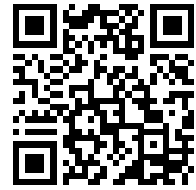
This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

http://books.google.com



Тем, что эта книга дошла до Вас, мы обязаны в первую очередь библиотекарям, которые долгие годы бережно хранили её. Сотрудники Google оцифровали её в рамках проекта, цель которого – сделать книги со всего мира доступными через Интернет.

Эта книга находится в общественном достоянии. В общих чертах, юридически, книга передаётся в общественное достояние, когда истекает срок действия имущественных авторских прав на неё, а также если правообладатель сам передал её в общественное достояние или не заявил на неё авторских прав. Такие книги – это ключ к прошлому, к сокровищам нашей истории и культуры, и к знаниям, которые зачастую нигде больше не найдёшь.

В этой цифровой копии мы оставили без изменений все рукописные пометки, которые были в оригинальном издании. Пускай они будут напоминанием о всех тех руках, через которые прошла эта книга – автора, издателя, библиотекаря и предыдущих читателей – чтобы наконец попасть в Ваши.

Правила пользования
Мы гордимся нашим сотрудничеством с библиотеками, в рамках которого мы оцифровываем книги в общественном достоянии и делаем их доступными для всех. Эти книги принадлежат всему человечеству, а мы – лишь их хранители. Тем не менее, оцифровка книг и поддержка этого проекта стоят немало, и поэтому, чтобы и в дальнейшем предоставлять этот ресурс, мы предприняли некоторые меры, чтобы предотвратить коммерческое использование этих книг. Одна из них – это технические ограничения на автоматические запросы.

Мы также просим Вас:

- **Не использовать файлы в коммерческих целях.** Мы разработали программу Поиска по книгам Google для всех пользователей, поэтому, пожалуйста, используйте эти файлы только в личных, некоммерческих целях.
- **Не отправлять автоматические запросы.** Не отправляйте в систему Google автоматические запросы любого рода. Если Вам требуется доступ к большим объёмам текстов для исследований в области машинного перевода, оптического распознавания текста, или в других похожих целях, свяжитесь с нами. Для этих целей мы настоятельно рекомендуем использовать исключительно материалы в общественном достоянии.
- **Не удалять логотипы и другие атрибуты Google из файлов.** Изображения в каждом файле помечены логотипами Google для того, чтобы рассказать читателям о нашем проекте и помочь им найти дополнительные материалы. Не удаляйте их.
- **Соблюдать законы Вашей и других стран.** В конечном итоге, именно Вы несёте полную ответственность за Ваши действия – поэтому, пожалуйста, убедитесь, что Вы не нарушаете соответствующие законы Вашей или других стран. Имейте в виду, что даже если книга более не находится под защитой авторских прав в США, то это ещё совсем не значит, что её можно распространять в других странах. К сожалению, законодательство в сфере интеллектуальной собственности очень разнообразно, и не существует универсального способа определить, как разрешено использовать книгу в конкретной стране. Не рассчитывайте на то, что если книга появилась в поиске по книгам Google, то её можно использовать где и как угодно. Наказание за нарушение авторских прав может оказаться очень серьёзным.

О программе
Наша миссия – организовать информацию во всём мире и сделать её доступной и полезной для всех. Поиск по книгам Google помогает пользователям найти книги со всего света, а авторам и издателям – новых читателей. Чтобы произвести поиск по этой книге в полнотекстовом режиме, откройте страницу `http://books.google.com`.

THE UNIVERSITY OF MICHIGAN
THE UNIVERSITY OF MICHIGAN
1817
LIBRARIES

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Mathematics
QA
1
.M418
v.17

Digitized by Google

Digitized by Google

МАТЕМАТИЧЕСКІЙ СБОРНИКЪ,

ИЗДАВАЕМЫЙ

МОСКОВСКИМЪ МАТЕМАТИЧЕСКИМЪ ОБЩЕСТВОМЪ.

ТОМЪ СЕМНАДЦАТЫЙ.

ВЫПУСКЪ ПЕРВЫЙ.

XVII:1.

МОСКВА.
Университетская типографія, Страстной бульваръ.
1893.

Digitized by Google

Digitized by Google

СОСТАВЪ МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ПРЕЗИДЕНТЪ.

Бугаевъ Николай Васильевичъ.

ВИЦЕ-ПРЕЗИДЕНТЪ.

Некрасовъ Павелъ Алексѣевичъ.

СЕКРЕТАРЬ.

Млодзѣевскій Болеславъ Корнеліевичъ.

БИБЛІОТЕКАРЬ.

Аппельротъ Германъ Германовичъ.

КАЗНАЧЕЙ.

Преображенскій Петръ Васильевичъ.

ДѢЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧЛЕНЫ.

Алексѣевъ Виссаріонъ Григорьевичъ (въ Москвѣ).
Анисимовъ Василій Аѳанасьевичъ (въ Варшавѣ).
Андреевъ Константинъ Алексѣевичъ (въ Харьковѣ).
Блажеевскій Ромуальдъ Осиповичъ (въ Казани).
Бобылевъ Дмитрій Константиновичъ (въ С.-Петербургѣ).
Бобынинъ Викторъ Викторовичъ (въ Москвѣ).
Богуславскій Анатолій Ивановичъ (въ Москвѣ).
Бредихинъ Ѳедоръ Александровичъ (въ С.-Петербургѣ).
Букрѣевъ Борисъ Яковлевичъ (въ Кіевѣ).
Бѣлопольскій Аристархъ Аполлоновичъ (въ Пулковѣ).
Васильевъ Александръ Васильевичъ (въ Казани).
Ващенко-Захарченко Михаилъ Егоровичъ (въ Кіевѣ).
Вейнбергъ Яковъ Игнатьевичъ (въ Москвѣ).
Князь Голицынъ Борисъ Борисовичъ (въ Москвѣ).
Гольдгаммеръ Дмитрій Александровичъ (въ Казани).
Деларю Даніилъ Михайловичъ (въ Харьковѣ).
Делоне Николай Борисовичъ (въ С.-Петербургѣ).
Ермаковъ Василій Петровичъ (въ Кіевѣ).
Жуковскій Николай Егоровичъ (въ Москвѣ).
Зиловъ Петръ Алексѣевичъ (въ Варшавѣ).
Зининъ Николай Николаевичъ (въ Варшавѣ).
Коркинъ Александръ Николаевичъ (въ С.-Петербургѣ).
Круковскій Анатолій Іезекіильевичъ (въ Егорьевскѣ Ряз. губ.).
Лахтинъ Леонидъ Кузьмичъ (въ Юрьевѣ).
Ляпуновъ Александръ Михайловичъ (въ Харьковѣ).

176318 Digitized by Google

Марковъ Андрей Андреевичъ (въ С.-Петербургѣ).
Мининъ Александръ Петровичъ (въ Москвѣ).
Молинъ Ѳедоръ Эдуардовичъ (въ Юрьевѣ).
Мясоѣдовъ Александръ Николаевичъ (въ Пензѣ).
Назимовъ Петръ Сергѣевичъ (въ Казани).
Первушинъ Іоаннъ Михеевичъ (въ с. Мѣхонскомъ Пермск. губ.).
Покровскій Петръ Михайловичъ (въ Кіевѣ).
Поссе Константинъ Александровичъ (въ С.-Петербургѣ).
Преображенскій Владиміръ Васильевичъ (въ Одессѣ).
Рахманиновъ Иванъ Ивановичъ (въ Кіевѣ).
Рачинскій Константинъ Александровичъ (въ Конотопѣ Черниг. губ).
Сабининъ Егоръ Ѳедоровичъ (въ Москвѣ).
Селивановъ Дмитрій Ѳедоровичъ (въ С.-Петербургѣ).
Сердобинскій Владиміръ Елисѣевичъ (въ Пензѣ).
Слугиновъ Николай Петровичъ (въ Казани).
Слудскій Ѳедоръ Алексѣевичъ (въ Москвѣ).
Соколовъ Алексѣй Петровичъ (въ Москвѣ).
Сонинъ Николай Яковлевичъ (въ С.-Петербургѣ).
Сохоцкій Юліанъ Васильевичъ (въ С.-Петербургѣ).
Столѣтовъ Александръ Григорьевичъ (въ Москвѣ).
Суворовъ Ѳедоръ Матвѣевичъ (въ Казани).
Татариновъ Иванъ Васильевичъ (въ Московской губерніи).
Умовъ Николай Алексѣевичъ (въ Одессѣ).
Князь Урусовъ Сергѣй Семеновичъ.
Хандриковъ Митрофанъ Ѳедоровичъ (въ Кіевѣ).
Цераскій Витольдъ Карловичъ (въ Москвѣ).
Цингеръ Василій Яковлевичъ (въ Москвѣ).
Чебышевъ Пафнутій Львовичъ (въ С.-Петербургѣ).
Шапошниковъ Николай Александровичъ (въ Москвѣ).
Шебуевъ Георгій Николаевичъ (въ Москвѣ).
Шиллеръ Николай Николаевичъ (въ Кіевѣ).
Щегляевъ Владиміръ Сергѣевичъ (въ Москвѣ).

ИНОСТРАННЫЕ ЧЛЕНЫ.

Graindorge (въ Люттихѣ).
Klein Felix (въ Гёттингенѣ).
Mehmke (въ Дармштадтѣ).
De Mendizábal-Tamborrel (въ Мексико).
Weyr Emil (въ Вѣнѣ).

Учредители Московскаго Математическаго Общества:

Н. Д. Брашманъ †, А. Ю. Давидовъ †, Ѳ. А. Бредихинъ, Ѳ. А. Слудскій, В. Я. Цингеръ, М. Ѳ. Хандриковъ, Н. В. Бугаевъ, Н. Н. Алексѣевъ †, А. В. Лѣтниковъ †, кн. С. С. Урусовъ, К. М. Петерсонъ †, Е. Ѳ. Сабининъ, С. А. Юрьевъ †, П. Л. Чебышевъ.

Digitized by Google

АЛГЕБРАИЧЕСКІЯ УРАВНЕНІЯ, РАЗРѢШИМЫЯ ВЪ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЯХЪ.

Л. К. Лахтина.

Читано въ засѣданіяхъ Математическаго Общества 15 сентября и 20 октября 1892 года).

ГЛАВА VII.

Рѣшеніе уравненій, имѣющихъ корнями отношенія частныхъ интеграловъ линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка.

§ 29. Критерій для рѣшенія вопроса о томъ, не служатъ ли корни даннаго алгебраическаго уравненія отношеніями частныхъ интеграловъ линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка.

Изъ главы II намъ извѣстно, что всякое алгебраическое уравненіе, имѣющее корнями частные интегралы линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка тождественными преобразованіями приводится къ виду:

$$H^{\lambda_1}(u) : c' T^{\lambda_2}(u) : c f^{\lambda}(u) = \frac{1}{c} R(z) : \frac{1}{c} R(z) — 1:1, \qquad (1)$$

или:

$$\frac{H^{\lambda_1}(u)}{f^{\lambda}(u)} = R(z), \qquad (1')$$

при чемъ многочлены $f(u)$, $H(u)$, $T(u)$, ихъ степени ν, ν_1, ν_2 и показатели λ, λ_1, λ_2 имѣютъ уже извѣстныя намъ значенія.

Пусть дано алгебраическое уравненіе:

$$\psi(u, z) = 0 \qquad (2)$$

степени N, и спрашивается, не принадлежитъ ли оно къ классу уравненій (1)?

Digitized by Google

Мы въ правѣ предполагать, что уравненіе (2) неприводимо, потому что иначе мы разбили бы его на нѣсколько неприводимыхъ уравненій и разсмотрѣли бы ихъ въ отдѣльности.

Если уравненіе (2) принадлежитъ къ одному изъ четырехъ типовъ: двупирамидному—степени $2m$, тетраэдрическому—степени 12, октаэдрическому—степени 24 или икосаэдрическому—степени 60, то степень уравненія (2) непремѣнно четная. Отсюда:

Первое необходимое условіе тождественности уравненій (2) и (1):

Степень N уравненія (2) должна быть четная.

Если уравненіе (2) можетъ быть приведено къ виду (1′), то оно во всякомъ случаѣ должно приводиться къ виду:

$$\frac{\psi(u)}{\varphi(u)} = \Re(z), \tag{3}$$

гдѣ $\psi(u)$ и $\varphi(u)$ суть цѣлые раціональные взаимно простые многочлены, а $\Re(z)$—раціональная функція z.

Отсюда:

Второе необходимое условіе тождественности уравненій (2) и (1):

Уравненіе (2) послѣ переноса во вторую часть нѣкоторыхъ членовъ и дѣленія на нѣкоторую раціональную функцію u и z должно приводиться къ виду:

$$\frac{\psi(u)}{\varphi(u)} = \Re(z). \tag{3}$$

Рѣшить вопросъ о томъ, выполняется ли это условіе, можно совершенно элементарными способами.

Пусть это условіе выполнено.

Убѣдившись въ этомъ, мы въ то же время находимъ функціи $\psi(u)$ и $\varphi(u)$.

Преобразуя линейно обѣ части уравненія (1′), мы можемъ получить безконечное число уравненій тождественныхъ съ (1′); всѣ они будутъ такого вида:

$$\frac{\alpha H^{\lambda_1}(u) + \beta f^{\lambda}(u)}{\gamma H^{\lambda_1}(u) + \delta f^{\lambda}(u)} = \frac{\alpha R(z) + \beta}{\gamma R(z) + \delta}, \tag{4}$$

Digitized by Google

гдѣ α, β, γ, δ суть какія угодно числа, удовлетворяющія условію: $\alpha\delta - \beta\gamma$ отлично отъ 0.

Не трудно усмотрѣть, что уравненіе (3) только въ томъ случаѣ можетъ быть тождественно съ уравненіемъ (1′), когда оно принадлежитъ къ числу уравненій (4), т. е. когда имѣютъ мѣсто тождественныя равенства:

$$\left.\begin{aligned} \psi(u) &= \alpha H^{\lambda_1}(u) + \beta f^{\lambda}(u), \\ \varphi(u) &= \gamma H^{\lambda_1}(u) + \delta f^{\lambda}(u). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Посмотримъ, какъ по даннымъ многочленамъ $\psi(u)$ и $\varphi(u)$ найти многочлены $f(u)$ и $H(u)$ и убѣдиться въ существованіи тождествъ (5).

Возьмемъ выраженіе:

$$\Omega(u) = \psi(u)\frac{d\varphi(u)}{du} - \varphi(u)\frac{d\psi(u)}{du}. \tag{6}$$

Подставивъ въ это выраженіе формулы $\psi(u)$ и $\varphi(u)$, даваемыя равенствами (5), находимъ:

$$\Omega(u) = (\alpha\delta - \beta\gamma)\left[\lambda_1 f(u)\frac{dH(u)}{du} - \lambda H(u)\frac{df(u)}{du}\right] \times \\ \times f^{\lambda-1}(u) H^{\lambda_1-1}(u), \tag{7}$$

или:

$$\Omega(u) = N(\alpha\delta - \beta\gamma) f^{\lambda-1}(u) H^{\lambda_1-1}(u)\, T(u). \tag{8}$$

Функція $\Omega(u)$ намъ извѣстна; степень N уравненія (2) тоже извѣстна; относительно показателей λ, λ_1, λ_2 и степеней ν, ν_1, ν_2 функцій $f(u)$, $H(u)$, $T(u)$ можно сдѣлать не болѣе двухъ предположеній:

1) уравненіе (2) можетъ быть двупирамиднымъ, и въ такомъ случаѣ числа λ, λ_1, λ_2, ν, ν_1, ν_2 должны соотвѣтственно равняться:

$$\frac{N}{2},\ 2,\ 2,\ 2,\ \frac{N}{2},\ \frac{N}{2};$$

2) если N равно одному изъ чиселъ:

12, 24, 60,

Digitized by Google

то уравненіе (2) можетъ принадлежать къ одному изъ типовъ: тетраэдрическому, октаэдрическому или икосаэдрическому, и тогда числа λ, λ_1, λ_2, ν, ν_1, ν_2 получатъ значенія соотвѣтствующія этому типу.

На основаніи только что приведенныхъ соображеній мы найдемъ одну или двѣ системы значеній, которыя могутъ имѣть числа λ, λ_1, λ_2, ν, ν_1, ν_2.

Отсюда вытекаетъ:

Третье необходимое условіе тождественности уравненій (2) и (1):

Многочленъ $\Omega(u)$ долженъ имѣть:

ν корней λ—1-кратныхъ,

ν_1 корней λ_1—1-кратныхъ,

ν_2 корней простыхъ.

Мы можемъ убѣдиться въ выполненіи этого условія, примѣняя обычный пріемъ алгебры, служащій для отдѣленія кратныхъ корней *).

Пусть эти условія выполнились.

Убѣдившись въ выполненіи условія, мы въ то же время находимъ многочлены $f(u)$, $H(u)$, $T(u)$ и узнаемъ, къ которому изъ четырехъ типовъ можетъ принадлежать уравненіе (2).

Четвертое необходимое условіе тождественности уравненій (1) и (2):

Если уравненіе (2) тетраэдрическое, октаэдрическое или икосаэдрическое, то найденная функція $f(u)$ должна удовлетворять условію:

$$(f, f)^4 = 0.$$

Если уравненіе (2) двупирамидное, то многочленъ $f(u)$ долженъ быть второй степени.

---

*) Въ случаѣ тетраэдрическаго уравненія указанный пріемъ даетъ функцію $T(u)$ и произведеніе $f(u)\,H(u)$. По этимъ даннымъ можно найти $f(u)$ и $H(u)$.

Въ случаѣ четверичнаго уравненія указанный путь къ цѣли не приводимъ; но это—случай вполнѣ элементарный.

Digitized by Google

Пятое необходимое условіе:

Если уравненіе (2) принадлежитъ къ одному изъ типовъ: тетраэдрическому, октаэдрическому или икосаэдрическому, то найденная функція $H(u)$ должна быть гессіаномъ найденной функціи $f(u)$, а найденная функція $T(u)$ должна быть функціональнымъ опредѣлителемъ $f(u)$ и $H(u)$.

Если уравненіе (2) принадлежитъ къ двупирамидному типу, то должны имѣть мѣсто тождества:

$$H(u)=\frac{f_1^m+f_2^m}{2},\quad T(u)=\frac{f_1^m-f_2^m}{2},$$

гдѣ f_1 и f_2 суть два линейныхъ множителя найденнаго квадратнаго многочлена $f(u)$:

$$f(u)=f_1f_2\ ^*).$$

Шестое необходимое условіе:

Между найденными многочленами $\psi(u)$, $\varphi(u)$, $f(u)$, $H(u)$ должна имѣть мѣсто тождественная зависимость:

$$\left.\begin{aligned}\psi(u)&=\alpha H^{\lambda_1}(u)+\beta f^{\lambda}(u),\\ \varphi(u)&=\gamma H^{\lambda_1}(u)+\delta f^{\lambda}(u).\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

Убѣдившись въ выполненіи этого условія, мы въ то же время находимъ коэффиціенты α, β, γ, δ.

Имѣя величины этихъ коэффиціентовъ, мы можемъ въ дѣйствительности преобразовать уравненіе (2) въ (1′) и въ (1).

Изъ сказаннаго видно, что приведенные шесть условій необходимы и достаточны для того, чтобы уравненіе (2) имѣло корнями отношенія частныхъ интеграловъ линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка.

Примѣръ.

Дано уравненіе:

$$u^2(u+1)^3+3u(u+1)+1+zu^2(u+1)^2=0.\qquad(9)$$

Спрашивается, не принадлежитъ ли оно къ изучаемому нами классу уравненій?

*) См. § 22 формулы 16.

Digitized by Google

Степень уравненія (9) равна 6—числу четному. Слѣдовательно первое условіе выполняется.

Уравненіе (9) можетъ принадлежать лишь къ двупирамидному типу.

Приводимъ уравненіе (9) къ виду:

$$\frac{u^3(u+1)^3+3u(u+1)+1}{u^2(u+1)^2} = -s. \qquad (10)$$

Второе условіе выполнено.

Сохраняя прежнія обозначенія, находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \psi(u) &= u^3(u+1)^3+3u(u+1)+1, \\ \varphi(u) &= u^2(u+1)^2. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Отсюда:

$$\Omega(u) = u(u+1)(2u+1)(u^2+u-2)(u^2+u+1)^2. \qquad (12)$$

Этотъ многочленъ имѣетъ два двукратныхъ корня.

Условіе третье выполнено.

Первичная функція $f(u)$ такова:

$$f(u) = u^2+u+1. \qquad (13)$$

Условіе четвертое выполнено.

Линейные множители многочлена $f(u)$ таковы:

$$f_1 = u-\varepsilon,\ f_2 = u-\varepsilon^2,\ \text{гдѣ}\ \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}. \qquad (14)$$

Функціи $H(u)$ и $T(u)$ таковы:

$$\left.\begin{aligned} H(u) &= \frac{f_1^3+f_2^3}{2} = \frac{1}{2}(2u+1)(u^2+u-2), \\ T(u) &= \frac{f_1^3-f_2^3}{2} = -\frac{i\sqrt{3}}{2}u(u+1). \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Дѣйствительно, функція $\Omega(u)$ разнится отъ

$$f^2(u)\ H(u)\ T(u)$$

только постояннымъ множителемъ.

Digitized by Google

Въ то же время мы видимъ, что функціи:

$$f(u),\ H(u),\ T(u)$$

удовлетворяютъ условію пятому.

Подставивъ выраженія (13) и (15) въ равенства:

$$\left.\begin{aligned}\psi(u) &= \alpha H^6(u) + \beta f^3(u),\\ \varphi(u) &= \gamma H^2(u) + \delta f^3(u),\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

находимъ:

$$\alpha = \frac{4}{9},\ \beta = \frac{5}{9},\ \gamma = -\frac{4}{27},\ \delta = \frac{4}{27}. \qquad (17)$$

Условіе шестое выполнено.

Слѣдовательно уравненіе (9) двупирамидное.

Изъ формулъ (16), (17), (11) и (10) слѣдуетъ, что его можно представить въ такомъ видѣ:

$$\frac{4H^2(u) + 5f^3(u)}{H^2(u) - f^3(u)} = \frac{4}{3}z, \qquad (18)$$

гдѣ $H(u)$ и $f(u)$ даются формулами (13) и (15).

Изъ уравненія (18) слѣдуетъ:

$$\frac{H^2(u)}{f^3(u)} = \frac{4z + 15}{4z - 12}, \qquad (19)$$

или, наконецъ:

$$H^2(u) : T^2(u) : f^3(u) = 4z + 15 : 27 : 4z - 12, \qquad (20)$$

гдѣ $H(u)$, $T(u)$ и $f(u)$ имѣютъ значенія, даваемыя формулами (13) и (15).

§ 30. Приведеніе уравненія къ нормальному виду.

Примѣняя пріемы предыдущаго параграфа, мы можемъ всякое уравненіе изучаемаго нами класса привести къ виду (1).

Затѣмъ мы можемъ его нѣсколько упростить по виду, принявъ:

Digitized by Google

$$\frac{1}{c}R(z)$$

за новое независимое перемѣнное (въ главѣ II-ой мы его обозначали буквою t).

Для простоты (какъ мы уже дѣлали раньше) мы обозначимъ новое перемѣнное тою же буквою z и представимъ уравненіе (1) въ такомъ видѣ:

$$H^{\lambda_1}(u) : c' T^{\lambda_2}(u) : cf^{\lambda}(u) = z : z - 1 : 1. \qquad (21)$$

Вообще говоря, уравненіе (21) не будетъ нормальнаго вида; но мы можемъ утверждать, что оно непремѣнно эквивалентно нормальному уравненію.

Посмотримъ, какъ найти ту линейную подстановку, которая преобразуетъ данное уравненіе въ нормальное.

Для опредѣленности мы будемъ изображать данное намъ алгебраическое уравненіе такъ:

$$\bar{H}^{\lambda_1}(\bar{u}) : \bar{c}' \bar{T}^{\lambda_2}(\bar{u}) : \bar{c}\bar{f}^{\lambda}(\bar{u}) = z : z - 1 : 1, \qquad (22)$$

а для нормальнаго уравненія сохранимъ прежнія обозначенія:

$$H^{\lambda_1}(u) : c' T^{\lambda_2}(u) : cf^{\lambda}(u) = z : z - 1 : 1. \qquad (21)$$

Функціи $\bar{H}(\bar{u})$, $\bar{T}(\bar{u})$, $\bar{f}(\bar{u})$ и постоянныя $\bar{c}'$, $\bar{c}$ намъ даны, нормальныя функціи $H(u)$, $T(u)$, $f(u)$ и постоянныя c' и c найдены нами въ главѣ V.

Неизвѣстныя $\bar{u}$ и u связаны между собою линейною зависимостью:

$$\bar{u} = \frac{pu + q}{ru + s}. \qquad (23)$$

Задача наша состоитъ въ нахожденіи постоянныхъ коэффиціентовъ:

$$p,\ q,\ r,\ s.$$

Пользуясь произволомъ одного изъ этихъ коэффиціентовъ, мы можемъ на нихъ наложить условіе:

Digitized by Google

$$ps - qr = 1. \tag{24}$$

Дадимъ величинѣ $\bar{u}$ какое нибудь произвольное значеніе $\bar{a}$ и опредѣлимъ соотвѣтствующее ему значеніе z изъ уравненія (22); пусть при $\bar{u} = \bar{a}$ перемѣнное z равно α.

Въ такомъ случаѣ:

$$\alpha = \frac{\overline{H}^{\lambda_1}(\bar{a})}{\bar{c}\overline{f}^{\lambda}(\bar{a})}. \tag{25}$$

Подставивъ значеніе $z = \alpha$ въ уравненіе (21), находимъ:

$$\alpha = \frac{H^{\lambda_1}(u)}{cf^{\lambda}(u)}. \tag{26}$$

Положимъ, что намъ удалось рѣшить это *нормальное* уравненіе и пусть одинъ изъ корней его есть:

$$u = a.$$

Въ такомъ случаѣ между величинами a и $\bar{a}$ существуетъ зависимость (23):

$$\bar{a} = \frac{pa + q}{ra + s}. \tag{27}$$

Изъ уравненій (21) и (22) слѣдуетъ:

$$\frac{\overline{H}^{\lambda_1}(\bar{u})}{\bar{c}\overline{f}^{\lambda}(\bar{u})} = \frac{H^{\lambda_1}(u)}{cf^{\lambda}(u)}. \tag{28}$$

Дифференцируемъ обѣ части этого уравненія по u:

$$\frac{\left(\lambda_1 \overline{f}(\bar{u}) \frac{d\overline{H}(\bar{u})}{d\bar{u}} - \lambda \overline{H}(\bar{u}) \frac{d\overline{f}(\bar{u})}{d\bar{u}}\right) \overline{H}^{\lambda_1 - 1}(\bar{u})}{\bar{c}\overline{f}^{\lambda+1}(\bar{u})} \frac{d\bar{u}}{du} =$$

$$= \frac{\left(\lambda_1 f(u) \frac{dH(u)}{du} - \lambda H(u) \frac{df(u)}{du}\right) H^{\lambda_1 - 1}(u)}{cf^{\lambda+1}(u)}, \tag{29}$$

Digitized by Google

или:

$$\frac{\overline{T}(\bar{u})}{\overline{f}(\bar{u})\,\overline{H}(\bar{u})}\frac{d\bar{u}}{du}=\frac{T(u)}{f(u)\,H(u)},$$

откуда:

$$\frac{d\bar{u}}{du}=\frac{T(u)\,\overline{f}(\bar{u})\,\overline{H}(\bar{u})}{\overline{T}(\bar{u})\,f(u)\,H(u)}. \qquad (30)$$

Дифференцируя это равенство по u, мы можемъ найти выраженіе:

$$\frac{d^2\bar{u}}{du^2}$$

въ функціи u и $\bar{u}$.

Подставивъ въ полученныхъ выраженіяхъ $\frac{d\bar{u}}{du}$, $\frac{d^2\bar{u}}{du^2}$ величины:

$$u=a,\ \bar{u}=\bar{a},$$

найдемъ:

$$\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right)_{z=a}=A,\ \left(\frac{d^2\bar{u}}{du^2}\right)_{z=a}=B, \qquad (31)$$

гдѣ A и B суть нѣкоторыя извѣстныя числа.

Дифференцируя два раза по u уравненіе (23), находимъ:

$$\frac{d\bar{u}}{du}=\frac{1}{(ru+s)^2}, \qquad (32)$$

$$\frac{d^2\bar{u}}{du^2}=-\frac{2r}{(ru+s)^3}. \qquad (33)$$

Подставивъ въ эти равенства значенія:

$$u=a,\ \frac{d\bar{u}}{du}=A,\ \frac{d^2\bar{u}}{du^2}=B,$$

находимъ:

$$\left.\begin{aligned} A(ra+s)^2&=1,\\ B(ra+s)^3&=-2r. \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Digitized by Google

Изъ уравненій (24), (27), (34) мы опредѣлимъ четыре искомыхъ коэффиціента:

$$p,\ q,\ r,\ s.$$

Итакъ, *для приведенія уравненія (22) къ нормальному виду (21) необходимо рѣшить одно нормальное уравненіе (26) того же типа.*

Рѣшивъ уравненіе (21), мы будемъ въ состояніи найти корни уравненія (22): корни этихъ уравненій связаны между собою линейною зависимостью (23).

Слѣдовательно *для рѣшенія уравненія общаго вида (22) необходимо рѣшить два нормальныхъ уравненія того же типа (26) и (21).*

Задача о рѣшеніи уравненія общаго вида приводится, такимъ образомъ, къ задачѣ о рѣшеніи нормальнаго уравненія того же типа.

Въ слѣдующихъ параграфахъ мы займемся вопросомъ о рѣшеніи нормальныхъ уравненій.

§ 31. **Рѣшеніе въ радикалахъ уравненій: двупирамиднаго, тетраэдрическаго и октаэдрическаго.**

Мы уже упоминали въ главѣ IV, что уравненія: тетраэдрическое и октаэдрическое разрѣшимы въ радикалахъ. Двупирамидное уравненіе въ нормальной формѣ разрѣшимо въ радикалахъ совершенно элементарнымъ способомъ.

Найдемъ эти рѣшенія.

Возьмемъ нормальныя уравненія:

$$1)\ \left(\frac{u^m+1}{2}\right)^2 : \left(\frac{u^m-1}{2}\right)^2 : u^m = z_2 : z_2 - 1:1 \text{ двупирамидное,} \quad (35)$$

$$2)\ \left(\frac{u^2+1}{2}\right)^2 : \left(\frac{u^2-1}{2}\right)^2 : u^2 = z_4 : z_4 - 1:1 \text{ четверичное,} \quad (36)$$

$$3)\ \left.\begin{array}{l}(u^4-2i\sqrt{3}\,u^2+1)^3 : -12\,i\sqrt{3}(u^5-u)^2 : \\ : (u^4+2i\sqrt{3}\,u^2+1)^3 = z_m : z_m - 1:1\end{array}\right\} \text{тетраэдрическое,} \quad (37)$$

$$4)\ \left.\begin{array}{l}(u^8+14u^4+1)^3 : (u^{12}-33u^8-33u^4+1)^2 : \\ : 108(u^5-u)^4 = z_0 : z_0 - 1:1\end{array}\right\} \text{октаэдрическое.} \quad (38)$$

Digitized by Google

Пусть параметры $z_\varkappa$, z_m, z_0 выбраны такъ, что уравненія (36), (37), (38) имѣютъ общій корень u.

I. Двупирамидное уравненіе.

Рѣшеніе двупирамиднаго уравненія не представляетъ никакихъ затрудненій: написавъ это уравненіе въ формѣ:

$$\left(\frac{u^m+1}{u^m-1}\right)^2 = \frac{z_\partial}{z_\partial - 1}, \tag{39}$$

мы находимъ, что

$$u = \sqrt[m]{\frac{\sqrt{z_\partial}+\sqrt{z_\partial-1}}{\sqrt{z_\partial}-\sqrt{z_\partial-1}}}, \tag{40}$$

или:

$$u = \sqrt[m]{(\sqrt{z_\partial}+\sqrt{z_\partial-1})^2}. \tag{41}$$

Всѣ корни уравненія (35) выражаются $2m$-значною функціею (41).

II. Четверичное уравненіе.

Положивъ въ формулѣ (41) $m=2$, находимъ выраженія корней четверичнаго уравненія (36):

$$u = \sqrt{z_\varkappa} + \sqrt{z_\varkappa - 1}. \tag{42}$$

III. Тетраэдрическое уравненіе.

Возьмемъ тождества (63) главы VI:

$$\left.\begin{aligned} f_m(u) &= 4H_\varkappa^2(u) + 4\varepsilon f_\varkappa^2(u), \\ H_m(u) &= 4H_\varkappa^2(u) + 4\varepsilon^2 f_\varkappa^2(u), \\ \text{гдѣ } \varepsilon &= e^{\frac{2\pi i}{3}}. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Digitized by Google

Изъ этихъ тождествъ находимъ:

$$\frac{H_m^3(u)}{f_m^3(u)} = \left\{ \frac{\dfrac{H_4^2(u)}{f_4^2(u)} + \varepsilon^2}{\dfrac{H_4^2(u)}{f_4^2(u)} + \varepsilon} \right\}^3, \tag{44}$$

или, принявъ во вниманіе уравненія (36) и (37):

$$z_m = \left(\frac{z_4 + \varepsilon^2}{z_4 + \varepsilon} \right)^3, \tag{45}$$

откуда:

$$z_4 = \frac{\varepsilon \sqrt[3]{z_m} - \varepsilon^2}{1 - \sqrt[3]{z_m}}. \tag{46}$$

Подставивъ это выраженіе z_4 въ формулу (42), находимъ выраженіе корня u тетраэдрическаго уравненія (37):

$$u = \frac{\sqrt{\varepsilon \sqrt[3]{z_m} - \varepsilon^2} + \sqrt{-\varepsilon^2 \sqrt[3]{z_m} + \varepsilon}}{\sqrt{1 - \sqrt[3]{z_m}}}. \tag{47}$$

Всѣ 12 корней тетраэдрическаго уравненія (37) выражаются значеніями 12-значной функціи (47).

IV. Октаэдрическое уравненіе.

Возьмемъ тождества (55) и (56) главы VI:

$$\left.\begin{aligned} H_0(u) &= f_m(u)\, H_m(u), \\ f_0(u) &= T_m(u). \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Изъ тождествъ (48) слѣдуетъ:

$$\frac{H_0^3(u)}{108 f_0^4(u)} = \frac{f_m^3(u)\, H_m^3(u)}{108\, T_m^4(u)}, \tag{49}$$

или, принимая во вниманіе уравненія (37) и (38):

$$z_0 = -\frac{4 z_m}{(z_m - 1)^2}, \tag{50}$$

Digitized by Google

откуда:

$$z_m = \frac{z_0 - 2 + 2\sqrt{1 - z_0}}{z_0}. \tag{51}$$

Подставивъ это выраженіе z_m въ формулу (47), находимъ выраженіе корня u октаэдрическаго уравненія (38):

$$u = \tag{52}$$

$$= \frac{\sqrt{\varepsilon \sqrt[3]{z_0 - 2 + 2\sqrt{1 - z_0}} - \varepsilon^2 \sqrt[3]{z_0}} + \sqrt{\varepsilon \sqrt[3]{z_0} - \varepsilon^2 \sqrt[3]{z_0 - 2 + 2\sqrt{1 - z_0}}}}{\sqrt{\sqrt[3]{z_0} - \sqrt[3]{z_0 - 2 + 2\sqrt{1 - z_0}}}}.$$

Всѣ 24 корня октаэдрическаго уравненія (38) выражаются 24-значной функціей (52).

§ 32. **Невозможность рѣшенія икосаэдрическаго уравненія въ радикалахъ.**

Возьмемъ два уравненія:

$$\frac{f_0''^2(u)}{f_u(u)} = \zeta, \tag{53}$$

$$H_u^3(u) : T_u^2(u) : -1728 f_u^5(u) = z : z - 1 : 1. \tag{54}$$

Возьмемъ тождества (65′) и (67) главы VI:

$$f_0''^2(u) = \frac{i}{12\sqrt{3}} [H_m''^3(u) - f_m''^3(u)], \tag{55}$$

$$f_u(u) = h H_m''^3(u) + k f_m''^3(u). \tag{56}$$

На основаніи этихъ тождествъ мы въ правѣ сказать, что уравненіе (53) есть тетраэдрическое уравненіе третьяго нормальнаго вида.

Уравненіе (54) есть, какъ мы знаемъ, нормальное икосаэдрическое уравненіе.

Пусть перемѣнныя z и ζ выбраны такъ, что уравненія (53) и (54) имѣютъ общій корень u.

Digitized by Google

Возьмемъ тождества (73) и (75) главы VI:

$$T_u(u)=[f_0''^4(u)-10f_0''^2(u)f_u(u)+45f_u^2(u)]f_0''(u), \quad (57)$$

$$H_u(u)=[f_0''^2(u)-3f_u(u)]H_0''(u), \quad (58)$$

$$H_0''^3(u)=64f_u^2(u)-11f_u(u)f_0''^2(u)+f_0''^4(u). \quad (59)$$

Изъ тождествъ (58) и (59) слѣдуетъ:

$$\frac{H_u^3(u)}{f_u^5(u)}=\left\{\frac{f_0''^2(u)}{f_u(u)}-3\right\}^3\left\{64-11\frac{f_0''^2(u)}{f_u(u)}+\frac{f_0''^4(u)}{f_u^2(u)}\right\},$$

или, принимая во вниманіе уравненія (53) и (54):

$$-1728z=(\zeta-3)^3(64-11\zeta+\zeta^2). \quad (60)$$

Такимъ же образомъ изъ тождества (57), принимая во вниманіе уравненія (53) и (54), находимъ:

$$-1728(z-1)=(\zeta^2-10\zeta+45)^2\zeta. \quad (61)$$

Соединяя вмѣстѣ уравненія (60) и (61), можемъ написать:

$$(\zeta-3)^3(\zeta^2-11\zeta+64):\zeta(\zeta^2-10\zeta+45)^2:-1728=z:z-1:1. \quad (62)$$

Идя тѣмъ же путемъ, которымъ мы шли въ § 31, мы должны были бы для рѣшенія икосаэдрическаго уравненія (54) поступить такъ:

1) Рѣшить тетраэдрическое уравненіе (53)—его, какъ мы знаемъ, можно рѣшить въ радикалахъ.

2) Выразить изъ уравненія (62) величину ζ, какъ явную функцію z.

3) Подставить полученное выраженіе ζ въ выраженіе корня u тетраэдрическаго уравненія (53). Полученное такимъ образомъ выраженіе и будетъ корнемъ икосаэдрическаго уравненія (54).

Не трудно усмотрѣть, что путь этотъ для икосаэдрическаго уравненія непримѣнимъ, потому что уравненіе (62) есть уравненіе 5-ой степени.

Digitized by Google

Ниже, въ главѣ X, мы убѣдимся въ томъ, что уравненіе 5-ой степени (62) не разрѣшимо въ радикалахъ *). Поэтому и икосаэдрическое уравненіе (54) не разрѣшимо въ радикалахъ.

§ 33. **Рѣшеніе уравненій изучаемаго класса въ гипергеометрическихъ функціяхъ.**

Пусть дано нормальное уравненіе:

$$H^{\lambda_1}(u) : c' T^{\lambda_2}(u) : cf^{\lambda}(u) = z : z-1 : 1. \qquad (21)$$

Мы видѣли въ главѣ II, что корни его суть отношенія частныхъ интеграловъ гипергеометрическаго уравненія

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + [\gamma-(\alpha+\beta+1)z]\frac{dy}{dz} - \alpha\beta y = 0, \qquad (63)$$

при чемъ значенія параметровъ α, β, γ таковы:

	Дупирамидное.	Тетраэдрическое.	Октаэдрическое.	Икосаэдрическое.
$\alpha =$	$\frac{1}{2m}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{11}{60}$
$\beta =$	$-\frac{1}{2m}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{60}$
$\gamma =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

(64)

*) Горданъ показалъ, что всякое уравненіе 5-ой степени можетъ быть преобразовано въ уравненіе вида (62). См. Math. Annalen. Томъ 28, стр. 152. Мы не приводимъ этого весьма интереснаго но нѣсколько сложнаго преобразованія Гордана. Ниже справедливость теоремы Гордана станетъ ясна изъ другихъ соображеній.

Digitized by Google

Обозначивъ черезъ y', y'' два линейно независимыхъ частныхъ интеграла уравненія (63), мы можемъ всякій корень уравненія (21) представить въ такомъ видѣ:

$$u = \frac{py' + qy''}{ry' + sy''}, \tag{65}$$

гдѣ p, q, r, s суть нѣкоторыя постоянныя числа.

Займемся вычисленіемъ этихъ постоянныхъ для нормальныхъ уравненій тетраэдрическаго, октаэдрическаго и икосаэдрическаго типовъ *).

Мы начнемъ съ икосаэдрическаго уравненія, какъ наиболѣе для насъ важнаго.

Въ вычисленіяхъ мы будемъ пользоваться формулами и обозначеніями § 9.

I. Икосаэдрическое уравненіе.

$$(u^{20} - 228u^{15} + 494u^{10} + 228u^5 + 1)^3 : (u^{30} + 522u^{25} - 10005u^{20} - \\ -10005u^{10} - 522u^5 + 1)^2 : -1728u^5(u^{10} + 11u^5 - 1)^5 = z : z - 1 : 1. \tag{54'}$$

Параметры α, β, γ гипергеометрическаго уравненія, соотвѣтствующіе разсматриваемому случаю, таковы:

$$\alpha = \frac{11}{60}, \quad \beta = -\frac{1}{60}, \quad \gamma = \frac{2}{3}.$$

Подставивъ эти значенія параметровъ α, β, γ въ формулы (46) и (48) параграфа 9, находимъ:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= F\left(\frac{11}{60}, -\frac{1}{60}, \frac{2}{3}, z\right), \\ y_2 &= z^{\frac{1}{3}} F\left(\frac{31}{60}, \frac{19}{60}, \frac{4}{3}, z\right), \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

*) Двупирамидное уравненіе мы опускаемъ потому, что оно въ радикалахъ рѣшается очень просто.

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} y_5 &= z^{-\frac{11}{60}} F\left(\frac{11}{60}, \frac{31}{60}, \frac{6}{5}, \frac{1}{z}\right), \\ y_6 &= z^{\frac{1}{60}} F\left(-\frac{1}{60}, \frac{19}{60}, \frac{4}{5}, \frac{1}{z}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (67)$$

Область сходимости рядовъ (66) есть кругъ, описанный изъ начала координатъ радіусомъ равнымъ 1. На самомъ кругѣ ряды остаются сходящимися, хотя сходимость ихъ медленная. Площадь этого круга мы по прежнему назовемъ областью I. Областью сходимости рядовъ (67) служитъ вся плоскость за исключеніемъ области I. Ряды остаются сходящимися и на границѣ этой области: на окружности круга, описаннаго изъ начала координатъ радіусомъ равнымъ 1. Область сходимости рядовъ (67) мы по прежнему будемъ называть областью III.

Положивъ въ формулѣ (65):

$$y' = y_5, \quad y'' = y_6,$$

мы представимъ корни икосаэдрическаго уравненія (54′) въ такомъ видѣ:

$$u = \frac{py_5 + qy_6}{ry_5 + sy_6}. \qquad (68)$$

При надлежащемъ выборѣ коэффиціентовъ p, q, r, s формула (68) способна изобразить каждый корень икосаэдрическаго уравненія.

Корни икосаэдрическаго уравненія, какъ мы знаемъ, на плоскости перемѣннаго u изображаются точками, соотвѣтственными относительно четыреугольниковъ икосаэдрической сѣти. Условимся буквою u обозначать тотъ корень икосаэдрическаго уравненія, который соотвѣтствуетъ основному четыреугольнику $0abc$ (черт. I) сѣти и выберемъ постоянныя

$$p, \; q, \; r, \; s$$

такъ, чтобы формула (68) изображала именно этотъ корень u икосаэдрическаго уравненія.

Digitized by Google

Изъ икосаэдрическаго уравненія (54′) видно, что въ области точки $s = \infty$ корень u разлагается въ рядъ такого вида:

$$u = \frac{1}{12^{\frac{2}{5}}} z^{-\frac{1}{5}} + \ldots \qquad (69)$$

Сравнивая этотъ рядъ съ формулою (68), гдѣ y_5 и y_6 имѣютъ величины, даваемыя формулами (67), мы находимъ, что для тождественности формулъ (69) и (68) коэффиціенты

$$p,\ q,\ r,\ s$$

должны удовлетворять такимъ условіямъ:

$$q = r = 0,\ \frac{p}{s} = \frac{1}{12^{\frac{2}{5}}}.$$

Послѣ подстановки этихъ величинъ въ формулу (68) и послѣ замѣны y_5 и y_6 ихъ выраженіями (67), мы найдемъ, что въ области III корень u выражается формулою:

$$u = \frac{1}{12^{\frac{2}{5}}} \frac{F\left(\frac{11}{60}, \frac{31}{60}, \frac{6}{5}, \frac{1}{z}\right)}{F\left(-\frac{1}{60}, \frac{19}{60}, \frac{4}{5}, \frac{1}{z}\right)} z^{-\frac{1}{5}}. \qquad (70)$$

Таково выраженіе корня u въ области III, т. е. при

$$mod.\ z \geqq 1.$$

Посмотримъ, каково выраженіе того же корня въ области I.

Положивъ въ формулѣ (65):

$$y' = y_1,\ y'' = y_2,$$

мы представимъ корень u въ такомъ видѣ:

$$u = \frac{py_1 + qy_2}{ry_1 + sy_2}, \qquad (71)$$

гдѣ p, q, r, s имѣютъ другія значенія, чѣмъ прежде.

