Die geodätische Linie des Sphäroids

und Untersuchung darüber,

wann dieselbe aufhört, kürzeste Linie zu sein.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde,

der hohen naturwissenschaftlichen Facultät

der

Universität zu Tübingen

vorgelegt von

Louis Krüger

aus Elze.

Berlin 1883.

A. W. Schade's Buchdruckerei (L. Schade), Stallschreiberstr. 45/46.

§ 1.

Die Differentialgleichungen für die Länge und Längendifferenz der geodätischen Linie des Rotationsellipsoids sind zuerst von Légendre aufgestellt worden. Lösungen derselben haben Bessel, Gauss, General Baeyer, Hansen, Jacobi u. a. gegeben. Während die ersteren Entwickelungen der sich aus den Differentialgleichungen ergebenden Integrale in Reihen sind, gründet sich die Jacobi'sche von Prof. Luther mitgetheilte Lösung auf die Theorie der elliptischen Funktionen. Im folgenden soll nun zunächst die Berechnung nach der Methode des Herrn Weierstrass ausgeführt werden.

Das Sphäroid entsteht durch Rotation einer Ellipse um ihre kleine Axe. Seine Gleichungen seien:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho \sin\psi \cos\varphi \\ y &= \rho \sin\psi \sin\varphi \\ z &= \sqrt{\rho^2 - c^2}\cos\psi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

wo ρ die halbe grosse Axe und c die Excentricität der Meridianellipse bedeutet. Jedem $\angle\,\varphi$ entspricht ein Meridian, jedem $\angle\,\psi$ durch die Gleichung:

$$\operatorname{ctg}\psi = \frac{\sqrt{\rho^2 - c^2}}{\rho}\operatorname{tg}\eta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

in welcher η die geographische Breite ist, ein Parallelkreis des Sphäroids.

Das Bogenelement ds einer beliebigen auf dem Sphäroid gezogenen Curve ist nach (1):

$$ds = \sqrt{\rho^2 - c^2\sin^2\psi + \rho^2\sin^2\psi\left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^2}\,d\psi \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Soll nun die Curve zwischen 2 Grenzen ψ_0 und ψ_1 eine kürzeste sein, so muss:

$$\int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{ds}{d\psi}\, d\psi$$

zum Minimum werden. Damit dies der Fall sein kann, muss

$$\delta \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{ds}{d\psi}\, d\psi = \int_{\psi_0}^{\psi_1} \rho^2 \sin^2\psi \frac{d\varphi}{ds} \delta \cdot d\varphi = 0 \text{ sein} \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

Ist r der Abstand eines Punktes der Curve von der Umdrehungsaxe, so ist $r = \rho \sin\psi$. Gleichung (4) wird hierdurch:

$$\int_{\psi_0}^{\psi_1} r^2 \frac{d\varphi}{ds} d \cdot \delta\varphi = 0,$$

woraus durch theilweise Integration folgt:

$$\left| r^2 \frac{d\varphi}{ds} \cdot \delta\varphi \right|_{\psi_0}^{\psi_1} - \int_{\psi_0}^{\psi_1} \delta\varphi \cdot d\left(r^2 \frac{d\varphi}{ds}\right) = 0.$$

An den Grenzen ist $\delta\varphi = 0$, das erste Glied dieser Gleichung ist mithin Null, daher:

$$\int_{\psi_0}^{\psi_1} \delta\varphi \cdot d\left(r^2 \frac{d\varphi}{ds}\right) = 0.$$

Diese Gleichung wird nur dann für jedes $\delta\varphi$ erfüllt, wenn

$$d\left(r^2 \frac{d\varphi}{ds}\right) = 0 \text{ oder}$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = r_0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

ist, wo r_0 eine Constante bedeutet. Die Gleichung 5 ist die Differentialgleichung der geodätischen Linie. Dieselbe ist so lange eine kürzeste, als die zweite Variation $\delta^2 \int ds$ positiv ist.

Bezeichnet man mit ϑ das Azimuth in einem beliebigen Punkte der geodätischen Linie, so ist:

$$\sin\vartheta = \frac{r\, d\varphi}{ds}.$$

Für Gleichung (5) lässt sich daher auch schreiben:

$$r \sin \vartheta = r_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Wird $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, so ist $r = r_0$, d. h. r_0 ist der Radius desjenigen Parallelkreises, welcher von der geodätischen Linie berührt wird.

Setzt man in Gleichung (5) für r und ds die Werthe ein, so erhält man:

$$\frac{\rho^2 \sin^2 \psi \frac{d\varphi}{d\psi}}{\sqrt{\rho^2 - c^2 \sin^2\psi + \rho^2 \sin^2\psi \left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^2}} = r_0.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{r_0}{\rho \sin\psi} \sqrt{\frac{\rho^2 - c^2 \sin^2\psi}{\rho^2 \sin^2\psi - r_0^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

und wenn für $d\varphi$ der Werth aus Gleichung (5) eingesetzt wird:

$$\frac{ds}{d\varphi} = \rho \sin \psi \sqrt{\frac{\rho^2 - c^2 \sin^2\psi}{\rho^2 \sin^2\varphi - r_0^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Für die Wurzel ist das positive Zeichen zu nehmen, wenn man festsetzt, dass ψ wächst, wenn s und φ wachsen.

Die Integrale der Gleichungen (7) und (8) sind:

$$\varphi = \frac{r_0}{\rho} \int\limits_{\psi_0}^{\psi_1} \sqrt{\frac{\rho^2 - c^2 \sin^2\psi}{\rho^2 \sin^2\psi - r_0^2}} \, \frac{d\psi}{\sin\psi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

$$s = \rho \int\limits_{\psi_0}^{\psi_1} \sin \psi \sqrt{\frac{\rho^2 - c^2 \sin^2\psi}{\rho^2 \sin^2\psi - r_0^2}} \, d\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

§ 2.

Soll die geodätische Entfernung zweier Punkte auf dem Sphäroid bestimmt werden, so muss man zunächst den Werth der Constanten r_0, also den Radius desjenigen Parallelkreises, welcher von der geodätischen Linie berührt wird, kennen. Die Berechnung von r_0 aus Gleichung (9), § 1, soll in folgender Weise geschehen. Wird in dieselbe $\frac{c}{\rho} = \varepsilon$, $\frac{\rho^2}{r_0^2} = \mu$ und $\sin^2\psi = x$ gesetzt, so geht sie über in:

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x} \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2 x}{-\mu x^2 + (\mu+1)x - 1}} \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Setzt man:

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} \left(1 - \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2 x}{-\mu x^2 + (\mu+1)x - 1}}\right)\frac{dx}{x} \quad \ldots \quad (2),$$

so ist:

$$\varphi + \Phi = \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x\sqrt{-\mu x^2 + (\mu+1)x - 1}}.$$

Für x wird eine neue Variable durch die Gleichung $x = \frac{1}{1+y^2}$ eingeführt; y ist also $\operatorname{ctg}\psi$, da $x = \sin^2\psi$ ist.

Durch diese Substitution erhält man:

$$\varphi + \Phi = -\tfrac{1}{2}\int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{\mu - 1 - y_2}} = \Big|\arc\sin\frac{y}{\sqrt{\mu-1}}\Big|_{y_1}^{y_0}.$$

Es sei für den Augenblick:

$$\sqrt{\mu-1}\,\sin\alpha_1 = y_1 \text{ und } \sqrt{\mu-1}\,\sin\alpha_0 = y_0.$$

Dann ist:

$$\varphi + \Phi = \alpha_0 - \alpha_1,$$

und

$$\sin^2(\varphi+\Phi) = \sin^2\alpha_0 + \sin^2\alpha_1 - 2\sin\alpha_0\sin\alpha_1\cos(\alpha_0-\alpha_1)$$
$$= \frac{y_0^2 + y_1^2 - 2y_0 y_1\cos(\varphi+\Phi)}{\mu - 1},$$

woraus folgt, da $y = \operatorname{ctg}\psi$ ist,

$$\mu - 1 = \frac{\operatorname{ctg}^2\psi_0 + \operatorname{ctg}^2\psi_1 - 2\operatorname{ctg}\psi_0\operatorname{ctg}\psi_1\cos(\varphi+\Phi)}{\sin^2(\varphi+\Phi)} \quad \ldots \quad (3).$$

Die in der Gleichung für Φ vorkommende Wurzel lässt sich nach dem binomischen Satze entwickeln, da sowohl x als auch ε^2 kleiner als 1 ist.

$$1 - \sqrt{1-\varepsilon^2 x} = \frac{1}{2}\varepsilon^2 x + \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\varepsilon^4 x^2 + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\varepsilon^6 x^3 + \ldots$$

Berücksichtigt man, dass:

