\pm 180^\circ$; die vorige Verbesserungsformel, um das beobachtete Azimuth α (des Punktes M in der Höhe h) auf die Niveaufläche zu reduzieren, wodurch das Azimuth α_0 erhalten wird, bleibt ungeändert.

Zweite Näherung. Mit Vernachlässigung der Glieder mit e^6 erhält man

$$M = \sin M = \frac{C_0\, C \cos\varphi}{M C_0},$$

$$M C_0 = MC - CC_0 \sin\varphi.$$

Vernachlässigt man $e^2 (h : N)^2$, so wird

$$M = C_0\, C \cos\varphi \left(1 + \frac{C_0\, C}{N} \sin\varphi\right) \left(1 - \frac{h}{N}\right).$$

Bezeichnet man mit ψ und ψ_1 die Unterschiede der sphäroidischen und sphärischen Breiten der Punkte P und Q, ist $\chi = 90^\circ - O\, C_0\, Q$ die sphärische Breite von Q, so ist

$$\chi = \varphi + M, \quad \varphi_1 - \chi = \psi_1, \quad M = \psi - \frac{h}{N}\psi;$$

also

$$\triangle\varphi = \varphi_1 - \varphi = \frac{h}{N}\psi + \psi_1 - \psi.$$

Für den Unterschied $\psi_1 - \psi$ genügt es

$$\psi_1 = e^2 (\sin\varphi_1 - \sin\varphi_0) \cos\varphi_1, \quad \psi = e^2 (\sin\varphi - \sin\varphi_0) \cos\varphi$$

zu setzen, damit wird

$$\psi_1 - \psi = e^2 (\cos 2\varphi + \sin\varphi_0 \sin\varphi) \triangle\varphi,$$

wo statt φ auch φ_1 gesetzt werden kann. Damit erhält man

$$\triangle\varphi = \frac{h}{N}\psi \left(1 + e^2 (\cos 2\varphi + \sin\varphi_0 \sin\varphi)\right),$$

wofür auch, da $\varphi - \varphi_0$ selbst im Hochgebirge nur wenige Grade betragen kann,

$$\triangle\varphi = \frac{h}{N}\psi (1 + e^2 \cos\varphi^2)$$

gesetzt werden kann. Wird für ψ sein Wert gesetzt, so erhält man bei Vernachlässigung des Gliedes mit $e^4 (\sin\varphi - \sin\varphi_0)^2$

$$\triangle\varphi = \frac{h}{N} e^2 (1 + e^2) (\sin\varphi - \sin\varphi_0) \cos\varphi.$$

Für größere Entfernungen s setze man

$$\cos s = 1 - \tfrac{1}{2} s^2, \quad \sin s = s;$$

damit wird

$$\sin \varphi - \sin \varphi_0 = \cos \varphi_0 \cos As - \tfrac{1}{2} \sin \varphi_0 s^2.$$

Werden diese Werte in $\mathrm{d}A$ eingesetzt, so erhält man als nordöstliche Azimuthalverbesserung

$$\alpha_0 - \alpha = \frac{h}{2N} e^2 (1 + e^2) (\cos \varphi_0{}^2 \sin 2\alpha - \tfrac{1}{2} s \sin 2\varphi_0 \sin \alpha).$$

Für das südwestliche Azimuth ist im zweiten Gliede das Zeichen + zu nehmen. Das erste Glied ist von der Entfernung unabhängig.

Liegen die Fußpunkte von M_0 und M nahezu in demselben Parallel, so ist im Vorhinein klar, daß diese Verbesserung verschwindend klein ist. In dem auf S. 106 angeführten Werke rechnet *Baeyer* — ohne Aufstellung der Schlußformel — näherungsweise diese Verbesserung für den Fall $h = 1000$ Toisen, $\log s = 4{,}7575$ Toisen, aber für den Breitenunterschied der Punkte M_0 und M von nur 37″,46 (Azimuth 90°); damit fällt das Hauptglied dieser Verbesserung weg. *Baeyer* erhält 0″,0022 und schließt daraus, daß diese Verbesserung nie die Höhe von 0″,01 erreichen wird.

Als Niveaufläche werde die Meeresfläche vorausgesetzt. Im Himalaja kann das erste Glied den Betrag 0″76, das zweite Glied für die Entfernung von 5° (rund 550 km) den Betrag 0″027 (die Größe $\triangle \varphi$ den Betrag 0″13) erreichen.

Für die Visur Genf-Montblanc (Entfernung rund 70 km, nordöstliches Azimuth 90° + 45°) ist das erste Glied — 0″,253, das zweite Glied — 0″,002. Für die Visur vom Gipfel Telegrafo des Monte Baldo nach Montblanc (Entfernung rund 308 km, südwestliches Azimuth 94°) ist das erste Glied — 0″,035, das zweite Glied + 0″,013.