Digitized by Google

Займемся ихъ опредѣленіемъ.

Въ § 10, при доказательствѣ теоремы 3 главы III, мы видѣли, что когда точка z идетъ по дѣйствительной оси справа влѣво и подходитъ къ точкѣ 0, точка u движется по сторонѣ треугольника сѣти — сторонѣ, обозначенной на чертежѣ 4 буквами $u_1\ u_0$, а въ разсматриваемомъ случаѣ на черт. I буквами bc, и подходитъ къ соотвѣтствующей вершинѣ треугольника—вершинѣ, обозначенной на черт. I буквою c. Касательная къ дугѣ окружности bc въ точкѣ c наклонена къ дѣйствительной оси плоскости подъ угломъ $\frac{23}{15}\pi$.

Изъ этихъ соображеній и изъ вида икосаэдрическаго уравненія (54′) не трудно усмотрѣть, что въ области точки $z=0$ корень u разлагается въ рядъ вида:

$$u = he^{\frac{\pi i}{5}} + ke^{\frac{23}{15}\pi i} z^{\frac{1}{3}} + \ldots, \qquad (72)$$

гдѣ h есть разстояніе точки c отъ начала координатъ, т. е. модуль количества, изображаемаго точкою c, а k — нѣкоторое дѣйствительное положительное число.

Займемся опредѣленіемъ постоянныхъ h и k.

Изъ чертежа I видно, что точка c не мѣняется икосаэдрическою подстановкою:

$$S_u\ T_u;$$

она служитъ поэтому корнемъ уравненія:

$$u = \frac{1+(\varepsilon^2+\varepsilon^3)u}{u-(\varepsilon^2+\varepsilon^3)}\varepsilon. \qquad (73)$$

$$\text{гдѣ } \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}.$$

Корни уравненія (73) таковы:

$$\frac{\pm\sqrt{30+6\sqrt{5}}-(3+\sqrt{5})}{4}e^{\frac{\pi i}{5}}. \qquad (74)$$

Digitized by Google

Отсюда ясно, что:

$$h = \frac{+\sqrt{30+6\sqrt{5}} - (3+\sqrt{5})}{4}, \qquad (75)$$

или, по вычисленіи:

$$h = 0{,}33826121\ldots \qquad (76)$$

Величина

$$he^{\frac{\pi i}{5}},$$

изображаемая точкою c на чертежѣ I, есть корень многочлена $H_u(u)$.

Подставивъ разложеніе (72) въ икосаэдрическое уравненіе, произведя сокращеніе на z и положивъ затѣмъ $z = 0$, мы получимъ такое равенство:

$$\frac{5^3(57-247h^5-171h^{10}-h^{15})^3 h^7 k^3}{3^3(1+11h^5-h^{10})^5} = 1, \qquad (77)$$

откуда:

$$k = 0{,}6\ \frac{(1+11h^5-h^{10})^{\frac{5}{3}}}{(57-247h^5-171h^{10}-h^{15})h^{\frac{7}{3}}}. \qquad (78)$$

Подставивъ въ эту формулу найденную величину h (76), находимъ:

$$k = 0{,}145\ldots. \qquad (79)$$

Итакъ, въ области точки $z = 0$ корень u разлагается въ такой рядъ:

$$u = 0{,}33826121\ldots e^{-\frac{\pi i}{5}} + 0{,}145\ldots. e^{\frac{23}{15}\pi i} z^{\frac{1}{3}} + \ldots \qquad (80)$$

Для того, чтобы эта формула была тождественна съ формулою (71), гдѣ y_1 и y_2 имѣютъ значенія, даваемыя равенствами (66), необходимо, чтобы коэффиціенты p, q, r, s формулы (71) удовлетворяли условіямъ:

Digitized by Google

$$s=0,\ \frac{p}{r}=he^{\frac{\pi i}{5}}=0{,}33826121\ldots e^{\frac{\pi i}{5}},$$

$$\frac{q}{r}=ke^{\frac{11}{15}\pi i}=0{,}145\ldots\ldots e^{\frac{11}{15}\pi i}. \tag{81}$$

Итакъ, въ области I корень u икосаэдрическаго уравненія выражается формулою:

$$u=0{,}33826121\ldots e^{\frac{\pi i}{5}}+0{,}145\ldots e^{\frac{11}{15}\pi i}\frac{F\left(\frac{31}{60},\frac{19}{60},\frac{4}{3},z\right)}{F\left(\frac{11}{60},-\frac{1}{60},\frac{2}{3},z\right)}. \tag{82}$$

Таково выраженіе корня u въ области I, т. е. при

$$mod.\ z\leqq 1.$$

Формулы (70) и (82) позволяютъ вычислить корень u икосаэдрическаго уравненія при всякомъ значеніи z. Найдя величину одного корня и зная подстановки икосаэдрической группы, мы можемъ вычислить всѣ остальные корни икосаэдрическаго уравненія *).

II. Октаэдрическое уравненіе.

Возьмемъ октаэдрическое уравненіе въ первой нормальной формѣ:

$$(u^8+14u^4+1)^3:(u^{12}-33u^8-33u^4+1)^2:108(u^5-u)^4= \\ =z:z-1:1. \tag{38}$$

---

*) Клейнъ даетъ рѣшеніе икосаэдрическаго уравненія нѣсколько въ иной формѣ. См. Math. Annalen. Томъ 12. Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder. Ту же задачу нѣсколько иначе Клейнъ рѣшаетъ въ статьѣ того же заглавія, помѣщенной въ Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen. 9 Heft.

Digitized by Google

Къ нему примѣнимы почти дословно тѣ же разсужденія, которыя мы привели по поводу икосаэдрическаго уравненія. Поэтому ограничимся лишь самыми краткими указаніями.

Величины параметровъ α, β, γ, въ разсматриваемомъ случаѣ таковы:

$$\alpha = \frac{5}{24}, \quad \beta = -\frac{1}{24}, \quad \gamma = \frac{2}{3}.$$

Подставивъ эти величины въ формулы (46) и (48) § 9, находимъ:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= F\left(\frac{5}{24}, -\frac{1}{24}, \frac{2}{3}, z\right), \\ y_2 &= z^{\frac{1}{3}} F\left(\frac{13}{24}, \frac{7}{24}, \frac{4}{3}, z\right), \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

$$\left.\begin{aligned} y_5 &= z^{-\frac{5}{24}} F\left(\frac{5}{24}, \frac{13}{24}, \frac{5}{4}, \frac{1}{z}\right), \\ y_6 &= z^{\frac{1}{24}} F\left(-\frac{1}{24}, \frac{7}{24}, \frac{3}{4}, \frac{1}{z}\right). \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

Въ области III корень u уравненія (38) изобразится формулою вида:

$$u = \frac{py_5 + qy_6}{ry_5 + sy_6}. \tag{68}$$

Изъ уравненія (38) видно, что въ области точки $z = \infty$ корень u разлагается въ рядъ:

$$u = \frac{1}{\sqrt[4]{108}} z^{-\frac{1}{4}} + \ldots. \tag{85}$$

Для тождественности формулъ (85) и (68) необходимо, чтобы коэффиціенты p, q, r, s удовлетворяли условіямъ:

$$q = r = 0, \quad \frac{p}{s} = \frac{1}{\sqrt[4]{108}}. \tag{86}$$

Digitized by Google

Подставивъ эти величины въ формулу (68), находимъ:

$$u = \frac{1}{\sqrt[4]{108}} \frac{F\left(\frac{5}{24}, \frac{13}{24}, \frac{5}{4}, \frac{1}{z}\right)}{F\left(-\frac{1}{24}, \frac{7}{24}, \frac{3}{4}, \frac{1}{z}\right)} z^{-\frac{1}{4}} . \qquad (87)$$

Таково выраженіе корня u октаэдрическаго уравненія въ области III, т. е. при

$$mod.\, z \geqq 1.$$

Въ области I тотъ же корень u изобразится формулою вида:

$$u = \frac{py_1 + qy_2}{ry_1 + sy_2} . \qquad (71)$$

Съ другой стороны, разсужденіями, подобными приведеннымъ выше при разсмотрѣніи уравненія икосаэдрическаго типа, обнаружимъ, что корень u въ области точки $u = 0$ разлагается въ рядъ вида:

$$u = he^{\frac{\pi i}{4}} + ke^{\frac{11}{12}\pi i} z^{\frac{1}{4}} + \ldots , \qquad (88)$$

гдѣ h и k суть постоянныя, дѣйствительныя и положительныя числа.

Величина h есть разстояніе точки, отмѣченной на черт. 29 буквою c, отъ начала координатъ. Точка c не мѣняется октаэдрической подстановкой:

$$S_0 \, \mathcal{S}_0$$

и служитъ поэтому корнемъ уравненія:

$$u = i \frac{1-u}{1+u} . \qquad (89)$$

Корни уравненія (89) таковы:

$$\frac{\pm\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi i}{4}} .$$

Digitized by Google

Отсюда заключаемъ, что:

$$h = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} = 0{,}51763809\ldots. \qquad (90)$$

Подставивъ разложеніе (88) въ октаэдрическое уравненіе (38), сокративъ полученное равенство на z и положивъ $z=0$, мы получимъ уравненіе:

$$\frac{2^7(7-h^4)^3h^5k^3}{3^3(h^4+1)^4} = 1,$$

откуда:

$$k = \frac{3(h^4+1)^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{7}{3}}(7-h^4)h^{\frac{5}{3}}}, \qquad (91)$$

или, послѣ подстановки вмѣсто h его величины (90):

$$k = 0{,}282403\ldots \qquad (92)$$

Итакъ, корень u въ области точки $z=0$ разлагается въ рядъ:

$$u = 0{,}51763809\ldots . e^{\frac{\pi i}{4}} + 0{,}282403\ldots . e^{\frac{19}{12}\pi i} z^{\frac{1}{3}} + \ldots \qquad (93)$$

Формулы (93) и (71) только въ томъ случаѣ могутъ быть тождественны между собою, если коэффиціенты p, q, r, s удовлетворяютъ условіямъ:

$$s=0,\ \frac{p}{r} = 0{,}51763809\ldots e^{\frac{\pi i}{4}},\ \frac{q}{r} = 0{,}282403\ldots . e^{\frac{19}{12}\pi i}.$$

Подставивъ эти величины въ формулу (71), находимъ:

$$u = 0{,}51763809\ldots e^{\frac{\pi i}{4}} + 0{,}282403\ldots e^{\frac{19}{12}\pi i} \frac{F\left(\frac{13}{24}, \frac{7}{24}, \frac{4}{3}, z\right)}{F\left(\frac{5}{24}, -\frac{1}{24}, \frac{2}{3}, z\right)}. \qquad (94)$$

Digitized by Google

Таково выраженіе корня u октаэдрическаго уравненія въ области I, т. е. при

$$mod.\ z \leqq 1.$$

Формулы (87) и (94) даютъ возможность найти величину корня u октаэдрическаго уравненія при какомъ угодно значеніи z.

Вычисливъ величину корня u и зная подстановки первой нормальной октаэдрической группы, мы можемъ вычислить всѣ корни октаэдрическаго уравненія.

III. Тетраэдрическое уравненіе.

Возьмемъ тетраэдрическое уравненіе во 2-мъ нормальномъ видѣ:

$$(2\sqrt{2}\,u^3+1)^3:(u^6+5\sqrt{2}\,u^3-1)^2:-(u^3-2\sqrt{2})^3u^3=z:z-1:1. \quad (95)$$

Параметры α, β, γ гипергеометрическаго уравненія въ данномъ случаѣ будутъ таковы:

$$\alpha=\frac{1}{4},\ \beta=-\frac{1}{12},\ \gamma=\frac{2}{3}.$$

Повторяя дословно тѣ же разсужденія, какія мы привели выше при нахожденіи рѣшенія уравненій предшествующихъ типовъ, мы придемъ къ заключенію, что корень u тетраэдрическаго уравненія при

$$mod.\ z \geqq 1$$

выразится формулою:

$$u=\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{F\left(\frac{1}{4},\ \frac{7}{12},\ \frac{4}{3},\ \frac{1}{z}\right)}{F\left(-\frac{1}{12},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{z}\right)}\,z^{-\frac{1}{3}}. \quad (96)$$

Тотъ же корень u при

$$mod.\ z \leqq 1$$

Digitized by Google

выразится формулою:

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi i}{3}} + \frac{3}{4\sqrt{2}} e^{\frac{5\pi i}{3}} \frac{F\left(\frac{7}{12}, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, z\right)}{F\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{12}, \frac{2}{3}, z\right)} z^{\frac{1}{3}}. \qquad (97)$$

Имѣя корень u тетраэдрическаго уравненія и зная подстановки второй нормальной тетраэдрической группы, мы можемъ вычислить всѣ корни втораго нормальнаго тетраэдрическаго уравненія *).

Результаты, полученные нами въ настоящей главѣ, завершаютъ теорію уравненій, имѣющихъ корнями отношенія частныхъ интеграловъ линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка. Мы изучили свойства и нашли нормальные виды этихъ уравненій, нашли критерій, дающій возможность убѣдиться въ томъ, что данное уравненіе принадлежитъ къ названному классу, умѣемъ привести уравненіе къ нормальному виду и, наконецъ, знаемъ, какъ рѣшить уравненіе, приведенное къ нормальному виду. Мы убѣдились въ томъ, что дѣйствительно всѣ уравненія изученнаго класса разрѣшимы въ гипергеометрическихъ функціяхъ и, кромѣ того, нашли, что уравненія всѣхъ типовъ, кромѣ икосаэдрическаго, разрѣшимы въ радикалахъ.

---

*) Рѣшеніе уравненія октаэдрическаго типа приведено у Puchta. Das Oktaeder und die Gleichung vierten Grades. Denkschriften der Kaiserlichen Akademie in Wien. Bd. 41. Его рѣшеніе аналогично Клейнову рѣшенію икосаэдрическаго уравненія и разнится отъ приведеннаго въ текстѣ.

Аналогичное рѣшеніе тетраэдрическаго уравненія построить не трудно.

Digitized by Google

ГЛАВА VIII.

Алгебраическія уравненія, имѣющія корнями частные интегралы линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка.

§ 34. Предварительныя замѣчанія.

Въ настоящей главѣ мы разсмотримъ ближе внѣшній видъ уравненій, свойства которыхъ изучены нами въ главѣ I, уравненій, имѣющихъ корнями частные интегралы линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка.

Въ главѣ I мы видѣли *), что корни этихъ уравненій выражаются какъ явныя функціи корней алгебраическаго уравненія:

$$H^{\lambda_1}(u) : c' T^{\lambda_2}(u) : c f^{\lambda}(u) = \frac{1}{c} R(z) : \frac{1}{c} R(z) - 1 : 1, \qquad (1)$$

рѣшеніе котораго было нами найдено въ главѣ VII.

Припомнимъ главнѣйшіе результаты, найденные въ главѣ I и отчасти въ главѣ II.

Пусть корни уравненія

$$\Phi(y, z) = 0 \qquad (2)$$

служатъ частными интегралами линейнаго дифференціальнаго уравненія:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + p_1 \frac{dy}{dz} + p_2 y = 0. \qquad (3)$$

---

*) См. формулы (106) и (107) главы I.

Digitized by Google

Отношеніе двухъ линейно независимыхъ частныхъ интеграловъ y_1, y_2 уравненія (3):

$$\frac{y_1}{y_2} = u \tag{4}$$

есть корень нѣкотораго алгебраическаго уравненія вида (1).

Корни y_1 и y_2 могутъ быть выражены, какъ явныя функціи u:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= ku\sqrt{\frac{T(u)\,R(z)}{f(u)\,H(u)\,\frac{dR(z)}{dz}}}\,e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dz}, \\ y_2 &= k\sqrt{\frac{T(u)\,R(u)}{f(u)\,H(u)\,\frac{dR(z)}{dz}}}\,e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dz}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

гдѣ k есть нѣкоторое постоянное.

Если y_2 есть корень уравненія (2), то мы въ правѣ сказать что уравненіе (2) можетъ быть получено изъ уравненія (1) преобразованіемъ неизвѣстнаго:

$$y = k\sqrt{\frac{T(u)\,R(z)}{f(u)\,H(u)\,\frac{dR(z)}{dz}}}\,e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dz}. \tag{6}$$

Корни уравненія (2) выражаются черезъ корни уравненія (1) при помощи формулъ (6).

Умѣя рѣшить уравненіе (1), мы можемъ найти всѣ корни уравненія (2).

Положивъ:

$$y = ke^{-\frac{1}{2}\int p_1 dz}\eta, \tag{7}$$

мы преобразуемъ уравненіе (2) въ новое уравненіе:

$$F(\eta, z) = 0, \tag{8}$$

Digitized by Google

дифференціальное же уравненіе (3) въ новое дифференціальное уравненіе:

$$\frac{d^2\eta}{dz^2}=P\eta, \tag{9}$$

гдѣ P есть раціональная функція z, которая выражается черезъ p_1 и p_2 слѣдующимъ образомъ:

$$P=\frac{1}{4}p_1^2+\frac{1}{2}\frac{dp_1}{dz}-p_2. \tag{10}$$

Та же функція P можетъ быть выражена черезъ $R(z)$ изъ такого уравненія:

$$-2P=[R(z)]_z+\frac{1}{c^2}\left(\frac{dR(z)}{dz}\right)^2\left\{\frac{1-\frac{1}{\lambda_1^2}}{\frac{2}{c^2}R^2(z)}+\frac{1-\frac{1}{\lambda_2^2}}{2\left(\frac{1}{c}R(z)-1\right)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda^2}-1}{\frac{2}{c}R(z)\left(\frac{1}{c}R(z)-1\right)}\right\}^{*)}. \tag{11}$$

Изъ равенства (7) слѣдуетъ, что отношеніе частныхъ интеграловъ y_1, y_2 уравненія (3) таково же, какъ отношеніе соотвѣтствующихъ имъ частныхъ интеграловъ η_1, η_2 уравненія (9):

$$u=\frac{y_1}{y_2}=\frac{\eta_1}{\eta_2}. \tag{12}$$

Отношеніе

$$\frac{\eta_1}{\eta_2}$$

есть корень того же алгебраическаго уравненія (1).

Корни η_1, η_2 уравненія (8) выражаются черезъ корень u уравненія (1) при помощи формулъ:

*) См. формулы (19) и (75) главы II.

Digitized by Google

$$\eta_1 = u\sqrt{\frac{T(u)\,R(z)}{f(u)H(u)\frac{dR(z)}{dz}}}, \qquad \eta_2 = \sqrt{\frac{T(u)\,R(z)}{f(u)\,H(u)\frac{dR(z)}{dz}}}. \quad (13)$$

Уравненіе (8) можно разсматривать, какъ результатъ преобразованія уравненія (1) подстановкою:

$$\eta = \sqrt{\frac{T(u)\,R(z)}{f(u)\,H(u)\frac{dR(z)}{dz}}}. \quad (14)$$

Найдя уравненіе (8), мы можемъ построить уравненіе (2), преобразуя уравненіе (8) подстановкою:

$$\eta = \frac{1}{k}e^{\frac{1}{2}\int p_1 dz}\,y. \quad (15)$$

Изъ уравненій вида (2) наибольшій интересъ представляютъ тѣ уравненія, корни которыхъ суть частные интегралы гипергеометрическаго уравненія:

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + \left\{\gamma - (\alpha+\beta+1)z\right\}\frac{dy}{dz} - \alpha\beta y = 0. \quad (16)$$

Мы знаемъ, что въ такомъ случаѣ параметры α, β, γ суть функціи величинъ λ, λ_1, λ_2 и опредѣляются по формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda}\right), \\ \beta &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda}\right), \\ \gamma &= 1 - \frac{1}{\lambda_1}. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

*) См. формулы (71) главы II.

Digitized by Google

Положимъ въ формулахъ (10) и (11):

$$p_1 = \frac{\gamma - (\alpha+\beta+1)z}{z(1-z)}, \quad p_2 = -\frac{\alpha\beta}{z(1-z)}, \tag{18}$$

гдѣ α, β, γ опредѣляются формулами (17).

Изъ формулъ (10), (18), (17) находимъ:

$$P = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1-\frac{1}{\lambda_1^2}}{2z^2} + \frac{1-\frac{1}{\lambda_2^2}}{2(z-1)^2} + \frac{\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda^2}-1}{2z(z-1)}\right\}. \tag{19}$$

Вставивъ это выраженіе въ лѣвую часть равенства (11), мы находимъ уравненіе, опредѣляющее функцію $R(z)$. Мы видимъ, что оно удовлетворяется при:

$$R(z) = cz. \tag{20}$$

Итакъ, положивъ

$$R(z) = cz, \tag{20}$$

и преобразуя затѣмъ уравненіе (8) подстановкою:

$$\eta = \frac{1}{k} e^{\frac{1}{2}\int \frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)z}{z(1-z)}dz} y,$$

или:

$$\eta = \frac{1}{k} z^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\lambda_1}\right)} (1-z)^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\lambda_2}\right)} y, \tag{21}$$

гдѣ k—нѣкоторое произвольное постоянное, мы должны получить новое алгебраическое уравненіе, имѣющее корнями частные интегралы гипергеометрическаго уравненія (16).

Такъ какъ для уравненій типовъ: тетраэдрическаго, октаэдрическаго и икосаэдрическаго величины λ_1 и λ_2 опредѣляются равенствами:

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2,$$

то подстановка (21) можетъ быть для уравненій этихъ трехъ типовъ представлена формулою:

Digitized by Google

$$\eta = \frac{1}{k} z^{\frac{1}{3}} (1-z)^{\frac{1}{4}} y. \qquad (22)$$

Мы видимъ, что изъ числа уравненій изучаемаго класса наибольшій интересъ представляютъ:

1) уравненія вида (8)—по наибольшей простотѣ своихъ свойствъ,

2) уравненія, получаемыя изъ уравненій вида (8) преобразованіемъ (22)—по своему свойству имѣть корнями частные интегралы гипергеометрическаго уравненія.

Остальныя уравненія того же класса могутъ быть получаемы изъ уравненій (8) подстановкою:

$$\eta = \frac{1}{k} e^{\frac{1}{2}\int p_1 dz} y, \qquad (15)$$

гдѣ p_1 какая угодно раціональная функція z, подчиненная только тому условію, чтобы выраженіе:

$$e^{\frac{1}{2}\int p_1 dz}$$

было алгебраическою функціею z.

Что касается до уравненія (8), соотвѣтствующаго уравненію (1) двупирамиднаго типа, то оно было нами разсмотрѣно въ § 4.

Это уравненіе рѣшается въ радикалахъ совершенно элементарнымъ образомъ. Поэтому мы будемъ говорить только объ уравненіяхъ вида (8) типовъ: тетраэдрическаго, октаэдрическаго и икосаэдрическаго.

Въ § 20 мы нашли, что порядокъ n группы бинарныхъ линейныхъ подстановокъ, каждаго изъ названныхъ трехъ типовъ вдвое выше порядка N соотвѣтствующей группы неоднородныхъ линейныхъ подстановокъ. Отсюда слѣдуетъ, что степень n уравненія (8) вдвое выше степени N уравненія (1) того же типа:

$$n = 2N.$$

Digitized by Google

Далѣе, отсюда заключаемъ, что индексы:

$$\mu = \frac{n}{\nu}, \quad \mu_1 = \frac{n}{\nu_1}, \quad \mu_2 = \frac{n}{\nu_2}$$

первичныхъ формъ $f(\eta_1, \eta_2)$, $H(\eta_1, \eta_2)$, $T(\eta_1, \eta_2)$ вдвое больше показателей:

$$\lambda = \frac{N}{\nu}, \quad \lambda_1 = \frac{N}{\nu_1}, \quad \lambda_2 = \frac{N}{\nu_2}.$$

§ 35. **Выраженія первичныхъ формъ** $f(\eta_1, \eta_2)$, $H(\eta_1, \eta_2)$, $T(\eta_1, \eta_2)$ **въ видѣ радикаловъ изъ раціональныхъ функцій перемѣннаго** z.

Мы видѣли въ теоремѣ 10 главы I, что всякая первичная форма, имѣющая аргументами два частныхъ интеграла уравненія (8), равна радикалу изъ раціональной функціи z. Степень этого радикала равна индексу первичной формы или дѣлителю этого индекса—если степень радикала удастся понизить.

Построимъ сказанныя выраженія для первичныхъ формъ $f(\eta_1, \eta_2)$, $H(\eta_1, \eta_2)$, $T(\eta_1, \eta_2)$ разсматриваемыхъ трехъ типовъ.

Возведемъ обѣ части втораго изъ равенствъ (13) въ степень

$$n = 2N:$$

$$\eta_2^{\,n} = \frac{T^N(u)\, R^N}{f^N(u)\, H^N(u)\, R'^N}, \tag{23}$$

гдѣ для краткости введены обозначенія:

$$R = R(z), \quad R' = \frac{dR(z)}{dz}.$$

Изъ уравненія (1) имѣемъ:

$$H^{\lambda_1}(u) = Rf^{\lambda}(u), \quad T^{\lambda_2}(u) = \frac{1}{c'}(R - c)\, f^{\lambda}(u), \tag{24}$$

откуда:

$$H^N(u) = R^{\nu_1} f^{\lambda\nu_1}(u), \quad T^N(u) = \frac{1}{c'^{\nu_2}}(R - c)^{\nu_2} f^{\lambda\nu_2}(u). \tag{25}$$

Digitized by Google

Вставивъ эти выраженія въ формулу (23), находимъ:

$$\eta_2^{\,n} = \frac{(R-c)^{\nu_2} R^{N-\nu_1}}{c'^{\nu_2} R'^N} f^{\lambda(\nu_2-\nu_1-\nu)}(u). \qquad (26)$$

Величины ν, ν_1, ν_2, какъ мы знаемъ, таковы:

для тетраэдрическаго типа: $\nu=4$, $\nu_1=4$, $\nu_2=6$,

для октаэдрическаго типа: $\nu=6$, $\nu_1=8$, $\nu_2=12$,

для икосаэдрическаго типа: $\nu=12$, $\nu_1=20$, $\nu_2=30$.

Во всѣхъ трехъ случаяхъ имѣетъ мѣсто равенство:

$$\nu_2 - \nu_1 - \nu = -2. \qquad (27)$$

Поэтому равенство (26) можно представить въ такомъ видѣ:

$$\eta_2^{\,n} f^{2\lambda}(u) = \frac{(R-c)^{\nu_2} R^{N-\nu_1}}{c'^{\nu_2} R'^N}. \qquad (28)$$

Такъ какъ многочленъ $f(u)$ степени ν, то:

$$\eta_2^{\,\nu} f(u) = f(\eta_1, \eta_2).$$

Отсюда слѣдуетъ, что равенство (28) можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$f^{2\lambda}(\eta_1, \eta_2) = \frac{(R-c)^{\nu_2} R^{N-\nu_1}}{c'^{\nu_2} R'^N}. \qquad (29)$$

Отсюда, обозначая индексъ первичной формы $f(\eta_1, \eta_2)$ по прежнему буквою μ и припомнивъ, что

$$2\lambda = \mu,$$

находимъ:

$$f(\eta_1, \eta_2) = \sqrt[\mu]{\frac{(R-c)^{\nu_2} R^{N-\nu_1}}{c'^{\nu_2} R'^N}}. \qquad (30)$$

Первичная форма $f(\eta_1, \eta_2)$ выражена въ видѣ радикала степени μ изъ раціональной функціи z.

Изъ уравненій (24) слѣдуетъ:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} H^{2\lambda_1}(\eta_1, \eta_2) &= R^2 f^{2\lambda}(\eta_1, \eta_2), \\ T^{2\lambda_2}(\eta_1, \eta_2) &= \frac{1}{c'^2}(R-c)^2 f^{2\lambda}(\eta_1, \eta_2). \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Подставивъ въ эти равенства выраженіе (30) формы $f^{2\lambda}(\eta_1, \eta_2)$, находимъ:

$$\left.\begin{aligned} H^{2\lambda_1}(\eta_1, \eta_2) &= \frac{(R-c)^{\nu_2} R^{N-\nu_1+2}}{c'^{\nu_2} R'^N}, \\ T^{2\lambda_2}(\eta_1, \eta_2) &= \frac{(R-c)^{\nu_2+2} R^{N-\nu_1}}{c'^{\nu_2+2} R'^N}. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Откуда, припомнивъ, что:

$$2\lambda_1 = \mu_1, \quad 2\lambda_2 = \mu_2,$$

находимъ:

$$H(\eta_1, \eta_2) = \sqrt[\mu_1]{\frac{(R-c)^{\nu_2} R^{N-\nu_1+2}}{c'^{\nu_2} R'^N}}, \tag{33}$$

$$T(\eta_1, \eta_2) = \sqrt[\mu_2]{\frac{(R-c)^{\nu_2+2} R^{N-\nu_1}}{c'^{\nu_2+2} R'^N}}. \tag{34}$$

Формулы эти даютъ выраженія первичныхъ формъ $H(\eta_1, \eta_2)$, $T(\eta_1, \eta_2)$ въ видѣ радикаловъ изъ раціональной функціи ε.

Примѣнимъ формулы (30), (33), (34) къ каждому изъ разсматриваемыхъ трехъ типовъ въ отдѣльности, давая показателямъ μ, μ_1, μ_2, ν, ν_1, ν_2 соотвѣтствующія значенія.

I. Типъ тетраэдрическій.

$$\left.\begin{aligned} f(\eta_1, \eta_2) &= \frac{(R-c)R}{c'R'^2}\sqrt[3]{R}, \\ H(\eta_1, \eta_2) &= \frac{(R-c)R}{c'^2R'^2}\sqrt[3]{R^2}, \\ T(\eta_1, \eta_2) &= \frac{(R-c)^2R^2}{c'^2R'^3}. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Digitized by Google

II. Типъ октаэдрическій.

$$\left.\begin{aligned} f(\eta_1, \eta_2) &= \frac{(R-c)R^2}{c'\sqrt{c'R'^3}}\sqrt{R-c}\,, \\ H(\eta_1, \eta_2) &= \frac{(R-c)^2 R^3}{c'^2 R'^4}\,, \\ T(\eta_1, \eta_2) &= \frac{(R-c)^3 R^4}{c'^3\sqrt{c'R'^6}}\sqrt{R-c}. \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

III. Типъ икосаэдрическій.

$$\left.\begin{aligned} f(\eta_1, \eta_1) &= \frac{(R-c)^3 R^4}{c'^3 R'^6}\,, \\ H(\eta_1, \eta_2) &= \frac{(R-c)^5 R^7}{c'^5 R'^{10}}\,, \\ T(\eta_1, \eta_2) &= \frac{(R-c)^8 R^{10}}{c'^8 R'^{15}}\,. \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Заслуживаетъ нѣкотораго вниманія та особенность уравненія икосаэдрическаго типа, что здѣсь всѣ три формы $f(\eta_1, \eta_2)$, $H(\eta_1, \eta_2)$, $T(\eta_1, \eta_2)$ суть раціональныя функціи z.

§ 36. **Внѣшній видъ уравненій, имѣющихъ корнями частные интегралы дифференціальнаго уравненія вида:**

$$\frac{d^2\eta}{dz^2} = P\eta. \quad (9)$$

Пусть, согласно нашимъ обозначеніямъ, уравненіе степени n

$$F(\eta, z) = 0 \quad (8)$$

имѣетъ корнями частные интегралы дифференціальнаго уравненія:

$$\frac{d^2\eta}{dz^2} = P\eta. \quad (9)$$

Digitized by Google

Пусть:

$$\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{\nu'}, \tag{38}$$

есть приведенная система корней уравненія (8).

Выразимъ величины (38) въ видѣ линейныхъ функцій двухъ какихъ нибудь частныхъ интеграловъ уравненія (9):

$$\eta', \eta''.$$

Перемноживъ полученныя выраженія между собою, мы получимъ первичную форму:

$$\eta_1\eta_2 \ldots \eta_{\nu'} = \mathfrak{F}(\eta', \eta''), \tag{39}$$

соотвѣтствующую алгебраическому уравненію (8).

Степень первичной формы (39) равна числу ν' корней приведенной системы (38), а индексъ μ' равенъ:

$$\mu' = \frac{n}{\nu'}. \tag{40}$$

Всѣ первичныя формы, соотвѣтствующія алгебраическому уравненію (8), эквивалентны между собою: онѣ получаются изъ формы (39) всевозможными бинарными линейными преобразованіями.

Каждое такое преобразованіе соотвѣтствуетъ новому выбору тѣхъ двухъ частныхъ интеграловъ η', η'' уравненія (9), чрезъ которые мы выражаемъ корни приведенной системы (38).

Считая всѣ эквивалентныя формы тождественными между собою, мы можемъ сказать, что каждому алгебраическому уравненію (8) соотвѣтствуетъ опредѣленная первичная форма (39) и обратно: каждой первичной формѣ (39) сотвѣтствуетъ единственное уравненіе (8).

Для большей простоты формулъ мы примемъ η'' равною одному изъ корней (38) уравненія (8).

Мы видѣли въ § 27, что всякая первичная форма должна принадлежать къ одному изъ четырехъ видовъ:

$$af(\eta', \eta''), bH(\eta', \eta''), gT(\eta', \eta''), hH^{\lambda_1}(\eta', \eta'') + kf^{\lambda}(\eta', \eta''), \tag{41}$$

гдѣ a, b, g, h, k—нѣкоторыя постоянныя.

Digitized by Google

Отсюда заключаемъ, что уравненіе (8) должно имѣть одинъ изъ четырехъ видовъ, соотвѣтствующихъ формамъ (41).

Индексы формъ (41) таковы:

$$\mu=2\lambda,\ \mu_1=2\lambda_1,\ \mu_2=2\lambda_2,\ \mu_3=2. \qquad (42)$$

Въ началѣ § 2 мы видѣли, что уравненіе (8) содержитъ неизвѣстное η исключительно въ степеняхъ, дѣлящихся на индексъ соотвѣтствующей первичной формы.

Пусть уравненіе (8) соотвѣтствуетъ первичной формѣ:

$$\mathfrak{F}(\eta', \eta'')$$

степени ν', индекса μ'.

Тогда уравненіе (8) будетъ таково:

$$\eta^n + A_{\mu'}\,\eta^{n-\mu'} + A_{2\mu'}\,\eta^{n-2\mu'} + \ldots + A_{n-\mu'}\,\eta^{\mu'} + A_n = 0, \qquad (43)$$

гдѣ:

$$A_{\mu'},\ A_{2\mu'},\ldots\ A_{n-\mu'},\ A_n \qquad (44)$$

суть раціональныя функціи z.

Посмотримъ, какъ найти выраженія этихъ функцій.

Коэффиціенты (44) суть цѣлыя, однородныя, симметрическія функціи корней уравненія (43), или, что то же, уравненія (8). Выразивъ ихъ, какъ функціи корней и вставивъ затѣмъ выраженія этихъ корней чрезъ интегралы η', η'', мы представимъ каждый изъ коэффиціентовъ (44) въ видѣ цѣлой однородной бинарной формы съ аргументами η', η'':

$$A_{k\mu'}(\eta',\ \eta''),\ \text{гдѣ}\ k = 1, 2, 3, \ldots, \nu'. \qquad (45)$$

Всѣ формы (45) инваріанты по отношенію къ группамъ бинарныхъ линейныхъ подстановокъ, испытываемыхъ величинами η', η'' при всевозможныхъ обходахъ на плоскости перемѣннаго z.

Это слѣдуетъ изъ того, что коэффиціенты (44) могутъ быть представлены въ видѣ раціональныхъ функцій перемѣннаго z.

Что касается коэффиціента

Digitized by Google

$$A_n(\eta', \eta''),$$

то онъ равенъ произведенію корней уравненія (8), и поэтому можетъ разниться лишь постояннымъ множителемъ отъ степени μ' первичной формы

$$\mathfrak{F}(\eta', \eta''),$$

соотвѣтствующей уравненію (8):

$$A_n(\eta', \eta'') = q_n \ \mathfrak{F}^{\mu'}(\eta', \eta''), \tag{46}$$

гдѣ q_n— постоянное число.

Мы знаемъ, что первичная форма въ степени, равной ея индексу, есть раціональная функція s. Помня, что первичная форма выражается одною изъ формулъ (41) и имѣя равенства (35), (36), (37), мы можемъ найти выраженіе этой раціональной функціи s, какова бы ни была первичная форма $\mathfrak{F}(\eta', \eta'')$.

Вставивъ во второй части равенства (46) вмѣсто $\mathfrak{F}^{\mu'}(\eta', \eta'')$ ея выраженіе въ видѣ функціи s, мы опредѣлимъ коэффиціентъ A_n уравненія (43) до постояннаго множителя.

Подобнымъ же образомъ найдутся выраженія остальныхъ коэффиціентовъ (44). Дѣйствительно, на основаніи теоремы 3 главы VI мы можемъ утверждать, что каждая изъ формъ (45) можетъ быть представлена въ такомъ видѣ:

$$A_{k\mu'}(\eta', \eta'') = \tag{47}$$

$$= \Phi[H^{\lambda_1}(\eta', \eta''), f^{\lambda}(\eta', \eta'')] \, f^{m_1}(\eta', \eta''), H^{m_2}(\eta', \eta'') \ T^{m_3}(\eta', \eta''),$$

гдѣ Φ есть форма нѣкоторой степени s, однородная относительно ея аргументовъ:

$$H^{\lambda_1}(\eta', \eta'') \text{ и } f^{\lambda}(\eta', \eta''),$$

показатели m_1, m_2, m_3 суть числа цѣлыя, положительныя и меньшія чиселъ λ, λ_1, λ_2.

Digitized by Google

Сравнивая степени формъ, стоящихъ въ обѣихъ частяхъ тождества (47), находимъ неопредѣленное уравненіе:

$$k\mu' = Ns + m_1\nu + m_2\nu_1 + m_3\nu_2. \qquad (48)$$

Такъ какъ

$$k\mu' < n,\ n = 2N,$$

то изъ неопредѣленнаго уравненія (48) заключаемъ, что степень s формы Φ равна 0 или 1.

Неопредѣленное уравненіе (48) даетъ одну или, въ крайнемъ случаѣ, весьма ограниченное число системъ рѣшеній. Если уравненіе (48) окажется невозможнымъ, то это служитъ признакомъ того, что коэффиціентъ $A_{k\mu'}$ равенъ нулю.

Вставивъ найденныя системы рѣшеній уравненія (48) въ формулу (47), мы найдемъ одно или, въ крайнемъ случаѣ, весьма ограниченное число выраженій, могущихъ изобразить собою коэффиціентъ $A_{k\mu'}$. Въ каждомъ изъ этихъ выраженій входитъ одинъ или два неизвѣстныхъ постоянныхъ коэффиціента.

Вставивъ найденныя выраженія коэффиціентовъ $A_{k\mu'}(\eta', \eta'')$ въ уравненіе (43), раздѣливъ все уравненіе на η''^n и положивъ

$$\eta = \eta'',\ \frac{\eta'}{\eta''} = u,$$

найдемъ:

$$1 + A_{\mu'}(u) + A_{2\mu'}(u) + \ldots + A_n(u) = 0. \qquad (49)$$

Равенство (49) должно быть тождествомъ: иначе отношеніе

$$\frac{\eta'}{\eta''} = u$$

было бы постояннымъ.

Отобравъ въ лѣвой части равенства (49) коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ u и приравнивая ихъ нулю, мы находимъ уравненія 1-ой степени, опредѣляющія тѣ неизвѣстныя постоянныя, которыя входятъ въ эффиціенты $A_{k\mu'}(u)$.

Выполнивъ эти вычисленія, мы найдемъ окончательныя выраженія функцій $A_{k\mu'}(\eta', \eta'')$.

Digitized by Google

Вставивъ затѣмъ въ полученныя выраженія $A_{k\mu'}(\eta', \eta'')$ вмѣсто первичныхъ формъ

$$f(\eta', \eta''),\ H(\eta', \eta''),\ T(\eta', \eta'')$$

ихъ выраженія въ видѣ функцій перемѣннаго ε, мы находимъ окончательныя выраженія коэффиціентовъ (44) уравненія (43).

Таковъ совершенно общій пріемъ составленія уравненія (43). Онъ представляетъ лишь механическія затрудненія, правда довольно значительныя, при опредѣленіи неизвѣстныхъ постоянныхъ, обращающихъ въ тождество уравненіе (49).

Пріемъ этотъ въ отдѣльныхъ случаяхъ можетъ быть упрощенъ или замѣненъ другими болѣе удобными въ этихъ случаяхъ пріемами, какъ это мы сейчасъ увидимъ.

Изъ уравненій вида (43) наибольшій интересъ по своей простотѣ представляютъ уравненія, соотвѣтствующія первичной формѣ $f(\eta', \eta'')$—эти уравненія содержатъ въ себѣ наименьшее число членовъ. Займемся ихъ составленіемъ.

I. Уравненіе тетраэдрическаго типа.

Возьмемъ формы втораго нормальнаго тетраэдрическаго типа:

$$\left.\begin{aligned} f(\eta_1, \eta_2) &= \eta_1^4 - 2\sqrt{2}\,\eta_1\eta_2^3, \\ H(\eta_1, \eta_2) &= 2\sqrt{2}\,\eta_1^3\eta_2 + \eta_2^4, \\ T(\eta_1, \eta_2) &= \eta_1^6 + 5\sqrt{2}\,\eta_1^3\eta_2^3 - \eta_2^6. \end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

Подставивъ эти выраженія въ равенства (35), находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1^4 - 2\sqrt{2}\,\eta_1\eta_2^3 &= \frac{(R-c)R}{c'R'^2}\sqrt[3]{R}, \\ 2\sqrt{2}\,\eta_1^3\eta_2 + \eta_2^4 &= \frac{(R-c)R}{c'^2R'^2}\sqrt[3]{R^2}, \\ \eta_1^6 + 5\sqrt{2}\,\eta_1^3\eta_2^3 - \eta_2^6 &= \frac{(R-c)^2R^2}{c'^2R'^3}. \end{aligned}\right\} \qquad (51)$$

Digitized by Google

Положивъ въ формулахъ (51):

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = u,$$

находимъ:

$$\left.\begin{aligned} 1 - \frac{2\sqrt{2}}{u^3} &= \frac{(R-c)R}{c'R'^2\eta_1^4}\sqrt[3]{R}, \\ 1 + \frac{5\sqrt{2}}{u^3} - \frac{1}{u^6} &= \frac{(R-c)^2R^2}{c'^2R'^3\eta_1^6}. \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

Исключимъ u изъ уравненій (52):

$$\eta_1^8 - \frac{2}{3}\frac{(R-c)R}{c'R'^2}\sqrt[3]{R}\,\eta_1^4 - \frac{8}{27}\frac{(R-c)^2R^2}{c'^2R'^3}\eta_1^2 - \frac{1}{27}\frac{(R-c)^2R^2}{c'^2R'^4}\sqrt[3]{R^2} = 0. \quad (53)$$

Освободивъ это уравненіе отъ радикаловъ и опуская индексъ 1 при η_1, находимъ:

$$\left(\eta^8 - \frac{2^3}{3^3}\frac{(R-c)^2R^2}{c'^2R'^3}\eta^2\right)^3 - \frac{2^3}{3^3}\frac{(R-c)^3R^4}{c'^3R'^6}\eta^{12} - \frac{2}{3^3}\left(\eta^8 - \frac{2^3}{3^3}\frac{(R-c)^2R^2}{c'^2R'^3}\eta^2\right)\frac{(R-c)^3R^4}{c'^3R'^6}\eta^4 - \frac{1}{3^9}\frac{(R-c)^6R^8}{c'^6R'^{12}} = 0. \quad (54)$$

Это—уравненіе, соотвѣтствующее первичной формѣ:

$$f(\eta_1, \eta_2) = \eta_1^4 - 2\sqrt{2}\,\eta_1\eta_2^3.$$

Оно, какъ и слѣдовало ожидать, содержитъ въ себѣ неизвѣстное η только въ степеняхъ, кратныхъ 6. Свободный членъ его

$$-\frac{1}{3^9}\frac{(R-c)^6R^8}{c'^6R'^{12}},$$

какъ и должно быть, разнится отъ выраженія

Digitized by Google

$$f^6(\eta_1, \eta_2) = \frac{(R-c)^6 R^6}{c'^6 R'^{12}}$$

только постояннымъ множителемъ: $-\frac{1}{3^9}$.