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{-\mu x^2+(\mu+1)x-1}} = -\frac{x^{n-1}\sqrt{\quad}}{n\mu} + \frac{\mu+1}{\mu}\,\frac{n-\frac{1}{2}}{n}\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{\quad}} - \frac{n-1}{n\mu}\int\frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{\quad}}$$

und:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-\mu x^2+(\mu+1)x-1}} = -\frac{1}{\sqrt{\mu}} \text{ arc sin } \frac{(1-2x)\mu+1}{\mu-1} = -\frac{1}{\sqrt{\mu}} \text{ arc sin } \frac{1+\mu\cos 2\psi}{\mu-1};$$

$$\sqrt{-\mu x^2+(\mu+1)x-1} = \cos\psi\sqrt{\mu\sin^2\psi-1}$$

ist, so ergiebt sich für Φ:

$$\Phi = -\Bigg|\left\{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \frac{\mu+1}{2\mu}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^4 + \frac{3\mu-1}{4\mu}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^6 + \dots\right\}\frac{1}{\sqrt{\mu}} \text{ arc sin } \frac{1+\mu\cos 2\psi}{\mu-1}$$

$$+\left\{\frac{1}{\mu}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^4 + 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^6\left(\frac{\sin^2\psi}{2\mu} - \frac{3}{4}\,\frac{\mu+1}{\mu^2}\right) + \dots\right\}\cos\psi\sqrt{\mu\sin^2\psi-1}\,\Bigg|_{x_0}^{x_1} \quad . \quad (4).$$

Für das Erdsphäroid kann man schon die in ε^4 multiplicirten Glieder vernachlässigen. Man erhält daher für dasselbe, wenn man:

$$\left.\begin{aligned}\sin\zeta_1 &= \frac{1+\mu\cos 2\psi_1}{\mu-1}\\ \sin\zeta_0 &= \frac{1+\mu\cos 2\psi_0}{\mu-1}\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

setzt:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2(\zeta_0-\zeta_1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6).$$

Die erste Annäherung an μ erhält man, wenn man schon die mit ε^2 multiplicirten Glieder vernachlässigt. Unter dieser Voraussetzung wird Gleichung (5):

$$\mu - 1 = \frac{\operatorname{ctg}^2\psi_0 + \operatorname{ctg}^2\psi_1 - 2\operatorname{ctg}\psi_0\operatorname{ctg}\psi_1\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\;{}^{*)} \quad . \; . \; . \; . \quad (7).$$

Das hieraus erhaltene μ setzt man in Gleichung (4) resp. (6), wodurch Φ gefunden wird. Gleichung (3) giebt dann eine zweite Annäherung an μ. In dieser Weise fährt man fort, bis ein hinreichend genauer Werth von μ gefunden ist. Ist μ bestimmt, so giebt die Gleichung: $\mu = \frac{\rho^2}{r_0^2}$, $r_0 = \frac{\rho}{\sqrt{\mu}}$, den Radius des von der geodätischen Linie berührten Parallelkreises. Das

---

*) Siehe Schellbach, Elliptische Funktionen, S. 365.

Azimuth der geodätischen Linie in einem beliebigen Punkte findet man aus Gleichung (6), § 1:

$$\sin\vartheta = \frac{r_0}{r} = \frac{r_0}{\rho\sin\psi} = \frac{1}{\sqrt{\mu}\,\sin\psi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

§ 3.

Um die Integration für die Bogenlänge und die Längendifferenz auszuführen, setze man in die Gleichungen (9) und (10), § 1, $\rho^2\sin^2\psi = z$, also $d\psi = \frac{dz}{2\sqrt{z}\sqrt{\rho^2 - z}}$.

Dieselben gehen hierdurch über in:

$$s = -\frac{\varepsilon}{2}\int_{z_0}^{z_1} \frac{z - \frac{\rho^4}{c^2}}{\sqrt{\left(z - \frac{\rho^4}{c^2}\right)(z - \rho^2)(z - r_0^2)}}\, dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

$$\varphi = -\frac{r_0\varepsilon}{2}\int_{z_0}^{z_1} \frac{z - \frac{\rho^4}{c^2}}{\sqrt{\left(z - \frac{\rho^4}{c^2}\right)(z - \rho^2)(z - r_0^2)}} \cdot \frac{dz}{z}$$

$$= -\frac{r_0\varepsilon}{2}\int_{z_0}^{z_1} \frac{\left(1 - \frac{\rho^4}{c^2 z}\right) dz}{\sqrt{\left(z - \frac{\rho^4}{c^2}\right)(z - \rho^2)(z - r_0^2)}} \quad (2).$$

Nun hat man nach Herrn Professor Weierstrass

$$\frac{dz}{\sqrt{\left(z - \frac{\rho^4}{c^2}\right)(z - \rho^2)(z - \rho_0^2)}}$$

auf die Form

$$\frac{ds}{\sqrt{4(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3)}} = \frac{ds}{\sqrt{S}}$$

zu bringen, wo $e_1 > e_2 > e_3$ und $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ ist. Diese Form ergiebt sich, wenn man setzt:

$$z = 4\left[s + \tfrac{1}{3}\left(\frac{\rho^4}{c^2} + \rho^2 + r_0^2\right)\right]$$

und:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{4}\left[\frac{\rho^4}{c^2}-\left(\frac{\rho^4}{c^2}+\rho^2+r_0{}^2\right)\frac{1}{3}\right]&=\frac{1}{12}\left(\frac{2\rho^4}{c^2}-\rho^2-r_0{}^2\right)=e_1\\ \frac{1}{4}\left[\rho^2-\left(\frac{\rho^4}{c^2}+\rho^2+r_0{}^2\right)\frac{1}{3}\right]&=\frac{1}{12}\left(2\rho^2-\frac{\rho^4}{c^2}-r_0{}^2\right)=e_2\\ \frac{1}{4}\left[r_0{}^2-\left(\frac{\rho^4}{c^2}+\rho^2+r_0{}^2\right)\frac{1}{3}\right]&=\frac{1}{12}\left(2r_0{}^2-\frac{\rho^4}{c^2}-\rho^2\right)=e_3\end{aligned}\right\}\quad (3).$$

Dadurch wird:

$$\left.\begin{aligned}z-\frac{\rho^4}{c^2}&=4(s-e_1)\\ z-\rho^2&=4(s-e_2)\\ z-r_0{}^2&=4(s-e_3)\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad (4)$$

nnd daher:

$$\mathfrak{s}=-2\varepsilon\int_{s_0}^{s_1}\frac{s-e_1}{\sqrt{S}}\,ds\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (5),$$

$$\varphi=-\frac{r_0\varepsilon}{2}\int_{s_1}^{s_1}\left(1-\frac{\rho^4}{c^2}\,\frac{1}{s-e_1+\frac{\rho^4}{c^2}}\right)\frac{ds}{\sqrt{S}}\quad\ldots\ldots\quad (6),$$

s_0 und s_1 sind die Werthe von s, welche z_0 und z_1 entsprechen.

§ 4.

Zunächst soll die Integration von $\mathfrak{s}$ ausgeführt werden. Das Integral der Differentialgleichung:

$$\frac{ds}{du}=+\sqrt{S}\quad\text{oder}\quad\frac{ds}{\sqrt{S}}=du$$

ist $s=\wp u$, welches für $u=0$ ∞ wird, und dessen reelle Periode 2ω, und dessen imaginäre $2\omega'$ ist. Sind u_1 und u_0 die Werthe von u, welche den Werthen s_1 und s_0 entsprechen, und welche sich aus den Gleichungen:

$$\text{nnd}\qquad \left.\begin{aligned}\wp u_1&=s_1\\ \wp u_0&=s_0\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (1)$$

ergeben, so hat man für $\mathfrak{s}$:

$$\mathfrak{s}=2\varepsilon\int_{u_0}^{u_1}-(\wp u-e_1)\,du\quad\ldots\ldots\ldots\quad (2).$$

Diese Gleichung lässt sich sofort integriren, denn

$$\wp(u, \omega, \omega') = -\frac{d\frac{\sigma'(u, \omega, \omega')}{\sigma(u, \omega, \omega')}}{du},$$

folglich:

$$s = 2\varepsilon \left| \frac{\sigma'(u, \omega, \omega')}{\sigma(u, \omega, \omega')} + e_1 u \right|_{u_0}^{u_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

§ 5.

Ehe zur weitern Entwickelung von s geschritten werden kann, hat man die Werthe von u zu untersuchen, welche die Gleichung (1) des vorigen Paragraphen ergeben.

Der Zusammenhang zwischen den σ- und ϑ-Funktionen ist folgender:

$$\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)(e_1 - e_3)}\,\sigma u = \Theta u = e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}\vartheta\left(\frac{u\pi}{2\omega},\ \tau\right)$$

$$= 2\sum_0^\infty{}_n (-1)^n h^{(n+\frac{1}{2})^2} \sin\frac{2(n+1)u\pi}{2\omega}$$

$$\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_2 - e_3}\quad \sigma_1 u \quad = \Theta_1 u = e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}\vartheta_1\left(\frac{u\pi}{2\omega},\ \tau\right)$$

$$= 2\sum_0^\infty{}_n h^{(n+\frac{1}{2})^2}\cos(2n+1)\frac{u\pi}{2\omega}$$

$$\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_1 - e_3}\quad \sigma_2 u \quad = \Theta_2 u = e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}\vartheta_2\left(\frac{u\pi}{2\omega},\ \tau\right)$$

$$= 1 + 2\sum_0^\infty{}_n h^{nn}\cos\frac{2nu\pi}{2\omega}$$

$$\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_1 - e_2}\quad \sigma_3 u \quad = \Theta_3 u = e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}\vartheta_3\left(\frac{u\pi}{2\omega},\ \tau\right)$$

$$= 1 + 2\sum_0^\infty{}_n (-1)^n h^{nn}\cos\frac{2nu\pi}{2\omega}.$$

$\tau = \frac{\omega'}{\omega}$, $\eta = \frac{\sigma'\omega}{\sigma\omega}$ erhält man aus der Gleichung:

$$2\eta\omega = \frac{\pi}{6}\,\frac{1 - 3^3 h^2 + 5^3 h^6 \ldots}{1 - 3h^2 + 5h^6 \ldots}.$$

Die zur Berechnung von u aus $\wp u = s$ nöthigen Stücke sind nach Herrn Prof. Weierstrass:

$$\frac{\vartheta_1(0, 4\tau)}{\vartheta_2(0, 4\tau)} = l = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}} = \frac{m'}{m} \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

$$\frac{\vartheta_1\left(\frac{2u\pi}{2\omega}, 4\tau\right)}{\vartheta_2\left(\frac{2u\pi}{2\omega}, 4\tau\right)} = l \cdot \frac{\sigma_1(2u, \omega, 4\omega')}{\sigma_2(2u, \omega, 4\omega')} = l \cdot \xi = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3}\sqrt{s - e_2} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}\sqrt{s - e_3}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3}\sqrt{s - e_2} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}\sqrt{s - e_3}} \quad (2).$$

$$\frac{m^2}{4}\,du = -\frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}\sqrt{1 - l^4\xi^2}},$$

$$\frac{m^2 u}{2} = \frac{L}{i}\,ln(\xi + i\sqrt{1 - \xi^2})$$

$$+ \sqrt{1 - \xi^2}\left[(L - L_0)\,\xi + \frac{2}{3}\,(L - L_1)\,\xi^3 + \frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}(L - L_2)\,\xi^5 + \ldots\right] \quad (3),$$

$$L = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 l^4 + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 l^8 + \left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2 l^{12} + \ldots$$

$$L_0 = 1,$$

$$L_1 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 l^4,$$

. . .

. . .

Das Vorzeichen von $\sqrt{1 - \xi^2}$ in Gleichung (3) wird bestimmt durch:

$$\frac{\sqrt{S}\,(e_2 - e_3)}{(s - e_2)(s - e_3)} = \frac{m m_1}{2}\,\frac{\sqrt{1 - \xi^2}\,\sqrt{1 - l^4\xi^2}}{1 - l^2\xi^2} \quad \ldots\ldots \quad (4).$$

Von diesen Formeln können wir bei der Wahl der e, welche wir getroffen haben, keine Anwendung machen, da durch die daraus folgende Grössenordnung

$$e_1 > e_2 > s > e_3$$

Formel (2) für ξ einen imaginären Werth ergiebt*).

---

*) Will man die Formeln (1) bis (4) benutzen, so bringe man z. B. s auf die Form:

$$s = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{-1}}\int_{z_0}^{z_1} \frac{\frac{\rho^4}{c^2} - z}{\left(\frac{\rho^4}{c^2} - z\right)(\rho^2 - z)(r_0{}^2 - z)}\,dz$$

Zu den Formeln (1) bis (4) erhält man analoge, wenn man ω mit ω' vertauscht:

$$\frac{\omega}{\omega'} = \tau'$$

$$\frac{\vartheta_1(o, -4\tau')}{\vartheta_2(o, -4\tau')} = l_1 = \frac{m_1'}{m_1} = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_2 - e_3}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_2 - e_3}} \quad \ldots \quad (5).$$

$$\frac{\vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega'}, -4\tau'\right)}{\vartheta_2\left(\frac{u\pi}{\omega'}, -4\tau'\right)} = \frac{\vartheta_3\left(\frac{u\pi}{\omega}, 4\tau\right)}{\vartheta_2\left(\frac{u\pi}{\omega}, 4\tau\right)} = l_1 \frac{\sigma_3(2u, \omega, 4\omega')}{\sigma_2(2u, \omega, 4\omega')}$$

$$= l_1 \xi'_1 = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3}\sqrt{s - e_2} - \sqrt[4]{e_2 - e_3}\sqrt{s - e_1}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3}\sqrt{s - e_2} + \sqrt[4]{e_2 - e_3}\sqrt{s - e_2}} \quad (6).$$

Diese Gleichung giebt, wenn $\sqrt[4]{e_1 - e_3}\sqrt{s - e_2} < \sqrt[4]{e_2 - e_3}\sqrt{s - e_1}$ ist, für $l_1 \xi'_1$ einen negativen echten Bruch. In diesem Falle setze man für u »$u - \omega'$«. Dann erhält man, da:

$$\frac{\sigma_3(2u, \omega, 4\omega')}{\sigma_2(2u, \omega, 4\omega')} = -\frac{\sigma_3[2(u - \omega'), \omega, 4\omega']}{\sigma_2[2(u - \omega'), \omega, 4\omega']},$$

$$l_1 \xi_1 = \frac{\sqrt[4]{e_2 - e_3}\sqrt{s - e_1} - \sqrt[4]{e_1 - e_3}\sqrt{s - e_2}}{\sqrt[4]{e_2 - e_3}\sqrt{s - e_1} - \sqrt[4]{e_1 - e_3}\sqrt{s - e_2}} \quad \ldots \quad (6)^*.$$

$$\left(\frac{m_1'}{2}\right)^2 d[2(u - \omega')] = \frac{d\xi_1}{\sqrt{\xi^2 - 1}\sqrt{1 - l_1^4 \xi_2}}$$

$$2\left(\frac{m'_1}{2}\right)^2 (u - \omega') = L' \, ln(\xi_1 + \sqrt{\xi_1^2 - 1})$$

$$- \sqrt{\xi_1^2 - 1}\,[(L' - L'_0)\xi_1 + \tfrac{2}{3}(L' - L'_1)\xi_1^3 + \ldots] \quad (7),$$

---

und setze dann:

$$-z + \tfrac{1}{3}\left(\frac{\rho^4}{c^2} + \rho^2 + r_0^2\right) = 4s,$$

$$e_1 = \frac{1}{12}\left(\frac{\rho^4}{c^2} + \rho^2 - 2r_0^2\right); \; e_2 = \frac{1}{12}\left(\frac{\rho^4}{c^2} + r_0^2 - 2\rho^2\right); \; e_3 = \frac{1}{12}\left(\rho^2 + r_0^2 - \frac{2\rho^4}{c^2}\right);$$

$$r_0 - z - 4(s - e_1); \; \rho^2 - z = 4(s - e_2); \; \frac{\rho^4}{c^2} - z = 4(s - e_3).$$

Bei dieser Wahl der e giebt aber die rechte Seite der Gleichung (3) einen imaginären Werth. Es müssen daher die ϑ-Funktionen, durch welche s ausgedrückt wird, noch transformirt werden.

wo L' in derselben Weise aus l_1 gebildet ist wie L aus l. Ueber das Vorzeichen von $\sqrt{\xi_1^2-1}$ in Gleichnng (7) entscheidet jetzt:

$$\frac{e_1-e_2}{(s-e_1)(s-e_2)}\sqrt{S}=\frac{m'_1 m'}{2}\,\frac{\sqrt{\xi_1^2-1}\,\sqrt{1-l_1^4\xi_1^2}}{1-l_1^2\xi_1^2}\quad . \;.\; .\; . \quad (8).$$

§ 6.

Setzt man für e nnd $s-e$ die Werthe ans (3) nnd (4), § 4, ein, so hat man znr Bestimmnng von u ans $\wp u = s$:

$$l_1=\frac{\sqrt[4]{\frac{\rho^4}{c^2}-r_0^2}-\sqrt[4]{\rho^2-r_0^2}}{\sqrt[4]{\frac{\rho^4}{c^2}-r_0^2}-\sqrt[4]{\rho^2-r_0^2}}=\frac{\sqrt[4]{\frac{\mu}{\varepsilon^2}-1}-\sqrt[4]{\mu-1}}{\sqrt[4]{\frac{\mu}{\varepsilon^2}-1}-\sqrt[4]{\mu-1}}\quad . \;.\; .\; . \quad (1),$$

wenn für $\frac{\rho^2}{r_0^2}=\mu$ nnd für $\frac{c^2}{\rho^2}=\varepsilon^2$ geschrieben wird. Jetzt ist znnächst zn nntersnchen, ob:

$$\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sqrt[4]{s-e_2}\lesseqgtr\sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sqrt{s-e_1}$$

oder:

$$1\lessgtr\sqrt[4]{\frac{\rho^2-r_0^2}{\frac{\rho^4}{c^2}-r_0^2}}\,\sqrt{\frac{\frac{\rho^4}{c^2}-z}{\rho^2-z}}.$$

$\sqrt[4]{\frac{\rho^2-r_0^2}{\frac{\rho^4}{c^2}-r_0^2}}\,\sqrt{\frac{\frac{\rho^4}{c^2}-z}{\rho^2-z}}$ wird nm so kleiner, je kleiner z ist.