Подставивъ въ уравненіи (54) вмѣсто c и c' ихъ величины:

$$c = -1, \; c' = 1$$

и положивъ:

$$\frac{1}{c} R(z) = z,$$

находимъ:

$$\eta^{24} - \frac{2^3}{3^2}(1-z)^2 z^2 \eta^{18} - \frac{2}{3^5}(32z+13)(1-z)^3 z^4 \eta^{12} + \tag{55}$$

$$+ \frac{2^4}{3^9}(32z-5)(1-z)^5 z^6 \eta^6 - \frac{1}{3^9}(1-z)^6 z^8 = 0.$$

II. Уравненіе октаэдрическаго типа.

Возьмемъ октаэдрическія формы перваго нормальнаго вида:

$$\left.\begin{aligned} f(\eta_1, \eta_2) &= \eta_1^5 \eta_2 - \eta_1 \eta_2^5, \\ H(\eta_1, \eta_2) &= \eta_1^8 + 14\eta_1^4 \eta_2^4 + \eta_2^8, \\ T(\eta_1, \eta_2) &= \eta_1^{12} - 33\eta_1^8 \eta_2^4 - 33\eta_1^4 \eta_2^8 + \eta_2^{12}. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Вставивъ эти выраженія въ формулы (36), находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1^5 \eta_2 - \eta_1 \eta_2^5 &= \frac{(R-c)^2 R^2}{c' \sqrt{c'} R'^3} \sqrt{R-c}, \\ \eta_1^8 + 14\eta_1^4 \eta_2^4 + \eta_2^8 &= \frac{(R-c)^2 R^3}{c'^2 R'^4}, \\ \eta_1^{12} - 33\eta_1^8 \eta_2^4 - 33\eta_1^4 \eta_2^8 + \eta_2^{12} &= \frac{(R-c)^3 R^6}{c'^3 \sqrt{c'} R'^6} \sqrt{R-c}. \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Digitized by Google

Положивъ въ уравненіяхъ (57):

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = u,$$

находимъ:

$$\left.\begin{aligned} u^8 + 14u^4 + 1 &= \frac{(R-c)^2 R^3}{c'^2 R'^4 \eta_2^8}, \\ u^{12} - 33u^8 - 33u^4 + 1 &= \frac{(R-c)^3 R^4}{c'^3 \sqrt{c'} R'^6 \eta_2^{12}} \sqrt{R-c}. \end{aligned}\right\} \quad (58)$$

Исключивъ u изъ уравненій (58), находимъ:

$$\eta_2^{24} - \frac{5}{2.3}\frac{(R-c)^2 R^3}{c'^2 R'^4}\eta_2^{16} - \frac{5}{2^4}\frac{(R-c)^3 R^4}{c'^3\sqrt{c'}\, R'^6}\sqrt{R-c}\,\eta_2^{12} -$$

$$- \frac{3.5}{2^8}\frac{(R-c)^4 R^6}{c'^4 R'^8}\eta_2^8 - \frac{1}{2^8}\frac{(R-c)^5 R^7}{c'^5\sqrt{c'}\, R'^{10}}\sqrt{R-c}\,\eta_2^4 - \quad (59)$$

$$- \frac{1}{2^{10}.3^3}\frac{(R-c)^6 R^8}{c'^6 R'^{12}}\left(\frac{R-c}{c'} - R\right) = 0,$$

или, освобождая это уравненіе отъ радикаловъ и опустивъ индексъ 2 при η_2:

$$\left\{\eta^{24} - \frac{5}{2\ 3}\frac{(R-c)^2 R^3}{c'^2 R'^4}\eta^{16} - \frac{3.5}{2^5}\frac{(R-c)^4 R^6}{c'^4 R'^8}\eta^8 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2^{10}.3^3}\frac{(R-c)^6 R^8}{c'^6 R'^{12}}\left(\frac{R-c}{c'} - R\right)\right\}^2 - \quad (60)$$

$$- \frac{5^2}{2^3}\left\{\eta^8 - \frac{1}{2^4.5}\frac{(R-c)^2 R^3}{c'^2 R'^4}\right\}^2 \frac{(R-c)^7 R^8}{c'^7 R'^{12}}\eta^8 = 0.$$

Таково уравненіе, соотвѣтствующее октаэдрической формѣ $f(\eta_1, \eta_2)$.

Подставивъ въ него значенія постоянныхъ:

$$c = 108,\ c' = 1,$$

Digitized by Google

и положивъ:

$$\frac{1}{c} R(z) = z,$$

находимъ:

$$\left\{\eta^{24} - 2.3^2.5(1-z)^2 z^3 \eta^{16} - \frac{3^7.5}{2^4}(1-z)^4 z^6 \eta^8 + \frac{3^6}{2^4}(1-z)^6 z^8\right\}^2 + \tag{61}$$

$$+ \frac{3^9.5^2}{2^2}\left\{\eta^8 - \frac{3^3}{2^2.5}(1-z)^2 z^3\right\}^2 (1-z)^7 z^8 \eta^8 = 0.$$

Уравненіе икосаэдрическаго типа.

Возьмемъ нормальныя формы икосаэдрическаго типа:

$$\left.\begin{aligned} f(\eta_1, \eta_2) &= \eta_1 \eta_2 (\eta_1^{10} + 11\eta_1^5 \eta_2^5 - \eta_2^{10}) \\ H(\eta_1, \eta_2) &= \eta_1^{20} - 228\eta_1^{15}\eta_2^5 + 494\eta_1^{10}\eta_2^{10} + \\ &\quad + 228\eta_1^5 \eta_2^{15} + \eta_2^{20}, \\ T(\eta_1, \eta_2) &= \eta_1^{30} + 522\eta_1^{25}\eta_2^5 - 10005\eta_1^{20}\eta_2^{10} - \\ &\quad - 10005\eta_1^{10}\eta_2^{20} - 522\eta_1^5 \eta_2^{25} + \eta_2^{30}. \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

Мы могли бы составить уравненіе, соотвѣтствующее первичной формѣ $f(\eta_1, \eta_2)$, пользуясь тѣмъ же пріемомъ, который мы примѣнили въ предшествующихъ двухъ случаяхъ; но исключеніе перемѣннаго

$$u = \frac{\eta_1}{\eta_2}$$

въ данномъ случаѣ представляло бы весьма большія механическія затрудненія.

Будетъ нѣсколько короче воспользоваться общимъ пріемомъ, указаннымъ въ началѣ настоящаго параграфа.

Индексъ первичной формы $f(\eta_1, \eta_2)$ икосаэдрическаго типа равенъ 10; поэтому искомое уравненіе будетъ такого вида:

$$\eta^{120} + A_{10}\eta^{110} + A_{20}\eta^{100} + \ldots + A_{110}\eta^{10} + A_{120} + 0. \tag{63}$$

Digitized by Google

Выразивъ коэффиціенты этого уравненія въ видѣ однородныхъ формъ съ аргументами η_1, η_2, мы можемъ сказать, что коэффиціентъ

$$A_{10k}(\eta_1, \eta_2)$$

представляется въ такомъ видѣ:

$$A_{10k}(\eta_1, \eta_2) = \Phi[f^5(\eta_1, \eta_2),\ H^3(\eta_1, \eta_2)] \times \\ \times f^{m_1}(\eta_1, \eta_2)\ H^{m_2}(\eta_1, \eta_2)\ T^{m_3}(\eta_1, \eta_2), \tag{64}$$

при чемъ показатели m_1, m_2, m_3, и степень s формы Φ связаны между собою неопредѣленнымъ уравненіемъ:

$$10k = 60s + 12m_1 + 20m_2 + 30m_3, \tag{65}$$

откуда:

$$k = 6s + \frac{6}{5} m_1 + 2m_2 + 3m_3. \tag{66}$$

Изъ этого уравненія слѣдуетъ, что число m_1 дѣлится на 5. Такъ какъ мы, кромѣ того, знаемъ, что m_1 должно быть меньше 5, то число это, необходимо, равно 0.

Итакъ:

$$m_1 = 0,$$
$$k = 6s + 2m_2 + 3m_3. \tag{67}$$

Неопредѣленное уравненіе (67) при всѣхъ значеніяхъ k отъ $k = 1$ до $k = 11$ допускаетъ только по одной системѣ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній. Рѣшивъ эти уравненія, находимъ слѣдующія выраженія коэффиціентовъ $A_{10k}(\eta_1, \eta_2)$:

$$\left.\begin{aligned}
&A_{10} = 0,\ A_{20} = p_2\, H(\eta_1, \eta_2),\ A_{30} = p_3\, T(\eta_1, \eta_2),\\
&A_{40} = p_4\, H^2(\eta_1, \eta_2),\ A_{50} = p_5\, H(\eta_1, \eta_2)\, T(\eta_1, \eta_2),\\
&A_{60} = p_6\, f^5(\eta_1, \eta_2) + q_6 H^3(\eta_1, \eta_2),\\
&A_{70} = p_7 H^2(\eta_1, \eta_2) T(\eta_1, \eta_2),\\
&A_{80} = \{p_8 f^5(\eta_1, \eta_2) + q_8 H^3(\eta_1, \eta_2)\}\, H(\eta_1, \eta_2),\\
&A_{90} = \{p_9 f^5(\eta_1, \eta_2) + q_9 H^3(\eta_1, \eta_2)\}\, T(\eta_1, \eta_2),\\
&A_{100} = \{p_{10} f^5(\eta_1, \eta_2) + q_{10} H^3(\eta_1, \eta_2)\}\, H^2(\eta_1, \eta_2),\\
&A_{110} = \{p_{11} f^5(\eta_1, \eta_2) + q_{11} H^3(\eta_1, \eta_2)\}\, H(\eta_1, \eta_2)\, T(\eta_1, \eta_2),
\end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Digitized by Google

гдѣ $p_2, p_3, \ldots p_{11}, q_6, q_8, q_9, \ldots q_{11}$ суть нѣкоторые пока намъ не извѣстные постоянные коэффиціенты.

Коэффиціентъ A_{120}, какъ мы знаемъ, разнится отъ $f^{10}(\eta_1, \eta_2)$ только нѣкоторымъ постояннымъ множителемъ:

$$A_{120} = q_{12} f^{10}(\eta_1, \eta_2). \tag{69}$$

Для опредѣленія постоянныхъ $p_2, p_3, \ldots p_{11}, q_6\ q_8, \ldots q_{12}$ мы могли бы подставить выраженія коэффиціентовъ (68) и (69) въ уравненіе (63) и примѣнить общій пріемъ, указанный выше.

Такой способъ, несомнѣнно, привелъ бы къ цѣли, но потребовалъ бы громадныхъ ариѳметическихъ вычисленій.

Можно нѣсколько упростить эти вычисленія, пользуясь слѣдующими соображеніями *).

Въ § 20 мы нашли основныя подстановки икосаэдрической группы бинарныхъ линейныхъ подстановокъ. Тѣмъ же способомъ можно найти всѣ подстановки этой группы.

Обозначивъ черезъ υ бинарную подстановку:

$$\upsilon = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}, \tag{70}$$

соотвѣтствующую неоднородной подстановкѣ:

$$U(u) = -\frac{1}{u},$$

мы можемъ изобразить бинарныя подстановки нормальной икосаэдрической группы такими символическими формулами:

---

*) Этотъ способъ предложенъ Фуксомъ въ его второмъ мемуарѣ: Ueber linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen und eine neue Anwendung der Invariantentheorie. Crelles Journal. Bd. 85.

Онъ значительно проще непосредственнаго сравненія коэффиціентовъ, хотя тоже требуетъ вычисленій очень утомительныхъ. Фуксъ, указавъ на пріемъ, однако не вычислилъ ни одного изъ коэффиціентовъ уравненія.

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{l} \sigma^k,\ \sigma^k\upsilon,\ \sigma^k\tau\sigma^h,\ \sigma^k\tau\sigma^h\upsilon\ ^*), \\ \text{гдѣ } k = 0, 1, \ldots 9, \\ \qquad h = 0, 1, \ldots 4. \end{array}\right\} \qquad (71)$$

Если η_{i_1} есть корень уравненія (63), то тому же уравненію удовлетворитъ функція—η_{i_2}: это слѣдуетъ изъ того, что въ группу (71) разсматриваемаго уравненія входитъ подстановка υ:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{\eta}_{i_1} = -\eta_{i_2}, \\ \bar{\eta}_{i_2} = \eta_{i_1}. \end{array}\right\} \qquad (70')$$

Примѣняя къ величинамъ η_{i_1}, $-\eta_{i_2}$ подстановки группы (71), находимъ всѣ корни уравненія (63), выраженныя въ видѣ линейныхъ функцій отъ η_{i_1}, η_{i_2}.

Десятыя степени корней изобразятся формулами:

$$\left.\begin{array}{l} \eta_{i_1}{}^{10},\ \eta_{i_2}{}^{10},\ \left(\dfrac{\varepsilon-\varepsilon^4}{\sqrt{5}}\varepsilon^h\eta_{i_1} - \dfrac{\varepsilon^2-\varepsilon^3}{\sqrt{5}}\eta_{i_2}\right)^{10}, \\ \left(\dfrac{\varepsilon^2-\varepsilon^3}{\sqrt{5}}\varepsilon^h\eta_{i_1} + \dfrac{\varepsilon-\varepsilon^4}{\sqrt{5}}\eta_{i_2}\right)^{10}, \end{array}\right\} \qquad (72)$$

где $h = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$, $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}$.

Уравненіе (63) представится въ такомъ видѣ:

$$(\eta^{10}-\eta_{i_1}{}^{10})(\eta^{10}-\eta_{i_2}{}^{10})\prod_{h=1}^{h=4}\left\{\eta^{10}-\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon^4}{\sqrt{5}}\varepsilon^h\eta_{i_1} - \frac{\varepsilon^2-\varepsilon^3}{\sqrt{5}}\eta_{i_2}\right)^{10}\right\}\times$$

$$\times\left\{\eta^{10}-\left(\frac{\varepsilon^2-\varepsilon^3}{\sqrt{5}}\varepsilon^h\eta_{i_1} + \frac{\varepsilon-\varepsilon^4}{\sqrt{5}}\eta_{i_2}\right)^{10}\right\} = 0. \qquad (73)$$

Представивъ уравненіе (63) въ видѣ (73), мы можемъ вычислить симметрическія функціи s_{10}, s_{20}, $s_{30}\ldots$ его корней, а затѣмъ и коэффиціенты уравненія (63). Эти коэффиціенты представляются въ видѣ однородныхъ формъ съ аргументами

*) Сравн. формулы (58), главы IV.

Digitized by Google

η_1, η_2 и должны быть тождественны съ найденными выше выраженіями (68) этихъ коэффиціентовъ.

Сравнивая полученныя два выраженія каждаго изъ коэффиціентовъ A_{10k}, мы опредѣлимъ величины постоянныхъ, входящихъ въ формулы (68). Само собою ясно, что находя выраженія формъ $A_{10k}(\eta_1, \eta_2)$ изъ уравненія (73), мы можемъ ограничиваться вычисленіемъ одного или двухъ старшихъ коэффиціентовъ этихъ формъ.

Приведемъ величины нѣсколькихъ изъ коэффиціентовъ, найденныхъ этимъ способомъ:

$$\left.\begin{aligned} &p_2 = -\frac{14}{5^2},\ p_3 = -\frac{41}{5^3},\ p_4 = -\frac{293}{5^5},\ p_5 = -\frac{254}{5^6},\\ &p_6 = -\frac{718}{5^8},\ p_7 = -\frac{271}{5^9},\ \ldots,\ p_{11} = -\frac{1}{5^{25}},\ \ldots,\\ &q_{12} = \frac{1}{5^{25}}. \end{aligned}\right\} \quad (74)$$

Всѣхъ коэффиціентовъ мы не вычисляемъ потому, что уравненіе (63) по своей высокой степени и сложности коэффиціентовъ можетъ имѣть исключительно теоретическій интересъ.

Вставивъ въ формулы (68) вмѣсто $f(\eta_1, \eta_2,)$, $H(\eta_1, \eta_2)$, $T(\eta_1, \eta_2)$ выраженія (37) этихъ первичныхъ формъ черезъ независимое перемѣнное z, и внеся затѣмъ полученныя выраженія коэффиціентовъ въ уравненіе (63), найдемъ:

$$\eta^{120} + p_2 \frac{(R-c)^5 R^7}{c'^5 R'^{10}} \eta^{100} + p_3 \frac{(R-c)^8 R^{10}}{c'^8 R'^{15}} \eta^{90} +$$
$$+ p_4 \frac{(R-c)^{10} R^{14}}{c'^{10} R'^{20}} \eta^{80} + p_5 \frac{(R-c)^{13} R^{17}}{c'^{13} R'^{25}} \eta^{70} +$$
$$+ \frac{(R-c)^{15} R^{20}}{c'^{15} R'^{30}} (p_6 + Rq_6)\eta^{60} + p_7 \frac{(R-c)^{18} R^{24}}{c'^{18} R'^{35}} \eta^{50} +$$
$$+ \frac{(R-c)^{20} R^{27}}{c'^{20} R'^{40}} (p_8 + Rq_8)\eta^{40} + \frac{(R-c)^{23} R^{30}}{c'^{23} R'^{45}} (p_9 + Rq_9)\eta^{30} +$$
$$+ \frac{(R-c)^{25} R^{34}}{c'^{25} R'^{50}} (p_{10} + Rq_{10})\eta^{20} + \frac{(R-c)^{28} R^{37}}{c'^{28} R'^{55}} (p_{11} + Rq_{11})\eta^{10} +$$
$$+ q_{12} \frac{(R-c)^{30} R^{40}}{c'^{30} R'^{60}} = 0. \quad (75)$$

Digitized by Google

Подставивъ вмѣсто c и c' величины этихъ постоянныхъ:

$$c = -12^3,\ c' = 1,$$

и положивъ:

$$\frac{1}{c} R(z) = z,$$

находимъ:

$$\begin{aligned}
&\eta^{120} + 12^6 p_2 (1-z)^5 z^7 \eta^{100} + 12^9 p_3 (1-z)^8 z^{10} \eta^{90} + \\
&+ 12^{12} p_4 (1-z)^{10} z^{14} \eta^{80} + 12^{15} p_5 (1-z)^{13} z^{17} \eta^{70} + \\
&+ 12^{15} (p_6 - 12^3 z q_6)(1-z)^{15} z^{20} \eta^{60} + 12^{21} p_7 (1-z)^{18} z^{24} \eta^{50} + \\
&+ 12^{21} (p_8 - 12^3 z q_8)(1-z)^{20} z^{27} \eta^{40} + \\
&+ 12^{24} (p_9 - 12^3 z q_9)(1-z)^{23} z^{30} \eta^{30} + \\
&+ 12^{27} (p_{10} - 12^3 z q_{10})(1-z)^{25} z^{34} \eta^{20} + \\
&+ 12^{30} (p_{11} - 12^3 z q_{11})(1-z)^{28} z^{37} \eta^{10} + 12^{30} (1-z)^{30} z^{40} = 0.
\end{aligned} \tag{76}$$

§ 37. Алгебраическія уравненія, имѣющія корнями частные интегралы гипергеометрическихъ дифференціальныхъ уравненій.

Мы видѣли въ § 34, что преобразуя уравненіе

$$F(\eta, z) = 0 \tag{8}$$

подстановкой:

$$\eta = \frac{1}{k} z^{\frac{1}{3}} (1-z)^{\frac{1}{4}} y, \tag{22}$$

мы получаемъ новое алгебраическое уравненіе, имѣющее корнями частные интегралы гипергеометрическаго уравненія.

Выполнимъ эти преобразованія для уравненій, найденныхъ въ предыдущемъ параграфѣ.

I. Уравненіе тетраэдрическаго типа.

Положивъ въ формулѣ (22):

$$k = 1$$

Digitized by Google

и совершивъ затѣмъ подстановку (22) въ уравненіи (55), находимъ:

$$y^{24}+\frac{2^3}{3^2}\sqrt{1-z}\,y^{18}-\frac{2}{3^5}(32z+13)y^{12}+$$
$$+\frac{2^4}{3^9}(32z-5)\sqrt{1-z}\,y^6-\frac{1}{3^9}=0. \tag{77}$$

Освободивъ это уравненіе отъ радикаловъ, находимъ:

$$\left\{y^{24}-\frac{2}{3^5}(32z+13)y^{12}-\frac{1}{3^9}\right\}^2-$$
$$-\frac{2^6}{3^4}\left\{y^{12}+\frac{2}{3^7}(32z-5)\right\}^2(1-z)\,y^{12}=0. \tag{78}$$

Всѣ корни этого уравненія, какъ мы знаемъ, суть частные интегралы гипергеометрическаго уравненія (16), въ которомъ параметры α, β, γ таковы:

$$\alpha=\frac{1}{4},\ \beta=-\frac{1}{12},\ \gamma=\frac{2}{3}. \tag{79}$$

Иными словами, корни уравненія (78) суть частные интегралы гипергеометрическаго уравненія:

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{6}(4-7z)\frac{dy}{dz}+\frac{1}{48}y=0. \tag{80}$$

Изъ формулъ (48) главы III слѣдуетъ, что существуетъ два частныхъ интеграла y_5, y_6 уравненія (80), которые въ области безконечно удаленной точки могутъ быть изображены формулами:

$$\left.\begin{aligned} y_5&=z^{-\frac{1}{4}}F\left(\frac{1}{4},\ \frac{7}{12},\ \frac{4}{3},\ \frac{1}{z}\right),\\ y_6&=z^{\frac{1}{12}}F\left(-\frac{1}{12},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{z}\right). \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

Digitized by Google

Всякій интегралъ уравненія (80) и, вслѣдствіе этого, всякій корень уравненія (78) могутъ быть представлены въ видѣ линейной функціи отъ y_5 и y_6:

$$y = Ay_5 + By_6. \qquad (82)$$

Одинъ изъ корней уравненія (80) въ области точки $z=\infty$ разлагается въ рядъ вида:

$$y = \frac{e^{\frac{\pi i}{12}}}{2\sqrt{2}} z^{-\frac{1}{4}} + \ldots \qquad (83)$$

Этотъ корень при $z=\infty$ обращается въ 0 и можетъ выражаться формулою (82) только въ такомъ случаѣ, если

$$A = \frac{e^{\frac{\pi i}{12}}}{2\sqrt{2}}, \quad B=0. \qquad (84)$$

Итакъ, одинъ изъ корней уравненія (78) въ области III (см. черт. 2) изображается формулою:

$$y = \frac{e^{\frac{\pi i}{12}}}{2\sqrt{2}} F\left(\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{4}{3}, \frac{1}{z}\right) z^{-\frac{1}{4}}. \qquad (85)$$

Остальные корни суть другія значенія той же самой многозначной функціи, имѣющей 48 значеній какъ видно изъ уравненія (78).

Выраженія этихъ остальныхъ корней въ области III и выраженія всѣхъ корней въ области I найдутся изъ формулы (85) примѣненіемъ общихъ формулъ теоріи гипергеометрическихъ функцій *).

На этихъ вычисленіяхъ мы не будемъ останавливаться.

II. Уравненіе октаэдрическаго типа.

Выполнимъ такія же вычисленія для уравненія (61) октаэдрическаго типа.

*) См. Тихомандритскій. О гипергеометрическихъ рядахъ. Стр. 53—57.

Digitized by Google

Совершимъ въ уравненіи (61) подстановку:

$$\eta = \frac{1}{k} z^{\frac{1}{3}} (1-z)^{\frac{1}{4}} y, \tag{22}$$

положивъ при этомъ

$$k=1.$$

Въ результатѣ находимъ:

$$\left(y^{24} - 2.3^2.5\, z^{\frac{1}{3}} y^{16} - \frac{3^7.5}{2^4} z^{\frac{2}{3}} y^8 + \frac{3^6}{2^4}\right)^2 + \tag{86}$$

$$+ \frac{3^9.5^2}{2^2}\left(y^8 - \frac{3^3}{2^2.5} z^{\frac{1}{3}}\right)^2 (1-z) y^8 = 0.$$

Освободивъ это уравненіе отъ радикаловъ, находимъ:

$$\left\{\left(y^{24} + \frac{3^6}{2^4}\right)^3 - 2^3.3^6.5^3 z\, y^{48} - \frac{3^{11}.5^3}{2^{12}} z^2 y^{24} - \right. \tag{87}$$

$$\left. - \frac{3^{10}.5^2}{2^3} z\left(y^{24} + \frac{3^6}{2^4}\right) y^{24}\right\}^2 + \frac{3^{27}.5^6}{2^6}\left(y^{24} - \frac{3^9}{2^6.5^3} z\right)^2 (1-z)^3 y^{24} = 0.$$

Корни этого уравненія суть частные интегралы гипергеометрическаго уравненія (16), въ которомъ параметры α, β, γ таковы:

$$\alpha = \frac{5}{24}, \quad \beta = -\frac{1}{24}, \quad \gamma = \frac{2}{3}, \tag{88}$$

т. е. корни уравненія (87) суть частные интегралы гипергеометрическаго уравненія:

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{6}(4-7z)\frac{dy}{dz} + \frac{5}{576} y = 0. \tag{89}$$

Изъ формулъ (48) главы III слѣдуетъ, что два частныхъ интеграла y_5, y_6 уравненія (89) въ области III (черт. 2) изображаются формулами:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} y_5 &= z^{\frac{1}{24}} F\left(\frac{5}{24}, \frac{13}{24}, \frac{5}{4}, \frac{1}{z}\right), \\ y_6 &= z^{\frac{1}{24}} F\left(-\frac{1}{24}, \frac{7}{24}, \frac{3}{4}, \frac{1}{z}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (90)$$

Всякій частный интегралъ уравненія (89) изобразится формулою вида:

$$y = Ay_5 + By_6, \qquad (91)$$

гдѣ A и B суть постоянныя.

Одинъ изъ корней уравненія (87) въ области точки $z=\infty$ разлагается въ рядъ вида:

$$y = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{9}{8}}} z^{-\frac{5}{24}} + \ldots \qquad (92)$$

Эта функція при $z=\infty$ обращается въ 0 и только въ томъ случаѣ можетъ быть изображена формулою (91), если:

$$A = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{9}{8}}}, \quad B = 0.$$

Итакъ, одинъ изъ корней уравненія (87) въ области III изображается формулою:

$$y = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{9}{8}}} F\left(\frac{5}{24}, \frac{13}{24}, \frac{5}{4}, \frac{1}{z}\right) z^{-\frac{5}{24}}. \qquad (93)$$

Остальные корни уравненія (87) выразятся другими значеніями той же многозначной функціи. Число всѣхъ значеній этой функціи равно 144, какъ видно изъ уравненія (87).

III. Уравненіе икосаэдрическаго типа.

Совершимъ ту же подстановку:

$$\eta = \frac{1}{k} z^{\frac{1}{4}} (1-z)^{\frac{1}{4}} y \qquad (22)$$

Digitized by Google

въ уравненіи икосаэдрическаго типа (76) и примемъ

$$k = 12^{\frac{3}{10}}.$$

Выполнивъ эту подстановку, находимъ:

$$y^{120} + p_2 \sqrt[3]{z}\, y^{100} + p_3 \sqrt{1-z}\, y^{90} + p_4 \sqrt[3]{z^2}\, y^{80} + p_5 \sqrt{1-z} \sqrt[3]{z}\, y^{70} +$$

$$+ \frac{1}{12^3}(p_6 - 12^3 q_6 z) y^{60} + p_7 \sqrt{1-z} \sqrt[3]{z^2}\, y^{50} +$$

$$+ \frac{1}{12^3}(p_8 - 12^3 q_8 z) \sqrt[3]{z}\, y^{40} + \frac{1}{12^3}(p_9 - 12^3 q_9 z) \sqrt{1-z}\, y^{30} + \tag{94}$$

$$+ \frac{1}{12^3}(p_{10} - 12^3 q_{10} z) \sqrt[3]{z^2}\, y^{20} +$$

$$\frac{1}{12^3}(p_{11} - 12^3 q_{11} z) \sqrt{1-z} \sqrt[3]{z}\, y^{10} + \frac{1}{12^6} = 0.$$

Освободивъ это уравненіе отъ радикаловъ, мы получили бы уравненіе 720-ой степени весьма сложное по своему виду.

Корни уравненія (94) суть частные интегралы гипергеометрическаго уравненія (16), въ которомъ:

$$\alpha = \frac{11}{60}, \quad \beta = -\frac{1}{60}, \quad \gamma = \frac{2}{3}, \tag{95}$$

т. е. корни уравненія (94) суть частные интегралы уравненія:

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{6}(4 - 7z)\frac{dy}{dz} + \frac{11}{3600} y = 0. \tag{96}$$

Это уравненіе имѣетъ два линейно независимыхъ частныхъ интеграла y_5, y_6, которые въ области III (черт. 2) изображаются формулами

$$\left.\begin{aligned} y_5 &= z^{-\frac{11}{60}} F\left(\frac{11}{60}, \frac{31}{60}, \frac{6}{5}, \frac{1}{z}\right), \\ y_6 &= z^{\frac{1}{60}} F\left(-\frac{1}{60}, \frac{19}{60}, \frac{4}{5}, \frac{1}{z}\right). \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

Digitized by Google

Всякій интегралъ уравненія (96) изобразится формулою вида:

$$y = Ay_5 + By_6. \tag{98}$$

гдѣ A и B суть нѣкоторыя постоянныя.

Въ области точки $z=\infty$ одинъ изъ корней уравненія (94) разлагается въ рядъ вида:

$$y = \frac{e^{\frac{\pi i}{60}}}{12^{\frac{3}{5}} q_{11}^{\frac{1}{10}}} z^{-\frac{11}{60}} + \ldots \tag{99}$$

Эта функція при $z=\infty$ обращается въ 0 и можетъ изображаться формулою (98) только при условіи:

$$A = \frac{e^{\frac{\pi i}{60}}}{12^{\frac{3}{5}} q_{11}^{\frac{1}{10}}}, \quad B = 0.$$

Итакъ, одинъ изъ корней уравненія (94) въ области III изображается формулою:

$$y = \frac{e^{\frac{\pi i}{60}}}{12^{\frac{3}{5}} q_{11}^{\frac{1}{10}}} F\left(\frac{11}{60}, \frac{31}{60}, \frac{6}{5}, \frac{1}{z}\right). \tag{100}$$

Остальные корни того же уравненія изобразятся другими значеніями той же функціи. Всего функція (100) должна имѣть 720 значеній.

Этимъ мы закончимъ изученіе свойствъ и видовъ уравненій разсмотрѣннаго нами класса уравненій и перейдемъ къ постановкѣ общей задачи о видахъ и рѣшеніяхъ алгебраическихъ уравненій, разрѣшимыхъ въ гипергеометрическихъ функціяхъ.

Digitized by Google

ГЛАВА IX.

Общая задача объ алгебраическихъ уравненіяхъ, разрѣшимыхъ въ гипергеометрическихъ функціяхъ.

Результаты, полученные нами въ главахъ I—VII, даютъ возможность довольно просто рѣшить главную задачу нашей работы: найти виды и способы рѣшенія алгебраическихъ уравненій, разрѣшимыхъ въ гипергеометрическихъ функціяхъ. Въ настоящей главѣ мы разсмотримъ, къ какимъ болѣе частнымъ вопросамъ приводится рѣшеніе этой общей задачи и каковы пріемы рѣшенія этихъ вопросовъ.

Но прежде чѣмъ приступить къ этой задачѣ намъ необходимо нѣсколько пополнить то изложеніе свойствъ группъ линейныхъ подстановокъ, которое приведено въ главахъ III и IV, и ознакомиться съ понятіемъ объ аутоморфныхъ функціяхъ и съ главнѣйшими свойствами этихъ функцій.

§ 38. **Нѣкоторыя свойства группъ линейныхъ подстановокъ.**

Пусть дана группа линейныхъ подстановотъ:

$$S_0 = 1,\ S_1,\ S_2, \ldots\ S_{N-1}. \qquad (1)$$

Порядокъ ея N можетъ быть конечнымъ или безконечно большимъ числомъ.

Отмѣтимъ гдѣ либо на плоскости перемѣннаго u произвольную точку u_0. Совершивъ надъ количествомъ u_0 подстановки группы (1), мы получимъ N точекъ на плоскости:

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots\ u_{N-1}. \qquad (2)$$

Точки эти эквивалентны между собою относительно подстановокъ группы (1). Число ихъ конечно или безконечно велико,

Digitized by Google

смотря по тому, конеченъ или безконечно великъ порядокъ N группы (1).

Можетъ случиться, что *каждая* изъ точекъ (2) безконечно близка къ ближайшимъ точкамъ той же совокупности (2). Тогда группа (1) будетъ группою *непрерывною*; въ противномъ случаѣ группа (1) будетъ *прерывною*. Мы будемъ говорить только о прерывныхъ группахъ. Въ прерывныхъ группахъ *нѣкоторыя* изъ точекъ (2) могутъ лежать безконечно близко другъ къ другу.

Таковы точки, лежащія на окружности на чертежѣ 11.

Пусть u_0 лежитъ на конечномъ разстояніи отъ ближайшей къ ней точки совокупности точекъ (2). Окружимъ ее какою либо сомкнутою кривою весьма малыхъ размѣровъ такъ, чтобы внутри кривой лежала только одна точка u_0 изъ числа точекъ совокупности (2). Назовемъ площадь, ограниченную этою кривою—площадью c_0 *). Преобразуя площадь c_0 подстановками (1), мы получимъ N эквивалентныхъ между собою площадей:

$$c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots\ c_{N-1}. \qquad (3)$$

Въ каждой изъ площадей (3) лежитъ по одной изъ числа точекъ (2).

Площадь c_0 всегда можно взять на столько малыхъ размѣровъ, чтобы площади (3) нигдѣ не заходили другъ за друга,

Станемъ увеличивать размѣры площади c_0.

Въ то же время остальныя площади (3) будутъ тоже возрастать. Продолжимъ увеличеніе площади c_0 до тѣхъ поръ, пока она не придетъ въ соприкосновеніе съ одною или нѣсколькими изъ площадей (3). Въ то же самое время каждая изъ площадей (3) придетъ въ соприкосновеніе съ такимъ же числомъ площадей совокупности (3). Если между площадью

*) Площадь c_0 можетъ состоять даже изъ нѣсколькихъ не смежныхъ между собою весьма малыхъ площадей, выбранныхъ такъ, чтобы внутри площади c_0 лежала только одна изъ числа точекъ совокупности (2)— именно точка u_0.

Digitized by Google

c_1 и сосѣднимъ съ нею площадями остается еще незанятая часть плоскости, то мы можемъ начать увеличеніе площади c_0 въ новомъ направленіи до тѣхъ поръ, пока она въ новой точкѣ не встрѣтится съ одною изъ сосѣднихъ областей, и т. д. Въ результатѣ мы достигнемъ того, что области (3) будутъ плотно прилегать другъ къ другу на всемъ протяженіи границы каждой изъ нихъ, нигдѣ не заходя другъ за друга.

Назовемъ эти области въ такомъ окончательномъ видѣ областями:

$$C_0,\ C_1,\ C_2,\ \ldots\ C_{N-1}. \qquad (4)$$

Эти области тоже между собою эквивалентны и, какъ мы сказали, плотно прилегаютъ другъ къ другу, не заходя другъ за друга. Онѣ образуютъ нѣкоторую *сѣть* областей. Число областей сѣти равно порядку группы (1). Сѣть можетъ покрывать собою или всю плоскость, или только часть ея.

Каждая изъ областей (4), наприм. область C_0, обладаетъ двумя главными свойствами:

1) Гдѣ бы мы ни взяли точку u въ той части плоскости, которая занята сѣтью,—въ области C_0 найдется одна точка, ей эквивалентная.

2) Внутри области C_0 нѣтъ ни одной пары точекъ между собою эквивалентныхъ. (Точки, лежащія на контурѣ области C_0, попарно эквивалентны между собою, какъ мы увидимъ ниже).

Каждую изъ областей (4) мы назовемъ основною областью группы (1).

Сказанныя два свойства площади C_0 суть характерныя свойства основной области, которыя могутъ быть приняты за ея опредѣленіе. Ясно, что тѣ сѣти четыреугольниковъ, которыя мы разсматривали въ главахъ III и IV, суть лишь частные случаи разсматриваемыхъ нами теперь сѣтей.

Пусть сѣть нѣкоторой группы изображена на черт. 34.

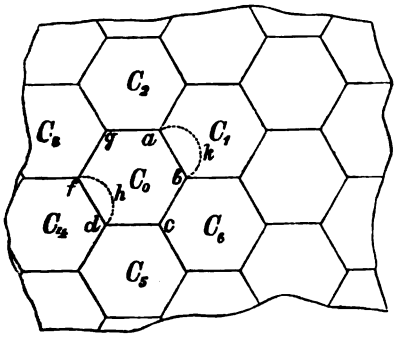
Пусть точка u_0, лежащая внутри области C_0, приближается къ границѣ этой области, переступаетъ эту границу и входитъ въ область C_4. Въ то же время точки

Digitized by Google

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ldots\ u_{N-1}, \tag{5}$$

соотвѣтственныя съ u_0, тоже приближаются къ границамъ областей:

$$C_1,\ C_2,\ C_3,\ldots\ C_{N-1},$$



Чер. 34.

переходятъ эти границы и вступаютъ въ смежныя области.

Въ тотъ моментъ, когда u_0, перейдя границу fd, вступила въ C_4, одна изъ соотвѣтственныхъ точекъ (5) вступила внутрь области C_0. Для опредѣленности положимъ, что именно точка u_1 вступила въ область C_0 черезъ границу ab.

Точки u_0 и u_1 связаны между собою одною изъ подстановокъ (1).

Пусть:

$$u_1 = S_1(u_0).$$

Мы сказали, что въ тотъ моментъ, когда u_0 приходитъ въ нѣкоторую точку границы fd, точка u_1 приходитъ въ нѣкоторую точку границы ab. Отсюда слѣдуетъ, что точки границы fd эквивалентны точкамъ границы ab, и при томъ подстановка, преобразующая границу ab въ fd, есть подстановка S_1 группы (1).

Подстановка S_1 преобразуетъ область C_0 въ область C_1.

Этотъ результатъ совершенно аналогиченъ результату, полученному въ § 13 для сѣти четыреугольниковъ. Его мы можемъ формулировать въ видѣ теоремы:

Теорема 1. *Стороны основной области попарно эквивалентны между собою. Подстановки, преобразующія эквивалентныя стороны основной области другъ въ друга, преобразуютъ основную область въ смежныя съ нею основныя области.*

Digitized by Google

Эквивалентныя между собою стороны основной области мы по прежнему будемъ называть *сопряженными*.

Пусть подстановки, преобразующія попарно другъ въ друга сопряженныя стороны области C_0 суть:

$$S_1, S_2, \ldots S_\nu. \qquad (6)$$

Эти подстановки (6) преобразуютъ область C_0 во всѣ смежныя съ нею.

Повторяя разсужденія, приведенныя въ § 13, найдемъ, что изъ подстановокъ (6) можно составить любую подстановку группы (1).

Въ числѣ этихъ подстановокъ находятся *всѣ* основныя подстановки группы (1), хотя мы и не можемъ утверждать, что между ними нѣтъ неосновныхъ подстановокъ.

Изъ приведеннаго выше опредѣленія основной области видно, что въ выборѣ контура основной области есть нѣкоторый произволъ. И дѣйствительно, какъ мы сейчасъ увидимъ, контуръ основной области можетъ быть деформируемъ въ значительной степени.

Обратимся снова къ чертежу 34 и пусть по прежнему сторона fd есть сторона сопряженная съ ab. Отдѣлимъ внутри области C_0 произвольную площадь fhd, примыкающую къ сторонѣ fd. Въ области C_1 найдется площадь эквивалентная площади fhd: пусть это будетъ akb. Площадь akb непремѣнно примыкаетъ къ сторонѣ ab сопряженной съ fd. Вычтя изъ основной области C_0 площадь fhd и прибавивъ площадь akb, получимъ площадь $akbcdhfg$, которая можетъ быть принята за основную область группы (1) вмѣсто области C_0.

Измѣненія основной области, подобныя только что разсмотрѣнному, мы будемъ называть *возможными измѣненіями* (erlaubte Abänderungen).

Производя возможныя измѣненія основной области, мы можемъ ее деформировать значительно. Пользуясь возможными измѣненіями, мы всегда можемъ достичь того, чтобы:

1) Основная область была сплошною односвязною площадью.

Digitized by Google

2) Чтобы основная область была ограничена дугами круговъ и прямыми линіями.

Въ такомъ видѣ мы и будемъ ее себѣ представлять.

Возьмемъ двѣ группы G и g. Пусть *всѣ* подстановки группы g входятъ въ группу G.

Пусть порядки g и G равны n и N, при чемъ n и N суть числа конечныя или безконечно большія.

Пусть подстановки группы g таковы:

$$s_0 = 1,\ s_1,\ s_2, \ldots,\ s_{n-1}. \tag{7}$$

Повторяя разсужденія, весьма обычныя въ высшей алгебрѣ, мы придемъ къ заключенію, что подстановки группы G могутъ быть расположены въ видѣ такой таблицы:

$$\left.\begin{array}{llll} s_0 = 1, & s_1, & s_2, \ldots & s_{n-1}, \\ s_0\sigma_1 = \sigma_1, & s_1\sigma_1, & s_2\sigma_1, \ldots & s_{n-1}\sigma_1, \\ s_0\sigma_2 = \sigma_2, & s_1\sigma_2, & s_2\sigma_2, \ldots & s_{n-1}\sigma_2, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ s_0\sigma_{l-1} = \sigma_{l-1}, & s_1\sigma_{l-1}, & s_2\sigma_{l-1}, \ldots & s_{n-1}\sigma_{l-1}, \end{array}\right\} \tag{8}$$

гдѣ:

$$\sigma_1,\ \sigma_2, \ldots\ \sigma_{l-1} \tag{9}$$

суть нѣкоторыя подстановки группы G, не входящія въ g. Число l равно отношенію порядковъ группъ G и g *):

$$l = \frac{N}{n}. \tag{10}$$

Построимъ сѣть, соотвѣтствующую группѣ G.

Найдемъ тѣ изъ числа областей (4), которыя соотвѣтствуютъ подстановкамъ:

---

*) Это справедливо въ предположеніи, что числа n и N конечны. Ради сокращенія рѣчи мы будемъ называть l отношеніемъ порядковъ группъ даже и въ томъ случаѣ, когда эти порядки безконечно велики.

Digitized by Google

$$\sigma_0=1,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ldots\ \sigma_{l-1}. \tag{11}$$

Пусть эти области суть:

$$\Gamma_0=C_0,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2,\ldots\ \Gamma_{l-1}. \tag{12}$$

Совокупность этихъ l областей составляетъ нѣкоторую площадь, вообще говоря, не сплошную. Обозначимъ ее буквою c. Докажемъ, что c можетъ быть принята за основную область группы g.

Часть плоскости, покрываемая сѣтью группы G, во всякомъ случаѣ не меньше части плоскости, покрываемой сѣтью группы g.

Возьмемъ гдѣ либо внутри этой части плоскости какую либо точку u, не лежащую на границѣ области. Пусть область группы g, въ которой лежитъ точка u, соотвѣтствуетъ подстановкѣ:

$$s_i\ \sigma_j,$$

гдѣ i равно одному изъ чиселъ $0, 1, 2,\ldots n-1$, а j—одному изъ чиселъ: $0, 1, 2,\ldots l-1$.

Совершивъ надъ точкою u подстановку

$$s_i^{-1}$$

группы g, мы найдемъ точку u', лежащую въ той области группы G, которая соотвѣтствуетъ подстановкѣ σ_j, т. е. найдемъ точку, лежащую внутри площади c.

И такъ, каждой точкѣ той части плоскости, которая занята сѣтью группы g, соотвѣтствуетъ одна точка, лежащая внутри площади c и эквивалентная взятой точкѣ относительно подстановокъ группы g.

Докажемъ, что внутри площади c нѣтъ ни одной пары точекъ, эквивалентныхъ относительно подстановокъ группы g.

Допустимъ, что мы нашли пару точекъ u и u', связанныхъ подстановкою s_i:

$$u'=s_i(u) \tag{13}$$

и лежащихъ внутри области c.

Digitized by Google

Точки u и u', эквивалентныя относительно группы g, эквивалентны и относительно G. Слѣдовательно онѣ не могутъ лежать внутри одной и той же изъ числа областей (12).

Если онѣ лежатъ въ двухъ различныхъ изъ числа областей (12), то онѣ связаны между собою одной изъ подстановокъ (11):

$$u'=\sigma_j(u). \tag{14}$$

Изъ равенствъ (13) и (14) слѣдуетъ, что подстановка σ_j входитъ въ группу g; а это противорѣчитъ условію.

И такъ, дѣйствительно c есть основная область группы g.

Покажемъ, что подстановки (11) всегда могутъ быть выбраны такъ, чтобы площадь c была сплошная.

Пусть Γ' есть область, смежная съ C_0 и не входящая въ число областей (12). Пусть подстановка, преобразующая Γ_0 въ Γ', есть σ'. Такъ какъ σ' есть подстановка группы G, то она представится одной изъ формулъ (8). Пусть, напр.,

$$\sigma'=s_i\,\sigma_1. \tag{15}$$

Изъ символическаго равенства (15) слѣдуетъ:

$$\sigma_1=s_i^{-1}\,\sigma'. \tag{16}$$

Внеся это выраженіе σ_1 во вторую строку таблицы (8), находимъ:

$$s_0 s_i^{-1}\,\sigma',\ s_1\,s_i^{-1}\,\sigma',\ s_2\,s_i^{-1}\,\sigma',\ldots,\ s_{n-1}\,s_i^{-1}\,\sigma'. \tag{17}$$

Тѣ же подстановки, только въ иномъ порядкѣ, изобразятся формулами:

$$s_0\,\sigma'=\sigma',\ s_1\,\sigma',\ s_2\,\sigma',\ldots,\ s_{n-1}\,\sigma'. \tag{18}$$

Слѣдовательно, вторую строку таблицы (8) можно замѣнить строкой (18). Вмѣстѣ съ тѣмъ подстановка σ_1 замѣнилась подстановкой σ', а область Γ_1 областью Γ'—смежною съ Γ_0.

Дѣлая подобныя же замѣны, мы достигнемъ того, что подстановки (11) замѣнятся новыми подстановками

$$\sigma',\ \sigma'',\ldots\ \sigma^{(l-1)}, \tag{19}$$

Digitized by Google

а области:

$$I_0 = C_0,\ I_1, \ldots\ I_{(l-1)} \tag{12}$$

областями:

$$\Gamma_0 = C_0,\ \Gamma', \ldots\ \Gamma^{(l-1)}, \tag{20}$$

составляющими сплошную площадь.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ предполагать, что подстановки (11) уже съ самаго начала были выбраны такъ, чтобы соотвѣтствующія имъ области (12) составляли сплошную площадь.

Полученные результаты можно формулировать въ видѣ теоремы:

Теорема 2. *Если группа g порядка n входитъ въ группу G порядка N, то за основную область группы g можно принять сплошную площадь, состоящую изъ*

$$l = \frac{N}{n}$$

рядомъ лежащихъ областей группы G.

Ту же теорему можемъ формулировать нѣсколько иначе: *Если группа g порядка n входитъ въ группу G порядка N, то послѣ различныхъ возможныхъ измѣненій каждая основная область сѣти группы g покроетъ собою какъ разъ*

$$l = \frac{N}{n}$$

основныхъ областей сѣти группы G.