Der kleinste Werth, den $z=\rho^2\sin^2\psi$ erreichen kann, ist r_0^2; der kleinste Werth des Ansdrncks ist daher: $\sqrt[4]{\frac{\frac{\rho^4}{c^2}-r_0^2}{\rho^2-r_0^2}}$. Derselbe ist >1, da $\frac{\rho^4}{c^2}>\rho^2$ ist.

Zur Berechnung von $l_1 \xi_1$ ist mithin Gleichung (6)* zu nehmen.

$$l_1 \xi_1 = \frac{\sqrt[4]{\rho^3 - r_0^2}\,\sqrt{\frac{\rho^4}{c^2} - z} - \sqrt[4]{\frac{\rho^4}{c^2} - r_0^2}\,\sqrt{\rho^2 - z}}{\sqrt[4]{\rho^2 - r_0^2}\,\sqrt{\frac{\rho^4}{c^2} - z} - \sqrt[4]{\frac{\rho^4}{c^2} - r_0^2}\,\sqrt{\rho^2 - z}} \quad . \; . \; . \quad (2).$$

Der kleinste Werth von $l_1 \xi_1$ wird für $z = r_0^2$ erhalten. Derselbe ist:

$$\frac{\sqrt[4]{\frac{\rho^4}{c^2} - r_0^2} - \sqrt[4]{\rho^2 - r_0^2}}{\sqrt[4]{\frac{\rho^4}{c^2} - r_0^2} - \sqrt[4]{\rho^2 - r_0^2}} = l_1.$$

Demnach ist der kleinste Werth, welchen ξ_1 annehmen kann, $= 1$, und zwar erhält ξ_1 diesen Werth im Berührpunkt der geodätischen Linie mit dem Parallelkreise (r_0). Der grösste Werth von $l_1 \xi_1$ findet für $z = \rho^2$ statt; derselbe ist 1. ξ_1 liegt daher zwischen 1 und $\frac{1}{l_1}$, ist also immer grösser als 1.

Die Gleichung (2) lässt sich auch schreiben:

$$l_1 \xi_1 = \frac{\sqrt[4]{\mu - 1}\,\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - \sin^2\psi} - \sqrt[4]{\frac{\mu}{\varepsilon^2} - 1}\,\cos\psi}{\sqrt[4]{\mu - 1}\,\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - \sin^2\psi} - \sqrt[4]{\frac{\mu}{\varepsilon^2} - 1}\,\cos\psi} \quad . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Den Werthen ψ_0 und ψ_1 entsprechend, erhält man aus dieser Formel das zugehörige ξ_1.

Es ist jetzt nach Gleichung (8) des vorigen Paragraphen das Vorzeichen von $\sqrt{\xi_1^2 - 1}$ zu bestimmen. $s - e_1 = z - \frac{\rho^4}{\varepsilon^2}$ und $s - e_2 = z - \rho^2$ sind beide negativ, für $\sqrt{S}$ ist das positive Vorzeichen genommen, ebenso für $\sqrt{1 - l^4 \xi^2}$, da diese nach dem binomischen Satze entwickelt ist. Für $\sqrt{\xi_1^2 - 1}$ ist daher das positive Vorzeichen zu nehmen. Der zu ξ_1 gehörige Werth von u ergiebt sich nun aus Gleichung (7), § 5. Da in dieser das erste Glied $L ln(\xi_1 + \sqrt{\xi_1^2 - 1})$ den Rest überwiegt, so findet man für $u - \omega'$ einen positiven reellen Werth v. Die Auflösungen der Gleichungen

$$\wp u_1 = s_1$$
$$\wp u_0 = s_0$$

sind mithin:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= v_1 + \omega' \\ u_0 &= v_0 + \omega' \end{aligned} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

§ 7.

Werden die eben erhaltenen Werthe von u in den Ausdruck für s gesetzt, so wird derselbe, wenn man für $\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{\Theta'}{\Theta}$ schreibt:

$$s = 2\varepsilon \left| \frac{\Theta'(v+\omega')}{\Theta(v+\omega')} + e_1 v \right|_{v_0}^{v_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1),$$

wo v_0 und v_1 den Werthen ψ_0 und ψ_1 entsprechen.

Nun ist aber:

$$\frac{\Theta'(v+\omega')}{\Theta(v+\omega')} = \frac{\Theta_3'(v)}{\Theta_3(v)} + \eta', \qquad \eta' = \frac{\sigma'\omega'}{\sigma\omega},$$

folglich:

$$s = 2\varepsilon \left\{ \frac{\Theta_3' v_1}{\Theta_3 v_1} - \frac{\Theta_3 v_0}{\Theta_3 v_0} + e_1(v_1 - v_0) \right\} \quad . \; . \; . \; (2).$$

Durch logarithmische Differentiation der Gleichung:

$$\Theta v = e^{\frac{\eta v^2}{2\omega}} \vartheta_3\left(\frac{v\pi}{2\omega}, \tau\right)$$

ergiebt sich:

$$\frac{\Theta_3' v}{\Theta_3 v} = \frac{\eta v}{\omega} + \frac{\pi}{2\omega} \frac{\vartheta_3'\left(\frac{v\pi}{2\omega}, \tau\right)}{\vartheta_3\left(\frac{v\pi}{2\omega}, \tau\right)}.$$

Gleichung (2) wird hierdurch:

$$s = \frac{\varepsilon}{\omega} \left| \pi \frac{\vartheta_3'\left(\frac{v\pi}{2\omega}, \tau\right)}{\vartheta_3\left(\frac{v\pi}{2\omega}, \tau\right)} + 2v(\eta + e_1\omega) \right|_{v_0}^{v_2} \quad . \; . \; . \; . \; (3).$$

§ 8.

Für den Längenunterschied hatte sich ergeben:

$$\varphi = -\frac{r_0\varepsilon}{2} \int_{s_0}^{s_1} \left(1 - \frac{\rho^4}{4c^2} \frac{1}{s - e_1 + \frac{\rho^4}{4c^2}}\right) \frac{ds}{\sqrt{S}}.$$

Es sei n derjenige Werth von u, welcher die Gleichung:

$$\wp n = e_1 - \frac{\rho^4}{4c^2} = e_2 - \rho^2 = e_3 - r_0{}^2 = -\frac{1}{12}\left(\frac{\rho^4}{c^2} + \rho^2 + r_0{}^2\right) \quad . \quad (1)$$

befriedigt. Die Berechnung von n geschieht am besten nach den Formeln (1) bis (4) § 5.

Setzt man $\wp n = s'$, so ist:

$$\left.\begin{aligned} s' - e_1 &= -\frac{1}{4}\frac{\rho^4}{c^2} \\ s' - e_2 &= -\frac{1}{4}\rho^2 \\ s' - e_3 &= -\frac{1}{4}r_0{}^2 \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2),$$

folglich:

$$\wp' n = 2\sqrt{(s' - e_1)(s' - e_2)(s' - e_3)} = \pm \frac{i\rho^3 r_0}{4c} \quad . \ . \ . \ . \quad (3),$$

$$l = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}} = \frac{\sqrt[4]{\rho^2 - r_0{}^2\varepsilon^2} - \sqrt{\rho_1}}{\sqrt[4]{\rho^2 - r_0{}^2\varepsilon^2} + \sqrt{\rho_1}}\,;\ \rho_1{}^2 = \rho^2 - c^2 \quad . \quad (4);$$

$$l\xi = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3}\sqrt{s' - e_2} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}\sqrt{s' - e_3}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3}\sqrt{s' - e_2} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}\sqrt{s' - e_3}} = \frac{\rho\sqrt[4]{\rho^2 - r_0{}^2\varepsilon^2} - r_0\sqrt{\rho_1}}{\rho\sqrt[4]{\rho^2 - r_0{}^2\varepsilon^2} + r_0\sqrt{\rho_1}} \quad . \quad (5),$$

$\frac{r_0}{\rho}$ ist ein echter Bruch, mithin:

$$1 - \frac{r_0}{\rho}\left(\frac{\rho_1{}^2}{\rho^2 - r_0{}^2\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{4}} > 1 - \left(\frac{\rho_1{}^2}{\rho^2 - r_0{}^2\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$1 + \frac{r_0}{\rho}\left(\frac{\rho_1{}^2}{\rho^2 - r_0{}^2\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{4}} > 1 + \left(\frac{\rho_1{}^2}{\rho^2 - r_0{}^2\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{4}},$$

daher:

$$l\xi > l$$
$$\xi > 1.$$

Zunächst ist nun nach (4), § 5 das Vorzeichen von $\sqrt{1 - \xi^2}$ zu bestimmen. Setzt man fest, dass für $\wp' n = \sqrt{S} = +\frac{i\rho^3 r_0}{4c}$ genommen werden soll, so hat man, da $s' - e_2$ wie auch $s' - e_3$ negativ ist, für $\sqrt{1 - \xi^2}$ das Minusvorzeichen zu nehmen. Da nun $ln(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) = -ln(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})$ ist, so ergiebt sich n aus der Gleichung:

$$\frac{\rho}{2c}\left(\sqrt[2]{\rho^2 - r_0{}^2\varepsilon^2} + \sqrt{\rho_1}\right)^2 n = L\,i\,ln(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})$$
$$- i\sqrt{\xi^2 - 1}\,[(L - L_0)\xi + \ldots] \quad . \quad . \quad (6)$$

woraus folgt:

$$n = iv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

wo v ein positiv reeller Werth ist.

Das Integral der Differentialgleichung:

$$\frac{ds}{du} = +\sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)} = +\sqrt{S}$$

sei nun $\wp(u-n)$, welches für $u = n$ ∞ wird und dessen Periodenpaar 2ω und $2\omega'$ ist. Den Werthen s_0 und s_1 mögen die Werthe u_0 und u_1 entsprechen, d. h.:

$$\wp(u_1 - n) = s_1$$
$$\wp(u_0 - n) = s_0.$$

Nach (3), § 6 sind die Lösungen dieser Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} u_1 - n &= \omega' + v_1 \\ u_0 - n &= \omega' + v_0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Durch Einführung der Werthe $\wp n = e_1 - \frac{\rho^4}{4c^2}$, $\wp(u-n) = s$ und $\frac{ds}{\sqrt{S}} = du$ verwandelt sich φ in:

$$\varphi = -\frac{r_0 \varepsilon}{2}\int_{u_0}^{u_1}\left(1 - \frac{\rho^4}{4c^2}\,\frac{1}{\wp(u-n) - \wp n}\right) du$$

oder in Folge der Gleichung:

$$\frac{1}{\wp(u-n) - \wp n} = \frac{1}{\wp' n}\left\{\frac{\sigma'(2n-u)}{\sigma(2n-u)} - \frac{\sigma' u}{\sigma u} + \frac{2\sigma' n}{\sigma n}\right\}$$

in:

$$\varphi = -\frac{r_0 \varepsilon}{2}\int_{u_0}^{u_1}\left[1 - \frac{\rho^4}{4c^2}\,\frac{1}{\wp' n}\left(\frac{\sigma'(2n-u)}{\sigma(2n-u)} - \frac{\sigma' u}{\sigma u} + \frac{2\sigma' n}{\sigma n}\right)\right] du.$$

Die Integration lässt sich jetzt sofort ausführen; man erhält:

$$\varphi = -\frac{r_0 c}{2\rho}\left|\left(1 - \frac{\rho^4}{4c^2}\cdot\frac{2}{\wp' n}\,\frac{\sigma' n}{\sigma n}\right) u - \frac{\rho^4}{4c^2}\,\frac{1}{\wp' n}\; ln\, \frac{\sigma(2n-u)}{\sigma u}\right|_{u_0}^{u_1},$$

oder da $\wp' n = \frac{i\rho^3 r_0}{4c}$ und $u = v + n + \omega'$:

$$\varphi = -\left|\left(\frac{r_0 \varepsilon}{2} + i\,\frac{\sigma' n}{\sigma n}\right) u + \frac{i}{2}\; ln\, \frac{\sigma(n - v - \omega')}{\sigma(n + v + \omega')}\right|_{v_0}^{v_1}.$$

Nun ist:

$$\sigma(u+\omega') = e^{\eta' u}\sigma\omega' \, . \, \sigma_3 u; \quad \eta' = \frac{\sigma'\omega}{\sigma\omega}$$

und

$$\sigma(-u) = -\sigma u,$$

folglich:

$$\varphi = (v_0 - v_1)\left(\frac{r_0 \varepsilon}{2} + i\frac{\sigma' n}{\sigma n}\right) + \frac{i}{2}\, ln\, \frac{\sigma_3(v_1+n)\sigma_3(v_0-n)}{\sigma_3(v_1-n)\sigma_3(v_0+n)} \quad . \quad . \quad (9).$$

Statt der σ-Funktionen sollen jetzt ϑ-Funktionen eingeführt werden:

$$\frac{\sigma' n}{\sigma n} = \frac{\eta n}{\omega} + \frac{\pi}{2\omega}\,\frac{\vartheta'\left(\frac{n\pi}{2\omega}, \tau\right)}{\vartheta\left(\frac{n\pi}{2\omega}, \tau\right)};$$

$$\sigma_3(v \pm n) = C e^{\eta\frac{(v\pm n)^2}{2\omega}}\,\vartheta_3\left(\frac{v \pm n}{2\omega}\pi, \tau\right),$$

wo C eine Constante bedeutet,

$$\varphi = -\frac{r_0\varepsilon}{2}(v_1 - v_0) - \frac{i\pi}{2\omega}\,\frac{\vartheta'\left(\frac{n\pi}{2\omega}, \tau\right)}{\vartheta\left(\frac{n\pi}{2\omega}, \tau\right)}(v_1 - v_0)$$

$$+ \frac{i}{2}\ln\frac{\vartheta_3\left(\frac{v_1+n}{2\omega}\pi, \tau\right)\vartheta_3\left(\frac{v_0-n}{2\omega}\pi, \tau\right)}{\vartheta_3\left(\frac{v_0+n}{2\omega}\pi, \tau\right)\vartheta_3\left(\frac{v_1-n}{2\omega}\pi, \tau\right)} \quad (10).$$

$n = i\nu$

Setzt man $n = \omega' + a$, also $a = i\nu - \omega'$, so kann man für φ auch schreiben:

$$\varphi = \frac{i}{2}\ln\frac{\vartheta\left(\frac{v_1+a}{2\omega}\pi, \tau\right)\vartheta\left(\frac{v_0+a}{2\omega}\pi, \tau\right)}{\vartheta\left(\frac{v_0+a}{2\omega}\pi, \tau\right)\vartheta\left(\frac{v_1-a}{2\omega}\pi, \tau\right)}$$

$$-\frac{i\pi}{2\omega}\,\frac{\vartheta'_3\left(\frac{a\pi}{2\omega}, \tau\right)}{\vartheta_3\left(\frac{a\pi}{2\omega}, \tau\right)}(v_1 - v_0) - \frac{r_0\varepsilon}{2}(v_1 - v_0) \quad (11).$$

Die aus dem Nachlasse Jacobi's von Prof. Luther im 53. Bande des Crelle'schen Journals mitgetheilte Formel für φ enthält das letzte Glied des vorstehenden Ausdrucks nicht, die Form ist sonst genau dieselbe.

§ 9.

Die in § 6 angegebenen Formeln zur Berechnung von u resp. v bleiben ungeändert, wenn man für ψ »$-\psi$, $\pi-\psi$, $2\pi-\psi$ u. s. w.« setzt*). Demnach könnte man glauben, dass die Formeln für s und φ nur dann brauchbar seien, wenn ψ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, d. h. wenn der Anfangs- und Endpunkt der geodätischen Linie zwischen dem Berührpunkt mit dem Parallelkreise (r_0) und dem Aequator liegt. Es soll nun untersucht werden, welche Werthe v in s und φ beigelegt werden müssen, wenn das Letztere nicht der Fall ist.

Im Berührpunkte der geodätischen Linie mit dem Parallelkreise ist $v=0$, wie aus (7), § 5 folgt, denn in diesem Punkte ist $\xi_1=0$. Dasselbe findet man auch in folgender Weise. Die Substitutionsgleichung

$$4(s-e_3)=z-r_0^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ((4), \S\ 3)$$

giebt für $z=r_0^2$

$$s=\wp u=e_3,$$

woraus folgt:

$$u=\omega'.$$

Da nun nach (3), § 6 $u=\omega'+v$ ist, so muss $v=0$ sein. Auf dem Aequator ist $z=\rho^2$. Die Gleichung:

$$4(s-e_2)=z-\rho^2$$

wird aber für diesen Werth:

$$s=\wp u=e_2,$$

deren Lösung:

$$u=\omega+\omega'$$

oder:

$$v+\omega'=\omega+\omega'$$
$$v=\omega$$

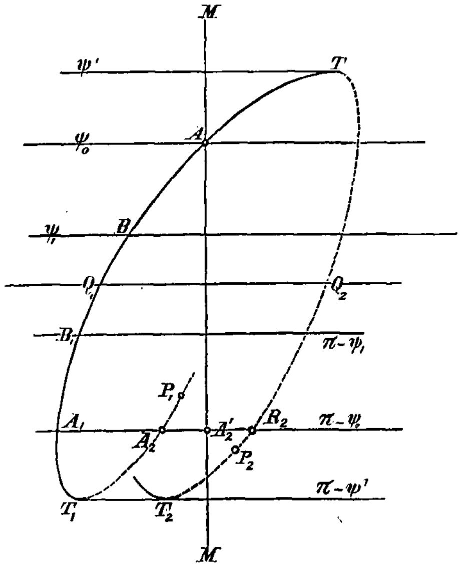
ist. v hat mithin auf dem Aequator den Werth ω.