Справедливость этого предложенія легко провѣрить на чертежахъ (27) и (29), (28) и (30).

§ 39. **Понятіе объ автоморфныхъ функціяхъ.**

Пусть функція

$$F(u)$$

инваріантна по отношенію къ нѣкоторой линейной подстановкѣ:

$$\bar{u} = \frac{au+b}{cu+d}, \tag{21}$$

Digitized by Google

т. е. пусть имѣетъ мѣсто тождество:

$$F\left(\frac{au+b}{cu+\partial}\right)=F(u). \qquad (22)$$

Въ такомъ случаѣ, слѣдуя Клейну, мы будемъ называть функцію $F(u)$—аутоморфною функціею.

Слѣдуя Клейну, мы будемъ имѣть въ виду исключительно однозначныя аутоморфныя функціи.

Само собою ясно, что если функція $F(u)$ инваріанта по отношенію къ подстановкѣ

$$S(u)=\frac{au+b}{cu+\partial}, \qquad (23)$$

то она будетъ инваріантна и по отношенію къ степенямъ этой подстановки:

$$S^2, S^3\ldots$$

Совокупность всѣхъ линейныхъ подстановокъ, по отношенію къ которымъ функція $F(u)$ инваріантна, образуютъ нѣкоторую группу. Эту группу мы обозначимъ буквою G и будемъ называть ее группою аутоморфной функціи $F(u)$.

Порядокъ группы G функціи $F(u)$ можетъ быть конеченъ или безконечно великъ.

Если порядокъ N группы G безконечно великъ, то функція $F(u)$ непремѣнно трансцендентная.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть порядокъ группы G безконечно великъ и пусть подстановки этой группы таковы:

$$S_0=1,\ S_1,\ S_2,\ S_3\ldots \qquad (24)$$

Возьмемъ уравненіе:

$$F(u)=0. \qquad (25)$$

Пусть u_0 есть одинъ изъ корней уравненія (25).

Ясно, что уравненію (25) удовлетворитъ весь безконечный рядъ величинъ:

Digitized by Google

$$S_0(u_0) = u_0,\ S_1(u_0) = u_1,\ S_2(u_0) = u_2,\ S_3(u_0) = u_3, \ldots \quad (26)$$

Уравненіе (25) имѣетъ безконечно большое число корней. Функція $F(u)$ дѣйствительно трансцендентная.

Примѣры аутоморфныхъ функцій извѣстны въ математикѣ очень давно: всякая періодическая функція есть аутоморфная. Дѣйствительно, положивъ въ формулѣ (22):

$$a = 1,\ b = \omega,\ c = 0,\ d = 1,$$

находимъ:

$$F(u + \omega) = F(u).$$

Это равенство характеризуетъ періодическую функцію съ періодомъ ω.

Функціи

$$\frac{H^{\lambda_1}(u)}{cf^{\lambda}(u)}, \quad (27)$$

съ которыми намъ приходилось часто встрѣчаться въ предшествующихъ главахъ—тоже аутоморфныя. Группою G такой функціи, служитъ группа соотвѣтствующаго уравненія:

$$H^{\lambda_1}(u) : c'T^{\lambda_2}(u) : cf^{\lambda}(u) = z : z - 1 : 1. \quad (28)$$

Функція (27) есть раціональная алгебраическая аутоморфная функція. Порядокъ ея группы конеченъ. Группа G составлена изъ двухъ основныхъ подстановокъ. Въ этомъ отношеніи функція (27) имѣетъ нѣкоторую аналогію съ двояко-періодическими функціями *).

Болѣе общій примѣръ аутоморфной функціи представляетъ намъ функція, обратная функціи Шварца.

$$u = s\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda_2}, z\right), \quad (29)$$

*) Проф. Васильевъ посвятилъ теоріи функцій вида:

$$\frac{H^{\lambda_1}(u)}{cf^{\lambda}(u)}$$

свою диссертацію: О функціяхъ раціональныхъ, аналогичныхъ съ функціями двояко-періодическими. Казань. 1880.

Digitized by Google

гдѣ λ, λ_1, λ_2 суть какія угодно цѣлыя положительныя числа.

Если

$$z = F(u) \tag{30}$$

есть аутоморфная функція, имѣющая группу G линейныхъ подстановокъ, то обратная ей функція:

$$u = F^{-1}(z), \tag{31}$$

необходимо, многозначна и значенія ея связаны между собою подстановками группы G.

Можетъ случиться, что число значеній функціи (31) равно порядку группы G. Въ такомъ случаѣ подстановки группы G связываютъ между собою *всѣ* значенія функціи (31).

Условимся называть въ такомъ случаѣ функцію $F(u)$ собственно аутоморфною.

Въ противномъ случаѣ будемъ называть ее несобственно аутоморфною *).

Докажемъ, что имѣетъ мѣсто

Теорема 3. *Если группа g аутоморфной функціи $f(u)$ входитъ въ группу G аутоморфной функціи $F(u)$, и если функція $f(u)$ собственно аутоморфная, то $F(u)$ есть однозначная функція отъ $f(u)$.*

Положивъ

$$z = f(u), \tag{32}$$

мы найдемъ, что

$$u = f^{-1}(z), \tag{33}$$

гдѣ f^{-1} есть символъ функціи, обратной функціи f.

Подставивъ выраженіе (33) перемѣннаго u въ $F(u)$, находимъ:

$$F(u) = F[f^{-1}(z)]. \tag{34}$$

Если функція $f(u)$ собственно аутоморфная, то всѣ значенія функціи

$$u = f^{-1}(z) \tag{33}$$

*) У Клейна нѣтъ этого различія.

Digitized by Google

связаны между собою всевозможными подстановками группы g. При всевозможныхъ обходахъ на плоскости z величина u, опредѣляемая по формулѣ (33), будетъ испытывать различныя подстановки группы g. Такъ какъ всѣ подстановки группы g входятъ въ G, то функція

$$F(u) = F[f^{-1}(z)] \tag{34}$$

послѣ всевозможныхъ сомкнутыхъ обходовъ на плоскости z сохраняетъ свою величину: она есть однозначная функція z.

Обозначивъ эту однозначную функцію черезъ $R(z)$, находимъ:

$$F(u) = R(z), \tag{35}$$

или, вставляя вмѣсто z его выраженіе (32):

$$F(u) = R[f(u)]. \tag{36}$$

Теорема доказана.

Слѣдствіе 1. *Если функціи $f(u)$ и $F(u)$ алгебраическія, то $F(u)$ есть раціональная алгебраическая функція отъ $f(u)$.*

Дѣйствительно, если $f(u)$ и $F(u)$ суть функціи алгебраическія, то и функція $R(z)$ — алгебраическая раціональная функція.

Слѣдствіе 2. *Если функціи $f(u)$ и $F(u)$ объ собственно аутоморфныя и при томъ объ алгебраическія, то функція $R(z)$ есть раціональная дробь степени*

$$l = \frac{N}{n}$$

относительно z.

Докажемъ справедливость этого предложенія.

Чтобы найти степень $R(z)$ относительно z, положимъ, что въ уравненіи

$$F(u) = R(z) \tag{35}$$

намъ дана величина $F(u)$ и найдемъ, сколько величинъ перемѣннаго

$$z = f(u) \tag{32}$$

соотвѣтствуетъ данной величинѣ $F(u)$.

Digitized by Google

Если функція $F(u)$ собственно аутоморфная, то *всѣ* значенія обратной ей функціи связаны между собою подстановками группы G. Сохраняя прежнія обозначенія, мы можемъ сказать, что подстановки группы G расположены въ таблицѣ (8).

Слѣдовательно, значенія величины u, соотвѣтствующія данной величинѣ $F(u)$, таковы:

$$\left.\begin{array}{llll} s_0(u)=u, & s_1(u),\ldots & s_{n-1}(u), \\ s_0\sigma_1(u)=\sigma_1(u), & s_1\sigma_1(u),\ldots & s_{n-1}\sigma_1(u), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ s_0\sigma_{l-1}(u)=\sigma_{l-1}(u), & s_1\sigma_{l-1}(u),\ldots & s_{n-1}\sigma_{l-1}(u). \end{array}\right\} \quad (37)$$

Чтобы найти значенія функціи

$$z=f(u), \quad (32)$$

соотвѣтствующія данному значенію $F(u)$, мы должны подставить въ $f(u)$ вмѣсто u всѣ величины (37).

Такъ какъ функція $f(u)$ не мѣняется отъ подстановокъ:

$$s_0=1,\ s_1,\ldots\ s_{n-1} \quad (7)$$

группы g, то она будетъ имѣть всего l значеній:

$$f(u),\ f[\sigma_1(u)],\ f[\sigma_2(u)],\ldots\ f[\sigma_{l-1}(u)]. \quad (38)$$

Если данному значенію $F(u)$ соотвѣтствуетъ l значеній функціи:

$$z=f(u), \quad (32)$$

то раціональная функція $R(z)$—степени l относительно z.

Слѣдствіе 3. *Если $f(u)$ есть собственно аутоморфная функція относительно подстановокъ группы G, то всякая собственно аутоморфная функція $F(u)$, соотвѣтствующая той же группѣ G, есть линейная функція отъ $f(u)$.*

Дѣйствительно, въ данномъ случаѣ изъ предшествующаго слѣдствія мы заключаемъ, что функціи $F(u)$ и $f(u)$ связаны

Digitized by Google

между собою соотношеніемъ вида (36), гдѣ R—раціональная функція 1-ой степени.

Слѣдствіе 4. *Всякая аутоморфная алгебраическая функція $F(u)$ можетъ быть представлена въ видѣ:*

$$F(u) = R\left[\frac{H^{\lambda_1}(u)}{cf^{\lambda}(u)}\right], \tag{39}$$

гдѣ:

$$\frac{H^{\lambda_1}(u)}{cf^{\lambda}(u)} \tag{27}$$

есть уже извѣстная намъ аутоморфная функція, соотвѣтствующая группѣ G функціи $F(u)$, а R есть алгебраическая раціональная дробь.

Дѣйствительно, алгебраической аутоморфной функціи $F(u)$ соотвѣтствуетъ, какъ мы знаемъ, группа G конечнаго порядка. Группы конечнаго порядка *всѣ* нами разсмотрѣны въ главахъ III и IV. Мы видѣли, что каждой группѣ конечнаго порядка соотвѣтствуетъ своя функція Шварца:

$$u = s\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda_2}, z\right) \tag{29}$$

и одна обратная ей алгебраическая аутоморфная функція:

$$z = \frac{H^{\lambda_1}(u)}{cf^{\lambda}(u)}. \tag{27'}$$

Функція (27′) есть собственно аутоморфная. На основаніи слѣдствія 1 изъ теоремы 3 мы можемъ сказать, что $F(u)$ есть раціональная алгебраическая функція z:

$$F(u) = R(z) \tag{35}$$

откуда, наконецъ:

$$F(u) = R\left(\frac{H^{\lambda_1}(u)}{cf^{\lambda}(u)}\right). \tag{39}$$

Функцію собственно аутоморфную относительно подстановокъ группы g мы условимся обозначать черезъ

$$A_g(u).$$

Digitized by Google

На основаніи только что доказанныхъ слѣдствій 1 и 3 можемъ сказать, что всякая другая функція собственно аутоморфная относительно подстановокъ группы g, есть линейная функція отъ

$$A_g(u),$$

а всякая несобственно аутоморфная функція есть вообще нѣкоторая раціональная функція отъ

$$A_g(u).$$

§ 40. **Упрощеніе общей задачи объ алгебраическихъ уравненіяхъ, разрѣшимыхъ въ гипергеометрическихъ функціяхъ.**

Пусть алгебраическое уравненіе:

$$\psi(Y, z) = 0 \tag{40}$$

имѣетъ корнями *алгебраическія* раціональныя или ирраціональныя *выразимыя въ радикалахъ* функціи независимаго перемѣннаго z и частныхъ интеграловъ гипергеометрическаго уравненія:

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]\frac{dy}{dz} - \alpha\beta y = 0. \tag{41}$$

Иными словами, пусть корни уравненія (40) суть функціи вида:

$$Y = \Phi(z, y_1, y_2, \ldots), \tag{42}$$

гдѣ Φ есть функція *алгебраическая* раціональная или ирраціональная, *выразимая въ радикалахъ*.

Въ такомъ случаѣ мы скажемъ, что *уравненіе* (*40*) *разрѣшимо въ гипергеометрическихъ функціяхъ*.

Главною задачею нашей работы служитъ нахожденіе вида и свойствъ алгебраическихъ уравненій, разрѣшимыхъ въ гипергеометрическихъ функціяхъ.

Мы налагаемъ на функцію Φ условіе, чтобы она была *алгебраическою* потому, что иначе мы ввели бы въ рѣшеніе уравненія (40) помимо гипергеометрическихъ функцій $y_1, y_2, \ldots$ еще новый элементъ: трансцендентную функцію Φ. Это была

Digitized by Google

бы задача болѣе широкая, чѣмъ та, которая составляетъ цѣль нашей работы *).

Мы говоримъ, что функція Φ—раціональная или ирраціональная *выразимая въ радикалахъ*, потому что иначе мы не могли бы опредѣлить видъ этой функціи: ея видъ пришлось бы опредѣлять снова изъ алгебраическаго уравненія и мы вернулись бы къ первоначальной задачѣ.

Вотъ почему поставленную выше задачу можно назвать *общей задачей объ алгебраическихъ уравненіяхъ, разрѣшимыхъ въ гипергеометрическихъ функціяхъ.*

Приступимъ къ упрощенію этой общей задачи.

Выразимъ всѣ частные интегралы уравненія (41), входящіе въ формулу (42) въ видѣ линейныхъ функцій двухъ изъ нихъ: напримѣръ y_1 и y_2, и вставимъ въ функцію Φ:

$$Y=\varphi(z,\ y_1,\ y_2), \tag{43}$$

гдѣ φ—функція раціональная или ирраціональная, *выразимая въ радикалахъ.*

Положимъ:

$$\frac{y_1}{y_2}=u, \tag{44}$$

и докажемъ слѣдующую теорему:

Теорема 4. *Если алгебраическое уравненіе (40) разрѣшимо въ частныхъ интегралахъ гипергеометрическаго уравненія (41), то отношеніе всякихъ двухъ линейно независимыхъ частныхъ интеграловъ y_1, y_2 гипергеометрическаго уравненія (41):*

$$\frac{y_1}{y_2}=u \tag{44}$$

есть алгебраическая функція перемѣннаго z.

---

*) Эта болѣе широкая задача и есть та задача, о трансцендентномъ рѣшеніи алгебраическихъ уравненій, о которой уже было упомянуто въ предисловіи. Ее я надѣюсь разсмотрѣть въ слѣдующей своей работѣ, для которой настоящая служитъ только какъ бы введеніемъ.

Digitized by Google

Вставимъ выраженіе (43) въ уравненіе (40) и освободимъ полученное такимъ образомъ равенство отъ радикаловъ и отъ знаменателей. Въ результатѣ находимъ уравненіе вида:

$$X(z, y_1, y_2) = 0, \tag{45}$$

гдѣ X есть цѣлая раціональная функція отъ z, y_1, y_2.

Расположимъ ее по степенямъ z:

$$X_0(y_1, y_2) + X_1(y_1, y_2)z + X_2(y_1, y_2)z^2 + \ldots = 0. \tag{46}$$

Совершимъ на плоскости перемѣннаго z замкнутый обходъ около одной изъ критическихъ точекъ: 0, 1, ∞ функцій y_1, y_2. Послѣ этого обхода перемѣнное z приметъ свое прежнее значеніе, а функціи y_1, y_2 преобразуются линейно:

$$\left.\begin{aligned} \bar{y}_1 &= ay_1 + by_2, \\ \bar{y}_2 &= cy_1 + dy_2. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Уравненіе (46) приметъ такой видъ:

$$X_0(\bar{y}_1, \bar{y}_2) + X_1(\bar{y}_1, \bar{y}_2)z + X_2(\bar{y}_1, \bar{y}_2)z^2 + \ldots = 0, \tag{48}$$

или, послѣ замѣны величинъ $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ ихъ выраженіями (47):

$$\overline{X}_0(y_1, y_2) + \overline{X}_1(y_1, y_2)z + X_2(y_1, y_2)z^2 + \ldots = 0. \tag{49}$$

Уравненіе (49) можетъ оказаться или тождественнымъ съ уравненіемъ (46), или отличнымъ отъ уравненія (46).

Если бы послѣ двухъ различныхъ обходовъ мы получили два уравненія вида (49), не тождественныхъ ни между собою, ни съ уравненіемъ (46), то мы имѣли бы три не тождественныхъ между собою уравненія съ тремя неизвѣстными:

$$z, y_1, y_2.$$

Изъ этихъ уравненій можно было бы найти всѣ три неизвѣстныхъ. Въ такомъ случаѣ всѣ три величины: z, y_1, y_2 были бы постоянными, что, конечно, нелѣпо.

Digitized by Google

Итакъ, мы въ правѣ предполагать, что уравненіе (49) тождественно съ уравненіемъ (46). Коэффиціенты ихъ пропорціональны:

$$\left.\begin{aligned} X_0(y_1, y_2) &= C\overline{X}_0(y_1, y_2), \\ X_1(y_1, y_2) &= C\overline{X}_1(y_1, y_2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

Между функціями $X_0(y_1, y_2)$, $X_1(y_1, y_2)$,... могутъ оказаться такія, которыя нулевой степени относительно y_1, y_2, т. е. не зависятъ отъ y_1, y_2; но всѣ онѣ не могутъ быть нулевой степени потому, что иначе уравненіе (46) было бы справедливо при всякихъ значеніяхъ y_1, y_2, а уравненіе (40) могло бы быть разрѣшено въ радикалахъ безъ посредства гипергеометрическихъ функцій.

Положимъ, для опредѣленности разсужденій, что функція $X_0(y_1, y_2)$ не нулевой степени.

Возьмемъ первое изъ тождествъ (50):

$$X_0(y_1, y_2) = C\overline{X}_0(y_1, y_2). \qquad (51)$$

Функціи $X_0(y_1, y_2)$ и $\overline{X}_0(y_1, y_2)$—цѣлыя относительно y_1, y_2, но онѣ могутъ быть неоднородными.

Въ такомъ случаѣ мы разобьемъ ихъ на части такъ, чтобы каждая часть была однородна:

$$\left.\begin{aligned} X_0(y_1, y_2) &= \psi_0(y_1, y_2) + \psi_1(y_1, y_2) + \ldots, \\ \overline{X}_0(y_1, y_2) &= \overline{\psi}_0(y_1, y_2) + \overline{\psi}_1(y_1, y_2) + \ldots. \end{aligned}\right\} \qquad (52)$$

Ясно, что тождество (51) возможно только при условіи, что имѣютъ мѣсто тождества:

$$\left.\begin{aligned} \psi_0(y_1, y_2) &= C\overline{\psi}_0(y_1, y_2), \\ \psi_1(y_1, y_2) &= C\overline{\psi}_1(y_1, y_2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

Digitized by Google

Такъ какъ степень формы $X_0(y_1, y_2)$ выше 0, то въ числѣ однородныхъ формъ:

$$\psi_0(y_1, y_2),\ \psi_1(y_1, y_2)\cdots$$

найдутся формы, степень которыхъ выше 0.

Пусть степень формы $\psi_0(y_1, y_2)$ отлична отъ 0.

Возьмемъ первое изъ тождествъ (53):

$$\psi_0(y_1, y_2) = C\overline{\psi}_0(y_1, y_2). \tag{54}$$

Положивъ снова:

$$\frac{y_1}{y_2} = u, \tag{44}$$

находимъ:

$$\psi_0(u) = C\overline{\psi}_0(u). \tag{55}$$

Тождество (55) показываетъ, что уравненіе:

$$\psi_0(u) = 0 \tag{56}$$

инваріантно по отношенію къ линейнымъ подстановкамъ группы G, соотвѣтствующей группѣ тѣхъ бинарныхъ подстановокъ, которыя испытываютъ частные интегралы y_1, y_2 уравненія (41) при обходахъ на плоскости перемѣннаго z.

Уравненіе (56) алгебраическое; слѣдовательно порядокъ группы G конеченъ.

Отсюда заключаемъ, что функція:

$$\frac{y_1}{y_2} = u \tag{44}$$

есть алгебраическая функція Шварца, ибо она имѣетъ конечную группу линейныхъ подстановокъ. Она служитъ корнемъ алгебраическаго уравненія вида:

$$H^{\lambda_1}(u) : c' T^{\lambda_2}(u) : cf^{\lambda}(u) = \frac{1}{c} R(z) : \frac{1}{c} R(z) — 1 : 1 \tag{57}$$

Теорема доказана.

Величина y_2, какъ мы знаемъ изъ главы I, выражается черезъ u и z такою формулою:

Digitized by Google

$$y_2 = \sqrt{\frac{T(u)R(z)}{f(u)H(u)\frac{dR(z)}{dz}}}\, e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dz}, \qquad (58)$$

гдѣ, p_1, въ данномъ случаѣ, выражается такъ:

$$p_1 = \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)z}{z(1-z)}. \qquad (59)$$

Возникаетъ вопросъ, будетъ ли выраженіе:

$$e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dz}$$

алгебраическою функціею z, или, что то же, будетъ ли y_2 алгебраическою функціею z.

Изъ равенства (44) слѣдуетъ, что

$$y_1 = uy_2.$$

Внеся это выраженіе y_1 въ формулу (43), находимъ:

$$Y = \varphi(z, uy_2, y_2). \qquad (60)$$

Въ этомъ равенствѣ u есть алгебраическая функція z, φ есть алгебраическая функція входящихъ въ нее аргументовъ:

$$z, u, y_2,$$

и все выраженіе, служащее правою частью равенства (60), равно Y-алгебраической функціи z.

Отсюда слѣдуетъ, что если y_2 дѣйствительно входитъ явнымъ образомъ въ выраженіе (60), то и она есть алгебраическая функція z.

И такъ возможны только два случая:

1) *Функція y_2 въ равенствѣ* (60) *явно не входитъ.*

2) *Функція y_2 есть алгебраическая функція z.*

Въ первомъ случаѣ Y есть алгебраическая функція отъ z и u раціональная или ирраціональная, выразимая въ радикалахъ:

$$Y = \omega(z, u). \qquad (61)$$

Digitized by Google

Во второмъ случаѣ, вставивъ въ формулу (60) вмѣсто y_2 выраженіе (58), мы приведемъ формулу (60) къ тому же виду (61), гдѣ ω есть снова функція алгебраическая раціональная или ирраціональная, выразимая въ радикалахъ.

Уравненіе (40) можно разсматривать, какъ результатъ преобразованія уравненія (57) подстановкою (61).

Это заключеніе можно формулировать въ видѣ такой теоремы.

Теорема 4. *Всякое алгебраическое уравненіе, разрѣшимое въ гипергеометрическихъ функціяхъ, можетъ быть получено изъ уравненія вида* (57) *преобразованіемъ перемѣннаго:*

$$Y = \omega(z, u), \tag{61}$$

гдѣ ω-функція раціональная или ирраціональная выразимая въ радикалахъ.

I.

Пусть функція ω раціональна.

Посмотримъ, какъ составляется въ такомъ случаѣ уравненіе (40).

Перенесемъ всѣ члены уравненія (61) влѣво:

$$Y - \omega(z, u) = 0, \tag{62}$$

и станемъ совершать въ формулѣ

$$Y - \omega(z, u) \tag{63}$$

надъ перемѣннымъ u линейныя преобразованія группы G уравненія (57), считая Y и z постоянными параметрами.

Функція (63) можетъ оказаться аутоморфною по отношенію къ нѣкоторымъ изъ подстановокъ группы G.

Выпишемъ всѣ *различныя* значенія функціи (63):

$$Y - \omega_0(z, u),\ Y - \omega_1(z, u), \ldots\ldots Y - \omega_{l-1}(z, u). \tag{64}$$

Перемноживъ величины (64) и приравнявъ произведеніе ихъ нулю, мы получимъ уравненіе, которому удовлетворяютъ значенія Y:

$$\prod_{i=0}^{i=l-1} \{Y - \omega_i(z, u)\} = 0. \tag{65}$$

Digitized by Google

Функція, стоящая въ лѣвой части уравненія (65), автоморфна относительно подстановокъ группы G. По слѣдствію 4 изъ теоремы 3 ее можно представить въ видѣ раціональной функціи отъ собственно автоморфной функціи

$$\frac{H^{\lambda_1}(u)}{cf^{\lambda}(u)} \tag{27}$$

и параметровъ Y и z:

$$P_{i=0}^{i=l-1}\{Y-\omega_i(z,u)\} = \mathfrak{R}\left(Y, z, \frac{H^{\lambda_1}(u)}{cf^{\lambda}(u)}\right), \tag{66}$$

гдѣ $\mathfrak{R}$—раціональная функція входящихъ въ нее аргументовъ.

Степень функціи $\mathfrak{R}$ относительно Y равна l.

Изъ уравненія (57) слѣдуетъ:

$$\frac{H^{\lambda_1}(u)}{cf^{\lambda}(u)} = \frac{1}{c}R(z). \tag{57'}$$

Внеся эту величину въ формулу (66) и положивъ:

$$\mathfrak{R}\left\{Y, z, \frac{1}{c}R(z)\right\} = \psi(Y, z), \tag{67}$$

находимъ:

$$P_{i=0}^{i=l-1}\{Y-\omega_i(z,u)\} = \psi(Y,z). \tag{68}$$

Приравнявъ эту функцію нулю, находимъ искомое уравненіе

$$\psi(Y,z) = 0. \tag{40}$$

Оно степени l относительно Y. Число l, какъ мы видѣли, равно числу *различныхъ* значеній, пріобрѣтаемыхъ функціею $\omega(z,u)$ подъ вліяніемъ подстановокъ группы G.

II.

Перейдемъ къ общему случаю: пусть функція ω, входящая въ формулу (61), какая-нибудь ирраціональная функція, выразимая въ радикалахъ.

Освободимъ уравненіе (61) отъ радикаловъ. Пусть оно приметъ видъ:

$$X(Y,z,u) = 0, \tag{69}$$

Digitized by Google

гдѣ X раціональная функція отъ Y, z, u.

Положимъ:

$$H = X(Y, z, u). \tag{70}$$

Будемъ разсматривать величины Y и z, какъ постоянные параметры, и совершимъ надъ перемѣннымъ u въ выраженіи

$$X(Y, z, u) \tag{71}$$

всевозможныя подстановки группы G.

Пусть всѣ *различныя* значенія, пріобрѣтаемыя функціею (71) подъ вліяніемъ этихъ подстановокъ, таковы:

$$X_0(Y, z, u),\ X_1(Y, z, u), \ldots . X_{l-1}(Y, z, u). \tag{72}$$

Функція:

$$P_{i=0}^{i=l-1}\{H - X_i(Y, z, u)\} \tag{73}$$

по отношенію къ перемѣнному u есть аутоморфная функція, соотвѣтствующая группѣ G.

Повторяя разсужденія, приведенныя при разсмотрѣніи предыдущаго случая, найдемъ, что функцію (73) можно представить въ видѣ раціональной функціи аргументовъ.

$$H, Y, z:$$

$$P_{i=0}^{i=l-1}\{H - X_i(Y, z, u)\} = \Re(H, Y, z). \tag{74}$$

Положивъ въ обѣихъ частяхъ этого равенства

$$H = 0,$$

и введя обозначеніе:

$$\Re(0, Y, z) = \psi(Y, z), \tag{75}$$

находимъ:

$$(-1)^l P_{i=0}^{i=l-1} X_i(Y, z, u) = \psi(Y, z). \tag{76}$$

Приравнявъ нулю найденную функцію $\psi(Y,z)$, мы получимъ искомое уравненіе:

$$\psi(Y, z) = 0, \tag{40}$$

которому удовлетворяютъ значенія функціи Y.

Digitized by Google

Это уравненіе есть результатъ преобразованія уравненія (57) ирраціональною подстановкою (61).

Разсматривая сдѣланныя нами вычисленія, мы находимъ, что преобразованіе уравненія (57) подстановкою (61) можетъ быть достигнуто слѣдующимъ пріемомъ.

1) Освободивъ уравненіе

$$Y = \omega(z, u) \tag{61}$$

отъ радикаловъ, находимъ уравненіе:

$$X(Y, z, u) = 0. \tag{69}$$

2) Преобразуемъ уравненіе (57) *раціональною* подстановкою:

$$H = X(Y, z, u), \tag{70}$$

гдѣ H есть новое перемѣнное, а Y и z—параметры.

Въ результатѣ этого раціональнаго преобразованія находимъ уравненіе:

$$\Re(H, Y, z) = 0.$$

3) Положивъ въ этомъ уравненіи

$$H = 0,$$

находимъ уравненіе

$$\Re(0, Y, z) = 0,$$

или, введя обозначеніе (75)

$$\psi(Y, z) = 0. \tag{40}$$

Уравненіе (40) и есть искомое.

Такимъ образомъ нахожденіе уравненія (40) во всякомъ случаѣ приводится къ *раціональному* преобразованію уравненія (57).

Простѣйшій случай ирраціональнаго преобразованія таковъ:

$$Y = \sqrt[m]{\bar{\omega}(z, u)}, \tag{77}$$

гдѣ $\bar{\omega}$—раціональная функція величинъ z и u.

Digitized by Google

Въ этомъ случаѣ указанный выше пріемъ можетъ быть упрощенъ.

Положивъ:

$$H = Y^m = \bar{\omega}(z, u), \tag{78}$$

мы преобразуемъ уравненіе (57) раціональною подстановкою:

$$H = \bar{\omega}(z, u). \tag{79}$$

Найдя результатъ этого преобразованія:

$$\psi_1(H, z) = 0, \tag{80}$$

и замѣнивъ H величиною Y^m, находимъ уравненіе:

$$\psi_1(Y^m, z) = 0, \tag{81}$$

или, что то же, искомое уравненіе:

$$\psi(Y, z) = 0. \tag{40}$$

Уравненія, разсмотрѣнныя нами въ главахъ I и VIII получаются изъ уравненія (57) преобразованіемъ вида:

$$y = \sqrt{\frac{T(u)\,R(u)}{f(u)\,H(u)\,\frac{dR(z)}{dz}}}\; e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dz}.$$

Это—преобразованіе вида (77).

Изъ сказаннаго выше слѣдуетъ, что наибольшую важность представляетъ раціональное преобразованіе уравненія (57). Поэтому въ дальнѣйшихъ нашихъ изслѣдованіяхъ мы будемъ говорить исключительно о *раціональныхъ* преобразованіяхъ уравненія (57).

Итакъ, пусть ω есть раціональная функція z и u.

Мы сказали, что функція:

$$\omega(z, u)$$

подъ вліяніемъ подстановокъ группы G порядка N пріобрѣтаетъ l различныхъ значеній.

Digitized by Google

Найдемъ совокупность подстановокъ группы G, не мѣняющихъ функцію $\omega(z, u)$. Эти подстановки образуютъ нѣкоторую группу g порядка n, входящую въ G. Отношеніе порядковъ этихъ группъ равно числу l:

$$\frac{N}{n} = l.$$

(Можетъ случиться, что группа g есть группа *единица*. Это будетъ тогда, когда всѣ подстановки группы G мѣняютъ функцію $\omega(z, u)$. Въ такомъ случаѣ $l = N$).

Составимъ собственно аутоморфную функцію:

$$\zeta = A_g(u), \tag{82}$$

соотвѣтствующую группѣ g.

Изъ теоремы 3 слѣдуетъ, что $\omega(z, u)$ есть раціональная функція отъ ζ и параметра z:

$$Y = \omega(z, u) = \chi(\zeta, z). \tag{83}$$

Такъ какъ функціи:

$$\frac{H^{\lambda_1}(u)}{cf^{\lambda}(u)}, \quad \frac{c' T^{\lambda_2}(u)}{cf^{\lambda}(u)}$$

тоже аутоморфны относительно подстановокъ группы g, то ихъ также можно представить въ видѣ раціональныхъ функцій величины ζ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{H^{\lambda_1}(u)}{f^{\lambda}(u)} &= \frac{F_1(\zeta)}{F(\zeta)}, \\ \frac{c' T^{\lambda_2}(u)}{cf^{\lambda}(u)} &= \frac{F_2(\zeta)}{F(\zeta)}, \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

гдѣ $F(\zeta)$, $F_1(\zeta)$, $F_2(\zeta)$ суть цѣлыя раціональныя алгебраическія функціи ζ.

Внеся эти выраженія въ уравненіе (57), находимъ:

$$F_1(\zeta) : F_2(\zeta) : F(\zeta) = \frac{1}{c} R(z) : \frac{1}{c} R(z) - 1 : 1. \tag{85}$$

Такъ какъ функціи, стоящія въ лѣвой части равенствъ (84) суть собственно аутоморфныя функціи, соотвѣтствующія груп-

Digitized by Google

пѣ G, то по слѣдствію 2 теоремы 3 мы можемъ сказать, что какъ вторыя части равенствъ (84), такъ и уравненіе (85)— степени

$$l = \frac{N}{n}$$

относительно ζ.

Возьмемъ уравненія:

$$H^{\lambda_1}(u) : c' T^{\lambda_2}(u) : cf^{\lambda}(u) = \frac{1}{c} R(z) : \frac{1}{c} R(z) - 1 : 1, \quad (57)$$

$$\zeta = A_g(u), \quad (82)$$

$$F_1(u) : F_2(\zeta) : F(\zeta) = \frac{1}{c} R(z) : \frac{1}{c} R(z) - 1 : 1, \quad (85)$$

$$Y = \chi(\zeta, z), \quad (83')$$

$$\psi(Y, z) = 0. \quad (40)$$

Эти уравненія мы можемъ разсматривать съ такой точки зрѣнія:

1) Уравненіе (57), степени N относительно неизвѣстнаго u, преобразовано раціональною подстановкою (82). Въ результатѣ получилось уравненіе (85), степень котораго относительно новаго неизвѣстнаго ζ равна

$$l = \frac{N}{n},$$

а относительно независимаго перемѣннаго z такая же, какъ и степень уравненія (57).

2) Уравненіе (85) преобразовано раціональною подстановкою (83').

Въ результатѣ получилось окончательное уравненіе (40), степень котораго относительно новаго неизвѣстнаго Y такова же, какъ и степень уравненія (85): оно степени l относительно Y, какъ мы видѣли выше. Степень уравненія (40) относительно z, вообще говоря, иная, чѣмъ степень уравненія (85): она могла какъ понизиться, такъ и повыситься.

Digitized by Google

Итакъ, мы разбили разсматриваемое преобразованіе на двѣ стадіи.

Первое преобразованіе имѣетъ цѣлью понизить степень уравненія (57) относительно неизвѣстнаго, не измѣняя степени его относительно z. Число такихъ преобразованій строго опредѣленное; каждое преобразованіе (82) соотвѣтствуетъ одной изъ числа группъ, входящихъ въ группу G.

Второе преобразованіе (83′) оставляетъ степень уравненія относительно неизвѣстнаго безъ перемѣны, а степень его относительно z, вообще говоря, мѣняетъ. Такихъ преобразованій существуетъ безконечное множество: всякая раціональная функція, за исключеніемъ весьма ограниченнаго числа функцій, пригодна для этой цѣли.

Ясно, что это второе преобразованіе играетъ второстепенную роль: имъ мы можемъ воспользоваться или для того, чтобы упростить уравненіе (85) по внѣшнему виду, или для того, чтобы привести *данное* алгебраическое уравненіе (40) къ уравненію (85), корни котораго выражаются помощью формулы (82) черезъ величину u.

Только что полученными нами разультатами опредѣляется планъ нашихъ дальнѣйшихъ изслѣдованій: въ слѣдующей X главѣ мы разсмотримъ для каждаго изъ четырехъ типовъ, всѣ виды подстановки (82), способной понизить степень уравненія (57), найдемъ видъ и свойства полученныхъ такимъ образомъ выводныхъ уравненій или *резольвентъ*, какъ мы ихъ будемъ называть, а также и нѣкоторыя упрощенія, которыя въ нихъ можно сдѣлать преобразованіемъ (83′). Въ главѣ XI мы разсмотримъ, какъ привести нѣкоторыя наиболѣе интересныя уравненія извѣстныхъ и наперед заданныхъ типовъ къ виду (85) при помощи подстановокъ вида (83′), и какъ затѣмъ выразить ихъ корни въ функціи величины u.

Digitized by Google

ГЛАВА X.

Резольвенты уравненій, имѣющихъ группу линейныхъ подстановокъ.

§ 41. Свойства резольвентъ уравненій, имѣющихъ группу линейныхъ подстановокъ.

Въ главѣ IX мы привели рѣшеніе нашей основной задачи къ нахожденію всевозможныхъ преобразованій вида:

$$\zeta = A_g(u), \tag{1}$$

понижающихъ степень уравненія:

$$H^{\lambda_1}(u) : c' T^{\lambda_2}(u) : cf^{\lambda}(u) = \frac{1}{c} R(z) : \frac{1}{c} R(z) - 1 : 1, \tag{2}$$

и къ составленію резольвентъ уравненія (2), получаемыхъ преобразованіемъ его посредствомъ подстановокъ вида (1).

Для упрощенія формулъ мы можемъ ввести въ уравненіе (2) новое независимое перемѣнное, обозначивъ функцію $\frac{1}{c} R(z)$ одною буквою.

Мы будемъ предполагать это упрощеніе уже выполненнымъ и замѣнимъ въ уравненіи (2) функцію $\frac{1}{c} R(z)$ перемѣннымъ z, какъ это мы дѣлали неоднократно выше.

Уравненіе (2) будетъ таково:

$$H^{\lambda_1}(u) : c' T^{\lambda_2}(u) : cf^{\lambda}(u) = z : z - 1 : 1. \tag{3}$$

Итакъ, ближайшая наша задача состоитъ въ слѣдующемъ:

Digitized by Google

1) Зная группу G уравненія (3), мы должны найти всѣ группы g, входящія въ G. Мы будемъ ихъ называть подгруппами (Untergruppen) по отношенію къ G.

2) Для каждой подгруппы g мы должны составить соотвѣтствующую ей аутоморфную функцію:

$$\zeta = A_g(u). \tag{1}$$

3) Зная функцію (1), мы должны преобразовать уравненіе (3) подстановкою (1), при чемъ, какъ намъ извѣстно, получится уравненіе вида:

$$F_1(\zeta) : F_2(\zeta) : F(\zeta) = s : s - 1 : 1. \tag{4}$$

Сказанные вопросы мы должны рѣшить для каждаго изъ четырехъ типовъ уравненія (3).

Прежде чѣмъ приступить къ выполненію намѣченнаго плана, займемся раскрытіемъ нѣкоторыхъ свойствъ резольвентъ вида (4).

Пусть группа G уравненія (3)—порядка N, пусть въ группу G входитъ подгруппа g порядка n, а въ g пусть входитъ подгруппа g' порядка n'.

Положимъ:

$$\frac{N}{n} = l, \quad \frac{n}{n'} = l'. \tag{5}$$

Собственно аутоморфная функція, соотвѣтствующая группѣ g, такова:

$$\zeta = A_g(u). \tag{1}$$

Собственно аутоморфную функцію, соотвѣтствующую группѣ g' мы обозначимъ такъ:

$$\zeta' = A_{g'}(u). \tag{6}$$

Такъ какъ функція ζ тоже аутоморфна относительно подстановокъ группы g', то ζ есть раціональная функція ζ' степени $\frac{n}{n'} = l'$:

Digitized by Google

$$\zeta = \psi(\zeta'). \tag{7}$$

Преобразуя уравненіе (3) подстановкою (1), находимъ уравненіе степени l относительно ζ:

$$F_1(\zeta) : F_2(\zeta) : F(\zeta) = z : z - 1 : 1. \tag{4}$$

Преобразуя уравненіе (3) подстановкою (6), находимъ уравненіе степени ll' относительно ζ':

$$F_1'(\zeta') : F_2'(\zeta') : F'(\zeta') = z : z - 1 : 1. \tag{8}$$

Изъ уравненій (4), (8), (7) слѣдуетъ, что:

$$F_1'(\zeta') : F_2'(\zeta') : F'(\zeta') = F_1[\psi(\zeta')] : F_2[\psi(\zeta')] : F[\psi(\zeta')]. \tag{9}$$

Иными словами, уравненіе (8) можетъ быть получено изъ уравненія (4), если мы въ уравненіи (4) вмѣсто ζ вставимъ раціональную функцію $\psi(\zeta')$ степени l' относительно ζ', при чемъ, понятно, степень его относительно неизвѣстнаго повышается въ l' разъ.

Интересъ представляетъ только уравненіе (4), ибо, внося въ него вмѣсто ζ различныя функціи новаго неизвѣстнаго ζ', мы можемъ получить сколько угодно уравненій вида (9).

Отсюда слѣдуетъ, что составляя резольвенты уравненія (3), мы можемъ ограничиться разсмотрѣніемъ тѣхъ изъ нихъ, которыя соотвѣтствуютъ *наиболѣе широкимъ* подгруппамъ группы G уравненія (3).

Посмотримъ, какова группа Галуа для уравненія (4).

Слѣдуя обозначеніямъ главы IX, мы положимъ, что подстановки подгруппы g таковы:

$$s_0 = 1,\ s_1,\ s_2, \ldots\ s_{n-1}. \tag{10}$$

Подстановки группы G могутъ быть расположены въ таблицѣ:

$$\left.\begin{array}{llll} s_0 = 1, & s_1, & s_2, \ldots & s_{n-1}, \\ s_0\sigma_1 = \sigma_1, & s_1\sigma_1, & s_2\sigma_1, \ldots & s_{n-1}\sigma_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ s_0\sigma_{l-1} = s_{l-1}, & s_1\sigma_{l-1}, & s_2\sigma_{l-1}, \ldots & s_{n-1}s_{l-1}, \end{array}\right\} \tag{11}$$

Digitized by Google

гдѣ

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots\ \sigma_{l-1} \tag{12}$$

суть различныя между собою и извѣстнымъ образомъ выбранныя подстановки группы G, не входящія въ группу g.

Подъ вліяніемъ подстановокъ:

$$\sigma_0 = 1,\ \sigma_1,\ \sigma_2\ \ldots\ \sigma_{l-1} \tag{13}$$

функція

$$\zeta = A_g(u) \tag{1}$$

пріобрѣтаетъ l различныхъ между собою значеній:

$$\zeta_0,\ \zeta_1,\ \zeta_2,\ \ldots\ \zeta_{l-1}. \tag{14}$$

Эти l значеній суть какъ разъ *всѣ* тѣ значенія, которыя функція (1) пріобрѣтаетъ подъ вліяніемъ подстановокъ группы G. Это суть l корней уравненія (4). Каждой линейной подстановкѣ S группы G соотвѣтствуетъ нѣкоторая перестановка, совершаемая надъ l корнями (14) уравненія (4).

Мы будемъ называть эти перестановки, совершаемыя надъ l корнями (14) уравненія (3), *субституціями* въ отличіе отъ *линейныхъ подстановокъ* группъ G и g.

Найдемъ N субституцій надъ количествами (14), соотвѣтствующихъ N линейнымъ подстановкамъ группы G. Обозначимъ эту совокупность субституцій буквою Γ.

Докажемъ слѣдующую теорему:

Теорема 1. *Совокупность субституцій Γ есть группа Галуа для уравненія (4).*

Субституціи группы Γ суть *всевозможныя* субституціи, испытываемыя величинами (14) при обходахъ на плоскости перемѣннаго z. Отсюда слѣдуетъ, что онѣ образуютъ группу.

Всякая функція величинъ (14), инваріантная относительно субституцій группы Γ, будучи выражена черезъ u, есть функція аутоморфная относительно подстановокъ группы G и поэтому выражается раціонально черезъ z. На оборотъ: всякая раціонально извѣстная функція величинъ (14) есть раціональная функція z; будучи выражена черезъ u, она

Digitized by Google

инваріантна относительно подстановокъ группы G. Поэтому всякая раціонально извѣстная функція величинъ (14) инваріантна относительно субституцій группы Γ. Сказанныя два свойства группы Γ суть характерные признаки того, что группа Γ есть группа Галуа для уравненія (4).

Условимся въ слѣдующей терминологіи:

1) Если *каждая* изъ подстановокъ группы g, будучи преобразована *каждою* изъ подстановокъ группы G, даетъ въ результатѣ подстановку группы g, то мы назовемъ по общепринятому группу g *особою частью* группы G.

2) Если *нѣкоторыя* изъ подстановокъ группы g, будучи преобразованы *каждою* изъ подстановокъ группы G, даютъ въ результатѣ подстановку группы g, то мы назовемъ g *полуособою частью* группы G.

3) Если *ни одна* изъ подстановокъ группы g не обладаетъ сказаннымъ свойствомъ, то мы назовемъ g *неособою* частью группы G.

Теорема 2. *Если подгруппа g есть неособая часть группы G, то группа Γ соотвѣтствующей ей резольвенты—такого же порядка N, какъ и группа G.*

Пусть g есть *неособая часть* группы G. Мы видѣли, что каждой подстановкѣ группы G соотвѣтствуетъ своя субституція группы Γ. Посмотримъ, не можетъ ли нѣсколькимъ различнымъ подстановкамъ группы G соотвѣтствовать одна и та же субституція группы Γ.

Допустимъ, что двумъ различнымъ подстановкамъ S и S' группы G соотвѣтствуетъ одна и та же субституція группы Γ.

Въ такомъ случаѣ подстановкѣ

$$S^{-1}S',$$

отличной отъ 1, соотвѣтствуетъ субституція 1.

Подстановка $S^{-1}S'$ есть одна изъ подстановокъ группы G; слѣдовательно она приводится къ виду:

$$s_i \sigma_j.$$

Будемъ различать два случая:

1) Индексъ j отличенъ отъ 0,

Digitized by Google

2) Индексъ j равенъ 0.