Wir wollen nun die geodätische Linie, welche den Parallelkreis berührt, der einem $\angle\,\psi'$ entspricht, in dem Punkte A auf der nördlichen Hälfte des Sphäroids beginnen lassen und den nach Süden gerichteten Theil ver-

---

*) Da $z=\rho^2\sin^2\psi$ ist.

folgen. Derselbe schneidet den Aequator in Q_1, berührt dann in T_1 den zu (ψ') symmetrisch liegenden Parallelkreis, schneidet dann wieder den Aequator in Q_2 u. s. w. Es soll die Länge der geodätischen Linie $A B_1$ berechnet werden. Im Anfangspunkt, welcher auf einem Parallelkreise liegt, der den $\angle\ \psi_0$ entspricht, möge v den Werth v_0 haben. Zum Endpunkt B_1 gehöre der Winkel $(\pi - \psi_1)$, der dem Winkel ψ_1 entsprechende Werth von v sei v_1. Da



$$M Q_1 B_1 = Q_1 B = - B Q_1,$$

so ist:

$$A B_1 = A Q_1 - B Q_1,$$

$$A Q_1 = 2 \varepsilon \left(-\frac{\pi}{2\omega} \frac{\vartheta'_3 v_0}{\vartheta_3 v_0} + \left(e_1 + \frac{\eta}{\omega}\right)(\omega - v_0)\right),$$

denn $\dfrac{\vartheta'_3 \omega}{\vartheta_3 \omega} = 0$

$$- B Q_1 = - 2 \varepsilon \left(\frac{\pi}{2\omega} \frac{\vartheta'_3 v_1}{\vartheta_3 v_1} + \left(e_1 + \frac{\eta}{\omega}\right)(v_1 - \omega)\right),$$

folglich:

$$A B_1 = 2 \varepsilon \left\{ -\frac{\pi}{2\omega} \left(\frac{\vartheta'_3 v_1}{\vartheta_3 v_1} + \frac{\vartheta'_3 v_0}{\vartheta_3 v_0}\right) + \left(e_1 + \frac{\eta}{\omega}\right)(2\omega - v_1 - v_0) \right\}$$

$$= 2 \varepsilon \left| \frac{\pi}{2\omega} \frac{\vartheta'_3 v}{\vartheta_3 v} + \left(e_1 + \frac{\eta}{\omega}\right) v \right|_{v_1}^{2\omega - v_1} \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

(Zur Abkürzung ist für $\frac{v\pi}{2\omega}$ »v« geschrieben.)

Aus dieser Formel folgt, dass der dem Winkel $\pi - \psi_1$ entsprechende Werth von v »$2\omega - v_1$« ist. Für den Berührungspunkt T_1 mit dem Parallelkreise $\pi - \psi'$ ist $v = 2\omega$, denn für T ist $v_1 = 0$.

Für die Länge der geodätischen Linie $A B_2$, zu deren Endpunkt der $\angle\ (\pi + \psi_0)$ gehört, lässt sich schreiben:

$$A B_3 = A T_1 + T_1 B_2 = A T_1 + T B.$$

$$A T_1 = 2 \varepsilon \left\{ -\frac{\pi}{2\omega} \frac{\vartheta_3' v_0}{\vartheta_3 v_0} + \left(e_1 + \frac{\eta}{\omega}\right)(2\omega - v_0) \right\}$$

$$T B = 2 \varepsilon \left\{ \frac{\pi}{2\omega} \frac{\vartheta_3' v_1}{\vartheta_3 v_1} + \left(e_1 + \frac{\eta}{\omega}\right) v_1 \right\}$$

mithin:

$$A B_3 = 2\varepsilon \left| \frac{\pi}{2\omega} \frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} + \left(e_1 + \frac{\eta}{\omega}\right) v \right|_{v_0}^{2\omega + v_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Hieraus folgt: der dem $\angle\,(\pi + \psi_1)$ entsprechende Werth von v ist $2\omega + v_1$. Für den Schnittpunkt Q_2 mit dem Aequator ist $v = 3\omega$, denn für Q_1 ist $v = \omega$. In dieser Weise kann man fortfahren.

§ 10.

Die geodätische Linie ist so lange eine kürzeste, als die zweite Variation ihrer Länge einen positiven Werth hat. Sie hört auf, kürzeste Linie zu sein, wenn ihre zweite Variation verschwindet oder ∞ wird.

Nach Jacobi lässt sich die zweite Variation der Länge der geodätischen Linie auf die Form:

$$\delta^2 \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{ds}{d\psi}\, d\psi = \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{\rho^2 \sin^2\psi - r_0^2}{\rho \sin\psi} \sqrt{\frac{\rho^2 \sin^2\psi - r_0^2}{\rho^2 - c^2 \sin^2\psi}} \left\{ d\,\frac{\delta\varphi}{d\psi} - \frac{c_1 \dfrac{d\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}}{d\psi} \cdot \delta\varphi}{c_1 \dfrac{\partial\varphi}{\partial r_0} + c_2} \right\}^2 dt$$

bringen. Das Vorzeichen derselben ist nur von dem Ausdrucke

$$\frac{\rho^2 \sin^2\psi - r_0}{\rho \sin\psi} \sqrt{\frac{\rho^2 \sin^2\psi - r_0^2}{\rho^2 - c^2 \sin^2\psi}}$$

abhängig. Derselbe ist aber positiv, denn das Vorzeichen der Wurzel ist das positive, da mit wachsendem ψ auch s wachsen, die Wurzel in s also positiv sein soll. Sein Werth liegt zwischen Null und $\frac{\rho^2 - r_0^2}{\rho} \sqrt{\frac{\rho^2 - r_0^2}{\rho^2 - c^2}}$. Das Null- oder Unendlichwerden der zweiten Variation hängt nur von dem Klammerausdruck ab. Das erstere ist der Fall, wenn

$$d\,\frac{\delta\varphi}{dt} - \frac{c_1 \dfrac{d\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial r_0}}{d\psi} \cdot d\varphi}{c_1 d\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial r_0} + c_2} = 0$$

oder

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r_0} + c_2$$

wird. Da nun an den Grenzen $\delta\varphi$ Null wird, so darf hier $c_1 \frac{\partial\varphi}{\partial r_0} + c_2$ nicht Null, oder $\frac{\partial\varphi}{\partial r_0}$ nicht $= -\frac{c_2}{c_1}$ werden, d. h. $\frac{\partial\varphi}{\partial r_0}$ darf im Anfangs- und Endpunkt nicht denselben Werth haben. Hieraus folgt unmittelbar, dass auch innerhalb der Grenzen $\frac{\partial\varphi}{\partial r_0}$ nicht zwei Mal denselben Werth haben darf. Dasselbe ergiebt sich daraus, dass die zweite Variation nicht ∞ werden darf.

Beginnen nun 2 geodätische Linien, welche sich stets ∞ nahe bleiben, in demselben Anfangspunkte, so ist für diesen $\frac{\partial\varphi}{\partial r_0} = 0$. Schneiden sie sich wieder in einem Punkte, so erfüllen auch die Coordinaten desselben die Gleichung $\frac{\partial\varphi}{\partial r_0} = 0$. Die geodätische Linie ist demnach nur so lange eine kürzeste, als sie von einer von demselben Anfangspunkte ausgehenden, ihr ∞ benachbarten geodätischen Linie nicht geschnitten wird. Dieser Satz ist von Jacobi gefunden worden.

§ 11.

Nach (9), § 1 folgt:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r_0} = -\frac{\varepsilon}{2}\int_{z_0}^{z^1} \frac{z - \frac{\rho^4}{c^2}}{z - r_0^2} \frac{dz}{\sqrt{\left(z - \frac{\rho^4}{c^2}\right)(z - \rho^2)(z - r_0^2)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Durch die in (3) und (4), § 3 gegebene Substitution wird hieraus:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r_0} = -\frac{\varepsilon}{2}\int_{s_0}^{s_2} \frac{s - e_1}{s - e_3} \frac{ds}{\sqrt{S}}$$

oder da $s = \wp u$ und $\frac{ds}{du} = +\sqrt{S}$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r_0} = -\frac{\varepsilon}{2}\int_{u_0}^{u_1} \frac{\wp u - e_1}{\wp u - e_3}\, du \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Nun ist aber:

$$\frac{\wp u - e_1}{\wp u - e_3} = \frac{\wp u - e_3 - e_1 + e_3}{\wp u - e_3} = 1 - \frac{e_1 - e_3}{\wp u - e_3}$$

und:

$$\frac{e_1 - e_3}{\wp u - e_3} = \frac{\wp(u - \omega') - e_3}{e_2 - e_3},$$

mithin wird Gleichung (2):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r_0} = -\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{u_0}^{u_1} \frac{e_2 - \wp(u - \omega')}{e_2 - e_3}\, du,$$

woraus durch Ausführung der Integration folgt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r_0} = -\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{e_2 - e_3}\left| e_2 u + \frac{\sigma'(u - \omega')}{\sigma(u - \omega')} \right|_{u_0}^{u_1} \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Nach (3), § 6 sind Auflösungen der Gleichungen:

$$\wp u_1 = s_1 \quad \text{und} \quad \wp u_0 = s_0$$
$$u_1 = \omega' + v_1 \quad \text{und} \quad u_0 = \omega' + v_0.$$

Gleichung (3) geht daher über in:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r_0} = \frac{2\varepsilon}{\rho^2 - r_0^2}\left\{ \frac{\sigma' v_0}{\sigma v^0} - \frac{\sigma' v_1}{\sigma v_1} - e_2 (v_1 - v_0) \right\} \quad \ldots\ldots \quad (4).$$

Wir werden wieder, wie in § 9, den nach Süden gerichteten Zweig der geodätischen Linie verfolgen.