I. Пусть индексъ j отличенъ отъ 0.

Возьмемъ корень:

$$\zeta_0 = A_g(u) \tag{1'}$$

уравненія (4).

Совершимъ надъ нимъ подстановку:

$$s_i\, \sigma_j.$$

Послѣ подстановки функція ζ_0 переходитъ въ $\overline{\zeta}_0$, при чемъ:

$$\overline{\zeta}_0 = A_g[s_i\, \sigma_j(u)]. \tag{15}$$

Такъ какъ функція $A_g(u)$ не мѣняется отъ подстановки s_i, то:

$$\overline{\zeta}_0 = A_g[\sigma_j(u)] = \zeta_j. \tag{16}$$

Итакъ, субституція, соотвѣтствующая подстановкѣ

$$S^{-1}\, S' = s_i\, \sigma_j,$$

мѣняетъ корень ζ_0 на отличный отъ него корень ζ_j.

Это противорѣчитъ сдѣланному ранѣе заключенію, что субституція, соотвѣтствующая подстановкѣ $S^{-1}\, S'$, есть 1.

II. Пусть индексъ j равенъ 0:

$$S^{-1}\, S' = s_i.$$

Эта подстановка не мѣняетъ корня:

$$\zeta_0 = A_g(u). \tag{1'}$$

Возьмемъ какой нибудь изъ остальныхъ корней уравненія (4), напр.

$$\zeta_k = A_g[\sigma_k(u)]. \tag{17}$$

Послѣ подстановки $S^{-1}S' = s_i$ этотъ корень перейдетъ въ $\overline{\zeta}_k$, при чемъ:

$$\overline{\zeta}_k = A_g[\sigma_k s_i(u)]. \tag{18}$$

Эта величина только въ томъ случаѣ равна ζ_k при произвольномъ u, если имѣетъ мѣсто символическое равенство вида:

Digitized by Google

$$\sigma_k s_i \sigma_k^{-1} = s_h, \qquad (19)$$

гдѣ h имѣетъ одно изъ значеній: 0, 1, 2,... $n-1$.

Если субституція, соотвѣтствующая подстановкѣ

$$S^{-1}S' = s_i,$$

есть 1, то она не мѣняетъ ни одного изъ корней (14) уравненія (4).

Въ такомъ случаѣ символическое равенство (19) справедливо при всѣхъ значеніяхъ k отъ $k=0$ до $k=n-1$. Если такъ, то подстановка s_i группы g, будучи преобразована *всѣми* подстановками группы G, даетъ въ результатѣ подстановки той же группы g. Группа g есть особая или полуособая часть группы G.

Это заключеніе противорѣчитъ условію теоремы.

Итакъ, дѣйствительно, каждой подстановкѣ группы G соотвѣтствуетъ и при томъ единственная субституція группы Γ. Порядки обѣихъ группъ одинаковы.

Теорема 3. *Если группа g неособая часть группы G, то группы G и Γ изоморфны между собою.*

Это—ближайшее слѣдствіе изъ предшествующей теоремы: если двѣ группы G и Γ одинаковаго порядка и каждой подстановкѣ группы G соотвѣтствуетъ единственная субституція группы Γ, то онѣ не могутъ не быть изоморфны между собою.

Если измѣрять сложность уравненія порядкомъ его группы, то мы можемъ сказать, что всѣ резольвенты (4) уравненія (3), соотвѣтствующія неособой части группы G, такъ же сложны, какъ и уравненіе (3). Онѣ проще только по виду: степень ихъ ниже степени N уравненія (3).

Уравненіе (3) есть резольвента Галуа какъ для самого себя, такъ и для всѣхъ уравненій вида (4).

Значеніе уравненій (4) для алгебры заключается въ томъ, что мы можемъ *данное* намъ уравненіе, удовлетворяющее извѣстнымъ условіямъ (напр. всякое уравненіе 5-ой степени, какъ будетъ видно ниже), преобразовать въ одно изъ уравненій вида (4); а за тѣмъ рѣшить уравненіе (4), пользуясь

Digitized by Google

тѣмъ, что корни его выражаются раціонально помощью формулы:

$$\zeta = A_g(u) \qquad (1)$$

черезъ корни уравненія (3), разрѣшимаго въ гипергеометрическихъ функціяхъ.

Если мы припомнимъ, что корни уравненія (3) суть функціи Шварца

$$u = s\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda_2}, z\right), \qquad (20)$$

то замѣтимъ, что корни уравненія (4) выражаются такою формулою:

$$\zeta = A_g\left[s\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda_2}, z\right)\right]. \qquad (21)$$

Итакъ, корни уравненія (4) представляются въ видѣ функціи отъ функціи перемѣннаго z, при чемъ эта вторая, *внутренняя* функція есть многозначная функція Шварца, соотвѣтствующая группѣ G, а *наружная* функція есть функція аутоморфная, обратная функціи Шварца, соотвѣтствующей подгруппѣ g группы G *).

Теорема 4. *Если подгруппа g есть неособая часть группы G, то группа субституцій Γ можетъ быть составлена изъ двухъ основныхъ субституцій σ и τ, соотвѣтствующихъ основнымъ подстановкамъ S и $\mathfrak{S}$ группы G.*

---

*) Весьма интересно то обстоятельство, что одну и ту же алгебраическую функцію ζ можно выражать различно, комбинируя различныя пары функцій, обладающихъ сказанными свойствами. Въ формулѣ (21) обѣ функціи суть алгебраическія по самому условію рѣшаемой нами задачи, но можно подобрать пару *трансцендентныхъ* функцій, комбинація которыхъ выражаетъ ту же самую *алгебраическую* функцію. Таково рѣшеніе уравненія 5-ой степени, предложенное Эрмитомъ.

Я не касаюсь этого интереснаго вопроса, чтобы не выдти за предѣлы, указываемыя заглавіемъ моей работы. Объ этой задачѣ о трансцендентномъ рѣшеніи уравненій я упоминалъ уже во введеніи и въ главѣ IX.

Digitized by Google

Эта теорема есть слѣдствіе предшествующихъ: если группа Γ изоморфна группѣ G, то основныя субституціи группы Γ должны соотвѣтствовать основнымъ подстановкамъ S и $\mathfrak{S}$ группы G.

Теорема 5. *Если порядки группъ G и Γ одинаковы, то подгруппа g есть неособая часть группы G.*

Эта теорема есть слѣдствіе, вытекающее изъ тѣхъ разсужденій, которыя мы приводили при доказательствѣ теоремы 2: если бы подгруппа g была особою или полуособою частью группы G, то нашлись бы такія различныя подстановки группы G, которымъ соотвѣтствуетъ одна и та же субституція группы Γ. Порядокъ группы Γ былъ бы ниже порядка группы G.

Въ нашихъ дальнѣйшихъ изслѣдованіяхъ наибольшій интересъ будутъ представлять неособыя части группъ. Особыя части группъ: тетраэдрической и октаэдрической приводятъ къ рѣшенію уравненій: тетраэдрическаго и октаэдрическаго въ радикалахъ.

Эти рѣшенія были нами уже разсмотрѣны въ главѣ VII и больше о нихъ говорить мы не будемъ.

§ 42. **Подгруппы конечныхъ порядковъ.**

Разсмотримъ другъ за другомъ всѣ конечныя группы линейныхъ подстановокъ и найдемъ, каковы входящія въ нихъ подгруппы.

I.

Группа двупирамидная порядка $2m$.

Подстановки двупирамидной группы соотвѣтствуютъ поворотамъ сферы двоякаго рода:

1) Поворотамъ на углы, кратные $\frac{2\pi}{m}$ около оси, соединяющей двѣ противоположныя вершины двупирамиды. Подстановка S, соотвѣтствующая повороту на уголъ $\frac{2\pi}{m}$, есть одна изъ двухъ основныхъ подстановокъ группы.

2) Поворотамъ на углы, кратные π около осей, лежащихъ въ плоскости основанія обѣихъ пирамидъ, составляющихъ

Digitized by Google

двупирамиду. Подстановка S, соотвѣтствующая одному изъ этихъ поворотовъ на уголъ π, есть вторая основная подстановка группы.

Ясно, что повороты группъ: тетраэдрической, октаэдрической и икосаэдрической мѣняютъ положеніе двупирамиды.

Въ двупирамидную группу могутъ входить только подгруппы слѣдующихъ типовъ:

1) Подгруппы циклическаго типа порядка m_1:

$$(S^l)^0 = 1,\ S^l,\ S^{2l},\ldots S^{(m_1-1)l}, \tag{22}$$

гдѣ l есть дѣлитель числа m, а m_1 есть дѣлитель, ему дополнительный:

$$lm_1 = m. \tag{23}$$

2) Подгруппы циклическаго типа порядка 2:

$$(S^k\mathfrak{S})^0 = 1,\ S^k\mathfrak{S},\ *) \tag{24}$$

гдѣ k-какое угодно цѣлое число.

3) Подгруппы двупирамиднаго типа порядка $2m_1$, составленныя изъ основныхъ подстановокъ.

$$S^l,\ S^k\mathfrak{S}, \tag{25}$$

гдѣ l есть дѣлитель числа m, число m_1 есть дѣлитель ему дополнительный:

$$lm_1 = m,$$

а k какое-либо цѣлое число.

Другихъ подгруппъ двупирамидная группа порядка $2m$ въ себѣ не содержитъ.

Первая и вторая изъ перечисленныхъ подгруппъ входятъ въ третью.

---

*) Подстановка $S^k\mathfrak{S}$—втораго порядка. Она соотвѣтствуетъ повороту сферы на уголъ π около одной изъ осей, лежащихъ въ плоскости основанія двупирамиды.

Digitized by Google

Такъ какъ мы въ правѣ ограничиться разсмотрѣніемъ наиболѣе широкихъ подгруппъ, то мы будемъ строить только резольвенту порядка:

$$l = \frac{2m}{2m_1},$$

соотвѣтствующую третьей изъ перечисленныхъ подгруппъ двупирамидной группы. При этомъ мы примемъ число m_1 равнымъ наибольшему изъ дѣлителей числа m, отличному отъ самого числа m.

(Если число m—простое, то наибольшій его дѣлитель, отличный отъ m, есть 1, число l равно m, подстановка S^l равна 1. Въ этомъ случаѣ подгруппа двупирамиднаго типа порядка $2m_1$ замѣняется циклической порядка 2).

II

Группа тетраэдрическая.

Въ тетраэдрическую группу входятъ подстановки, соотвѣтствующія поворотамъ двоякаго рода:

1) Поворотамъ на углы, кратные $\frac{2\pi}{3}$, около осей, соединяющихъ вершины тетраэдра съ центрами противоположныхъ граней. Одна изъ этихъ подстановокъ есть основная подстановка S тетраэдрической группы.

2) Поворотамъ на углы, кратные π около осей, соединяющихъ средины противоположныхъ реберъ тетраэдра. Одна изъ этихъ подстановокъ $\mathfrak{S}$ есть вторая основная подстановка тетраэдрической группы.

Ясно, что группы: октаэдрическая и икосаэдрическая не могутъ входить въ тетраэдрическую. Изъ группъ двупирамиднаго типа можетъ быть вопросъ только о двупирамидныхъ группахъ 4-го и 6-го порядковъ.

Группа 4-го порядка, т. е. четверичная дѣйствительно, какъ мы знаемъ, входитъ въ тетраэдрическую. Группа 6-го порядка въ тетраэдрическую не входитъ, потому что повороты на уголъ π около осей, лежащихъ въ плоскости осно-

Digitized by Google

нія двупирамиды, приводятъ тетраэдръ въ положеніе, соотвѣтствующее тетраэдру, ему дополнительному.

Итакъ, мы въ правѣ сказать, что въ тетраэдрическую группу входятъ только слѣдующія подгруппы:

1) Подгруппа циклическаго типа порядка 3:

$$S^0 = 1,\ S,\ S^2. \tag{26}$$

2) Подгруппа циклическая порядка 2:

$$\mathfrak{S}^0 = 1,\ \mathfrak{S}. \tag{27}$$

3) Подгруппа четверичная.

Послѣдняя изъ перечисленныхъ подгруппъ есть особая часть тетраэдрической группы. Она приводитъ къ рѣшенію тетраэдрическаго уравненія въ радикалахъ, которое было уже разсмотрѣно въ главѣ VII.

Подгруппа 2-го порядка входитъ въ четверичную. Слѣдовательно мы можемъ ограничиться разсмотрѣніемъ резольвенты порядка:

$$l = \frac{12}{3} = 4,$$

соотвѣтствующей подгруппѣ 3-го порядка.

III

Группа октаэдрическая.

Подстановки октаэдрической группы соотвѣтствуютъ поворотамъ троякаго рода:

1) Поворотамъ на углы кратные $\frac{\pi}{2}$ около осей, соединяющихъ противоположныя вершины октаэдра. Одна изъ этихъ подстановокъ S, соотвѣтствующая повороту на уголъ $\frac{\pi}{2}$, есть основная подстановка группы.

2) Поворотамъ на углы, кратные $\frac{2\pi}{3}$, около осей, соединяющихъ центры противоположныхъ граней октаэдра. Одна

Digitized by Google

изъ этихъ подстановокъ S, соотвѣтствующая повороту на $\frac{2\pi}{3}$, можетъ быть принята за вторую основную подстановку группы.

3) Поворотамъ на углы, кратные π около осей, соединяющихъ средины противоположныхъ реберъ октаэдра. Одна изъ этихъ подстановокъ $\mathfrak{S}$ можетъ быть принята за вторую основную подстановку группы вмѣсто указанной выше подстановки S.

Ясно, что икосаэдрическая группа въ октаэдрическую войти не можетъ.

Группы всѣхъ остальныхъ типовъ входятъ въ октаэдрическую.

Итакъ, въ октаэдрическую группу входятъ слѣдующія подгруппы:

1) Подгруппы циклическаго типа порядка 4:

$$S^0 = 1,\ S,\ S^2,\ S^3. \tag{28}$$

2) Подгруппы циклическаго типа порядка 3:

$$\mathfrak{S}^0 = 1,\ \mathfrak{S},\ \mathfrak{S}^2. \tag{29}$$

3) Подгруппы циклическаго типа порядка 2:

$$\mathfrak{S}^0 = 1,\ \mathfrak{S}. \tag{30}$$

4) Подгруппы двупирамиднаго типа порядка 8 составленныя изъ основныхъ подстановокъ S и U, гдѣ U есть подстановка 2-го порядка, выбранная такъ, чтобы повороты, соотвѣтствующіе подстановкамъ S и U, а также S' и U совершались около взаимно перпендикулярныхъ осей.

5) Подгруппа двупирамиднаго типа порядка 6, составленная изъ основныхъ подстановокъ $\mathfrak{S}$ и U.

6) Подгруппа двупирамиднаго типа порядка 4, т. е. четверичная, составленная изъ основныхъ подстановокъ S^2 и U.

7) Подгруппа тетраэдрическаго типа.

Кромѣ того входятъ подгруппы, входящія въ подгруппы перечисленныхъ типовъ.

Digitized by Google

Для насъ представляютъ интересъ резольвенты, соотвѣтствующія лишь нѣкоторымъ изъ подгруппъ октаэдрической группы. Разсмотримъ, какія именно.

Подгруппа тетраэдрическаго типа есть особая часть октаэдрической группы. Она ведетъ къ разрѣшенію октаэдрическаго уравненія въ радикалахъ, о чемъ мы говорили уже въ главѣ VII.

Четверичная подгруппа входитъ въ тетраэдрическую.

Подгруппы циклическаго типа порядковъ 4, 3, 2 тоже входятъ въ другія подгруппы октаэдрической группы. Резольвенты, соотвѣтствующія этимъ подгруппамъ интереса не представляютъ.

Остаются подгруппы двухъ типовъ:

1) Подгруппы двупирамиднаго типа порядка 8.

2) Подгруппы двупирамиднаго типа порядка 6.

Этимъ двумъ подгруппамъ соотвѣтствуютъ резольвенты степеней:

$$l_1 = \frac{24}{8} = 3 \text{ и } l_2 = \frac{24}{6} = 4 .$$

Только объ этихъ двухъ резольвентахъ мы и будемъ говорить.

III

Группа икосаэдрическая.

Подстановки икосаэдрической группы соотвѣтствуютъ поворотамъ троякаго рода:

1) Поворотамъ на углы, кратные $\frac{2\pi}{5}$ около осей, соединяющихъ противоположныя вершины икосаэдра. Одна изъ этихъ подстановокъ S, соотвѣтствующая повороту на уголъ $\frac{2\pi}{5}$, можетъ быть принята за основную подстановку группы.

2) Поворотамъ на углы кратные $\frac{2\pi}{3}$ около осей, соединяющихъ центры противоположныхъ граней икосаэдра. Одна изъ

Digitized by Google

этихъ подстановокъ S', соотвѣтствующая повороту на уголъ $\frac{2\pi}{3}$, можетъ быть принята за основную подстановку икосаэдрической группы вмѣсто подстановки S, указанной выше.

3) Поворотамъ на углы, кратные π, около осей, соединяющихъ средины противоположныхъ реберъ икосаэдра. Одна изъ этихъ подстановокъ $\mathfrak{S}$ можетъ быть принята за вторую основную подстановну икосаэдрической группы.

Мы знаемъ, что октаэдрическая группа въ икосаэдрическую не входитъ.

Группы всѣхъ остальныхъ типовъ въ нее входить могутъ.

Итакъ, въ икосаэдрическую группу входятъ слѣдующія подгруппы:

1) Подгруппы циклическаго типа порядка 5:

$$S^0=1,\ S,\ S^2,\ S^3,\ S^4. \tag{31}$$

2) Подгруппы циклическаго типа порядка 3:

$$S'^0=1,\ S',\ S'^2. \tag{32}$$

3) Подгруппы циклическаго типа порядка 2:

$$\mathfrak{S}^0=1,\ \mathfrak{S}. \tag{33}$$

4) Подгруппы двупирамиднаго типа порядка 10, составленныя изъ основныхъ подстановокъ S и U, гдѣ U есть подстановка 2-го порядка, выбранная такъ, чтобы повороты, соотвѣтствующіе подстановкамъ S и U, а также S' и U совершались около двухъ взаимно перпендикулярныхъ осей.

5) Подгруппы двупирамиднаго типа порядка 6, составленныя изъ основныхъ подстановокъ S' и U.

6) Подгруппы двупирамиднаго типа порядка 4, т. е. четверичныя.

7) Подгруппы тетраэдрическаго типа.

Для насъ представляютъ интересъ резольвенты, соотвѣтствующія только нѣкоторымъ изъ этихъ подгруппъ.

Разсмотримъ, какія это подгруппы.

Digitized by Google

Подгруппы: четверичныя и циклическія порядковъ 5, 3, 2 входятъ въ другія изъ числа перечисленныхъ подгруппъ и потому интереса не представляютъ.

Остаются подгруппы:

1) Двупирамиднаго типа порядка 10.

2) Двупирамиднаго типа порядка 6.

3) Тетраэдрическаго типа.

Резольвента, соотвѣтствующая второй изъ этихъ подгруппъ, какъ мы сейчасъ увидимъ, можетъ быть получена изъ резольвенты, соотвѣтствующей подгруппѣ тетраэдрическаго типа и поэтому самостоятельнаго интереса не представляетъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть:

$$H^{\lambda_1}(u) : c' T^{\lambda_2}(u) : cf^{\lambda}(u) = z : z - 1 : 1 \qquad (3)$$

есть уравненіе икосаэдрическаго типа.

Обозначимъ собственно аутоморфныя функціи, соотвѣтствующія подгруппамъ: тетраэдрической, двупирамидной 6-го порядка и циклической 3-го порядка буквами:

$$\zeta,\ \zeta_6,\ \zeta_3.$$

Пусть резольвента уравненія (3), соотвѣтствующая тетраэдрической подгруппѣ, такова:

$$F_1(\zeta) : F_2(\zeta) : F(\zeta) = z : z - 1 : 1. \qquad (4)$$

Циклическая подгруппа 3-го порядка входитъ какъ въ тетраэдрическую подгруппу, такъ и въ двупирамидную подгруппу 6-го порядка. Слѣдовательно, обѣ функціи: ζ и ζ_6 суть раціональныя функціи величины ζ_3:

$$\zeta = \psi_4(\zeta_3), \qquad (34)$$

$$\zeta_6 = \psi_2(\zeta_3), \qquad (35)$$

гдѣ ψ_4 и ψ_2 суть раціональныя функціи степеней соотвѣтственно равныхъ 4 и 2.

Обозначимъ функцію, обратную ψ_2 черезъ ψ_2^{-1}: это ирраціональная функція, содержащая въ себѣ одинъ квадратный радикалъ.

Digitized by Google

Изъ уравненія (35) имѣемъ:

$$\zeta_3 = \psi_2^{-1}(\zeta_6), \tag{36}$$

а изъ уравненій (34) и (36):

$$\zeta = \psi_4[\psi_2^{-1}(\zeta_6)], \tag{37}$$

или:

$$\zeta = \omega(\zeta_6), \tag{38}$$

гдѣ ω есть ирраціональная функція, содержащая въ себѣ одинъ квадратный радикалъ.

Вставивъ выраженіе (38) въ уравненіе (4), находимъ:

$$F_1[\omega(\zeta_6)] : F_2[\omega(\zeta_6)] : F[\omega(\zeta_6)] = s : s-1 : 1. \tag{39}$$

Такова резольвента степени:

$$\frac{60}{6} = 10,$$

соотвѣтствующая подгруппѣ двупирамиднаго типа 6-го порядка. Она получается изъ резольвенты (4) подстановкою вмѣсто ζ ирраціональнаго выраженія (38), содержащаго въ себѣ одинъ квадратный радикалъ.

Итакъ, изучая резольвенты икосаэдрическаго уравненія, мы въ правѣ ограничиться разсмотрѣніемъ тѣхъ изъ нихъ, которыя соотвѣтствютъ:

1) подгруппѣ тетраэдрическаго типа,

2) подгруппѣ двупирамиднаго типа 10-го порядка.

Этимъ подгруппамъ соотвѣтствуютъ резольвенты степеней:

$$l_1 = \frac{60}{12} = 5, \quad l_2 = \frac{60}{10} = 6.$$

§ 43. **Резольвенты уравненія двупирамиднаго типа.**

Возьмемъ нормальное уравненіе двупирамиднаго типа:

$$\left(\frac{u^m+1}{2}\right)^2 : \left(\frac{u^m-1}{2}\right)^2 : u^m = s : s-1 : 1. \tag{40}$$

Группа G этого уравненія состоитъ изъ двухъ основныхъ подстановокъ:

Digitized by Google

$$S(u) = e^{\frac{2\pi i}{m}} u, \quad \mathfrak{S}(u) = \frac{1}{u}. \tag{41}$$

Мы видѣли, что интересъ представляетъ только одна резольвента этого уравненія: резольвента, соотвѣтствующая подгруппѣ g двупирамиднаго типа порядка $2m_1$, гдѣ m_1 есть наибольшій изъ дѣлителей числа m, отличныхъ отъ самого числа m. Положивъ:

$$\frac{m}{m_1} = l,$$

мы представимъ основныя подстановки подгруппы g въ такомъ видѣ:

$$S^l(u) = e^{\frac{2\pi i}{m_1}} u, \quad \mathfrak{S}(u) = \frac{1}{u}. \tag{42}$$

Функція собственно аутоморфная относительно подстановокъ подгруппы g такова:

$$\zeta = u^{m_1} + \frac{1}{u^{m_1}}. \tag{43}$$

Для составленія резольвенты, которой удовлетворяетъ функція ζ, мы представимъ уравненіе (40) въ такомъ видѣ:

$$\{(u^{m_1})^l + (u^{-m_1})^l + 2\} : \{(u^{m_1})^l + (u^{-m_1})^l - 2\} : 4 = \varepsilon : \varepsilon - 1 : 1. \tag{44}$$

Изъ уравненія (43) находимъ:

$$\left.\begin{aligned}
&u^{m_1} + u^{-m_1} = \zeta,\\
&(u^{m_1})^2 + (u^{-m_1})^2 = \zeta^2 - 2,\\
&(u^{m_1})^3 + (u^{-m_1})^3 = \zeta^3 - 3\zeta,\\
&(u^{m_1})^4 + (u^{-m_1})^4 = \zeta^4 - 4\zeta^2 + 2.\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Каково бы ни было число l, продолжая составленіе формулъ (45), мы найдемъ выраженіе функціи:

Digitized by Google

$$(u^{m_1})^l + (u^{-m_1})^l$$

черезъ величину ζ. Это будетъ цѣлый многочленъ степени l относительно ζ. Вставивъ полученное выраженіе функціи $(u^{m_1})^l + (u^{-m_1})^l$ въ уравненіе (44), мы найдемъ искомую резольвенту, корнемъ которой служитъ величина ζ.

Разсмотримъ подробно случай, когда $m = 3$. Наибольшій дѣлитель числа 3, отличный отъ самого числа 3, есть 1. Преобразуемъ уравненіе:

$$\left(\frac{u^3+1}{2}\right)^2 : \left(\frac{u^2-1}{2}\right)^2 : u^3 = \varepsilon : \varepsilon - 1 : 1 \qquad (46)$$

подстановкою:

$$\zeta = u + \frac{1}{u}. \qquad (47)$$

Въ результатѣ находимъ кубичное уравненіе:

$$(\zeta^3 - 3\zeta + 2) : (\zeta^3 - 3\zeta - 2) : 4 = \varepsilon : \varepsilon - 1 : 1. \qquad (48)$$

Положивъ:

$$\zeta = hY, \qquad (49)$$

гдѣ h—произвольное постоянное число, находимъ:

$$(h^3Y^3 - 3hY + 2) : (h^3Y^3 - 3hY - 2) : 4 = \varepsilon : \varepsilon - 1 : 1. \qquad (50)$$

Посмотримъ, какова группа уравненія (48).

Функція:

$$\zeta = u + \frac{1}{u} \qquad (47)$$

подъ вліяніемъ подстановокъ группы уравненія (46) должна пріобрѣтать всего три значенія.

Основныя подстановки S и $\mathfrak{S}$ группы уравненія (46) таковы:

$$S(u) = \varepsilon u, \text{ гдѣ } \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad \mathfrak{S}(u) = \frac{1}{u}. \qquad (51)$$

Совершивъ надъ функціей (47) подстановки:

Digitized by Google

$$S^0 = 1,\ S,\ S^2,$$

находимъ:

$$\zeta_0 = u + \frac{1}{u},\ \zeta_1 = \varepsilon u + \frac{\varepsilon^2}{u},\ \zeta_2 = \varepsilon^2 u + \frac{\varepsilon}{u}. \qquad (52)$$

Эти три значенія различны между собою и исчерпываютъ всѣ корни уравненія (48).

Подстановки, которыя мы обозначали буквами:

$$\sigma_1,\ \sigma_2, \ldots\ \sigma_{l-1}$$

въ данномъ случаѣ суть:

$$S,\ S^2.$$

Подстановка S преобразуетъ величины $\zeta_0,\ \zeta_1,\ \zeta_2$ въ $\overline{\zeta}_0, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2$, при чемъ:

$$\overline{\zeta}_0 = \zeta_1,\ \overline{\zeta}_1 = \zeta_2,\ \overline{\zeta}_1 = \zeta_0. \qquad (53)$$

Слѣдовательно основная субституція σ группы Γ уравненія (48) такова:

$$\sigma = (\zeta_0,\ \zeta_1,\ \zeta_2). \qquad (54)$$

Подстановка $\mathfrak{S}$ преобразуетъ величины $\zeta_0,\ \zeta_1,\ \zeta_2$ въ $\overline{\overline{\zeta}}_0, \overline{\overline{\zeta}}_1, \overline{\overline{\zeta}}_2$, при чемъ:

$$\overline{\overline{\zeta}}_0 = \zeta_0,\ \overline{\overline{\zeta}}_1 = \zeta_2,\ \overline{\overline{\zeta}}_2 = \zeta_1. \qquad (55)$$

Слѣдовательно основная субституція τ группы Γ уравненія (48) такова:

$$\tau = (\zeta_0)(\zeta_1,\ \zeta_2). \qquad (56)$$

Корни уравненія (50) разнятся отъ корней уравненія (48) только постояннымъ множителемъ h. Группы этихъ уравненій одинаковы.

Основныя субституціи группы уравненія (50) таковы:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma &= (Y_0,\ Y_1,\ Y_2), \\ T &= (Y_0)(Y_1,\ Y_2). \end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

Digitized by Google

§ 44. **Резольвента уравненія тетраэдрическаго типа.**

Мы видѣли въ § 42, что изъ числа резольвентъ тетраэдрическаго уравненія представляетъ интересъ только та резольвента, которая соотвѣтствуетъ циклической подгруппѣ 3-го порядка.

Возьмемъ тетраэдрическое уравненіе во второй нормальной формѣ:

$$(2\sqrt{2}u^3+1)^3:(u^6+5\sqrt{2}u^3-1)^2:-(u^3-2\sqrt{2})^3u^3= \tag{58}$$

$$= z : z - 1 : 1.$$

Основныя подстановки группы этого уравненія таковы:

$$\left.\begin{aligned} S(u) &= \varepsilon u, \quad \mathfrak{T}(u) = \frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2}\,u+1}, \\ \text{гдѣ } \varepsilon &= e^{\frac{2\pi i}{3}}. \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Основная подстановка циклической подгруппы 3-го порядка есть S.

Функція аутоморфная относительно подстановокъ этой группы есть:

$$\zeta = u^3. \tag{60}$$

Преобразуя уравненіе (58) подстановкою (60), находимъ:

$$(2\sqrt{2}\,\zeta+1)^3:(\zeta^2+5\sqrt{2}\,\zeta-1)^2:-(\zeta-2\sqrt{2})^3\zeta=z:z-1:1. \tag{61}$$

Такова резольвента 4-ой степени тетраэдрическаго уравненія.

Посмотримъ, какова группа Γ этого уравненія.

Совершивъ надъ функціей (60) подстановки:

$$1,\ \mathfrak{T},\ \mathfrak{T}S,\ \mathfrak{T}S^2, \tag{62}$$

находимъ:

Digitized by Google

$$\zeta_0 = u^3,\ \zeta_1 = \left(\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2}\,u+1}\right)^3,\ \zeta_2 = \left(\frac{\sqrt{2}-\varepsilon u}{\sqrt{2}\,\varepsilon u+1}\right)^3,$$

$$\zeta_3 = \left(\frac{\sqrt{2}-\varepsilon^2 u}{\sqrt{2}\varepsilon^2 u+1}\right)^3. \tag{63}$$

Подстановка S преобразуетъ функціи ζ_0, ζ_1, ζ_2, ζ_3 въ $\overline{\zeta}_0$, $\overline{\zeta}_1$, $\overline{\zeta}_2$, $\overline{\zeta}_3$, при чемъ:

$$\overline{\zeta}_0 = \zeta_0,\ \overline{\zeta}_1 = \zeta_2,\ \overline{\zeta}_2 = \zeta_3,\ \overline{\zeta}_3 = \zeta_1. \tag{64}$$

Слѣдовательно, основная субституція σ группы Γ уравненія (61) такова:

$$\sigma = (\zeta_0)(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3). \tag{65}$$

Подстановка $\mathfrak{S}$ преобразуетъ функціи ζ_0, ζ_1, ζ_2, ζ_3 въ $\overline{\overline{\zeta}}_0$, $\overline{\overline{\zeta}}_1$, $\overline{\overline{\zeta}}_2$, $\overline{\overline{\zeta}}_3$, при чемъ:

$$\overline{\overline{\zeta}}_0 = [\mathfrak{S}(u)]^3,\ \overline{\overline{\zeta}}_1 = u^3,\ \overline{\overline{\zeta}}_2 = [\mathfrak{S}S\mathfrak{S}(u)]^3,\ \overline{\overline{\zeta}}_3 = [\mathfrak{S}S^2\mathfrak{S}(u)]^3. \tag{66}$$

Изъ чертежа 28 видно, что подстановка $S\mathfrak{S}$ соотвѣтствуетъ повороту сферы на уголъ $\frac{2\pi}{3}$ около оси, одинъ изъ полюсовъ которой проектируется въ точку c. Слѣдовательно подстановка $S\mathfrak{S}$—третьяго порядка:

$$S\mathfrak{S}S\mathfrak{S}S\mathfrak{S} = 1. \tag{67}$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{S}S\mathfrak{S} &= S^2\mathfrak{S}S^2, \\ \mathfrak{S}S^2\mathfrak{S} &= S\mathfrak{S}S. \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Изъ формулъ (66) и (68) слѣдуетъ, что:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\overline{\zeta}}_0 = \zeta_1,\ \overline{\overline{\zeta}}_1 = \zeta_0,\ \overline{\overline{\zeta}}_2 = [S^2\mathfrak{S}S^2(u)]^3 = [\mathfrak{S}S^2(u)]^3 = \zeta_3, \\ &\overline{\overline{\zeta}}_3 = [S\mathfrak{S}S(u)]^3 = [\mathfrak{S}S(u)]^2 = \zeta_2. \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Digitized by Google

Слѣдовательно основная субституція τ группы Γ уравненія (61) такова:

$$\tau = (\zeta_0, \zeta_1)(\zeta_2, \zeta_3). \tag{70}$$

Положивъ въ уравненіи (61):

$$\zeta = hY, \tag{71}$$

гдѣ h произвольное постоянное число, находимъ:

$$(2\sqrt{2}\,hY+1)^3 : (h^2Y^2+5\sqrt{2}h\,Y-1)^2 : -h(hY-2\sqrt{2})^3 Y = \tag{72}$$
$$= \varepsilon : \varepsilon - 1 : 1.$$

Группа этого уравненія такая же, какъ и группа уравненія (61); она составлена изъ двухъ основныхъ субституцій:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma &= (Y_0)(Y_1,\ Y_2,\ Y_3), \\ T &= (Y_0,\ Y_1)(Y_2,\ Y_3). \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Не безъинтересно на разсматриваемомъ примѣрѣ убѣдиться въ вѣрности тѣхъ геометрическихъ представленій, которыя указаны въ теоремѣ 2 главы IX.

Подстановки, обозначенныя въ главѣ IX буквами:

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{l-1},$$

въ данномъ случаѣ суть:

$$S,\ SS,\ SS^2.$$

Выдѣлимъ на чертежѣ 28 четыреугольники, соотвѣтствующіе подстановкамъ:

$$1,\ S,\ SS,\ SS^2. \tag{74}$$

Площадь эта есть безконечная часть плоскости, заключенная внутри сторонъ угла $c0a$.

Digitized by Google

Это дѣйствительно основная область циклической группы 3-го порядка:

$$S^0 = 1, S, S^2.$$

§ 45. Резольвенты уравненія октаэдрическаго типа.

Мы видѣли, что изъ числа резольвентъ октаэдрическаго уравненія представляютъ интересъ только двѣ резольвенты: именно тѣ, которыя соотвѣтствуютъ подгруппамъ двупирамиднаго типа порядковъ 8 и 6.

Степени этихъ резольвентъ соотвѣтственно равны 3 и 4. Разсмотримъ ихъ въ отдѣльности.

I.

Резольвента четвертой степени.

Возьмемъ октаэдрическое уравненіе во 2-ой нормальной формѣ:

$$64\sqrt{2}\left(u^7 - \frac{7}{2\sqrt{2}}u^4 - u\right)^3 : -(u^{12} - 22\sqrt{2}u^9 - 22\sqrt{2}u^3 - 1)^2 : \tag{75}$$

$$: (u^6 + 5\sqrt{2}u^3 - 1)^4 = z : z - 1 : 1.$$

Основныя подстановки группы этого уравненія таковы:

$$\left.\begin{aligned} S(u) &= \varepsilon u, \\ T(u) &= \frac{1 + \sqrt{2}\,\varepsilon^2 u}{u - \sqrt{2}\,\varepsilon}, \\ \text{гдѣ } \varepsilon &= e^{\frac{2\pi i}{3}}. \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

Основныя подстановки подгруппы двупирамиднаго типа 6-го порядка таковы:

$$S(u) = \varepsilon u, \quad U(u) = -\frac{1}{u}, \tag{77}$$

при чемъ:

Digitized by Google

$$U = SSTSS^2. \tag{78}$$

Функція собственно аутоморфная относительно подстановокъ этой подгруппы такова:

$$\zeta = u^3 - \frac{1}{u^3}. \tag{79}$$

Преобразуя уравненіе (75) подстановкою (79), находимъ:

$$64\sqrt{2}\left(\zeta - \frac{7}{2\sqrt{2}}\right)^3 : -(\zeta^2+4)(\zeta - 22\sqrt{2})^2 : (\zeta + 5\sqrt{2})^4 =$$

$$= s : s - 1 : 1. \tag{80}$$

Функція (79) подъ вліяніемъ подстановокъ октаэдрической группы:

$$1,\ S,\ S^2,\ S^3 \tag{81}$$

пріобрѣтаетъ слѣдующія значенія:

$$\left.\begin{aligned}
\zeta_0 &= u^3 - \frac{1}{u^3}, \\
\zeta_1 &= \frac{(1+\sqrt{2}\,\varepsilon^2 u)^6 - (u - \sqrt{2}\,\varepsilon)^6}{[\sqrt{2}\,\varepsilon^2 u^2 - u - \sqrt{2}\,\varepsilon]^3}, \\
\zeta_2 &= \frac{(1+\sqrt{2}\,u)^6 - (u-\sqrt{2})^6}{[\sqrt{2}u^2 - u - \sqrt{2}]^3}, \\
\zeta_3 &= \frac{(1+\sqrt{2}\varepsilon u)^6 - (u - \sqrt{2}\,\varepsilon^2)^6}{[\sqrt{2}\,\varepsilon u^2 - u - \sqrt{2}\,\varepsilon^2]^3}.
\end{aligned}\right\} \tag{82}$$

Подъ вліяніемъ подстановки S величины $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ переходятъ въ $\overline{\zeta}_0, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2, \overline{\zeta}_3$, при чемъ:

$$\overline{\zeta}_0 = \zeta_0,\ \overline{\zeta}_1 = \zeta_2,\ \overline{\zeta}_2 = \zeta_3,\ \overline{\zeta}_3 = \zeta_1. \tag{83}$$

Подъ вліяніемъ подстановки S величины $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ переходятъ въ $\overline{\overline{\zeta}}_0, \overline{\overline{\zeta}}_1, \overline{\overline{\zeta}}_2, \overline{\overline{\zeta}}_3$, при чемъ:

Digitized by Google

$$\bar{\bar{\zeta}}_0=\zeta_1,\ \bar{\bar{\zeta}}_1=\zeta_2,\ \bar{\bar{\zeta}}_2=\zeta_3,\ \bar{\bar{\zeta}}_3=\zeta_0. \tag{84}$$

Слѣдовательно основныя субституціи σ и τ группы Γ уравненія (80) таковы:

$$\left.\begin{aligned}\sigma&=(\zeta_0)(\zeta_1,\ \zeta_2,\ \zeta_3),\\ \tau&=(\zeta_0,\ \zeta_1,\ \zeta_2,\ \zeta_3).\end{aligned}\right\} \tag{85}$$

Преобразуемъ уравненіе (80) линейною подстановкою:

$$\zeta=\frac{7\sqrt{2}hY-5\sqrt{2}}{4hY+1}, \tag{86}$$

гдѣ h произвольное постоянное число, а Y—новое неизвѣстное. Въ результатѣ находимъ:

$$Y'+\frac{4}{27h^2z}Y+\frac{1}{27h^4z}=0. \tag{87}$$

Такъ какъ корни уравненій (80) и (87) связаны между собою линейно, то группы этихъ уравненій одинаковы. Основныя субституціи группы уравненія (87) таковы:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma&=(Y_0)(Y_1,\ Y_2,\ Y_3),\\ T&=(Y_0,\ Y_1,\ Y_2,\ Y_3).\end{aligned}\right\} \tag{88}$$

Обратимъ вниманіе на геометрическія представленія, указанныя въ теоремѣ 2 главы IX, въ примѣненіи къ разсматриваемому случаю.

Подстановки, обозначенныя въ главѣ IX буквами:

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ldots\ \sigma_{l-1},$$

въ данномъ случаѣ суть:

$$\mathfrak{S},\ \mathfrak{S}^2,\ \mathfrak{S}^3.$$

Отмѣтивъ на чертежѣ 30 четыреугольники, соотвѣтствующіе подстановкамъ:

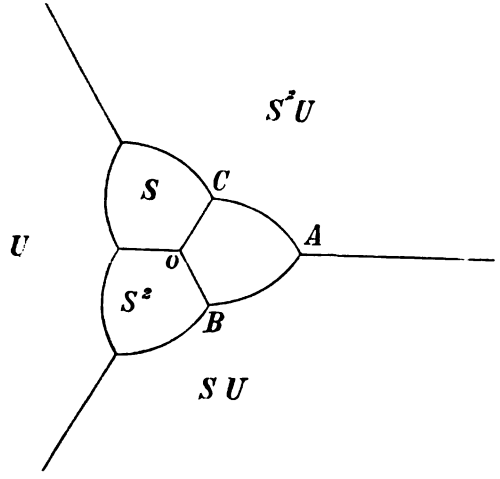
$$1,\ \mathfrak{S},\ \mathfrak{S}^2,\ \mathfrak{S}^3,$$

Digitized by Google

получимъ сплошную площадь, имѣющую видъ четыреугольника и обозначенную на чертежѣ 35 буквами: *OBAC*. Этотъ четыреугольникъ можетъ быть принятъ за основную область двупирамидной группы 6-го порядка, составленной изъ подстановокъ:

$$\left.\begin{array}{l} S^0=1,\ S,\ S^2, \\ U,\ SU,\ S^2U. \end{array}\right\} \qquad (89)$$

Преобразуя четыреугольникъ *OBAC* подстановками (89), получимъ сѣть, изображенную на черт. 35. Соотвѣтствіе между областями этой сѣти и подстановками (89) двупирамидной группы указано на самомъ черт. 35.



Черт. 35.

Не трудно видѣть, что сѣть 35 можетъ быть построена слѣдующимъ образомъ: вписавъ кубъ въ сферу такъ, чтобы двѣ противоположныя вершины его лежали въ полюсахъ сферы, мы проэктируемъ его ребра изъ центра на поверхность сферы. На поверхности сферы получится сѣть изъ 6 равныхъ между собою четыреугольниковъ. Проэктируя эту сѣть изъ южнаго полюса на плоскость экватора, мы получимъ ту сѣть, которая изображена на черт. 35.

II.

Резольвента третьей степени.

Возьмемъ октаэдрическое уравненіе въ 1-ой нормальной формѣ:

Digitized by Google

$$(u^8+14u^4+1)^3 : (u^{12}-33u^8-33u^4+1)^2 : 108(u^5-u)^4 = \\ = z : z-1 : 1. \tag{90}$$

Основныя подстановки группы этого уравненія таковы:

$$S(u) = iu, \quad \mathfrak{T}(u) = \frac{1-u}{1+u}. \tag{91}$$

Подгруппа двупирамиднаго типа 8-го порядка, входящая въ эту группу, имѣетъ слѣдующія основныя подстановки:

$$S(u) = iu, \quad U(u) = \frac{1}{u}, \tag{92}$$

при чемъ:

$$U = \mathfrak{T}S^2\mathfrak{T}. \tag{93}$$

Функція аутоморфная относительно подстановокъ этой подгруппы 6-го порядка такова:

$$\zeta = u^4 + \frac{1}{u^4}. \tag{94}$$

Преобразуя уравненіе (90) подстановкою (94), находимъ:

$$(\zeta+14)^3 : (\zeta+2)(\zeta-34)^2 : 108(\zeta-2)^2 = z : z-1 : 1. \tag{95}$$

Совершая надъ функціей (94) подстановки:

$$1, \ \mathfrak{T}, \ \mathfrak{T}S, \tag{96}$$

находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \zeta_0 &= u^4 + \frac{1}{u^4}, \ \zeta_1 = \frac{(1+u)^8+(1-u)^8}{(1-u^2)^4}, \\ \zeta_2 &= \frac{(1+iu)^8+(1-iu)^8}{(1+u^2)^4}. \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

Совершая надъ этими величинами подстановку S, находимъ:

$$\overline{\zeta_0} = \zeta_0, \ \overline{\zeta_1} = \zeta_2, \ \overline{\zeta_2} = \zeta_1. \tag{98}$$

Digitized by Google

Совершая надъ функціями (97) подстановку $\mathfrak{T}$, находимъ:

$$\bar{\bar{\zeta}}_0 = \zeta_1,\ \bar{\bar{\zeta}}_1 = \zeta_0,\ \bar{\bar{\zeta}}_2 = \zeta_2. \tag{99}$$

Слѣдовательно, основныя субституціи σ и τ группы Γ уравненія (95) таковы:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= (\zeta_0)(\zeta_1,\ \zeta_2), \\ \tau &= (\zeta_0,\ \zeta_1)(\zeta_2). \end{aligned}\right\} \tag{100}$$

Отсюда видно, что группа уравненія (95) не изоморфна съ группой октаэдрическаго уравненія: субституція σ—2-го порядка, тогда какъ соотвѣтствующая ей подстановка S — четвертаго порядка. Это происходитъ отъ того, что подгруппа 8-го порядка есть *полуособая часть* октаэдрической: основная подстановка U подгруппы 8-го порядка, будучи преобразована основными подстановками S и $\mathfrak{T}$ октаэдрической группы, даетъ въ результатѣ подстановки, принадлежащія къ той же подгруппѣ 8-го порядка.

Найденную особенность подгруппы 8-го порядка можно было предвидѣть и ранѣе: группа уравненія третьей степени (95) не можетъ быть порядка выше 12. Слѣдовательно она не можетъ оказаться изоморфною съ октаэдрической группой 24-го порядка.

Уравненіе (95) не представляетъ особаго интереса потому, что мы уже получили выше резольвенту 3-ей степени, исходя изъ болѣе простаго двупирамиднаго уравненія.