Der zum Anfangspunkte A gehörige Werth v_0 ist fest, während v_1 variabel ist. Es handelt sich nun darum denjenigen Werth v_1 zu bestimmen, für welchen $\frac{\partial \varphi}{\partial r_0} = 0$ wird. Dies soll zunächst unter der Einschränkung, dass $e_1 = -\left(\frac{\rho^4}{c^2} + r_0^2 - 2\rho^2\right)$ negativ also $\frac{\rho^4}{c^2} + r_0^2 > 2\rho_2$ ist, geschehen. Auf dem Theile AQ, der geodätischen Linie, vom Anfangspunkte bis zum Aequator, wächst ψ, daher ist immer:

$$v_1 > v_0,$$

folglich $\frac{\sigma' v_0}{\sigma v_0} > \frac{\sigma' v_1}{\sigma v_1}$ und $-e_2(v_1 - v_0)$ positiv. Hieraus folgt, dass für AQ_1 $\frac{\partial \varphi}{\partial r_0}$ immer positiv ist.

Auf der Fortsetzung der geodätischen Linie auf der südlichen Hälfte des Sphäroids vom Aequator Q_1 bis zum Berührpunkte T_2 mit dem Parallelkreise ist nach § 9 für $v_1 = 2\omega - v_1$ zu setzen. Für $Q_1 T$ ist mithin:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r_0} = \frac{2\varepsilon}{\rho^2 - r_0^2}\left[\frac{\sigma' v_0}{\sigma v_0} - \frac{\sigma'(2\omega - v_1)}{\sigma(2\omega - v_1)} - e_1 (2\omega - v_1 - v_0)\right]$$
$$= \frac{2\varepsilon}{\rho^2 - r_0^2}\left[\frac{\sigma' v_0}{\sigma v_0} + \frac{\sigma' v_1}{\sigma v_1} - 2\eta - e_1(2\omega - v_1 - v_0)\right] \quad (5).$$

Nun ist:

$$\frac{\sigma' v_0}{\sigma v_0} + \frac{\sigma' v_1}{\sigma v_1} > 2\frac{\sigma' \omega}{\sigma \omega}; \quad \eta = \frac{\sigma' \omega}{\sigma \omega},$$

denn $\frac{\sigma'}{\sigma}$ wird um so grösser, je kleiner v ist. Der grösste Werth von v ist ω, daher $2\omega > v_1 + v_0$. Daraus folgt, dass auch für $Q_1 T_2$ $\frac{\partial \varphi}{\partial r_0}$ stets positiv ist. Für die weitere Fortsetzung $T_2 Q_2$ der geodätischen Linie hat man für $v_1 = 2\omega + v_1$ zu setzen. $\frac{\partial \varphi}{\partial r_0}$ wird demnach auf dieser Strecke:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r_0} &= \frac{2\varepsilon}{\rho^2 - r_0^2}\left\{\frac{\sigma' v_0}{\sigma v_0} - \frac{\sigma(2\omega + v_1)}{\sigma(2\omega + v_1)} - e_2(2\omega + v_1 - v_0)\right\} \\ &= \frac{2\varepsilon}{\rho^2 - r_0^2}\left\{\frac{\sigma' v_0}{\sigma v_0} - 2\eta - \frac{\sigma' v_1}{\sigma v_1} - e_2(2\omega + v_1 - v_0)\right\} \quad (6). \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird Null, wenn:

$$\frac{\sigma' v_0}{\sigma v_0} - e_2(2\omega + v_1 - v_0) = 2\eta + \frac{\sigma' v_1}{\sigma v_1}$$

wird. $\frac{\partial \varphi}{\partial r_0}$ kann daher erst auf der Strecke $Q_2 T_2$ zu Null werden.

In dem Falle, dass e_2 positiv ist, lässt die Form von $\frac{\partial \varphi}{\partial r_0}$ nicht sofort auf den Werth schliessen. Um nun aber einen Schluss über den Werth von $\frac{\partial \varphi}{\partial r_0}$ machen zu können, gleichviel ob e_2 positiv ist, untersuchen wir die Ableitung von $\frac{\partial \varphi}{\partial r_0}$ nach v_1. Dieselbe ist:

$$\frac{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial r_0}}{\partial v_1} = \frac{2\varepsilon}{\rho^2 - r_0^2}(\wp v_1 - e_2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7).$$

Da $\wp v_1 = \wp(2\omega \pm v_1) = \wp(-v_1)$ ist, so kommen für v_1 nur die Werthe von 0 bis ω in Betracht. Es ist aber $\wp(0) = \infty$ und $\wp(\omega) = e_1$. Die Werthe von $\wp v_1$ liegen demnach zwischen e_1 und ∞. Da nun $e_1 > e_2$ ist, so folgt:

$$\frac{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial r_0}}{\partial v_1}$$

ist stets positiv. In Folge dessen muss der Werth von $\frac{\partial \varphi}{\partial r_0}$ beim Fortschreiten auf der geodätischen Linie stets zunehmen. Beginnt $\frac{\partial \varphi}{\partial r_0}$ in einem Punkte mit dem Werth Null, so wächst es so lange, bis der Werth $+\infty$ erreicht wird. In diesem Punkte muss $\frac{\partial \varphi}{\partial r_0}$ sofort auf $-\infty$ springen, um wieder wachsen zu können. Man sieht hieraus, dass $\frac{\partial \varphi}{\partial r_0}$ erst wieder Null werden kann, nachdem es durch ∞ gegangen ist. Setzt man sowohl in Gleichung (5) als auch in Gleichung (6) $v_1 = 0$, so erhält man einmal

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r_0} = +\infty,$$

das andere Mal:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r_0} = -\infty.$$

Im Berührpunkt der geodätischen Linie mit dem Parallelkreise springt $\frac{\partial \varphi}{\partial r_0}$ von $+\infty$ auf $-\infty$, daher kann die geodätische Linie erst nach der Berührung mit dem Parallelkreise aufhören, kürzeste Linie zu sein. Auf der Strecke $T_2 Q_2$ hat $\frac{\partial \varphi}{\partial r_0}$ nach (9) zunächst negative Werthe, dieselben werden immer kleiner und kleiner, bis endlich $\frac{\partial \varphi}{\partial r_0}$ zu Null wird.

Es soll nun untersucht werden, ob $\frac{\partial \varphi}{\partial r_0}$ schon durch Null gegangen, oder ob dies noch nicht der Fall gewesen ist, wenn die nach Süden gehende geodätische Linie den Parallelkreis, welcher symmetrisch zu demjenigen liegt, auf welchem sich ihr Ausgangspunkt befindet, zum zweiten Male durchsetzt. (In der Figur auf Seite 20 geschieht dies im Punkte A_2). Findet das erstere statt, so muss $\frac{\partial \varphi}{\partial r_0}$ in dem Punkte A_2 schon einen positiven Werth haben. Ist $\frac{\partial \varphi}{\partial r_0}$ dagegen noch nicht Null, so muss $\frac{\partial \varphi}{\partial r_0}$ noch negativ sein.

Den Werth von $\frac{\partial \varphi}{\partial r_0}$ im Punkte A_2 erhält man, wenn man in Gleichung (6) für $v_1 = v_0$ setzt. Dann wird:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r_0} = -\frac{4\varepsilon}{\rho^2 - r_0^2}(\eta + e_2 \omega) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

$\eta = \frac{\sigma' \omega}{\sigma \omega}$ ist positiv, aber e_2 kann positiv oder negativ sein. Um nun einen von dem Vorzeichen von e_2 unabhängigen Werth von $\eta + e_2 \omega$ zu erhalten, drücke man beide Grössen durch $h = e^{i\pi\tau}$ aus.