§ 46. Резольвенты уравненія икосаэдрическаго типа.

Мы видѣли, что изъ числа резольвентъ икосаэдрическаго уравненія представляютъ интересъ только двѣ: соотвѣтствующія подгруппѣ тетраэдрическаго типа и подгруппѣ типа двупирамиднаго 10-го порядка.

Степени этихъ резольвентъ соотвѣтственно равны 5 и 6. Разсмотримъ ихъ въ отдѣльности.

Digitized by Google

I.

Резольвента пятой степени.

Возьмемъ икосаэдрическое уравненіе въ нормальной формѣ:

$$(u^{20}-228u^{15}+494u^{10}+228u^5+1)^3:$$

$$:(u^{30}+522u^{25}-10005u^{20}-10005u^{10}-522u^5+1)^2:$$

$$:-1728(u^{11}+11u^6-u)^5=z:z-1:1. \qquad (101)$$

Основныя подстановки группы этого уравненія таковы:

$$\left.\begin{aligned} &S(u)=\varepsilon u,\\ &\mathfrak{T}(u)=\frac{1+(\varepsilon^2+\varepsilon^3)u}{u-(\varepsilon^2+\varepsilon^3)},\\ &\text{гдѣ: } \varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{5}}. \end{aligned}\right\} \qquad (102)$$

Въ эту группу входитъ тетраэдрическая группа третьяго нормальнаго вида. Въ главѣ IV мы только обозначили основныя подстановки ея буквами: S_m'' и $\mathfrak{T}_m''$, но не нашли выраженій этихъ подстановокъ. Начнемъ съ нахожденія основныхъ подстановокъ S_m'' и $\mathfrak{T}_m''$.

Сравнимъ вторую нормальную икосаэдрическую сѣть, изображенную на чертежѣ II *) съ 1-ою нормальную тетраэдрическою сѣтью, изображенною на чертежѣ 27.

Тетраэдръ, соотвѣтствующій сѣти 27, находится въ соотвѣтственномъ положеніи относительно икосаэдра, соотвѣтствующаго сѣти II: всѣ вершины и центры граней тетраэдра совпадаютъ съ 8 изъ числа 20 центровъ граней икосаэдра, а всѣ средины реберъ тетраэдра совпадаютъ съ 6 изъ числа 30 срединъ реберъ икосаэдра. Поэтому при наложеніи сѣти 27 на сѣть II узловыя точки сѣти 27, гдѣ сходятся по 3 бѣлыхъ и по 3 черныхъ треугольника, должны упасть на

*) Въ концѣ сочиненія.

Digitized by Google

узловыя точки сѣти II, гдѣ сходится такое же число треугольниковъ *).

Точки, отмѣченныя на чертежѣ 27 буквами: a, b, c, d, e, f, g, h упадутъ въ точки, отмѣченныя на черт. II буквами: A', B', C', D', E', F', G', H'.

Если мы повернемъ какъ тетраэдръ, такъ и икосаэдръ на извѣстный уголъ, отмѣченный на черт. 22 буквою θ такъ, чтобы икосаэдръ завялъ положеніе, соотвѣтствующее 1-ой нормальной икосаэдрической сѣти **), то сѣти 27 и II преобразуются. При этомъ сѣть II переходитъ въ сѣть I, а точки A', B', C', D', E', F', G', H' занимаютъ положенія, отмѣченныя на чертежѣ I буквами: A, B, C, D, E, F, G, H. Точка, отмѣченная на чертежахъ 27 и II буквою O, на чертежѣ I займетъ положеніе b.

Вычисляя подстановки 1-ой нормальной тетраэдрической группы, мы приняли за основныя тѣ двѣ подстановки, которыя соотвѣтствуютъ поворотамъ:

1) На уголъ π около оси, полюсъ которой проэктируется на черт. 27 въ точку O.

2) На уголъ $\frac{2\pi}{3}$ около оси, полюсъ которой проэктируется на черт. 27 въ точку c.

Совершенно съ тѣмъ же правомъ мы могли бы за вторую основную подстановку тетраэдрической группы принять подстановку, соотвѣтствующую повороту на уголъ $\frac{2\pi}{3}$ около оси, полюсъ которой проэктируется на черт. 27 въ точку b. Въ такомъ случаѣ основныя подстановки третьей нормальной тетраэдрической группы будутъ слѣдующія:

1) Подстановка $\mathfrak{S}_m''$, соотвѣтствующая повороту на уголъ π около оси, полюсъ которой на черт. I проэктируется въ точку b: это основная подстановка $\mathfrak{S}$ икосаэдрической группы.

---

*) Само собою понятно, что это справедливо только въ предположеніи, что сѣти 27 и II выполнены въ одинаковомъ масштабѣ. У насъ масштабы взяты различные.

**) Такое положеніе икосаэдра изображено на черт. 24.

Digitized by Google

2) Подстановка S_m'', соотвѣтствующая повороту на уголъ $\frac{2\pi}{3}$ около оси, полюсъ которой на черт. I проэктируется въ точку B.

Вычислимъ эту подстановку.

Изъ черт. I видно, что послѣ преобразованія сказанною подстановкою S_m'' треугольникъ, отмѣченный на черт. I буквою S преобразуется въ треугольникъ SSS^4. Слѣдовательно:

$$S_m'' S = SSS^4. \tag{103}$$

Отсюда слѣдуетъ, что:

$$S_m'' = SSS^3. \tag{104}$$

Итакъ, основныя подстановки разсматриваемой нами подгруппы тетраэдрическаго типа таковы:

$$\left.\begin{aligned} S_m'' &= S, \\ S_m'' &= SSS^3. \end{aligned}\right\} \tag{105}$$

Мы уже видѣли въ § 32 *), что третье нормальное тетраэдрическое уравненіе можетъ быть представлено въ такомъ видѣ:

$$\zeta = \frac{f_0''^3(u)}{f_u(u)}. \tag{106}$$

Слѣдовательно функція ζ, опредѣляемая формулою (106), есть собственно аутоморфная функція, соотвѣтствующая подстановкамъ подгруппы третьяго нормальнаго тетраэдрическаго типа. Ее мы обозначимъ для краткости такъ:

$$\zeta = A_m(u). \tag{107}$$

Функція ζ подъ вліяніемъ подстановокъ икосаэдрической группы должна пріобрѣтать всего

---

*) См. главу VII, уравненіе (53).

Digitized by Google

$$l = \frac{60}{12} = 5$$

значеній.

Преобразуя функцію (106) подстановками:

$$S^0=1,\ S,\ S^2,\ S^3,\ S^4, \tag{108}$$

мы находимъ пять *различныхъ* значеній:

$$\left.\begin{aligned} &\zeta_0 = \frac{f_0''^2(u)}{f_u(u)},\ \zeta_1 = \varepsilon^4 \frac{f_0''^2(\varepsilon u)}{f_u(u)},\ \zeta_2 = \varepsilon^3 \frac{f_0''^2(\varepsilon^2 u)}{f_u(u)}, \\ &\zeta_3 = \varepsilon^2 \frac{f_0''^2(\varepsilon^3 u)}{f_u(u)},\ \zeta_4 = \varepsilon \frac{f_0''^2(\varepsilon^4 u)}{f_u(u)}, \end{aligned}\right\} \tag{109}$$

или, короче:

$$\left.\begin{aligned} &\zeta_0 = A_m(u),\ \zeta_1 = A_m(\varepsilon u),\ \zeta_2 = A_m(\varepsilon^2 u),\ \zeta_3 = A(\varepsilon^3 u), \\ &\zeta_4 = A_m(\varepsilon^4 u). \end{aligned}\right\} \tag{110}$$

Эти пять различныхъ значеній исчерпываютъ всѣ тѣ значенія, которыя пріобрѣтаетъ функція ζ подъ вліяніемъ подстановокъ икосаэдрической группы.

Уравненіе, которому удовлетворяютъ найденныя 5 значеній функціи ζ, было нами уже составлено въ главѣ VII. Оно таково:

$$(\zeta-3)^3(\zeta^2-11\zeta+64):\zeta(\zeta^2-10\zeta+45)^2:-1728=z:z-1:1. \tag{111}$$

Посмотримъ, какова группа этой резольвенты.

Преобразуемъ функціи (110) подстановкою S. Послѣ подстановки онѣ перейдутъ въ $\overline{\zeta_0}$, $\overline{\zeta_1}$, $\overline{\zeta_2}$, $\overline{\zeta_3}$, $\overline{\zeta_4}$, при чемъ:

$$\overline{\zeta_0}=\zeta_1,\ \overline{\zeta_1}=\zeta_2,\ \overline{\zeta_2}=\zeta_3,\ \overline{\zeta_3}=\zeta_4,\ \overline{\zeta_4}=\zeta_0. \tag{112}$$

Слѣдовательно, основная субституція σ группы Γ уравненія (111) такова:

$$\sigma=(\zeta_0,\ \zeta_1,\ \zeta_2,\ \zeta_3,\ \zeta_4). \tag{113}$$

Digitized by Google

Подстановка $\mathfrak{T}$ преобразуетъ величины $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ въ $\overline{\overline{\zeta}}_0, \overline{\overline{\zeta}}_1, \overline{\overline{\zeta}}_2, \overline{\overline{\zeta}}_3, \overline{\overline{\zeta}}_4$, при чемъ:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\overline{\zeta}}_0 = A_m[\mathfrak{T}(u)],\ \overline{\overline{\zeta}}_1 = A_m[S\mathfrak{T}(u)],\ \overline{\overline{\zeta}}_2 = A_m[S^2\mathfrak{T}(u)],\\ &\overline{\overline{\zeta}}_3 = A_m[S^3\mathfrak{T}(u)],\ \overline{\overline{\zeta}}_4 = A_m[S^4\mathfrak{T}(u)]. \end{aligned}\right\} \quad (114)$$

Припомнивъ замѣчаніе, сдѣланное въ § 18 о томъ, что подстановка $S\mathfrak{T}$ икосаэдрической группы—третьяго порядка:

$$S\mathfrak{T}S\mathfrak{T}S\mathfrak{T} = 1, \quad (115)$$

и пользуясь выраженіями (105) подстановокъ $\mathfrak{T}_m''$ и S_m'', находимъ:

$$\left.\begin{aligned} &S\,\mathfrak{T} = S_m''\,S^2,\\ &S^2\mathfrak{T} = S_m''^2 S,\\ &S^3\mathfrak{T} = S_m''^2\mathfrak{T}_m''S^4,\\ &S^4\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_m''S_m''S^3. \end{aligned}\right\} \quad (116)$$

Такъ какъ подстановки S_m'' и $\mathfrak{T}_m''$ не мѣняютъ функцію $A_m(u)$, то изъ формулъ (114) и (116) слѣдуетъ:

$$\overline{\overline{\zeta}}_0 = \zeta_0,\ \overline{\overline{\zeta}}_1 = \zeta_2,\ \overline{\overline{\zeta}}_2 = \zeta_1,\ \overline{\overline{\zeta}}_3 = \zeta_4,\ \overline{\overline{\zeta}}_4 = \zeta_3. \quad (117)$$

Отсюда слѣдуетъ, что основная субституція τ группы Γ такова:

$$\tau = (\zeta_0)(\zeta_1, \zeta_2)(\zeta_3, \zeta_4). \quad (118)$$

Обратимъ вниманіе на геометрическія представленія, соотвѣтствующія подгруппѣ тетраэдрическаго типа.

Подстановки, которыя въ главѣ IX были обозначены буквами:

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{l-1},$$

въ данномъ случаѣ суть:

$$S, S^2, S^3, S^4.$$

Digitized by Google

Отмѣтивъ на черт. I пять четыреугольниковъ сѣти, соотвѣтствующихъ подстановкамъ:

$$1,\ S,\ S^2,\ S^3,\ S^4, \tag{119}$$

мы найдемъ сплошную площадь, имѣющую видъ пятиугольника. Эта площадь можетъ быть принята за основную область подгруппы тетраэдрическаго типа. Вся тетраэдрическая сѣть будетъ состоять изъ 12 такихъ областей. Эта сѣть изображена на черт. III. Свотвѣтствіе между областями этой сѣти и подстановками тетраэдрической подгруппы указано на черт. III.

Не трудно замѣтить, что сѣть III можетъ быть получена слѣдующимъ образомъ: вписавъ додекаэдръ въ сферу такъ, чтобы центры двухъ противоположныхъ граней додекаэдра лежали на оси сферы, и проэктируя ребра додекаэдра изъ центра на поверхность сферы, мы получимъ сѣть на сферѣ, раздѣляющую поверхность сферы на 12 равныхъ сферическихъ пятиугольниковъ. Проэктируя эту сѣть изъ южнаго полюса на плоскость экватора, мы получаемъ ту сѣть, которая изображена на черт. III.

Займемся преобразованіемъ уравненія (111) *).

А) Возьмемъ функцію:

$$U=12\frac{f_u^{\,2}(u)\,f_0''(u)}{T_u(u)}\ . \tag{120}$$

Она инваріантна по отношенію къ подстановкамъ второй нормальной тетраэдрической группы. Слѣдовательно она должна быть раціоналъною функціею ζ. Дѣйствительно, мы видѣли въ главѣ VI, что:

$$T_u(u)=[f_0'''^{\,2}(u)-10\,f_0''^{\,2}(u)\,f_u(u)+45\,f_u^{\,2}(u)]\,f_0''(u)\ **). \tag{121}$$

---

*) Эти нѣсколько искусственныя, но весьма остроумныя преобразованія принадлежатъ Клейну. См. Vorlesungen über das Ikosaeder. Стр. 103—107.

**) Глава VI, формулы (73).

Digitized by Google

Подставивъ это выраженіе въ формулу (120) и принявъ во во вниманіе равенство:

$$\zeta = \frac{f_0''^2(u)}{f_u(u)}, \tag{121}$$

находимъ:

$$U = \frac{12}{\zeta^2 - 10\zeta + 45}. \tag{122}$$

Исключивъ ζ изъ уравненій (111) и (122), находимъ:

$$48(z-1)^2 U^5 + 40(z-1) U^3 + 15 U - 4 = 0. \tag{123}$$

B) Возьмемъ функцію:

$$V = \frac{12 H_0''(u) f_u(u)}{H_u(u)}. \tag{124}$$

Она тоже не мѣняется отъ подстановокъ третьей нормальной тетраэдрической группы и потому тоже должна выражаться въ видѣ раціональной функціи ζ.

Дѣйствительно, мы видѣли въ главѣ VI, что:

$$H_u(u) = [f_0''^2(u) - 3 f_u(u)] H_0''(u) \text{ *}). \tag{125}$$

Подставивъ это выраженіе въ формулу (124) и принявъ во вниманіе равенство (106), находимъ:

$$V = \frac{12}{\zeta - 3}. \tag{126}$$

Исключивъ ζ изъ уравненій (111) и (126), находимъ:

$$z V^5 + 40 V^2 - 60 V + 144 = 0. \tag{127}$$

C) Возьмемъ функцію:

$$Y = hV + kUV, \tag{128}$$

*) Глава VI, формулы (73).

Digitized by Google

гдѣ h и k произвольныя постоянныя числа, а U и V суть функціи опредѣленныя выше.

Внеся вмѣсто U и V выраженія (122) и (126), находимъ:

$$Y = \frac{12h(\zeta^2 - 10\zeta + 45) + 144k}{(\zeta - 3)(\zeta^2 - 10\zeta + 45)}. \qquad (129)$$

Эта функція должна удовлетворять нѣкоторому уравненію 5-ой степени:

$$Y^5 + a_1 Y^4 + a_2 Y^3 + a_3 Y^2 + a_4 Y + a_5 = 0, \qquad (130)$$

гдѣ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 суть нѣкоторыя раціональныя функціи перемѣннаго z.

Займемся ихъ опредѣленіемъ.

Вставивъ въ выраженіе (128) вмѣсто U и V выраженія (120) и (124), находимъ:

$$Y = 12h\frac{f_u(u)\,H_0''(u)}{H_u(u)} + 12^2k\frac{f_u^3(u)\,f_0''(u)\,H_0''(u)}{T_u(u)\,H_u(u)}. \qquad (131)$$

Положимъ:

$$u = \frac{\eta_1}{\eta_2}, \qquad (132)$$

гдѣ η_1, η_2 имѣютъ тѣ же значенія, которыя они имѣли въ главѣ VIII: они связаны съ корнемъ u икосаэдрическаго уравненія (101) соотношеніями:

$$\eta_1 = u\sqrt{\frac{T_u(u)z}{f_u(u)\,H_u(u)}}, \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{T_u(u)z}{f_u(u)\,H_u(u)}}. \qquad (133)$$

Положивъ въ формулахъ (37) главы VIII:

$$\frac{1}{c}R(z) = z, \quad c = -12^3, \quad c' = 1,$$

находимъ:

$$\left.\begin{aligned} f_u(\eta_1, \eta_2) &= 12^3(1-z)^3 z^4, \\ H_u(\eta_1, \eta_2) &= -12^6(1-z)^5 z^7, \\ T_u(\eta_1, \eta_2) &= -12^9(1-z)^8 z^{10}. \end{aligned}\right\} \qquad (134)$$

Digitized by Google

Подставивъ выраженіе (132) въ формулу (131) и принявъ во вниманіе формулы (134), находимъ:

$$Y = -\frac{h}{12^2(1-z)^2z^3}H_0''(\eta_1, \eta_2) + \\ + \frac{k}{12^4(1-z)^4z^5}f_0''(\eta_1, \eta_2)\,H_0''(\eta_1, \eta_2). \tag{135}$$

Вводимъ временно такія обозначенія:

$$-\frac{h}{12^2(1-z)^2z^3} = P, \quad \frac{k}{12^4(1-z)^4z^5} = Q. \tag{136}$$

Величины P и Q суть раціональныя функціи z. Будучи выражены черезъ u, онѣ не мѣняются ни при какихъ подстановкахъ икосаэдрической группы.

Функція Y приметъ видъ:

$$Y = PH_0''(\eta_1, \eta_2) + Qf_0''(\eta_1, \eta_2)\,H_0''(\eta_1, \eta_2). \tag{137}$$

Она имѣетъ всего 5 значеній, которыя могутъ быть получены посредствомъ преобразованія функціи (131) линейными подстановками:

$$1,\ S,\ S^2,\ S^3,\ S^4. \tag{119}$$

Неоднородной линейной подстановкѣ:

$$S(u) = \varepsilon u$$

соотвѣтствуютъ, какъ мы видѣли въ главѣ IV, двѣ бинарныя линейныя подстановки надъ величинами η_1, η_2:

$$\begin{pmatrix} \pm\varepsilon^3, & 0 \\ 0, & \pm\varepsilon^2 \end{pmatrix}. \tag{138}$$

Степени этихъ подстановокъ таковы:

$$\left.\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \pm\varepsilon^3, & 0 \\ 0, & \pm\varepsilon^2 \end{pmatrix}^0 = 1, \quad \begin{pmatrix} \pm\varepsilon^3, & 0 \\ 0, & \pm\varepsilon^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pm\varepsilon^3, & 0 \\ 0, & \pm\varepsilon^2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon, & 0 \\ 0, & \varepsilon^4 \end{pmatrix}, \\ &\begin{pmatrix} \pm\varepsilon^3, & 0 \\ 0, & \pm\varepsilon^2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \pm\varepsilon^4, & 0 \\ 0, & \pm\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pm\varepsilon^3, & 0 \\ 0, & \pm\varepsilon^2 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} \varepsilon^2, & 0 \\ 0, & \varepsilon^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{139}$$

Digitized by Google

Совершивъ подстановки (139) надъ функціей (137), получаемъ пять различныхъ значеній функціи Y, которыя могутъ быть выражены формулою:

$$Y_j = PH_0''(\varepsilon^{3j}\eta_1, \varepsilon^{2j}\eta_2) + Qf_0''(\varepsilon^{3j}\eta_1, \varepsilon^{2j}\eta_2)H_0''(\varepsilon^{3j}\eta_1, \varepsilon^{2j}\eta_2), \quad (140)$$

гдѣ $j = 0, 1, 2, 3, 4$.

Для вычисленія коэффиціентовъ уравненія (130) найдемъ сначала симметрическія функціи:

$$s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$$

его корней.

Функція s_1 выражается такъ:

$$s_1 = P\sum_{j=0}^{j=4} H_0''(\varepsilon^{3j}\eta_1, \varepsilon^{2j}\eta_2) + \\ + Q\sum_{j=0}^{j=4} f_0''(\varepsilon^{3j}\eta_1, \varepsilon^{2j}\eta_2)H_0''(\varepsilon^{3j}\eta_1, \varepsilon^{2j}\eta_2). \quad (141)$$

Функція:

$$\sum_{j=0}^{j=4} H_0''(\varepsilon^{3j}\eta_1, \varepsilon^{2j}\eta_2) \quad (142)$$

инваріантна относительно всѣхъ линейныхъ бинарныхъ подстановокъ икосаэдрической группы. По теоремѣ 3 главы VI ее можно изобразить формулою вида:

$$\Phi[H_u^{\lambda_1}(\eta_1, \eta_2), f_u^{\lambda}(\eta_1, \eta_2)] \times \\ \times f_u^{m_1}(\eta_1, \eta_2)\, H_u^{m_2}(\eta_1, \eta_2)\, T^{m_3}(\eta_1, \eta_2). \quad (143)$$

Digitized by Google

Степень функціи (142) относительно аргументовъ η_{i_1}, η_{i_2} равна 8, степень же функціи (143) во всякомъ случаѣ выше 8. Слѣдовательно функція (142) равна нулю.

Подобнымъ же образомъ убѣждаемся въ томъ, что и вторая сумма формулы (141) равна нулю.

Слѣдовательно:

$$s_1 = 0.$$

Составивъ выраженія, подобныя (141), для функцій s_2, s_3, s_4, s_5 и сравнивая ихъ съ выраженіемъ вида (143), мы легко находимъ выраженія функцій s_2, s_3, s_4, s_5, изъ которыхъ каждое содержитъ въ себѣ только нѣсколько неизвѣстныхъ постоянныхъ коэффиціентовъ.

Въ результатѣ всѣхъ этихъ вычисленій находимъ:

$$\left.\begin{aligned}
&s_1 = 0,\ s_2 = 0,\ s_3 = A_1 P^3 f_u^{\,2}(\eta_{i_1}, \eta_{i_2}) + A_2 P^2 Q T_u(\eta_{i_1}, \eta_{i_2}) + \\
&\quad + A_3 P Q^2 f_u^{\,3}(\eta_{i_1}, \eta_{i_2}) + A_4 Q^3 f_u(\eta_{i_1}, \eta_{i_2}) T_u(\eta_{i_1}, \eta_{i_2}), \\
&s_4 = B_1 P^4 f_u(\eta_{i_1}, \eta_{i_2}) H_u(\eta_{i_1}, \eta_{i_2}) + \\
&\quad + B_2 P^2 Q^2 f_u^{\,2}(\eta_{i_1}, \eta_{i_2}) H_u(\eta_{i_1}, \eta_{i_2}) + \\
&+ B_3 P Q^3 H(\eta_{i_1}, \eta_{i_2}) T(\eta_{i_1}, \eta_{i_2}) + B_4 Q^4 f_u^{\,3}(\eta_{i_1}, \eta_{i_2}) H_u(\eta_{i_1}, \eta_{i_2}), \\
&s_5 = D_1 P^5 H^2(\eta_{i_1}, \eta_{i_2}) + D_2 P^3 Q^2 f_u(\eta_{i_1}, \eta_{i_2}) H_u^{\,2}(\eta_{i_1}, \eta_{i_2}) + \\
&\quad + D_3 P Q^4 f_u^{\,2}(\eta_{i_1}, \eta_{i_2}) H_u^{\,2}(\eta_{i_1}, \eta_{i_2}) + \\
&\quad + D_4 Q^5 H_u^{\,2}(\eta_{i_1}, \eta_{i_2}) T_u(\eta_{i_1}, \eta_{i_2}),
\end{aligned}\right\} \quad (144)$$

гдѣ A_1, A_2, ... D_4 суть нѣкоторыя постоянныя.

Подставивъ въ формулахъ (144) вмѣсто $f_u(\eta_{i_1}, \eta_{i_2})$, $H_u(\eta_{i_1}, \eta_{i_2})$, $T_u(\eta_{i_1}, \eta_{i_2})$ выраженія (134), а вмѣсто P и Q выраженія (156), находимъ:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= 0,\ s_2 = 0, \\ s_3 &= -A_1\frac{h^3}{z} - A_2\frac{12h^2k}{z} - A_3\frac{hk^2}{12z(1-z)} - A_4\frac{k^3}{z(1-z)}, \\ s_4 &= -B_1\frac{12h^4}{z} - B_2\frac{h^3k^2}{z(1-z)} - B_3\frac{12hk^3}{z(1-z)} - \\ &\quad - B_4\frac{k^4}{12z(1-z)^2}, \\ s_5 &= -D_1\frac{12^2h^5}{z} - D_2\frac{12h^3k^2}{z(1-z)} - D_3\frac{hk^4}{z(1-z)^2} - \\ &\quad - D_4\frac{12k^5}{z(1-z)^2}. \end{aligned}\right\} \quad (145)$$

Подставивъ эти величины s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 въ формулы Ньютона:

$$\left.\begin{aligned} &s_1 + a_1 = 0, \\ &s_2 + a_1 s_1 + 2a_2 = 0, \\ &s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + 3a_3 = 0, \\ &s_4 + a_1 s_3 + a_2 s_2 + a_3 s_1 + 4a_4 = 0, \\ &s_5 + a_1 s_4 + a_2 s_3 + a_3 s_2 + a_4 s_1 + 5a_5 = 0, \end{aligned}\right\} \quad (146)$$

мы находимъ выраженія коэффиціентовъ:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 0,\ a_2 = 0, \\ a_3 &= A_1'\frac{h^3}{z} + A_2'\frac{h^2k}{z} + A_3'\frac{hk^2}{z(1-z)} + A_4'\frac{k^3}{z(1-z)}, \\ a_4 &= B_1'\frac{h^4}{z} + B_2'\frac{h^3k^2}{z(1-z)} + B_3'\frac{hk^3}{z(1-z)} + B_4'\frac{k^4}{z(1-z)^2}, \\ a_5 &= D_1'\frac{h^5}{z} + D_2'\frac{h^3k^2}{z(1-z)} + D_3'\frac{hk^4}{z(1-z)^2} + D_4'\frac{k^5}{z(1-z)^2}. \end{aligned}\right\} \quad (147)$$

Digitized by Google

Гдѣ $A'_1, A'_2, \ldots D'_4$ суть постоянныя, не зависящія ни отъ z, ни отъ h и k.

Остается опредѣлить величины этихъ постоянныхъ.

Если мы положимъ въ формулахъ (147):

$$h=1,\ k=0$$

и затѣмъ подставимъ полученныя выраженія коэффиціентовъ въ уравненіе (130), то мы должны получить уравненіе (127). Отсюда мы заключаемъ, что:

$$A_1'=40,\ B_1'=-60,\ D_1'=144. \qquad (148)$$

Остальные 9 коэффиціентовъ находятся гораздо труднѣе. Ихъ мы можемъ вычислить такъ: подставимъ въ формулахъ (147) вмѣсто z и $1-z$ ихъ выраженія черезъ u изъ икосаэдрическаго уравненія (101), вставимъ полученныя выраженія въ уравненіе (130), замѣнимъ въ этомъ уравненіи Y его выраженіемъ (131), освободимъ отъ знаменателей и произведемъ сравненіе коэффиціентовъ при одинаковыхъ степеняхъ h, k и u.

Такимъ образомъ мы найдемъ линейныя уравненія, опредѣляющія коэффиціенты $A'_2, A'_3, \ldots$

Необходимо однако замѣтить, что эти вычисленія съ механической стороны очень сложны. Той же цѣли мы можемъ достичь нѣсколько иначе. Пользуясь формулою (129) и уравненіемъ (111), можно разложить функцію Y въ рядъ по степенямъ z, $1-z$ или $\frac{1}{z}$ въ областяхъ критическихъ точекъ, 0, 1 или ∞; вставивъ эти разложенія въ уравненіе (130) и замѣнивъ коэффиціенты этого уравненія выраженіями (147), мы можемъ произвести сравненіе коэффиціентовъ у различныхъ степеней z, $1-z$ или $\frac{1}{z}$. Такимъ образомъ мы снова находимъ линейныя уравненія, опредѣляющія постоянныя $A'_2, A'_3 \ldots$ Съ механической стороны этотъ пріемъ проще предшествующаго *).

*) Этимъ именно способомъ мнѣ и удалось получить величины коэффиціентовъ $A'_2, A'_3, \ldots$ Клейнъ приводитъ только результатъ своихъ вы-

Digitized by Google

Не вдаваясь въ подробности этихъ довольно утомительныхъ вычисленій, приводимъ окончательный видъ уравненія (130), который получится, если мы замѣнимъ коэффиціенты $A'_1, A'_2 \ldots$ ихъ числовыми значеніями и затѣмъ внесемъ выраженія (147) въ уравненіе (130):

$$zY^5 + 5\left(8h^3 + 12h^2k + \frac{6hk^2 + k^3}{1-z}\right)Y^2 +$$

$$+ 15\left(-4h^4 + \frac{6h^2k^2 + 4hk^3}{1-z} + \frac{3k^4}{4(1-z)^2}\right)Y + \quad (149)$$

$$+ 3\left(48h^5 - \frac{40h^3k^2}{1-z} + \frac{15hk^4 + 4k^5}{(1-z)^2}\right) = 0.$$

Уравненія 5-ой степени, свободныя отъ 4-ой и 3-ей степеней неизвѣстнаго, слѣдуя Клейну, мы будемъ называть главными уравненіями (Hauptgleichungen) по причинѣ, которая будетъ указана въ слѣдующей главѣ.

Уравненіе (149) интересно тѣмъ, что это—главное уравненіе 5-ой степени, полученное изъ уравненія (111) раціональнымъ преобразованіемъ (129), заключающимъ въ себѣ два произвольныхъ параметра: h и k.

Уравненіе (149) есть самый общій видъ главнаго уравненія, получаемаго изъ уравненія (111) раціональнымъ преобразованіемъ. Въ самомъ дѣлѣ, раціональная функція корня уравненія 5-ой степени (111) всегда можетъ быть приведена къ виду:

$$Y = \zeta^4 + b_1\zeta^3 + b_2\zeta^2 + b_3\zeta + b_4. \quad (150)$$

Она содержитъ въ себѣ 4 коэффиціента:

$$b_1, b_2, b_3, b_4. \quad (151)$$

численій, говоря: Indem die Einzelheiten der Rechnung keinerlei principielles Interesse darbieten, theile ich hier geich das Resultat mit"... По видимому онъ тоже не зналъ болѣе простаго способа, чѣмъ тѣ, которые указаны выше.

Digitized by Google

Совершая раціональное преобразованіе (150) надъ уравненіемъ (111), мы можемъ, наложивши на коэффиціенты (151) два условія, достичь того, чтобы преобразованное уравненіе было главнымъ.

Если мы выберемъ два коэффиціента (151) такъ, чтобы удовлетворялись два наложенныя условія, то формула (150) и уравненіе полученное послѣ преобразованія, будетъ содержать въ себѣ только два независимыхъ параметра.

Такой именно случай и представляютъ собою: преобразованіе (129) и соотвѣтствующее ему уравненіе (149).

Такъ какъ уравненія (111) и (149) одинаковой степени и корни уравненія (149) выражаются раціонально черезъ корни уравненія (111), то и обратно—корни уравненія (111) должны выражаться раціонально черезъ корни уравненія (149); группы уравненій (111) и (149) дожны быть одинаковы.

Отсюда мы заключаемъ, что группа уравненія (149) составлена изъ двухъ основныхъ субституцій:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma &= (Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4), \\ T &= (Y_0)(Y_1, Y_2)(Y_3, Y_4), \end{aligned}\right\} \qquad (152)$$

II.

Резольвента шестой степени.

Возьмемъ снова икосаэдрическое уравненіе въ нормальной формѣ (101).

Основныя подстановки подгруппы 10-го порядка двупирамиднаго типа, входящей въ икосаэдрическую группу, таковы:

$$\left.\begin{aligned} S(u) &= u, \\ U(u) &= -\frac{1}{u}. \end{aligned}\right\} \qquad (153)$$

гдѣ: $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}$.

Функція, аутоморфная по отношенію къ подстановкамъ этой подгруппы, такова:

$$z = u^5 - \frac{1}{u^5}. \qquad (154)$$

Digitized by Google

Преобразуя икосаэдрическое уравненіе

$$(u^{20}-228u^{15}+494u^{10}+228u^5+1)^3 :$$

$$: (u^{30}+522u^{25}-10005u^{20}-10005u^{10}-522u^5+1)^2 : \quad (101)$$

$$-1728(u^{11}+11u^6-u)^5 = z : z - 1 : 1$$

подстановкою (154), находимъ:

$$(\zeta^2 - 228\zeta + 496)^3 : (\zeta^2 + 522\zeta - 10004)^2 (\zeta^2 + 4) : \quad (155)$$

$$: -1728(\zeta + 11)^5 = z : z - 1 : 1.$$

Посмотримъ, какова группа этого уравненія.

Примѣнивъ къ функціи (154) подстановки икосаэдрической группы:

$$1, \mathcal{S}, \mathcal{S}S, \mathcal{S}S^2, \mathcal{S}S^3, \mathcal{S}S^4, \quad (156)$$

находимъ слѣдующія 6 различныхъ между собою значеній функціи ζ:

$$\left.\begin{aligned} \zeta_\infty &= u^5 - \frac{1}{u^5}, \\ \zeta_j &= \frac{[1+(\varepsilon^2+\varepsilon^3)\varepsilon^j u]^{10} - [\varepsilon^j u - (\varepsilon^2+\varepsilon^3)]^{10}}{(\varepsilon^2+\varepsilon^3)^5(\varepsilon^{2j}u^2+\varepsilon^j u-1)^5}, \\ &\text{гдѣ: } j = 0, 1, 2, 3, 4. \end{aligned}\right\} \quad (157)$$

Совершивъ надъ функціями (157) подстановку S, находимъ, что подъ вліяніемъ этой подстановки функціи

$$\zeta_\infty, \zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4 \quad (158)$$

переходитъ въ:

$$\overline{\zeta}_\infty = \zeta_\infty, \overline{\zeta}_0 = \zeta_1, \overline{\zeta}_1 = \zeta_2, \overline{\zeta}_2 = \zeta_3, \overline{\zeta}_3 = \zeta_4, \overline{\zeta}_4 = \zeta_0. \quad (159)$$

Слѣдовательно, основная субституція σ группы уравненія (155) такова:

$$\sigma = (\zeta_\infty)(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4). \quad (160)$$

Digitized by Google

Для нахожденія второй основной субституціи τ группы уравненія (156) замѣтимъ прежде всего, что изъ символическаго соотношенія:

$$\mathfrak{S}\mathfrak{T}\mathfrak{S}\mathfrak{T}\mathfrak{S}\mathfrak{T} = 1 \tag{115}$$

слѣдуетъ, что:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{S}\mathfrak{T}\mathfrak{S} &= S'\mathfrak{T}S', \\ \mathfrak{T}S'\mathfrak{T} &= \mathfrak{S}\mathfrak{T}\mathfrak{S}. \end{aligned}\right\} \tag{161}$$

Кромѣ того, непосредственнымъ вычисленіемъ находимъ, что:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{S}S^2\mathfrak{T} &= S^2U\mathfrak{S}S^2, \\ \mathfrak{S}S^3\mathfrak{T} &= S^3U\mathfrak{S}S^3. \end{aligned}\right\} \tag{162}$$

Помня, что подстановки S и U не мѣняютъ функцію ζ и пользуясь формулами (161) и (162), находимъ, что послѣ подстановки $\mathfrak{S}$ величины (158) переходятъ въ слѣдующія:

$$\bar{\bar{\zeta}}_\infty = \zeta_0,\ \bar{\bar{\zeta}}_0 = \zeta_\infty,\ \bar{\bar{\zeta}}_1 = \zeta_4,\ \bar{\bar{\zeta}}_2 = \zeta_2,\ \bar{\bar{\zeta}}_3 = \zeta_3,\ \bar{\bar{\zeta}}_4 = \zeta_1. \tag{163}$$

Слѣдовательно, вторая основная субституція τ группы уравненія (155) такова:

$$\tau = (\zeta_\infty, \zeta_0)(\zeta_1, \zeta_4)(\zeta_2)(\zeta_3). \tag{164}$$

Обратимъ вниманіе на геометрическія представленія для двупирамидной подгруппы 10-го порядка.

Подстановки, которыя въ главѣ IX мы обозначили буквами:

$$\sigma_1,\ \sigma_2, \ldots\ \sigma_{l-1},$$

въ данномъ случаѣ суть:

$$\mathfrak{S},\ \mathfrak{S}S,\ \mathfrak{S}S^2,\ \mathfrak{S}S^3,\ \mathfrak{S}S'.$$

Отмѣтивъ на сѣти I четыреугольники, соотвѣтствующіе подстановкамъ:

$$1,\ \mathfrak{S},\ \mathfrak{S}S,\ \mathfrak{S}S^2,\ \mathfrak{S}S^3,\ \mathfrak{S}S', \tag{165}$$

Digitized by Google

находимъ основную область двупирамидной подгруппы 10-го порядка, имѣющую видъ четыреугольника.

Примѣняя къ этому четыреугольнику подстановки разсматриваемой двупирамидной подгруппы 10-го порядка, мы получимъ сѣть, состоящую изъ 10 четыреугольниковъ и изображенную на черт. IV.

Обратимся къ раціональному преобразованію уравненія (155).

Положимъ снова:

$$u = \frac{\eta_1}{\eta_2}. \tag{132}$$

Мы знаемъ, что

$$\eta_{11} = u\sqrt{\frac{T_u(u)z}{f_u(u)\,H_u(u)}},\quad \eta_{12} = \sqrt{\frac{T_u(u)z}{f_u(u)\,H_u(u)}}. \tag{133}$$

Перемноживъ эти величины, находимъ:

$$\eta_1\,\eta_2 = \frac{uT_u(u)z}{f_u(u)\,H_u(u)}. \tag{166}$$

Подставивъ въ эту формулу вмѣсто $T_u(u)$, $H_u(u)$, $f_u(u)$ выраженія этихъ первичныхъ функцій, соотвѣтствующія икосаэдрическому уравненію нормальнаго вида, находимъ:

$$\eta_{11}\,\eta_{12} = \frac{u^{30}+522u^{25}-10005u^{20}-10005u^{10}-522u^5+1}{(u^{10}+11u^5-1)(u^{20}-228u^{15}+494u^{10}+228u^5+1)}z. \tag{167}$$

Эта функція подъ вліяніемъ икосаэдрической подстановки S совсѣмъ не мѣняется, а подъ вліяніемъ подстановки U мѣняетъ только свой знакъ. Слѣдовательно квадратъ функціи (167) есть функція аутоморфная по отношенію къ подстановкамъ разсматриваемой двупирамидной подгруппы 10-го порядка: она должна быть раціональной функціей отъ

$$\zeta = u^5 - \frac{1}{u^5}. \tag{154}$$

Digitized by Google

И дѣйствительно

$$(\eta_1\,\eta_2)^2 = \frac{(\zeta^2+522\zeta-10004)^2(\zeta^2+4)}{(\zeta+11)^2(\zeta^2-228\zeta+496)^2}\,z^2. \qquad (168)$$

Найдемъ уравненіе, которому удовлетворяетъ функція:

$$\xi = 5(\eta_1\,\eta_2)^2. \qquad (169)$$

Для этого мы должны внести во вторую часть равенства (169) вмѣсто $(\eta_1\,\eta_2)^2$ выраженіе (168) и полученную подстановкою преобразовать уравненіе (155).

Тотъ же результатъ мы можемъ получить проще.

Подставивъ въ первыхъ двухъ формулахъ (134) вмѣсто $f_n(\eta_1, \eta_2)$ и $H_n(\eta_1, \eta_2)$ выраженія этихъ формъ, находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1^{11}\eta_2 + 11\eta_1^6\eta_2^6 - \eta_1\eta_2^{11} &= 12^2(1-z)^3 z^4, \\ \eta_1^{20} - 228\,\eta_1^{15}\eta_2^5 + 494\,\eta_1^{10}\eta_2^{10} + 228\,\eta_1^5\eta_2^{15} + \eta_2^{20} &= \\ = -12^6(1-z)^5 z^7. & \end{aligned}\right\} \qquad (170)$$

Присоединивъ къ уравненіямъ (170) уравненіе

$$\xi = 5(\eta_1\,\eta_2)^2, \qquad (169)$$

мы легко можемъ изъ полученныхъ трехъ уравненій исключить η_1 и η_2.

Въ результатѣ находимъ:

$$\xi^6 - 10.12^2(1-z)^3 z^4 \xi^3 + 12^6(1-z)^5 z^7 \xi + \\ + 5.12^6(1-z)^6 z^8 = 0. \qquad (171)$$

Положивъ:

$$\xi = 12(1-z)zhY, \qquad (172)$$

гдѣ h—нѣкоторое постоянное, находимъ:

$$Y^6 - \frac{10}{h^3} z Y^3 + \frac{12}{h^5} z^2 Y + \frac{5}{h^6} z^3 = 0. \qquad (173)$$

Digitized by Google

Группы уравненій (171) и (173) совершенно такія же, какъ и группа уравненія (155). Слѣдовательно основныя субституціи группы уравненія (173) таковы:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma &= (Y_\infty)(Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4), \\ T &= (Y_\infty, Y_0)(Y_1, Y_4)(Y_2)(Y_3), \end{aligned}\right\} \qquad (174)$$

гдѣ:

$$Y_\infty, \; Y_0, \; Y_1, \; Y_2, \; Y_3, \; Y_4 \qquad (175)$$

суть корни уравненія (173), соотвѣтствующіе корнямъ

$$\zeta_\infty, \; \zeta_0, \; \zeta_1, \; \zeta_2, \; \zeta_3, \; \zeta_4 \qquad (158)$$

уравненія (155).

Остановимся нѣсколько подробнѣе на свойствахъ уравненія (171).

Пусть его корни суть:

$$\xi_\infty, \; \xi_1, \; \xi_2, \; \xi_3, \; \xi_4. \qquad (176)$$

Корень ξ_∞ выражается такъ:

$$\xi_\infty = 5(\eta_1 \, \eta_2)^2. \qquad (169')$$

Мы видѣли въ § 20, что бинарныя подстановки съ опредѣлителемъ $+1$, соотвѣтствующія икосаэдрическимъ неоднороднымъ линейнымъ подстановкамъ S и $\mathfrak{S}$, таковы:

$$\begin{pmatrix} \pm\varepsilon^3, & 0 \\ 0, & \pm\varepsilon^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \pm\dfrac{\varepsilon-\varepsilon^4}{\sqrt{5}}, & \mp\dfrac{\varepsilon^2-\varepsilon^3}{\sqrt{5}} \\ \mp\dfrac{\varepsilon^2-\varepsilon^3}{\sqrt{5}}, & \mp\dfrac{\varepsilon-\varepsilon^4}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} \quad \text{гдѣ } \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}. \qquad (177)$$

Таковы тѣ бинарныя линейныя преобразованія перемѣнныхъ η_1, η_2, которыя соотвѣтствуютъ линейнымъ подстановкамъ S и $\mathfrak{S}$ перемѣннаго u.

Имѣя эти выраженія, мы легко находимъ бинарныя подстановки надъ величинами η_1, η_2, соотвѣтствующія линейнымъ неоднороднымъ подстановкамъ:

Digitized by Google

$$\mathfrak{F},\ \mathfrak{F}S,\ \mathfrak{F}S^2,\ \mathfrak{F}S^3,\ \mathfrak{F}S^4$$

перемѣннаго u.

Примѣняя найденныя бинарныя линейныя преобразованія къ функціи, стоящей во второй части равенства (169′), мы находимъ выраженія всѣхъ корней уравнія (171) чрезъ η_1 и η_2:

$$\left.\begin{aligned} \xi_\infty &= 5(\eta_1\,\eta_2)^2, \\ \xi_j &= (\varepsilon^j\eta_1^{\,2} + \eta_1\eta_2 - \varepsilon^{4j}\eta_2^{\,2})^2, \\ &\text{гдѣ } j = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4. \end{aligned}\right\} \qquad (178)$$

Положивъ:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1\,\eta_2 &= A_0, \\ \eta_1^{\,2} &= A_1, \\ \eta_2^{\,2} &= -A_2, \end{aligned}\right\} \qquad (179)$$

мы приведемъ формулы (178) къ такому виду:

$$\left.\begin{aligned} \xi_\infty &= 5A_0^{\,2}, \\ \xi_j &= (A_0 + \varepsilon^j A_1 + \varepsilon^{4j} A_2)^2, \\ &\text{гдѣ } j = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4. \end{aligned}\right\} \qquad (180)$$

Эти формулы показываютъ, что шесть корней уравненія (171) выражаются черезъ три вспомогательныя величины:

$$A_0,\ A_1,\ A_2.$$

Квадратные радикалы изъ корней уравненія (171) суть линейныя функціи этихъ трехъ вспомогательныхъ величинъ.

Между величинами

$$A_0,\ A_1,\ A_2$$

существуетъ зависимость:

$$A_0^{\,2} + A_1\ A_2 = 0. \qquad (181)$$

Digitized by Google

Уравненія обладающія такими свойствами были впервые найдены Якоби *) въ его изслѣдованіяхъ по теоріи эллиптическихъ функцій и получили названіе уравненій Якоби (это названіе предложено Бріоски).

Итакъ уравненіе (171), а вмѣстѣ съ тѣмъ и (173) суть уравненія Якоби 6-ой степени.

Въ уравненіи Якоби 6-ой степени общаго вида величины

$$A_0,\ A_1,\ A_2$$

совершенно произвольны. Случай, когда онѣ связаны между собою соотношеніемъ:

$$A_0^2 + A_1\ A_2 = 0 \qquad (181)$$

самый простой, какъ мы увидимъ въ слѣдующей главѣ.