Es ist:

$$e_2 = -(e_1 + e_3)$$

$$\left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^2 (e_1 - e_2) = \vartheta_3{}^4(0, \tau) = (1 - 2h + 2h^4 - \ldots)^4$$

$$\left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^2 (e_2 - e_3) = \vartheta_1{}^4(0, \tau) = 16h(1 + h^2 + h^6 + \ldots)^4.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$e_2 = \tfrac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \left[16h(1+h^2+h^6+..)^4 - (1-2h+2h^5-...)^4\right].$$

Da nun:

$$2\eta\omega = \frac{\pi^2}{6}\,\frac{1-3^3h^2+5^3h^6-..}{1-3h^2+5h^6-..},$$

so hat man:

$$\eta + e_2\omega = \frac{\pi^2}{12\omega}\left[16h(1+h^2+h^6+..)^4 \right.$$
$$\left. -(1-2h+2h^4-..)^4 + \frac{1-3^3h^2+5^3h^6-..}{1-3h^2+5h^6-..}\right]$$
$$\backsim \frac{2\pi^2}{\omega}(h-h^2..).$$

Wegen der Kleinheit von h überwiegt h den Rest. $\eta + e_2\omega$ ist mithin eine positive Grösse. Daraus folgt, $\frac{\partial\varphi}{\partial r_0}$ ist im Punkte A_2 noch negativ. Die nach Süden gehende geodätische Linie hört daher erst auf, kürzeste Linie zu sein, nachdem sie den Parallelkreis, welcher zu demjenigen symmetrisch liegt, auf welchem sich ihr Anfangspunkt befindet, zum zweiten Male durchsetzt hat. Oder, da $AA_2 = TT_2$ ist, nachdem ihre Länge grösser geworden ist als das Stück der geodätischen Linie, welches zwischen den beiden sie berührenden Parallelkreisen liegt.

Die von A nach Norden gehende geodätische Linie berührt zunächst den Parallelkreis (ψ'), schneidet dann wieder den Parallelkreis, auf welchem ihr Anfangspunkt liegt, durchsetzt den Aequator und wird erst dann von der ihr unendlich benachbarten geodätischen Linie geschnitten, wenn sie den zu (ψ') symmetrisch liegenden Parallelkreis geschnitten hat.

Die hier entwickelten Resultate sind von Herrn v. Braunmühl im 10. Bande der Mathem. Annalen auf anderem Wege gefunden worden.

§ 12.

Den Werth v_1, für welchen $\frac{\partial\varphi}{\partial r_0} = 0$ wird, erhält man nach Gleichung (6) des vorigen Paragraphen aus:

$$\frac{\sigma' v_0}{\sigma v_0} - \frac{\sigma' v_1}{\sigma v_1} - e_2(2\omega + v_1 - v_0) - 2\eta = 0 \quad . \; . \; . \quad (1),$$

oder, wenn man statt der σ- die ϑ-Funktionen einfasst, aus:

$$\frac{\pi}{2\omega}\left\{\frac{\vartheta'\left(\frac{v_0\pi}{2\omega},\tau\right)}{\vartheta\left(\frac{v_0\pi}{2\omega},\tau\right)}-\frac{\vartheta'\left(\frac{v_1\pi}{2\omega},\tau\right)}{\vartheta\left(\frac{v_1\pi}{2\omega},\tau\right)}\right\}-\left(e_2+\frac{\eta}{\omega}\right)(2\omega+v_1-v_0)=0 \quad . \; . \quad (2).$$

Da

$$\frac{\vartheta'\left(\frac{v\pi}{2\omega},\tau\right)}{\vartheta\left(\frac{v\pi}{2\omega},\tau\right)}=\operatorname{ctg}\frac{v\pi}{2\omega}+4\sum_1^\infty n\,\frac{h^{2n}\sin\frac{nv\pi}{2\omega}}{1-h^{2n}}$$

ist, so kann man für Gleichung (2) auch schreiben:

$$\operatorname{ctg}\frac{v_0\pi}{2\omega}-\operatorname{ctg}\frac{v_1\pi}{2\omega}+8\sum_1^\infty n\,\frac{h^{2n}}{1-h^{2n}}\cos\frac{v_1+v_0}{2\omega}\pi\sin\frac{v_1-v_0}{2\omega}\pi$$

$$-\frac{2\omega+v_1-v_0}{\pi}\,2(e_2\,\omega+\eta)=0 \quad . \quad (3).$$

Vernachlässigt man die in h^2 multiplicirten Glieder, so erhält man eine Annäherung an v_1 aus der Gleichung:

$$\operatorname{ctg}\frac{v_0\pi}{2\omega}-\operatorname{ctg}\frac{v_1\pi}{2\omega}=(2\omega+v_1-v_0)\frac{4h\pi}{\omega} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

Ist $\mathfrak{v}$ der Werth von v_1, welcher die Gleichung (3) erfüllt, so findet man das entsprechende φ nach (11), § 8 aus:

$$\varphi=i\left\{\frac{1}{2}\,ln\,\frac{\vartheta\left(\frac{\mathfrak{v}+a}{2\omega}\pi,\tau\right)\vartheta\left(\frac{v_0-a}{2\omega}\pi,\tau\right)}{\vartheta\left(\frac{v_0+a}{2\omega}\pi,\tau\right)\vartheta\left(\frac{\mathfrak{v}-a}{2\omega}\pi,\tau\right)}-\frac{\pi}{2\omega}\,\frac{\vartheta_3'\left(\frac{a\pi}{2\omega},\tau\right)}{\vartheta_3\left(\frac{a\pi}{2\omega},\tau\right)}(2\omega+\mathfrak{v}-v_0)\right\}$$

$$-\frac{r_0\varepsilon}{2}(2\omega+\mathfrak{v}-v_0) \quad . \quad (5).$$

Das entsprechende ψ ergiebt sich aus:

$$\left(\frac{\sigma_2\mathfrak{v}}{\sigma\mathfrak{v}}\right)^2=\frac{1}{\sqrt{(e_1-e_2)(e_2-e_3)}}\left(\frac{\vartheta_2\mathfrak{v}}{\vartheta\mathfrak{v}}\right)^2;$$

$$4(\wp\mathfrak{v}-e_2)=z-\mathfrak{p}^2=-\cos^2\psi,$$

$$\cos\psi=\sqrt{-(\wp\mathfrak{v}-e_2)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6).$$

Wenn der Punkt A auf einem Parallelkreise ψ_0, dessen Radius r ist, liegt, dann erhält man sämmtliche durch den Punkt A gehende geodätische Linien, wenn man r_0 die Werthe zwischen r und Null beilegt. Zu jedem

r_0 hat man aus den Gleichungen (1) und (2), § 6 und (7), § 5 einen Werth v_0. Jedem v_0 entsprechend, geben die Gleichungen (3), (5) und (6) die Coordinaten des Schnittpunktes zweier geodätischen Linien, welche durch denselben Punkt A gehen, und welche unmittelbar aufeinander folgen.

Die Einhüllende der durch den Punkt A gehenden geodätischen Linien, nach deren Berührung sie aufhören, kürzeste Linien zu sein, wird in der Umgegend des dem Punkte A diametral gegenüberliegenden Punktes A' entstehen. Liegt A wieder auf der nördlichen Hälfte des Sphäroids auf dem Parallelkreise, dessen Radius r ist, so wird der nach Süden gehende Zweig der geodätischen Linie, welche den Parallelkreis (r_0) berührt, die Enveloppe berühren, nachdem der auf der südlichen Hälfte des Sphäroids liegende Parallelkreis (r) zum zweiten Male durchsetzt ist. Der Berührungspunkt sei P_1. Der nach Norden gehende Zweig derselben geodätischen Linie berührt die Enveloppe, nachdem der südliche Parallelkreis (r) im Punkte R_2 durchsetzt ist, im Punkte P_2 und berührt alsdann den südlichen Parallelkreis (r_0) im Punkte T_2. Da durch den Punkt A zwei geodätische Linien gehen, welche denselben Parallelkreis (r_0) berühren, und welche in Bezug auf den durch A gehenden Meridian symmetrisch liegen, so wird man noch zwei zu P_1 und P_2 in Bezug auf diesen Meridian symmetrisch liegende Punkte P_3 und P_4 der Enveloppe erhalten. Für den Meridian, welcher ja auch eine geodätische Linie ist, fallen je zwei Punkte P_1 und P_3 in P_{13} und P_2 und P_4 in P_{24} zusammen. Die Enveloppe besteht daher aus 4 Zügen, von denen je zwei in den Punkten P_{13} und P_{24} sich ansetzen, und welche in Bezug auf den Meridian symmetrisch verlaufen. Es fragt sich nun noch, auf welchem Parallelkreise die von P_{13} und P_{24} ausgehenden Zweige sich schneiden. Um denselben zu finden, verfolge man den von A nach Norden gehenden Theil einer geodätischen Linie. Je näher r_0 an r kommt, desto näher rückt der Punkt T_2 dem Punkte R_2. Ist r_0 nur unendlich wenig von r verschieden, so liegen die Punkte T_2 und R_2 einander unendlich nahe. Zwischen beiden liegt aber immer der Punkt P_2 der Enveloppe. In dem Augenblicke, wo $r_0 = r$ wird, fällt T_2 mit R_2 zusammen. Die Spitze der Enveloppe liegt daher in diesem zusammengefallenen Punkte P_{23}, in welchem die von A ausgehende und den Kreis (r) berührende geodätische Linie den auf der südlichen Hälfte des Sphäroids liegenden Parallelkreis (r) berührt. Diese geodätische Linie berührt ausserdem noch im Punkte P_{14}, welcher von A' so weit entfernt ist, wie P_{23} von A'. Von den vier Spitzen der Enveloppe liegen demnach je zwei auf dem Meridian und dem Parallelkreise durch A'.