---

*) См. Jacobi Gesammelte Werke. Томъ 1 стр. 261.

Вообще Якобіевымъ уравненіемъ $n+1$-ой степени называется такое уравненіе, корни котораго выражаются черезъ $\frac{n+1}{2}$ вспомогательныхъ величинъ:

$$A_0,\ A_1, \ldots\ A_{\frac{n-1}{2}}$$

слѣдующимъ образомъ:

$$\xi_\infty = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n A_0^2,$$

$$\xi_j = [A_0 + \varepsilon^j A_1 + \varepsilon^{2j} A_2 + \ldots + \varepsilon^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 j} A_{\frac{n-1}{2}}]^2,$$

гдѣ:

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}},\ j = 0,\ 1,\ 2, \ldots\ n-1.$$

Величины

$$A_0,\ A_1, \ldots\ A_{\frac{n-1}{2}},$$

въ уравненіи Якоби общаго вида совершенно произвольны.

Изложивъ свойства найденныхъ имъ уравненій въ мемуарѣ: „Suite des notices sur les fonctions elliptiques," Якоби совершенно справедливо говоритъ „cela donne le théoreme énoncé, un des plus importants dans la théorie algébrique de la transformation et de la division des fonctions elliptiques".

Digitized by Google

Такой именно случай и представляютъ собою уравненія (171) и (173).

Обратимъ вниманіе на слѣдующую особенность величинъ A_0, A_1, A_2, опредѣляемыхъ формулами (179). Это суть раціональныя функціи перемѣннаго u, которыя подъ вліяніемъ икосаэдрическихъ линейныхъ подстановокъ испытываютъ тернарныя однородныя линейныя преобразованія.

Въ самомъ дѣлѣ, помня опредѣленія величины A_0, A_1, A_2, даваемыя формулами (179) и зная тѣ бинарныя преобразованія величинъ η_1, η_2, которыя соотвѣтствуютъ линейнымъ неоднороднымъ подстановкамъ S, $\mathfrak{T}$ и U икосаэдрической группы, мы находимъ, что подъ вліяніемъ подстановокъ S, $\mathfrak{T}$ и U велины A_0, A_1, A_2 преобразуются такъ:

$$\text{Подъ вліяніемъ подстановки } S: \quad \begin{cases} \overline{A}_0 = A_0, \\ \overline{A}_1 = \varepsilon A_1, \\ \overline{A}_2 = \varepsilon^4 A_2. \end{cases} \tag{182}$$

$$\text{Подъ вліяніемъ подстановки } \mathfrak{T}: \quad \begin{cases} \overline{\overline{A}}_0 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(A_0 + A_1 + A_2), \\ \overline{\overline{A}}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\{2A_0 + (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)A_1 + (\varepsilon + \varepsilon^4)A_2\}, \\ \overline{\overline{A}}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\{2A_0 + (\varepsilon + \varepsilon^4)A_1 + (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)A_2\}, \end{cases} \tag{183}$$

$$\text{Подъ вліяніемъ подстановки } U: \quad \begin{cases} A_0' = -A_0, \\ A_1' = -A_1, \\ A_2' = -A_2. \end{cases} \tag{184}$$

Весьма не трудно убѣдиться въ томъ, что всякая цѣлая μ-я степень частнаго интеграла линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка, а также однородная форма μ-ой степени, имѣющая аргументами два частныхъ интеграла линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка, суть частные

Digitized by Google

интегралы одного и того же линейнаго дифференціальнаго уравненія порядка $\mu+1$ *).

Величины

$$A_0,\ A_1,\ A_2$$

суть формы 2-го порядка съ аргументами η_1, η_2, какъ видно изъ формулъ (179). Слѣдовательно это суть частные интегралы нѣкотораго линейнаго дифференціальнаго уравненія 3-го порядка.

Отсюда становится понятнымъ, почему эти функціи при обходахъ на плоскости перемѣннаго z испытываютъ тернарныя линейныя преобразованія.

Корни уравненія Якоби суть квадраты линейныхъ однородныхъ формъ съ аргументами A_0, A_1, A_2; это суть однородныя формы 4 ой степени съ аргументами η_1, η_2. Отсюда слѣдуетъ, что корни уравненія Якоби суть частные интегралы линейнаго дифференціальнаго уравненія 5 го порядка **).

§ 47. **Нѣкоторыя замѣчанія о группахъ уравненій, найденныхъ въ предыдущихъ параграфахъ.**

Въ предшествующихъ параграфахъ мы остановились подробно на группахъ пяти особенно интересныхъ для насъ уравненій: (50), (72), (87), (149), (173). Степени этихъ уравненій соотвѣтственно равны: 3, 4, 4, 5, 6. Что касается до уравненія 6-ой степени (173), то мы уже знаемъ, что это не есть уравненіе 6-ой степени общаго вида: оно принадлежитъ лишь къ довольно обширному классу уравненій Якоби. Слѣдовательно группа этого уравненія не есть симметрическая группа субституцій изъ 6 буквъ.

Посмотримъ, въ какомъ отношеніи находятся группы остальныхъ уравненій: (50), (72), (87), (149) къ симметрическимъ группамъ субституцій изъ соотвѣтствующаго имъ числа буквъ.

---

*) См. журналъ Ліувилля т. IV стр. 430.

**) Изслѣдованіе уравненія 6-ой степени общаго вида можно найти въ мемуарѣ Cole: A Conribution to the Theory of the general Equation of the Sixth Degree. Американскій журналъ т. VIII.

Digitized by Google

I.

Группа уравненія 3-ей степени (50), какъ мы видѣли, составлена изъ двухъ основныхъ субституцій:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma &= (Y_0,\ Y_1,\ Y_2), \\ T &= (Y_0)(Y_1,\ Y_2). \end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

Не трудно замѣтить, что всякая транспозиція *), перемѣщающая двѣ изъ числа трехъ буквъ:

$$Y_0,\ Y_1,\ Y_2,$$

можетъ быть составлена изъ субституцій Σ и T:

$$\left.\begin{aligned} (Y_0, Y_1) &= \Sigma T, \\ (Y_0, Y_2) &= \Sigma^2 T, \\ (Y_1, Y_2) &= T. \end{aligned}\right\} \qquad (185)$$

Если транспозиція всякихъ двухъ корней уравненія входитъ въ группу этого уравненія, то группа уравненія—симметрическая.

Порядокъ симметрической группы кубичнаго уравненія равенъ

$$1.2.3=6.$$

Итакъ, дѣйствительно, уравненіе (50) имѣетъ симметрическую группу 6-го порядка.

II.

Уравненіе (72)—четвертой степени. Основныя субституціи его группы таковы:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma &= (Y_0)\,(Y_1,\ Y_2,\ Y_3), \\ T &= (Y_0,\ Y_1)(Y_2,\ Y_3). \end{aligned}\right\} \qquad (73)$$

*) Транспозиціею по общепринятому я называю субституцію, перемѣщающую только 2 буквы, напр. $(Y_0,\ Y_1)$.

Digitized by Google

Группа уравненія (72) изоморфна съ тетраэдрической группой. Слѣдовательно она 12-го порядка.

Порядокъ симметрической группы субституцій изъ 4 буквъ равенъ:

$$1.2.3.4 = 24.$$

Слѣдовательно, группа уравненія (72)—знакоперемѣнная. И дѣйствительно, не трудно убѣдиться въ томъ, что всякая четная субституція четырехъ буквъ можетъ быть составлена изъ субституцій Σ и T:

$$\left.\begin{aligned}
&(Y_0,\ Y_1,\ Y_2) = T\Sigma^2,\\
&(Y_0,\ Y_2,\ Y_1) = \Sigma T,\\
&(Y_0,\ Y_1,\ Y_3) = T\Sigma,\\
&(Y_0,\ Y_3,\ Y_1) = \Sigma^2 T,\\
&(Y_0,\ Y_2,\ Y_3) = \Sigma T\Sigma,\\
&(Y_0,\ Y_3,\ Y_2) = \Sigma^2 T\Sigma^2,\\
&(Y_1,\ Y_2,\ Y_3) = \Sigma,\\
&(Y_1,\ Y_3,\ Y_2) = \Sigma^2,\\
&(Y_0,\ Y_1)(Y_2,\ Y_3) = T,\\
&(Y_0,\ Y_2)(Y_1,\ Y_3) = \Sigma T\Sigma^2,\\
&(Y_0,\ Y_3)(Y_1,\ Y_2) = \Sigma^2 T\Sigma.
\end{aligned}\right\} \qquad (186)$$

III.

Уравненіе (87)—четвертой степени. Основныя субституціи его группы таковы:

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma = (Y_0)(Y_1,\ Y_2,\ Y_3),\\
&T = (Y_0,\ Y_1,\ Y_2,\ Y_3).
\end{aligned}\right\} \qquad (88)$$

Digitized by Google

Такъ какъ группа уравненія (87) изоморфна съ октаэдрической группой, то порядокъ ея равенъ 24. Это—группа симметрическая.

Въ справедливости только что сказаннаго можно убѣдиться и непосредственно. Группа уравненія (87) содержитъ въ себѣ обѣ основныя подстановки (73) группы уравненія (72):

$$\left.\begin{aligned} \Sigma &= (Y_0)(Y_1,\ Y_2,\ Y_3), \\ \Sigma^2 T^2 \Sigma &= (Y_0,\ Y_1)(Y_2,\ Y_3). \end{aligned}\right\} \qquad (187)$$

Отсюда слѣдуетъ, что группа уравненія (87) содержитъ въ себѣ знакоперемѣнную группу. Такъ какъ въ группу уравненія (87), кромѣ того, входитъ одна *нечетная* подстановка T, то она шире знакоперемѣнной группы. Если такъ, то группа уравненія (87)— симметрическая.

IV.

Группа уравненія (149) составлена изъ двухъ основныхъ субституцій:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma &= (Y_0,\ Y_1,\ Y_2,\ Y_3,\ Y_4), \\ T &= (Y_0)(Y_1,\ Y_2)(Y_3,\ Y_4). \end{aligned}\right\} \qquad (152)$$

Составляя уравненіе (149), мы оставили не выясненнымъ вопросъ о томъ, будетъ-ли тетраэдрическая подгруппа соотвѣтствующая уравненію (149), неособою частью икосаэдрическаго уравненія, или нѣтъ.

Если тетраэдрическая группа—неособая часть икосаэдрической группы, то группа уравненія (149) изоморфна съ икосаэдрической группой; порядокъ ея равенъ 60. Если тетраэдрическая группа есть особая или полуособая часть икосаэдрической группы, то порядокъ ея долженъ быть ниже 60. Во всякомъ случаѣ она не есть симметрическая группа, потому что порядокъ симметрической группы субституцій изъ 5 буквъ равенъ:

$$1.2.3.4.5=120.$$

Digitized by Google

Изъ высшей алгебры извѣстно, что въ составъ симметрической группы субституцій изъ 5 буквъ входятъ:

1) знакоперемѣнная группа порядка 60,

2) метациклическая группа порядка 20,

3) полуметациклическая группа порядка 10,

4) циклическія группы.

Всѣ субституціи знакоперемѣнной группы могутъ быть составлены изъ слѣдующихъ трехъ субституцій:

$$(Y_0,\ Y_1,\ Y_2),\ (Y_0,\ Y_1,\ Y_3),\ (Y_0,\ Y_1,\ Y_4)\ *). \qquad (188)$$

Не трудно видѣть, что каждая изъ этихъ трехъ субституцій можетъ быть составлена изъ Σ и T:

$$\left.\begin{aligned}(Y_0,\ Y_1,\ Y_2) &= \Sigma^2 T \Sigma^2 T \Sigma,\\ (Y_0,\ Y_1,\ Y_3) &= \Sigma T,\\ (Y_0,\ Y_1,\ Y_4) &= \Sigma^2 T \Sigma^2 T \Sigma^2.\end{aligned}\right\} \qquad (188)$$

Итакъ, группа уравненія (149) содержитъ въ себѣ знакоперемѣнную группу субституцій изъ 5 буквъ порядка 60. Такъ какъ порядокъ группы уравненія (149) не выше 60, то группа *уравненія (149) есть группа знакоперемѣнная.*

Слѣдовательно группа уравненія (149) изоморфна съ икосаэдрической группой. Тетраэдрическая подгруппа есть *несобственная часть* икосаэдрической.

Изъ высшей алгебры извѣстно, что уравненіе 5-ой степени, группа котораго — знакоперемѣнная, не разрѣшимо въ радикалахъ.

Отсюда слѣдуетъ, что уравненіе (149), а вмѣстѣ съ тѣмъ и уравненіе (111), изъ котораго (149) получается раціональнымъ преобразованіемъ (129),—не разрѣшимы въ радикалахъ.

Мы говорили объ уравненіи (111) въ § 32 и упомянули о томъ, что оно не разрѣшимо въ радикалахъ. Теперь это предложеніе доказано. Изъ него слѣдуетъ, какъ мы видѣли въ

*) См. Селивановъ. Объ уравненіяхъ пятой степени съ цѣлыми коэффиціентами стр. 79. СПБ. 1889 г.

Digitized by Google

§ 32, что икосаэдрическое уравненіе тоже не разрѣшимо въ радикалахъ.

Сдѣлаемъ короткій обзоръ результатовъ, найденныхъ въ настоящей главѣ.

Мы нашли 5 типовъ уравненій, разрѣшимыхъ въ гипергеометрическихъ функціяхъ:

1) кубичное уравненіе съ симметрической группой,

2) уравненіе 4-ой степени съ знакоперемѣнной группой,

3) уравненіе 4-ой степени съ симметрической группой,

4) уравненіе 5-ой степени съ знакоперемѣнной группой,

5) уравненіе 6-ой степени, принадлежащее къ числу уравненій Якоби.

Всѣ безъ исключенія остальныя уравненія, разрѣшимыя въ гипергеометрическихъ функціяхъ, могутъ быть приведены къ одному изъ уравненій только что перечисленныхъ видовъ раціональнымъ или ирраціональнымъ преобразованіемъ.

Рѣшеніе вопроса о томъ, можетъ ли данное уравненіе какой либо степени быть приведено къ одному изъ этихъ четырехъ типовъ есть вопросъ во многихъ случаяхъ довольно трудный, но онъ относится уже къ области вопросовъ, рѣшаемыхъ чисто алгебраическими пріемами.

Для довершенія задачи нашей настоящей работы намъ остается разсмотрѣть, какъ приводятся уравненія общаго вида 3-ей, 4-ой, 5-ой степени и уравненіе Якоби 6-ой степени къ виду уравненій (50), (72), (87), (149), (173).

Рѣшеніе этого вопроса составитъ задачу слѣдующей XI главы нашей работы.

Digitized by Google

ГЛАВА XI.

Рѣшеніе уравненій 3-ей, 4-ой, 5-ой степени и уравненія Якоби 6-ой степени.

§ 48. **Геометрическія представленія, связанныя съ алгебраическими уравненіями.**

Пусть дано *неприводимое* алгебраическое уравненіе n-ой степени въ общемъ видѣ.

Посредствомъ извѣстнаго линейнаго преобразованія мы обратимъ въ нуль коэффиціентъ при $n-1$-ой степени неизвѣстнаго и приведемъ уравненіе къ такому виду:

$$y^n + a_2 y^{n-2} + a_3 y^{n-3} + \ldots + a_{n-1} y + a_n = 0. \qquad (1)$$

Корни этого уравненія суть функціи отъ $n-2$, вообще говоря, независимыхъ между собою параметровъ:

$$a_2,\ a_3, \ldots\ a_{n-1},\ a_n. \qquad (2)$$

Пусть корни уравненія (1) суть:

$$y_0,\ y_1, \ldots\ y_{n-1}. \qquad (3)$$

Они связаны между собою соотношеніемъ:

$$\Sigma y_i = 0, \qquad (4)$$

вслѣдствіе котораго одна изъ величинъ (3) есть линейная функція остальныхъ.

Будемъ, слѣдуя Клейну, разсматривать величины:

$$y_0,\ y_1, \ldots\ y_{n-1}. \qquad (3)$$

Digitized by Google

какъ систему n однородныхъ координатъ точки въ пространствѣ n—2-хъ измѣреній, при чемъ эти координаты связаны между собою линейнымъ соотношеніемъ (4) *).

Назовемъ точку, опредѣляемую координатами (3) буквою A.

Пусть группа уравненія (1) есть группа Γ порядка N.

Примѣнивъ одну изъ субституцій группы Γ къ ряду количествъ (3), мы получимъ рядъ количествъ:

$$\bar{y}_0,\ \bar{y}_1,\cdots\ \bar{y}_{n-1}, \qquad (5)$$

отличающихся отъ количествъ (3) только порядкомъ.

Взятой нами субституціи группы Γ соотвѣтствуетъ нѣкоторая коллинеація точекъ пространства:

$$\left.\begin{aligned} \bar{y}_0 &= y_h, \\ \bar{y}_1 &= y_k, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \bar{y}_{n-1} &= y_t. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

*) Введеніе лишнихъ координатъ, связанныхъ съ остальными посредствомъ линейныхъ соотношеній, предложено Bobillier. См. P. Serret Géométrie de direction.

Намъ придется болѣе всего имѣть дѣло съ системою *пяти* однородныхъ (пентаэдрическихъ) координатъ въ пространствѣ *трехъ* измѣреній Этотъ случай соотвѣтствуетъ значенію

$$n=5,$$

т. е. онъ соотвѣтствуетъ уравненію 5-ой степени.

При

$$n=4$$

намъ придется имѣть дѣло съ системою четырехъ однородныхъ координатъ на плоскости.

При

$$n=3$$

мы будемъ имѣть дѣло съ геометріею на прямой, при чемъ точка опредѣляется тремя однородными координатами.

Со случаями, когда

$$n>5,$$

т. е. съ пространствами 4, 5... измѣреній намъ не придется вовсе имѣть дѣла. Поэтому разсужденія, приведенныя въ текстѣ имѣютъ вполнѣ реальный смыслъ.

Digitized by Google

Количества (5) служитъ координатами нѣкоторой точки A', отличной отъ A.

Каждой субституціи группы Γ соотвѣтствуетъ нѣкоторое перемѣщеніе величинъ (3) и нѣкоторая точка, координатами которой служатъ эти величины.

Совокупности N субституцій группы Γ соотвѣтствуетъ совокупность N точекъ:

$$A,\ A',\ A'',\ldots\ A^{(N-1)}. \qquad (7)$$

Корни уравненія (1) вполнѣ опредѣляются значеніями $n-2$ параметровъ (2). Поэтому данной системѣ значеній параметровъ (2) соотвѣтствуетъ опредѣленная совокупность N точекъ (7) въ пространствѣ $n-2$ измѣреній, и всѣ эти N точекъ, вообще говоря, различны между собою.

Станемъ теперь непрерывно измѣнять значенія параметровъ (2).

Пусть параметры (2), непрерывно мѣняясь, прошли черезъ всевозможныя значенія дѣйствительныя и мнимыя. Точки (7) описали нѣкоторую вполнѣ опредѣленную форму въ пространствѣ $n-2$ измѣреній.

Посмотримъ, что это за форма?

Прежде всего замѣтимъ, что величина одного изъ параметровъ (2)—для опредѣленности будемъ полагать: величина параметра a_n—не вліяетъ на положеніе точекъ (7). Въ самомъ дѣлѣ, величины (3) суть *однородныя* координаты точки A. Положеніе точки A опредѣляется только ихъ отношеніями; величина же коэффиціента a_n опредѣляетъ только множитель пропорціональности, сопровождающій однородныя координаты. Если мы измѣнимъ этотъ множитель пропорціональности, положивъ

$$y=\sqrt[n]{a_n}y', \qquad (8)$$

и преобразуемъ уравненіе (1) линейною подстановкою (8), то мы достигнемъ того, что извѣстный членъ уравненія станетъ равнымъ единицѣ.

Digitized by Google

Вслѣдствіе только что сказаннаго мы будемъ считать коэффиціентъ a_n постояннымъ и будемъ говорить только объ измѣненіи параметровъ:

$$a_1, a_2, \ldots a_{n-1}. \qquad (9)$$

Каждому измѣненію величинъ параметровъ (9) соотвѣтствуетъ нѣкоторое передвиженіе точекъ (7).

I. Пусть параметры (9) *независимы* между собою. Когда они, непрерывно мѣняясь, пройдутъ черезъ всевозможныя значенія какъ дѣйствительныя такъ и мнимыя, то точки (7), двигаясь непрерывно, опишутъ *все* пространство $n-2$ измѣреній. Въ самомъ дѣлѣ, каковы бы ни были отношенія количествъ (3) между собою,—всегда найдется соотвѣтствующая имъ система значеній параметровъ (9). Слѣдовательно *при независимыхъ между собою параметрахъ* (9) *геометрическая форма, соотвѣтствующая уравненію* (1)*—есть все пространство n—2 измѣреній.*

II. Пусть параметры (9) связаны между собою *однимъ* соотношеніемъ: напр. пусть

$$a_2 = 0.$$

Понятно, что въ такомъ случаѣ между координатами (3) точки A будетъ существовать кромѣ (4) еще *одно* соотношеніе. При всевозможныхъ измѣненіяхъ параметровъ (9), точки (7) опишутъ:

1) при $n=5$ поверхность въ пространствѣ 3-хъ измѣреній,

2) при $n=4$ линію на плоскости,

3) при $n=3$ систему N постоянныхъ точекъ на прямой.

Таковы геометрическія формы, соотвѣтствующія уравненію (1) въ томъ случаѣ, когда параметры (9) связаны между собою *однимъ* условіемъ.

III. Пусть параметры (9) связаны между собою двумя условіями: напр.

$$a_2 = 0, \; a_3 = 0.$$

Въ такомъ случаѣ координаты (3) точки A связаны между собою кромѣ (4) еще двумя уравненіями.

Digitized by Google

При всевозможныхъ измѣненіяхъ величинъ параметровъ (9), точки (7) опишутъ:

1) при $n=5$ кривую въ пространствѣ трехъ измѣреній,

2) при $n=4$ систему N постоянныхъ точекъ на плоскости.

(При $n=3$ разсматриваемый случай совсѣмъ встрѣтиться не можетъ).

Таковы геометрическія формы, соотвѣтствующія уравненію (1) въ томъ случаѣ, когда параметры (9) связаны между собою двумя условіями.

Мы будемъ называть разсмотрѣнныя нами геометрическія формы *изображеніями* (Bilder—по Клейну) соотвѣтствующихъ уравненій (1). Будемъ говорить, что уравненіе (1) *изображается* соотвѣтствующею ему геометрическою формою.

§ 49. **Геометрическія изображенія для уравненій 5-ой степени.**

I.

Пусть въ уравненіи 5-ой степени коэффиціентъ a_2 равенъ нулю:

$$a_2 = 0.$$

Уравненіе принимаетъ такой видъ:

$$y^5 + a_3 y^2 + a_4 y + a_5 = 0. \tag{10}$$

Корни уравненія (10) удовлетворяютъ двумъ соотношеніямъ:

$$\Sigma y_i = 0, \tag{4}$$

и

$$\Sigma y_i^2 = 0, \tag{11}$$

или:

$$y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0, \tag{12}$$

$$y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 0. \tag{13}$$

Исключивъ изъ этихъ уравненій y_4, находимъ:

$$y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_0 y_1 + y_0 y_2 + y_0 y_3 + y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 = 0. \tag{14}$$

Digitized by Google

Это уравненіе изображаетъ нѣкоторую поверхность 2-го порядка. Слѣдуя Клейну, мы назовемъ ее *главною поверхностью* (Hauptfläche). Она служитъ изображеніемъ уравненія (10), которое мы назвали въ главѣ X *главнымъ* уравненіемъ 5-ой степени.

При всевозможныхъ измѣненіяхъ коэффиціентовъ главнаго уравненія (10) корни его служатъ координатами точекъ, лежащихъ на главной поверхности (14).

II.

Пусть въ уравненіи 5-ой степени коэффиціентъ a_3 равенъ нулю:

$$a_3 = 0.$$

Уравненіе принимаетъ такой видъ:

$$y^5 + a_2 y^3 + a_4 y + a_5 = 0. \qquad (15)$$

Между корнями его существуетъ двѣ зависимости:

$$\Sigma y_i = 0, \qquad (4)$$

и

$$\Sigma y_i^3 = 0, \qquad (16)$$

или:

$$y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0, \qquad (12)$$

$$y_0^3 + y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + y_4^3 = 0. \qquad (17)$$

Исключивъ y_4 изъ уравненій (12) и (17), находимъ:

$$y_0^3 + y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 - (y_0 + y_1 + y_2 + y_3)^3 = 0. \qquad (18)$$

Эта поверхность 3-го порядка обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что на ней лежитъ каждая изъ діагоналей полнаго пятигранника, образованнаго пятью плоскостями координатъ. Вслѣдствіе этого Клебшъ назвалъ поверхность 3-го порядка, изображаемую уравненіемъ (17) *діагональною поверхностью* (Diagonalfläche).

Итакъ, изображеніемъ уравненія (15) служитъ діагональная поверхность (18).

Digitized by Google

Слѣдуя Клейну, мы назовемъ уравненіе (15) *діагональнымъ уравненіемъ*.

III.

Пусть въ уравненіи 5-ой степени коэффиціенты a_2 и a_3 равны нулю:

$$a_2 = a_3 = 0.$$

Уравненіе принимаетъ такой видъ:

$$y^5 + a_4 y + a_5 = 0. \qquad (19)$$

Это—уравненіе въ формѣ Жеррарда *).

Изображеніе его есть, понятно, та кривая 6-го порядка, которая служитъ линіей пересѣченія поверхностей: главной и діагональной.

Уравненіе Жеррарда—простѣйшее изъ уравненій 5-ой степени. Корни его суть функціи одного параметра.

Остановимся на свойствахъ главной поверхности:

$$y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 0. \qquad (13)$$

Каждая точка поверхности 2-го порядка вполнѣ опредѣляется двумя прямолинейными образующими, черезъ нее проходящими. Когда дана поверхность втораго порядка, то всякая прямолинейная образующая ея опредѣлена величиною одного параметра.

Представимъ уравненіе

$$y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 0, \qquad (13)$$

въ такомъ видѣ:

$$f_1 f_2 + f_3 f_4 = 0, \qquad (20)$$

гдѣ f_1, f_2, f_3, f_4 суть цѣлые линейные многочлены съ перемѣнными:

---

*) Клейнъ называетъ его уравненіемъ Бринга по причинѣ, которую онъ указываетъ на стр. 143 Vorlesungen über das Ikosaeder.

Digitized by Google

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4. \qquad (21)$$

Достичь такого разложенія квадратнаго многочлена можно безконечнымъ числомъ способовъ. Какъ это сдѣлать всего проще въ нашемъ случаѣ—мы увидимъ ниже.

Представимъ уравненіе (20) въ такомъ видѣ:

$$-\frac{f_1}{f_3}=\frac{f_4}{f_2},$$

и положимъ:

$$-\frac{f_1}{f_3}=\frac{f_4}{f_2}=u, \qquad (22)$$

гдѣ u—нѣкоторое постоянное число.

Уравненія одной изъ прямолинейныхъ образующихъ поверхности (20) представятся въ такомъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} f_1+uf_3&=0,\\ f_4-uf_2&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Представивъ уравненія (20) въ такомъ видѣ:

$$-\frac{f_1}{f_4}=\frac{f_3}{f_2}$$

и положивъ:

$$-\frac{f_1}{f_4}=\frac{f_3}{f_2}=v, \qquad (24)$$

мы представимъ уравненія одной изъ прямолинейныхъ образующихъ второй системы въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} f_1+vf_4&=0,\\ f_3-vf_2&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Если даны значенія параметровъ u и v, то изъ уравненій: (12), (23) и (25), мы можемъ опредѣлить значенія всѣхъ пяти корней уравненія (10):

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4. \qquad (21)$$

Digitized by Google

При этомъ намъ придется только рѣшить систему пяти уравненій 1-ой степени съ пятью неизвѣстными.

Не трудно усмотрѣть, что линейныя функціи f_1, f_2, f_3, f_4 могутъ быть выбраны слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \varepsilon^4 y_4, \\ f_2 &= y_0 + \varepsilon^4 y_1 + \varepsilon^3 y_2 + \varepsilon^2 y_3 + \varepsilon y_4, \\ f_3 &= y_0 + \varepsilon^2 y_1 + \varepsilon^4 y_2 + \varepsilon y_3 + \varepsilon^3 y_4, \\ f_4 &= y_0 + \varepsilon^3 y_1 + \varepsilon y_2 + \varepsilon^4 y_3 + \varepsilon^2 y_4, \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

гдѣ $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}$.

Дѣйствительно, подставивъ выраженія (26) въ формулу:

$$f_1 f_2 + f_3 f_4, \quad (27)$$

находимъ:

$$f_1 f_2 + f_3 f_4 = 2\Sigma y_i^2 - \Sigma y_i y_j, \quad (28)$$

гдѣ индексы i и j пріобрѣтаютъ значенія: 0, 1, 2, 3, 4 и при томъ такъ, что i и j во второй суммѣ имѣютъ непремѣнно значенія различныя между собою.

Изъ равенства:

$$\Sigma y_i = 0 \quad (4)$$

слѣдуетъ:

$$\Sigma y_i^2 + 2\Sigma y_i y_j = 0. \quad (29)$$

Поэтому

$$f_1 f_2 + f_3 f_4 = \frac{5}{2}\Sigma y_i^2 = \frac{5}{2}(y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2). \quad (30)$$

Слѣдовательно уравненіе главной поверхности можетъ быть представлено въ видѣ:

$$f_1 f_2 + f_3 f_4 = 0, \quad (20)$$

гдѣ f_1, f_2, f_3, f_4 имѣютъ значенія, даваемыя формулами (26).

Digitized by Google

Соображая только что сказанное, мы приходимъ къ заключенію, что точки главной поверхности, а слѣдовательно и корни уравненія:

$$y^5 + a_3 y^2 + a_4 y + a_5 = 0 \tag{10}$$

вполнѣ опредѣляются значеніями двухъ параметровъ u и v, опредѣляемыхъ формулами:

$$\left.\begin{aligned} u = -\frac{y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \varepsilon^4 y_4}{y_0 + \varepsilon^2 y_1 + \varepsilon^4 y_2 + \varepsilon y_3 + \varepsilon^3 y_4} = \\ = \frac{y_0 + \varepsilon^3 y_1 + \varepsilon y_2 + \varepsilon^4 y_3 + \varepsilon^2 y_4}{y_0 + \varepsilon^4 y_1 + \varepsilon^3 y_2 + \varepsilon^2 y_3 + \varepsilon y_4}, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

$$\left.\begin{aligned} v = -\frac{y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \varepsilon^4 y_4}{y_0 + \varepsilon^3 y_1 + \varepsilon y_2 + \varepsilon^4 y_3 + \varepsilon^2 y_4} = \\ = \frac{y_0 + \varepsilon^2 y_1 + \varepsilon^4 y_2 + \varepsilon y_3 + \varepsilon^3 y_4}{y_0 + \varepsilon^4 y_1 + \varepsilon^3 y_2 + \varepsilon^2 y_3 + \varepsilon y_4}. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Это еще разъ подтверждаетъ сказанное выше: корни уравненія (10) суть функціи *двухъ* независимыхъ между собою параметровъ. За такіе параметры можно принять u и v, входящіе совершенно симметрично.

Посмотримъ, каковы измѣненія количествъ u и v, соотвѣтствующія всевозможнымъ субституціямъ надъ корнями:

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4 \tag{21}$$

уравненія (10).

Совершивъ надъ пятью количествами (21) всѣ 120 субституцій симметрической группы, мы получимъ 120 перемѣщеній этихъ количествъ. Каждому изъ этихъ перемѣщеній соотвѣтствуетъ одна опредѣленная точка на главной поверхности. Черезъ каждую точку поверхности проходятъ двѣ образующія: 1-ой и 2-ой системы. Каждой субституціи надъ количествами (21) соотвѣтствуетъ своя коллинеація точекъ пространства, перемѣщающая между собою полученныя 120 точекъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и проходящія чрезъ нихъ образующія. При

Digitized by Google

этомъ можетъ случиться одно изъ двухъ: образующая каждой системы преобразуется въ образующую той же системы, или же образующая каждой системы преобразуется въ образующую другой системы.

Пусть нѣкоторая субституція σ измѣняетъ образующую, опредѣляемую параметромъ u въ образующую той же самой системы, опредѣляемую параметромъ $\bar{u}$. Параметры u и $\bar{u}$ связаны между собою аналитически и при томъ такъ, что каждый изъ нихъ есть однозначная функція другаго. Это значитъ, что они связаны между собою линейно:

$$\bar{u} = S(u),$$

гдѣ S есть символъ нѣкоторой линейной подстановки.

Пусть нѣкоторая субституція σ' замѣняетъ образующую, опредѣляемую параметромъ u, другою образующею, опредѣляемою параметромъ $\bar{v}$. Совершенно тѣми же разсужденіями, какія приведены выше, мы убѣдимся въ томъ, что $\bar{v}$ есть линейная функція u:

$$\bar{v} = S'(u).$$

Совокупность субституцій, замѣняющихъ каждую образующую новою образующею той же самой системы, необходимо, должна составить группу. Обозначимъ эту группу буквою Γ.

Посмотримъ, что это за группа.

Если всякая субституція симметрической группы входитъ въ Γ, то Γ есть симметрическая группа субституцій изъ пяти буквъ порядка 120.

Если Γ не есть симметрическая группа, то должна существовать хотя бы одна субституція σ', замѣняющая образующую одной системы новою образующею другой системы. Въ такомъ случаѣ, обозначая буквою σ какую либо изъ субституцій группы Γ, мы замѣтимъ, что

$$\sigma' \sigma \sigma'^{-1}$$

есть субституція группы Γ.

Если такъ, то Γ есть особая часть симметрической группы

Digitized by Google

Такъ какъ симметрическая группа 120-го порядка имѣетъ единственную особую часть: знакоперемѣнную группу 60-го порядка, то мы приходимъ къ заключенію, что группа Γ есть или:

1) симметрическая группа порядка 120,

или:

2) знакоперемѣнная группа порядка 60.

Мы видѣли, что каждой субституціи σ группы Γ соотвѣтствуетъ линейная неоднородная подстановка:

$$\bar{u} = S(u)$$

величины u.

Если порядокъ группы Γ равенъ 120, что величина u имѣетъ 120 значеній, связанныхъ между собою группою 120-го порядка линейныхъ неоднородныхъ подстановокъ. Въ главѣ IV мы видѣли, что такой группы неоднородныхъ линейныхъ подстановокъ не существуетъ. Самый высокій порядокъ группы неоднородныхъ линейныхъ подстановокъ равенъ 60, и въ такомъ случаѣ эта группа—икосаэдрическаго типа.

Итакъ, группа Γ—знакоперемѣнная порядка 60 и изоморфна съ икосаэдрической группой.

Совокупность субституцій, замѣняющихъ каждую образующую другой образующей той же самой системы, есть знакоперемѣнная группа Γ порядка 60.

Подъ вліяніемъ этихъ субституцій параметръ u пріобрѣтаетъ 60 значеній, связанныхъ между собою линейными неоднородными подстановками икосаэдрической группы.

Возьмемъ функцію (31). Примѣнивъ къ ней 60 подстановокъ знакоперемѣнной группы, мы получимъ 60 величинъ

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_{59}, \qquad (33)$$

связанныхъ между собою линейными подстановками икосаэдрической группы.

Digitized by Google

Произведеніе

$$\prod_{i=0}^{i=59}(u - u_i) \tag{34}$$

есть многочленъ цѣлый относительно u и имѣющій коэффиціентами знакоперемѣнныя функціи количествъ (21).

Такъ какъ всякая знакоперемѣнная функція корней уравненія (10) есть раціональная функція его коэффиціентовъ и квадратнаго корня изъ его дискриминанта Δ, то мы въ правѣ представить функцію (34) въ такомъ видѣ:

$$\prod_{i=0}^{i=59}(u - u_i) = \Phi(u, a_3, a_4, a_5, \sqrt{\Delta}). \tag{35}$$

Уравненіе, опредѣляющее величину u будетъ таково:

$$\Phi(u, a_3, a_4, a_5, \sqrt{\Delta}) = 0. \tag{36}$$

Это уравненіе — 60-ой степени; оно не мѣняется отъ преобразованія посредствомъ линейныхъ подстановокъ нѣкоторой икосаэдрической группы. Если такъ, то на основаніи извѣстнаго намъ объ икосаэдрическомъ уравненіи мы можемъ утверждать, что уравненіе (36) приводится къ виду:

$$\frac{H_u^{\,3}(u)}{-12^3 f_u^{\,5}(u)} = A + B\sqrt{\Delta}, \tag{37}$$

гдѣ $f_u(u)$ есть первичная функція икосаэдрическаго типа, $H_u(u)$ ея гессіанъ, A и B — раціональныя функціи коэффиціентовъ

$$a_3, a_4, a_5$$

уравненія (10).

Остается разсмотрѣть слѣдующіе два вопроса:

1) Будетъ ли уравненіе (37) *нормальнымъ* икосаэдрическимъ уравненіемъ?

2) Какъ выражаются величины A и B черезъ коэффиціенты уравненія (10)?

Digitized by Google

Уравненіе (10) есть резольвента 5-ой степени икосаэдрическаго уравненія (37). Въ главѣ X мы видѣли, что въ такомъ случаѣ группы обоихъ уравненій изоморфны между собою.

Основныя субституціи σ и τ группы уравненія (10) соотвѣтствуютъ основнымъ субституціямъ S и $\mathfrak{T}$ икосаэдрической группы и выражаются такъ:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= (y_0, y_1, y_2, y_3, y_4), \\ \tau &= (y_0)\,(y_1, y_2)\,(y_3, y_4). \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

Для нахожденія основныхъ подстановокъ S и $\mathfrak{T}$ группы уравненія (37), мы возьмемъ корень u этого уравненія, выражаемый формулою (31), и посмотримъ, какія измѣненія вызываютъ въ немъ субституціи σ и τ.

Послѣ подстановки σ онъ переходитъ въ $\bar{u}$, при чемъ:

$$\bar{u} = \varepsilon u. \qquad (39)$$

Слѣдовательно основная подстановка S группы уравненія (37) такова:

$$S(u) = \varepsilon u. \qquad (40)$$

Такое же вычисленіе подстановки $\mathfrak{T}$ оказалось бы довольно сложнымъ *). Его мы можемъ значительно сократить, пользуясь слѣдующими соображеніями.

Разсмотримъ сначала частный видъ уравненія (10).

Положимъ:

$$y_0 = 0,\ y_1 = -y_2 = 1,\ y_3 = -y_4 = \pm i. \qquad (41)$$

Уравненіе (10) будетъ таково:

$$y^5 - y = 0. \qquad (42)$$

Изъ формулы (31) слѣдуетъ:

---

*) Оно потребовало бы, между прочимъ, исключенія двухъ корней, напр. y_3 и y_4 изъ формулы (31) при посредствѣ условій:

$$\Sigma y_i = 0,\ \Sigma y_i^2 = 0.$$

Digitized by Google

$$u = -\frac{(\varepsilon - \varepsilon^2) \pm i(\varepsilon^3 - \varepsilon^4)}{(\varepsilon^2 - \varepsilon^4) \pm i(\varepsilon - \varepsilon^3)}, \tag{43}$$

откуда:

$$u = (\varepsilon^2 + \varepsilon^3) \mp i(\varepsilon - \varepsilon^4) = 2\cos\frac{4\pi}{5} \pm 2\sin\frac{2\pi}{5}. \tag{44}$$

Выполнивъ субституцію:

$$\tau = (y_0)(y_1, y_2)(y_3, y_4)$$

надъ величинами (41) и вставивъ ихъ затѣмъ въ формулу (31), мы замѣтимъ, что величина u не измѣнилась. Слѣдовательно, искомая подстановка $\mathfrak{S}$ не мѣняетъ величину:

$$u = 2\left(\cos\frac{4\pi}{5} \pm \sin\frac{2\pi}{5}\right), \tag{44'}$$

и это справедливо независимо отъ того, который изъ двухъ знаковъ мы возьмемъ передъ вторымъ членомъ формулы (44').

Отсюда мы выводимъ такое заключеніе: тѣ двѣ точки плоскости комплекснаго перемѣннаго u, которыя не мѣняются искомою подстановкою $\mathfrak{S}$, суть слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} a &= 2\left(\cos\frac{4\pi}{5} + \sin\frac{2\pi}{5}\right), \\ b &= 2\left(\cos\frac{4\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{5}\right). \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Зная, что подстановка $\mathfrak{S}$—втораго порядка, и имѣя тѣ двѣ точки a и b, которыя ею не мѣняются, легко найти эту подстановку.

Пусть:

$$\mathfrak{S}(u) = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}. \tag{46}$$

Обратная ей подстановка:

$$\mathfrak{S}^{-1}(u) = \frac{\delta u - \beta}{\alpha - \gamma u} \tag{47}$$

Digitized by Google

должна быть тождественна съ нею. Отсюда слѣдуетъ, что:

$$\delta = -\alpha. \tag{48}$$

Положивъ:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = k, \quad \frac{\beta}{\gamma} = l, \tag{49}$$

находимъ:

$$\mathfrak{S}(u) = \frac{ku+l}{u-k}. \tag{50}$$

Двойныя точки этой подстановки служатъ корнями квадратнаго уравненія:

$$u^2 - 2ku - l = 0. \tag{51}$$

Зная, что корни этого уравненія выражаются формулами (45), находимъ:

$$\left.\begin{aligned} k &= 2\cos\frac{4\pi}{5} = \varepsilon^2 + \varepsilon^3, \\ l &= -4\left(\cos^2\frac{4\pi}{5} - \sin^2\frac{2\pi}{5}\right) = 1. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Искомая подстановка $\mathfrak{S}$ такова:

$$\mathfrak{S}(u) = \frac{(\varepsilon^2+\varepsilon^3)u+1}{u-(\varepsilon^2+\varepsilon^3)}. \tag{53}$$

Основныя подстановки S и $\mathfrak{S}$ группы уравненія (37) выражаются формулами (40) и (53):

$$S(u) = \varepsilon u, \tag{40}$$

$$\mathfrak{S}(u) = \frac{(\varepsilon^2+\varepsilon^3)u+1}{u-(\varepsilon^2+\varepsilon^3)}. \tag{53}$$

Эти формулы тождественны съ формулами (56) главы IV.

Digitized by Google

Поэтому мы въ правѣ сказать, что S и $\mathfrak{S}$ суть основныя подстановки *нормальной* икосаэдрической группы. Слѣдовательно какъ группа уравненія (37), такъ и само это уравненіе представлены въ нормальномъ видѣ. Для нахожденія величины параметра u прямолинейной образующей главной поверхности, необходимо рѣшить нормальное икосаэдрическое уравненіе (37).

Такъ какъ величина u, опредѣляемая формулою (31), подъ вліяніемъ субституцій знакопеременной группы пріобрѣтаетъ полное число значеній (т. е. 60 значеній), то всѣ корни уравненія (10) суть раціональныя функціи величины u.

Какъ выражаются коэффиціенты A и B уравненія (37) черезъ коэффиціенты a_3, a_4, a_5 уравненія (10)—мы увидимъ въ слѣдующемъ параграфѣ.

§ 50. **Рѣшеніе главнаго уравненія 5-ой степени.**

Въ § 49 мы пришли къ заключенію, что для рѣшенія главнаго уравненія 5-ой степени:

$$y^5 + a_3 y^2 + a_4 y + a_5 = 0 \qquad (10)$$

достаточно рѣшить икосаэдрическое уравненіе нормальнаго вида:

$$\frac{H^3(u)}{-12^3 f^5(u)} = A + B\sqrt{\Delta}\,. \qquad (37)$$

Займемся подробностями этихъ вычисленій.

Для простоты формулъ представимъ уравненіе (10) въ такомъ видѣ:

$$y^5 + 5\alpha y^2 + 5\beta y + \gamma = 0, \qquad (54)$$

при чемъ:

$$\alpha = \frac{a_3}{5},\ \beta = \frac{a_4}{5},\ \gamma = a_5.$$

Дискриминантъ уравненія (54) таковъ:

$$\Delta = 108\alpha^5\gamma - 135\alpha^4\beta^2 + 90\alpha^2\beta\gamma^2 - 320\alpha\beta^3\gamma + 256\beta^5 + \gamma^4 \text{ *}). \qquad (55)$$

*) См. Faà de Bruno Théorie des formes binaires. Таблица IV².

Digitized by Google

Уравненіе (54) есть одна изъ резольвентъ 5-ой степени икосаэдрическаго уравненія (37), или, что то же, уравненія:

$$\frac{H_u^{\,3}(u)}{-12^3 f_u^{\,5}(u)} = z, \tag{37'}$$

гдѣ:

$$z = A + B\sqrt{\Delta}. \tag{56}$$

Мы видѣли въ § 46, что резольвента 5-ой степени уравненія (37') въ самомъ общемъ видѣ содержитъ въ себѣ кромѣ перемѣннаго z еще два произвольныхъ параметра. Эта резольвента можетъ быть представлена въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{aligned} &zY^5 + 5\left(8h^3 + 12h^2k + \frac{6hk^2 + k^3}{1-z}\right)Y^2 + \\ &+ 15\left(-4h^4 + \frac{6h^2k^2 + 4hk^3}{1-z} + \frac{3k^4}{4(1-z)^2}\right)Y + \\ &+ 3\left(48h^5 - \frac{40h^3k^2}{1-z} + \frac{15hk^4 + 4k^5}{(1-z)^2}\right) = 0. \end{aligned} \tag{57}$$

Уравненіе (54) есть одна изъ главныхъ резольвентъ 5-ой степени икосаэдрическаго уравненія (55). Она заключается въ общей формулѣ (57) и сдѣлается тождественною съ уравненіемъ (57), если мы дадимъ параметрамъ h, k, z значенія, удовлетворяющія тремъ слѣдующимъ уравненіямъ:

$$\alpha = \frac{8h^3 + 12h^2k}{z} + \frac{6hk^2 + k^3}{z(1-z)}, \tag{58}$$

$$\beta = -12\frac{h^4}{z} + \frac{18h^2k^2 + 12hk^3}{z(1-z)} + \frac{9k^4}{4z(1-z)^2}, \tag{59}$$

$$\gamma = 144\frac{h^5}{z} - 120\frac{h^3k^2}{z(1-z)} + \frac{45hk^4 + 12k^5}{z(1-z)^2}. \tag{60}$$

Digitized by Google

Опредѣлимъ изъ этихъ уравненій величины h, k, z *).

Изъ уравненій (59) и (60) находимъ:

$$\frac{(12h\beta+\gamma)z}{12} = \frac{8h^3k^2+12h^2k^3}{1-z} + \frac{6hk^4+k^5}{(1-z)^2}. \qquad (61)$$

Раздѣливъ уравненіе (61) на уравненіе (58), имѣемъ:

$$\frac{12h\beta+\gamma}{12\alpha} = \frac{k^2}{1-z}. \qquad (62)$$

Изъ тѣхъ же уравненій (59) и (60) находимъ:

$$\left(\frac{k^2}{1-z} - 4h^2\right)^3 = \frac{4}{9}z\left(\frac{k^2\beta}{1-z} - h\gamma\right). \qquad (63)$$

Такимъ же образомъ изъ уравненій (58) и (59) получимъ:

$$\left(\frac{k^2}{1-z} - 4h^2\right)^3 = z\left[\frac{4}{81}\frac{(1-z)}{k^2}(3h\alpha+2\beta)^2 - \alpha^2\right]. \qquad (64)$$

Изъ уравненій (63) и (64) слѣдуетъ, что:

$$\frac{k^2\beta}{1-z} - h\gamma = \frac{1}{9}\frac{(1-z)}{k^2}(3h\alpha+2\beta)^2 - \frac{9}{4}\alpha^2, \qquad (65)$$

или:

$$\beta\left(\frac{k^2}{1-z}\right)^2 + \left(\frac{9}{4}\alpha^2 - h\gamma\right)\frac{k^2}{1-z} - \frac{(3h\alpha+2\beta)^2}{9} = 0. \qquad (66)$$

Вставляя въ это уравненіе вмѣсто

$$\frac{k^2}{1-z}$$

*) Приведенное въ текстѣ весьма искусное рѣшеніе этихъ уравненій заимствовано у Клейна (Vorles. üb. das Ikos. стр. 192). По словамъ Клейна онъ самъ заимствовалъ его изъ лекцій Гордана. Подобное же исключеніе есть у Киперта въ сочиненіи „Auflösung der Gleichungen fünften Grades". Журналъ Крелля. т. 87.

Digitized by Google

выраженіе, стоящее въ лѣвой части уравненія (62), находимъ:

$$16(\alpha^4-\beta^3+\alpha\beta\gamma)h^2-\frac{4}{3}(11\alpha^3\beta+2\beta^2\gamma-\alpha\gamma^2)h+$$
$$+\frac{1}{9}(64\alpha^2\beta^2-27\alpha^3\gamma-\beta\gamma^2)=0. \tag{67}$$

Таково квадратное уравненіе, опредѣляющее величину параметра h. Рѣшивъ его, будемъ имѣть:

$$h=\frac{11\alpha^3\beta+2\beta^2\gamma-\alpha\gamma^2\pm\alpha\sqrt{\Delta}}{24(\alpha^4-\beta^3+\alpha\beta\gamma)}, \tag{68}$$

гдѣ Δ есть дискриминантъ уравненія (54), опредѣляемый формулою (55).

Такъ какъ величины коэффиціентовъ α, β, γ извѣстны, то извѣстна и величина Δ. Вставивъ значенія α, β, γ, Δ въ формулу (68), находимъ величину h.

Подставимъ выраженіе (62) величины:

$$\frac{k^2}{1-z},$$

въ формулу (63) и опредѣлимъ изъ нея z:

$$z=\frac{(48\alpha h^2-12\beta h-\gamma)^3}{64\alpha^2(12\alpha\gamma h-12\beta^2 h-\beta\gamma)}. \tag{69}$$

Внеся величину h, вычисленную по формулѣ (68), въ выраженіе (69), мы вычислимъ величину z.

Выраженіе величины z дѣйствительно приметъ видъ:

$$z=A+B\sqrt{\Delta}. \tag{56}$$

Представимъ равенство (58) въ слѣдующемъ видѣ:

$$\alpha=\frac{8h^3+12h^2k}{z}+\frac{6h+k}{z}\cdot\frac{k^2}{1-z}. \tag{70}$$

Digitized by Google

Подставивъ въ него вмѣсто

$$\frac{k^2}{1-z}$$

выраженіе (62) и рѣшивъ затѣмъ полученное уравненіе относительно k, находимъ:

$$k = -\frac{96\alpha h^3 + 72\beta h^2 + 6\gamma h - 12\alpha^2 z}{144\alpha h^2 + 12\beta h + \gamma}. \qquad (71)$$

Вставивъ въ эту формулу вмѣсто h и z найденныя раньше значенія этихъ параметровъ, находимъ величину k.

Итакъ, формулы (68), (69), (71) даютъ возможность по даннымъ коэффиціентамъ α, β, γ уравненія (54) найти величины h, k, z. *Въ выраженія этихъ величинъ входитъ единственная ирраціональность: квадратный корень изъ дискриминанта уравненія (54).* Знакъ передъ этимъ радикаломъ вполнѣ произволенъ.

Въ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ мы будемъ полагать, что h, k, z имѣютъ числовыя значенія, найденныя по формуламъ (68), (69), (71). Въ такомъ случаѣ уравненіе (54) тождественно съ (57) и служитъ главною резольвентою 5-ой степени для нормальнаго икосаэдрическаго уравненія:

$$\frac{H^3(u)}{-12^3 f^5(u)} = z. \qquad (37')$$

Изъ формулы (131) главы X видно, что корни уравненія (57) выражаются черезъ корни уравненія (37′) слѣдующимъ образомъ:

$$Y = 12h\frac{f_u(u)\,H_0''(u)}{H_u(u)} + 12^2 k\frac{f_u^3(u)\,f_0''(u)\,H_0''(u)}{T_u(u)\,H_u(u)}. \qquad (72)$$

Вставляя въ эту формулу вмѣсто u корни икосаэдрическаго уравненія (37′), мы найдемъ всего 5 различныхъ величинъ, служащихъ корнями уравненія (57), или, что то же, даннаго намъ уравненія (54).

Digitized by Google

Такъ какъ мы знаемъ изъ сказаннаго въ главѣ X, что подстановкѣ

$$S(u) = \varepsilon u$$

икосаэдрической группы соотвѣтствуетъ субституція:

$$\Sigma = (Y_0,\ Y_1,\ Y_2,\ Y_3,\ Y_4) \qquad (73)$$

группы уравненія (57), то для нахожденія всѣхъ пяти корней уравненія (54) достаточно найти одинъ изъ корней u икосаэдрическаго уравненія (37′) и подставить въ формулу (72) послѣдовательно 5 величинъ:

$$u,\ \varepsilon u,\ \varepsilon^2 u,\ \varepsilon^3 u,\ \varepsilon^4 u. \qquad (74)$$

Полученныя 5 значеній величины Y будутъ служить пятью корнями уравненія (54).

Изъ сказаннаго въ настоящемъ параграфѣ вытекаетъ слѣдующій способъ рѣшенія всякаго главнаго уравненія 5-ой степени.

Подставивъ коэффиціенты α, β, γ даннаго уравненія въ формулы (68), (69), (71), находимъ величины h, k, z, которыя мы вносимъ въ формулы (37′) и (72).

Найдя одинъ изъ корней u икосаэдрическаго уравненія (37′), мы подставляемъ величины (74) вмѣсто u въ формулу (72).

Выполнивъ вычисленія, находимъ всѣ 5 корней уравненія (54).

Этотъ способъ рѣшенія принадлежитъ Клейну.

§ 51. Рѣшеніе уравненія 5-ой степени общаго вида.

Еще Абелемъ было показано, что въ случаѣ разрѣшимости алгебраическаго уравненія въ радикалахъ формула его рѣшенія можетъ быть построена такъ, чтобы всякій входящій въ нее радикалъ былъ раціональною функціею корней даннаго уравненія.

Такіе радикалы, которые могутъ быть выражены въ видѣ раціональныхъ функцій корней, Кронекеръ назвалъ *естественными* ирраціональностями въ противоположность тѣмъ радикаламъ, которые даже и черезъ корни уравненія выражаются

Digitized by Google

ирраціонально. Радикалы послѣдняго рода онъ назвалъ *вспомогательными* (accessorische) *).

Рѣшая *главное* уравненіе 5-ой степени, мы пользовались двумя ирраціональными величинами:

1) корнемъ икосаэдрическаго уравненія u, который выражается раціонально черезъ корни разрѣшаемаго уравненія 5-ой степени при посредствѣ формулы (31);

2) квадратнымъ радикаломъ изъ дискриминанта $\sqrt{\Delta}$, выражающимися тоже раціонально черезъ корни разрѣшаемаго уравненія:

$$\begin{aligned}\sqrt{\Delta}=&(y_0-y_1)(y_0-y_2)(y_0-y_3)(y_0-y_4)\times\\ &\times(y_1-y_2)(y_1-y_3)(y_1-y_4)\times\\ &\times(y_2-y_3)(y_2-y_4)\times\\ &\times(y_3-y_4).\end{aligned}\qquad(75)$$

Слѣдовательно мы въ правѣ сказать, что главное уравненіе 5-ой степени можетъ быть разрѣшено въ *естественныхъ* ирраціональностяхъ.

Посмотримъ, не можетъ ли уравненіе 5-ой степени общаго вида:

$$y^5+a_2y^3+a_3y^2+a_4y+a_5=0\qquad(76)$$

быть разрѣшено въ естественныхъ ирраціональностяхъ подобно тому, какъ разрѣшается главное уравненіе 5-ой степени.

Если уравненіе (76) разрѣшимо въ естественныхъ ирраціональностяхъ при посредствѣ корней икосаэдрическаго уравненія, то должна существовать *раціональная* функція корней уравненія (76), которая при субституціяхъ группы этого уравненія испытываетъ линейныя преобразованія икосаэдрической группы. Назовемъ эту функцію снова буквою u.

---

*) Объ этомъ различіи см. Kronecker. Ueber die Gleichungen fünften Grades. Crelles Journal Bd. 59. А также: Klein. Vorlesungen über das Ikosaeder. Стр. 157.

Digitized by Google

Пусть корни уравненія (76) обозначены буквами:

$$y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, \tag{77}$$

между ними существуетъ линейное соотношеніе:

$$y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0, \tag{78}$$

позволяющее во всѣхъ нашихъ формулахъ исключить одинъ изъ корней, напр. y_4. Остальные четыре корня вполнѣ между собою независимы.

Функція u представится въ видѣ:

$$u = \frac{\varphi(y_0, y_1, y_2, y_3)}{\psi(y_0, y_1, y_2, y_3)}, \tag{79}$$

гдѣ φ и ψ суть цѣлыя раціональныя функціи аргументовъ, не имѣющія общихъ множителей.

Совершимъ такую *четную* субституцію величинъ (77), которая измѣняетъ величину функціи (79).

Въ результатѣ находимъ:

$$\bar{u} = \frac{\bar{\varphi}(y_0, y_1, y_2, y_3)}{\bar{\psi}(y_0, y_1, y_2, y_3)}. \tag{80}$$

Согласно сдѣланному нами условію $\bar{u}$ есть линейная функція u:

$$\bar{u} = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}. \tag{81}$$

Отсюда вытекаетъ тождество:

$$\frac{\bar{\varphi}(y_0, y_1, y_2, y_3)}{\bar{\psi}(y_0, y_1, y_2, y_3)} = \frac{\alpha\varphi(y_0, y_1, y_2, y_3) + \beta\psi(y_0, y_1, y_2, y_3)}{\gamma\varphi(y_0, y_1, y_2, y_3) + \delta\psi(y_0, y_1, y_2, y_3)}. \tag{82}$$

Такъ какъ многочлены φ и ψ не имѣютъ общихъ множителей, то обѣ дроби, входящія въ равенство (82), несократимы.

Такъ какъ, кромѣ того, величины:

$$y_0, y_1, y_2, y_3$$

Digitized by Google

между собою вполнѣ независимы, то должны имѣть мѣсто тождества *):

$$\left.\begin{aligned}\bar{\varphi}(y_0, y_1, y_2, y_3) &= C[\alpha\varphi(y_0, y_1, y_2, y_3) + \beta\psi(y_0, y_1, y_2, y_3)],\\ \bar{\psi}(y_0, y_1, y_2, y_3) &= C[\gamma\varphi(y_0, y_1, y_2, y_3) + \delta\psi(y_0, y_1, y_2, y_3)].\end{aligned}\right\} \quad (83)$$

Слѣдовательно, каждой изъ 60 субституцій знакоперемѣнной группы соотвѣтствуетъ линейная бинарная подстановка надъ величинами φ и ψ.

Совершимъ надъ φ и ψ всѣ 60 субституцій и найдемъ соотвѣтствующія имъ 60 бинарныхъ линейныхъ подстановокъ. Эти 60 бинарныхъ подстановокъ образуютъ группу, потому что соотвѣтствующія имъ субституціи образуютъ группу. Между этими шестьюдесятью подстановками равныхъ оказаться не можетъ—иначе величина u имѣла бы меньше 60 значеній.

Итакъ, найденныя нами бинарныя линейныя подстановки образуютъ группу бинарныхъ линейныхъ подстановокъ 60-го порядка изоморфную съ икосаэдрической группой неоднородныхъ линейныхъ подстановокъ. Это заключеніе противорѣчитъ теоремѣ 4 главы IV. Отсюда слѣдуетъ, что нѣтъ такой *раціональной* функціи корней уравненія 5-ой степени общаго вида, которая удовлетворяла бы икосаэдрическому уравненію.

Для разрѣшенія уравненія 5-ой степени (76) намъ надо преобразовать его раціональною подстановкою въ главное уравненіе.

Въ коэффиціенты этого раціональнаго преобразованія непремѣнно войдутъ радикалы, и при томъ эти радикалы будутъ *вспомогательными*.

---

*) Въ случаѣ главнаго уравненія величины:

$$y_0, y_1, y_2, y_3,$$

связаны между собою уравненіемъ главной поверхности:

$$y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_0y_1 + y_0y_2 + y_0y_3 + y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = 0. \quad (14)$$

Поэтому къ главному уравненію сказанное выше непримѣнимо. Въ этомъ заключается существенное различіе главнаго уравненія отъ общаго.

Digitized by Google

Геометрическій смыслъ такого преобразованія заключается въ слѣдующемъ: мы устанавливаемъ соотвѣтствіе между точками пространства и точками главной поверхности такъ, чтобы каждой точкѣ пространства соотвѣтствовала единственная точка главной поверхности. Мы можемъ этого достичь различно: напр. проведя черезъ данную точку пространства лучъ въ опредѣленномъ произвольно выбранномъ направленіи, мы можемъ принимать за соотвѣтственную одну изъ двухъ точекъ пересѣченія этого луча съ главною поверхностью. Для раздѣленія двухъ точекъ пересѣченія луча съ главною поверхностью придется ввести въ формулы одинъ *вспомогательный* квадратный радикалъ.

На практикѣ всего удобнѣе выполнить преобразованіе уравненія (76) въ главное уравненіе, положивъ:

$$Y = y^2 + Ay + B. \tag{84}$$

Обозначивъ буквами:

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4$$

извѣстныя симметрическія функціи корней уравненія (76) и припомнивъ, что для уравненія (76)

$$s_1 = 0,$$

находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma Y &= s_2 + 5B, \\ \Sigma Y^2 &= s_4 + 2As_3 + (A^2 + 2B)s_2 + 5B^2. \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

Для того, чтобы преобразованное уравненіе было главнымъ, величины A и B должны удовлетворять условіямъ:

$$\left.\begin{aligned} s_2 + 5B &= 0, \\ s_4 + 2As_3 + (A^2 + 2B)s_2 + 5B^2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

Величина B раціональна, а A зависитъ отъ одного вспомогательнаго квадратнаго радикала.

Digitized by Google

§ 52. Рѣшеніе уравненія 5-ой степени въ формѣ Жерарда.

Уравненіе Жерарда:

$$y^5 + 5\beta y + \gamma = 0 \qquad (87)$$

принадлежитъ къ числу *главныхъ*. Его рѣшеніе получится изъ формулъ главнаго уравненія, если мы положимъ въ этихъ формулахъ $\alpha = 0$.

Положивъ:

$$\alpha = 0$$

въ формулѣ (55), получимъ:

$$\Delta = 256\beta^5 + \gamma^4. \qquad (88)$$

Изъ формулы (68) находимъ:

$$h = -\frac{\gamma}{12\beta}. \qquad (89)$$

Подставивъ выраженіе (68) величины h въ формулу:

$$12\beta h + \gamma,$$

и разложивъ полученную функцію по возрастающимъ степенямъ α, будемъ имѣть:

$$12\beta h + \gamma = -\frac{\gamma^2 \pm \sqrt{\Delta}}{2\beta^2}\alpha + \ldots, \qquad (90)$$

гдѣ Δ имѣетъ значеніе, опредѣляемое формулою (88).

Подставивъ выраженіе (90) величины:

$$12\beta h + \gamma$$

въ формулу (69), произведя сокращеніе полученной дроби на α^3 и положивъ затѣмъ:

$$\alpha = 0,$$

находимъ:

$$s = \frac{(96^2\beta h^2 + \gamma^2 \pm \sqrt{\Delta})^3}{256\beta^5(243\gamma h + \gamma^3 \pm \sqrt{\Delta})}, \qquad (91)$$

Digitized by Google

или, подставляя вмѣсто h выраженіе (89):

$$z = \frac{\left\{\frac{5}{3}\gamma^2 \pm \sqrt{\Delta}\right\}^3}{256(-\gamma^2 \pm \sqrt{\Delta})\beta^5}. \qquad (92)$$

Подставивъ выраженіе (90) въ формулу (71), сокративъ полученную дробь на α и положивъ затѣмъ $\alpha = 0$, находимъ:

$$k = \frac{192\beta^2 h^2 - 6(\gamma^2 \pm \sqrt{\Delta})}{-288h^2\beta^2 + \gamma^2 \pm \sqrt{\Delta}} h, \qquad (93)$$

или, подставляя вмѣсто h выраженіе (89):

$$k = \frac{\left(\frac{7}{9}\gamma^2 \pm \sqrt{\Delta}\right)\gamma}{2(-\gamma^2 \pm \sqrt{\Delta})\beta}. \qquad (94)$$

Найдя числовыя значенія h, k, z по формуламъ (89), (92), (94), мы будемъ дальше рѣшать уравненіе (87) совершенно такъ же какъ выше рѣшали уравненіе (54).

Извѣстно, что всякое уравненіе 5-ой степени раціональнымъ преобразованіемъ приводится къ Жеррардовой формѣ. Посмотримъ, каковъ геометрическій смыслъ преобразованія главнаго уравненія въ Жеррардово.

Геометрическимъ изображеніемъ Жеррардова уравненія служитъ кривая 6-го порядка въ пространствѣ, служащая линіей пересѣченія поверхностей: главной и діагональной. Желая преобразовать главное уравненіе въ Жеррардово, мы устанавливаемъ такое соотвѣтствіе между точками главной поверхности и этой кривой 6-го порядка, чтобы каждой точкѣ главной поверхности соотвѣтствовала единственная точка кривой 6-го порядка.

Всего проще сдѣлать это такъ: провести черезъ данную точку главной поверхности одну изъ прямолинейныхъ образующихъ, найти три точки пересѣченія этой образующей съ діагональною поверхностью и одну изъ этихъ трехъ точекъ при-

Digitized by Google

нять за соотвѣтственную съ данной точкой. Для раздѣленія трехъ точекъ пересѣченія образующей съ діагональною поверхностью придется рѣшить кубичное уравненіе, при чемъ въ формулы войдутъ два радикала: квадратный и кубичный.

Въ справедливости этого заключенія можно убѣдиться и аналитически. Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли, что всякое главное уравненіе 5-ой степени есть резольвента икосаэдрическаго уравненія:

$$\frac{H_u^3(u)}{-12^3 f_u^5(u)} = z, \qquad (37')$$

гдѣ z есть нѣкоторая извѣстная намъ функція коэффиціентовъ даннаго уравненія 5-ой степени.

Преобразуя раціонально данное намъ уравненіе 5-ой степени, мы будемъ получать всевозможныя резольвенты 5-ой степени того же уравненія (37'). Всѣ эти главныя резольвенты заключены въ формулѣ (57) и разнятся только значеніями параметровъ h и k. Если мы хотимъ, чтобы преобразованное уравненіе было Жеррардово, то должны выбрать h и k такъ, чтобы они удовлетворяли условію:

$$8h^3 + 12h^2k + \frac{6hk^2 + k^3}{1-z} = 0, \qquad (95)$$

т. е. чтобы отношеніе

$$\frac{h}{k}$$

было корнемъ *кубичнаго* уравненія:

$$8\left(\frac{h}{k}\right)^3 + 12\left(\frac{h}{k}\right)^2 + \frac{6}{1-z}\left(\frac{h}{k}\right) + \frac{1}{1-z} = 0. \qquad (96)$$

При рѣшеніи этого уравненія дѣйствительно входятъ два радикала: квадратный и кубичный.

§ 53. **Рѣшеніе уравненія 4-ой степени.**

Уравненіе 4-ой степени общаго вида можетъ быть изображено такъ:

$$y^4 + a_2 y^2 + a_3 y + a_4 = 0. \qquad (97)$$

Digitized by Google

Главное уравненіе 4-ой степени таково:

$$y^4+a_3y+a_4=0. \tag{98}$$

Сравнимъ это уравненіе съ уравненіемъ (87) главы X:

$$Y^4+\frac{4}{27h^3z}Y+\frac{1}{27h^4z}=0. \tag{99}$$

Уравненіе (99) есть резольвента 4-ой степени октаэдрическаго уравненія во второй нормальной формѣ:

$$\frac{64\sqrt{2}\left(u^7-\frac{1}{2\sqrt{2}}u^4-u\right)^3}{(u^6+5\sqrt{2}u^3-1)^4}=z. \tag{100}$$

Корни уравненій (99) и (100) связаны между собою соотношеніемъ:

$$u^3-\frac{1}{u^3}=\frac{7\sqrt{2}\,hY-5\sqrt{2}}{4hY+1}, \tag{101}$$

откуда:

$$Y=\frac{u^3-\frac{1}{u^3}+5\sqrt{2}}{7\sqrt{2}\,h-4h\left(u^3-\frac{1}{u^3}\right)}. \tag{102}$$

Для тождественности уравненій (98) и (99) необходимо выбрать величины h и z такъ, чтобы они удовлетворяли уравненіямъ:

$$a_3=\frac{4}{27h^3z},\quad a_4=\frac{1}{27h^4z}. \tag{103}$$

Изъ этихъ уравненій находимъ:

$$h=\frac{a_3}{4a_4},\quad z=\frac{1}{27h^4a_4}. \tag{104}$$

Подставивъ въ формулы (102) и (100) вмѣсто h и z ихъ величины, опредѣляемыя формулами (104), и внеся затѣмъ въ формулу (102) вмѣсто u величину одного изъ корней окта-

Digitized by Google

эдрическаго уравненія (100), мы находимъ величину одного изъ корней уравненія (98).

Для полученія всѣхъ четырехъ корней уравненія (98), мы должны послѣдовательно подставить въ формулу (102) четыре слѣдующихъ корня октаэдрическаго уравненія (100):

$$u,\ \mathfrak{S}(u),\ \mathfrak{S}^2(u),\ \mathfrak{S}^3(u), \tag{105}$$

гдѣ:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{S}(u) &= \frac{1 + \sqrt{2}\,\varepsilon^2 u}{u - \sqrt{2}\,\varepsilon}, \\ \varepsilon &= e^{\frac{2\pi i}{3}}. \end{aligned}\right\} \tag{106}$$

Для рѣшенія уравненія 4-ой степени общаго вида (97) въ гипергеометрическихъ функціяхъ, мы должны предварительно преобразовать его въ главное уравненіе. Для этого преобразованія мы можемъ воспользоваться приведенными выше формулами (84) и (86). Коэффиціентъ A будетъ выражаться при помощи одного *вспомогательнаго* квадратнаго радикала.

Геометрическій смыслъ этого преобразованія слѣдующій. Мы устанавливаемъ такое соотвѣтствіе между точками плоскости и точками главнаго коническаго сѣченія:

$$Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 = 0, \tag{107}$$

чтобы каждой точкѣ плоскости, соотвѣтствовала единственная точка на коническомъ сѣченіи (107).

Координаты:

$$Y_0,\ Y_1,\ Y_2,\ Y_3$$

этой точки мы принимаемъ за корни преобразованнаго уравненія.

Мы можемъ установить такое соотвѣтствіе, проводя черезъ точку плоскости лучъ въ произвольномъ направленіи и принимая одну изъ точекъ пересѣченія его съ *главною* кривою (107) за соотвѣтственную точку.

Digitized by Google

Для раздѣленія двухъ точекъ пересѣченія луча съ кривою (107) необходимо ввести въ формулы одинъ *вспомогательный* квадратный радикалъ.

Мы убѣждаемся въ томъ, что этотъ радикалъ—вспомогательный, повторяя разсужденія, приведенныя выше по поводу уравненія 5-ой степени.

Если бы радикалъ не былъ *вспомогательнымъ*, то корни уравненія четвертой степени общаго вида были бы раціональными функціями корней октаэдрическаго уравненія.

Отсюда мы пришли бы къ заключенію, что существуетъ группа однородныхъ линейныхъ подстановокъ изоморфная съ октаэдрической; а это противорѣчило бы теоремѣ 4 главы IV.

§ 54. **Рѣшеніе уравненія 3-ей степени.**

Кубичное уравненіе общаго вида:

$$y^3 + a_2 y + a_3 = 0 \qquad (108)$$

есть главное уравненіе.

Такъ какъ изъ сказаннаго въ § 20 слѣдуетъ, что двупирамидная группа 6-го порядка можетъ быть изоморфна съ соотвѣтствующею ей группою бинарныхъ линейныхъ подстановокъ, то мы въ правѣ ожидать, что корни кубичнаго уравненія общаго вида суть раціональныя функціи корней двупирамиднаго уравненія 6-ой степени.

И дѣйствительно, не трудно убѣдиться въ томъ, что Лагранжева функція:

$$u = y_0 + \varepsilon^2 y_1 + \varepsilon y_2, \text{ гдѣ } \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}. \qquad (109)$$

подъ вліяніемъ симметрической группы субституцій изъ трехъ буквъ испытываетъ линейныя преобразованія.

Примѣнимъ къ функціи (109) основныя субституціи:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= (y_0,\ y_1,\ y_2), \\ \tau &= (y_0)\ (y_1,\ y_2), \end{aligned}\right\} \qquad (110)$$

симметрической группы.

Digitized by Google

Подъ вліяніемъ этихъ субституцій функція (109) преобразуется въ $\bar{u}$ и $\bar{\bar{u}}$, при чемъ:

$$\left.\begin{aligned} \bar{u} &= y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon y_0 = \varepsilon u, \\ \bar{\bar{u}} &= y_0 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon y_1 = \\ &= \frac{y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 - y_0 y_1 - y_0 y_2 - y_1 y_2}{u} = \frac{-a_2}{u}. \end{aligned}\right\} \quad (111)$$

Слѣдовательно подъ вліяніемъ субституцій σ и τ функція u испытываетъ линейныя подстановки:

$$S_1(u) = \varepsilon u, \quad \mathfrak{S}_1(u) = -\frac{a_2}{u}. \quad (112)$$

Функція величины u, инваріантная относительно этихъ подстановокъ, такова:

$$u^3 - \frac{a_2^3}{u^3}. \quad (113)$$

Функція эта не мѣняется подъ вліяніемъ основныхъ субституцій σ и τ группы уравненія (108); она не измѣнится и отъ всевозможныхъ субституцій той же группы. Это—симметрическая функція корней уравненія (108).

Дѣйствительно, произведя вычисленія, находимъ, что:

$$u^3 - \frac{a_2^3}{u^3} = -27 a_3. \quad (114)$$

Таково то двупирамидное уравненіе 6-го порядка, которому удовлетворяетъ величина u. Основныя подстановки S_1 и $\mathfrak{S}_1$ группы уравненія (114) опредѣляются формулами (112).

Всѣ три корня кубичнаго уравненія (108) суть раціональныя функціи корня u уравненія (114). Они могутъ быть найдены изъ уравненій:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} u &= y_0 + \varepsilon^2 y_1 + \varepsilon y_2, \\ -\frac{a_2}{u} &= y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2, \\ 0 &= y_0 + y_1 + y_2. \end{aligned}\right\} \qquad (115)$$

Изъ этихъ уравненій имѣемъ:

$$y_0 = \frac{1}{3}\left(u - \frac{a_2}{u}\right),\ y_1 = \frac{1}{3}\left(\varepsilon u - \varepsilon^2 \frac{a_2}{u}\right),\ y_2 = \frac{1}{3}\left(\varepsilon^2 u - \varepsilon \frac{a_2}{u}\right). \qquad (116)$$

Уравненіе (114) есть двупирамидное уравненіе, неприведенное къ нормальной формѣ.

Мы можемъ рѣшить кубичное уравненіе (108), слѣдуя тому пути какимъ мы шли въ предшествующихъ случаяхъ.

Сравнивъ уравненіе (108) съ резольвентой (50) главы X, мы можемъ выбрать параметры h и z такъ чтобы эти уравненія были тождественны между собою. Тогда корни уравненія (108) выразятся, какъ раціональныя функціи корней нормальнаго двупирамиднаго уравненія. Однако необходимо замѣтить, что при этомъ выраженія h и z будутъ содержать въ себѣ *вспомогательный* квадратный радикалъ:

$$\sqrt{a_2},$$

который для рѣшенія уравненія (108) является излишнимъ.

§ 55. **Уравненіе Якоби 6-ой степени.**

Слѣдуя Бріоски, мы будемъ называть уравненіемъ Якоби 6-ой степени *всякое* уравненіе 6-ой степени, обладающее слѣдующимъ свойствомъ: его корни

$$y_\infty,\ y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4 \qquad (117)$$

выражаются формулами:

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{y_\infty} = \sqrt{5}\,A_0, \\ &\sqrt{y_k} = A_0 + \varepsilon^k A_1 + \varepsilon^{4k} A_2,\ k = 0, 1, 2, 3, 4,\ \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}. \end{aligned}\right\} \qquad (118)$$

Въ этихъ формулахъ величины

Digitized by Google

$$A_0,\ A_1,\ A_2 \qquad (119)$$

суть нѣкоторыя количества, опредѣляющія собою коэффиціенты уравненія.

Равенства (118) устанавливаютъ нѣкоторую линейную связь между квадратными корнями изъ величинъ (117): исключивъ три величины (119) изъ шести уравненій (118), мы находимъ три различныхъ между собою линейныхъ соотношенія между шестью квадратными радикалами изъ корней (117) уравненія Якоби.

Рѣшивъ уравненія (118) относительно величинъ

$$A_0,\ A_1,\ A_2, \qquad (119)$$

находимъ:

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{y_\infty} = \frac{1}{5}\left(\sqrt{y_0}+\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3}+\sqrt{y_4}\right),\\ A_1 &= \frac{1}{5}\left(\sqrt{y_0}+\varepsilon^4\sqrt{y_1}+\varepsilon^3\sqrt{y_2}+\varepsilon^2\sqrt{y_3}+\varepsilon\sqrt{y_4}\right),\\ A_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sqrt{y_0}+\varepsilon\sqrt{y_1}+\varepsilon^2\sqrt{y_2}+\varepsilon^3\sqrt{y_3}+\varepsilon^4\sqrt{y_4}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (120)$$

Слѣдовательно величины

$$A_0,\ A_1,\ A_2 \qquad (119)$$

суть три такія функціи корней уравненія Якоби, черезъ которыя всѣ корни этого уравненія выражаются раціонально.

Отсюда, между прочимъ, видно, что корни уравненія Якоби суть функціи трехъ, вообще говоря, независимыхъ между собою параметровъ (119).

Пусть уравненіе, имѣющее корнями величины (117), таково:

$$y^6+a_1y^5+a_2y^4+a_3y^3+a_4y^2+a_5y+a_6=0. \qquad (121)$$

Выразимъ симметрическія функціи

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ s_5,\ s_6$$

Digitized by Google

корней уравненія (121) черезъ величины (119) при помощи формулъ (118) и вычислимъ затѣмъ коэфиціенты уравненія (121), примѣняя формулы Ньютона.

Въ результатѣ этихъ довольно сложныхъ вычисленій, *) находимъ:

$$\left.\begin{aligned} &a_1=-10A,\ a_2=35A^2,\ a_3=-60A^3+10B,\\ &a_4=55A^4-30AB,\ a_5=-26A^5+30A^2B-4C,\\ &a_6=5(A^3-B)^2, \end{aligned}\right\} \quad (122)$$

гдѣ:

$$\left.\begin{aligned} &A=A_0^2+A_1A_2,\ B=8A_0^4A_1A_2-2A_0^2A_1^2A_2^2+A_1^3A_2^3-\\ &\qquad -A_0(A_1^5+A_2^5),\\ &C=320A_0^6A_1^2A_2^2-160A_0^4A_1^3A_2^3+20A_0^2A_1^4A_2^4+\\ &\quad +6A_1^5A_2^5-4A_0(32A_0^4-20A_0^2A_1A_2+\\ &\quad +5A_1^2A_2^2)(A_1^5+A_2^5)+A_1^{10}+A_2^{10}. \end{aligned}\right\} \quad (123)$$

Вставивъ выраженія (122) въ уравненіе (121), мы приведемъ его къ такому виду:

$$(y-A)^6-4A(y-A)^5+10B(y-A)^3-4C(y-A)+ \quad (124)$$
$$+5B^2-4AC=0.$$

Если Якобіево уравненіе (121) дано, то величины коэффиціентовъ

$$A,\ B,\ C$$

намъ извѣстны: они выражаются *раціонально* черезъ:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6$$

при посредствѣ формулъ (122).

---

*) Эти вычисленія принадлежатъ Бріоски. См. Annali di Matematica. T. I. Sulla risoluzione delle equazioni del quinto grado; или Mathem. Annalen, Die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade.

Digitized by Google

Формулы (122) показываютъ, что между *шестью* коэффиціентами уравненія Якоби существуетъ *три* соотношенія. Коэффиціенты этого уравненія, точно такъ же, какъ и его корни, суть функціи трехъ, вообще говоря, независимыхъ между собою параметровъ. За такіе параметры всего естественнѣе принять величины

$$A,\ B,\ C.$$

Эти величины раціонально извѣстны.

Посмотримъ, нельзя ли уравненіе Якоби (124) преобразовать раціонально въ другое уравненіе того же типа *).

Такъ какъ уравненіе Якоби содержитъ въ себѣ три параметра, то введя въ формулу искомаго раціональнаго преобразованія три произвольныхъ коэффиціента, мы будемъ имѣть самую общую формулу раціональнаго преобразованія уравненія Якоби въ другое уравненіе того же типа. Каково бы ни было первоначальное уравненіе Якоби,—преобразованное уравненіе будетъ уравненіемъ Якоби *самаго общаго вида.*

Изъ формулъ (123) находимъ:

$$\frac{\partial A}{\partial A_0} = 2A_0,\quad \frac{\partial A}{\partial A_1} = A_2,\quad \frac{\partial A}{\partial A_2} = A_1. \tag{125}$$

Кромѣ того, введемъ такія обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial B}{\partial A_0} = 2A_0',\quad \frac{\partial B}{\partial A_1} = A_2',\quad \frac{\partial B}{\partial A_2} = A_1', \\ &\frac{1}{5}\frac{\partial C}{\partial A_0} = 2A_0'',\quad \frac{1}{5}\frac{\partial C}{\partial A_1} = A_2'',\quad \frac{1}{5}\frac{\partial C}{\partial A_2} = A_1''. \end{aligned}\right\} \tag{126}$$

Величины:

$$A_0',\ A_1',\ A_2',\ A_0'',\ A_1'',\ A_2''$$

легко найдутся по формуламъ (123).

---

*) Приведенное ниже весьма искусное преобразованіе уравненія Якоби принадлежитъ Бріоски.

Digitized by Google

Изъ формулъ (118), (125), (126), находимъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial A_0} = 1 = 2\left[\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial A}A_0 + \frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial B}A_0' + 5\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial C}A_0''\right],\\
&\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial A_1} = \varepsilon^k = \frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial A}A_2 + \frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial B}A_2' + 5\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial C}A_2'',\\
&\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial A_2} = \varepsilon^{4k} = \frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial A}A_1 + \frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial B}A_1' + 5\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial C}A_1'',\\
&k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.
\end{aligned}\right\} \quad (127)$$

Умножимъ соотвѣтственно равенства (127) на слѣдующія величины:

1) на A_0, A_1, A_2,
2) на A_0', A_1', A_2',
3) на A_0'', A_1'', A_2'',

и послѣ каждаго умноженія сложимъ между собою три полученныхъ равенства.

Принявъ во вниманіе формулы (118) и введя новыя обозначенія:

$$\left.\begin{aligned}
&\sqrt{y_k'} = A_0' + \varepsilon^k A_1' + \varepsilon^{4k} A_2',\\
&\sqrt{y_k''} = A_0'' + \varepsilon^k A_1'' + \varepsilon^{4k} A_2'',\\
&k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,
\end{aligned}\right\} \quad (128)$$

находимъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sqrt{y_k} = A\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial A} + b\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial B} + 5c\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial C},\\
&\frac{1}{2}\sqrt{y'_k} = b\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial A} + A'\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial B} + 5g\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial C},\\
&\frac{1}{2}\sqrt{y_k''} = c\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial A} + g\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial B} + 5A''\frac{\partial\sqrt{y_k}}{\partial C},\\
&k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.
\end{aligned}\right\} \quad (129)$$

Digitized by Google

Въ этихъ формулахъ буквами

$$A,\ A',\ A'',\ b,\ c,\ g$$

обозначены слѣдующія величины:

$$\left.\begin{aligned} A &= A_0^2 + A_1A_2, \\ A' &= A_0'^2 + A_1'A_2', \\ A'' &= A_0''^2 + A_1''A_2'', \\ b &= \frac{1}{2}(2A_0A_0' + A_1A_2' + A_2A_1'), \\ c &= \frac{1}{2}(2A_0A_0'' + A_1A_2'' + A_2A_1''), \\ g &= \frac{1}{2}(2A_0'A_0'' + A_1'A_2'' + A_2'A_1''). \end{aligned}\right\} \quad (130)$$

Величины A, A', A'', b, c, g раціонально извѣстны, ибо онѣ суть раціональныя функціи отъ A, B, C. Въ самомъ дѣлѣ, подставивъ въ формулахъ (130) вмѣсто величинъ:

$$A_0',\ A_1',\ A_2',\ A_0'',\ A_1'',\ A_2''$$

ихъ выраженія (126) и принявъ во вниманіе формулы (123) найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} A &= A, & b &= 3B, \\ A' &= 8A^2B + C, & c &= C, \\ A'' &= 4ABC - 3B^3, & g &= 4A^2C - AB^2. \end{aligned}\right\} \quad (131)$$

Присоединивъ къ величинамъ (128) величины:

$$\sqrt{y'_\infty} = \sqrt{5}A_0',\ \sqrt{y''_\infty} = \sqrt{5}A_0'', \quad (132)$$

мы можемъ составить два Якобіевыхъ уравненія, имѣющихъ корнями слѣдующія величины:

Digitized by Google

$$1)\ y'_\infty,\ y_0',\ y_1',\ y_2',\ y_3'\ y_4', \tag{133}$$

$$2)\ y''_\infty,\ y_0'',\ y_1'',\ y_2'',\ y_3'',\ y_4''. \tag{134}$$

Эти уравненія могутъ быть получены раціональнымъ преобразованіемъ уравненія (124).

Въ самомъ дѣлѣ, обозначимъ черезъ y_h одинъ изъ корней уравненія (124), при чемъ индексъ h имѣетъ одно изъ шести значеній:

$$\infty,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Изъ уравненія (124) слѣдуетъ, что величины:

$$\frac{d\sqrt{y_h}}{dA},\ \frac{d\sqrt{y_h}}{dB},\ \frac{d\sqrt{y_h}}{dC}$$

могутъ быть изображены формулами вида:

$$\left.\begin{array}{c} f_1(y_h,\ A,\ B,\ C)\sqrt{y_h}.\ f_2(y_h, A,\ B,\ C)\sqrt{y_h}, \\ f_3(y_h,\ A.\ B,\ C)\sqrt{y_h}, \end{array}\right\} \tag{135}$$

гдѣ f_1, f_2, f_3 суть раціональныя функціи.

Подставивъ эти выраженія въ формулы (129), мы найдемъ, что величины $\sqrt{y_h'}$, $\sqrt{y_h''}$ могутъ быть изображены формулами вида:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{y_h'} = \Phi_1(y_h,\ A,\ B,\ C)\sqrt{y_h}, \\ \sqrt{y_h''} = \Phi_2(y_h,\ A,\ B,\ C)\sqrt{y_h}, \end{array}\right\} \tag{136}$$

гдѣ Φ_1 и Φ_2 суть раціональныя функціи, а индексъ h принимаетъ послѣдовательно значенія: 0, 1, 2, 3, 4.

Возведя равенства (136) въ квадратъ, находимъ:

$$\left.\begin{array}{l} y_h' = \Phi_1^2(y_h,\ A,\ B,\ C)y_h, \\ y_h'' = \Phi_2^2(y_h,\ A,\ B,\ C)y_h. \end{array}\right\} \tag{137}$$

Формулы эти сохраняютъ силу и для значенія $h = \infty$.

Digitized by Google

Эти равенства показываютъ, что дѣйствительно Якобіевы уравненія, которымъ удовлетворяютъ величины (133) и (134), могутъ быть получены раціональнымъ преобразованіемъ уравненія (124).

Положимъ:

$$\sqrt{Y_h} = p\sqrt{y_h} + q\sqrt{y_h'} + r\sqrt{y_h''}. \qquad (138)$$

гдѣ p, q, r суть произвольно взятыя постоянныя числа, а индексъ h снова послѣдовательно принимаетъ значенія:

$$\infty, 0, 1, 2, 3, 4.$$

Изъ формулъ (118), (128), (132) слѣдуетъ, что величины:

$$Y_\infty, Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, \qquad (139)$$

опредѣляемыя формулою (138), суть корни нѣкотораго новаго уравненія Якоби.

Изъ формулъ (136) и (138) находимъ:

$$\sqrt{Y_h} = \{p + q\Phi_1(y_h, A, B, C) + r\Phi_2(y_h, A, B, C)\}\sqrt{y_h},$$

откуда:

$$Y_h = \{p + q\Phi_1(y_h, A, B, C) + r\Phi_2(y_h, A, B\ C)\}^2 y_h. \qquad (140)$$

Эта формула показываетъ, что уравненіе Якоби, имѣющее корнями величины (139), тоже получается изъ уравненія (124) раціональнымъ преобразованіемъ.

Такъ какъ раціональная подстановка (140) содержитъ въ себѣ три совершенно произвольныхъ параметра: p, q, r, то подстановка (140) есть самая общая раціональная подстановка, преобразующая уравненіе Якоби (124) въ уравненіе того же типа; а преобразованное уравненіе—есть самое общее уравненіе Якоби, какое можетъ быть получено изъ уравненія (124) раціональнымъ преобразованіемъ.

Обозначимъ параметры, аналогичные A, B, C, для преобразованнаго уравненія Якоби буквами:

Digitized by Google

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$.

Это суть раціональныя функціи отъ:

$$A,\ B,\ C,\ p,\ q,\ r.$$

Остановимся на вычисленіи $\mathfrak{A}$ *).

Изъ уравненія Якоби (124) слѣдуетъ, что:

$$\Sigma y_h = 10A. \tag{141}$$

На томъ же основаніи будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma y_h' &= 10A', \\ \Sigma y_h'' &= 10A'', \\ \Sigma Y_h &= 10\mathfrak{A}. \end{aligned}\right\} \tag{142}$$

Подставивъ въ выраженіе ΣY_h вмѣсто Y_h ея выраженіе изъ равенства (138), находимъ:

$$\Sigma Y_h = p^2\Sigma y_h + q^2\Sigma y_h' + r^2\Sigma y_h'' + \tag{143}$$

$$+ 2pq\,\Sigma\sqrt{y_h y_h'} + 2pr\,\Sigma\sqrt{y_h y_h''} + 2qr\,\Sigma\sqrt{y_h' y_h''}.$$

Изъ формулъ (118), (128), (132), находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\sqrt{y_h y_h'} &= 10A_0A_0' + 5A_1A_2' + 5A_2A_1', \\ \Sigma\sqrt{y_h y_h''} &= 10A_0A_0'' + 5A_1A_2'' + 5A_2A_1'', \\ \Sigma\sqrt{y_h' y_h''} &= 10A_0'A_0'' + 5A_1'A_2'' + 5A_2'A_1'', \end{aligned}\right\} \tag{144}$$

или, на основаніи формулъ (130):

$$\Sigma\sqrt{y_h y_h'} = 10b,\ \Sigma\sqrt{y_h y_h''} = 10c,\ \Sigma\sqrt{y_h' y_h''} = 10g. \tag{145}$$

Изъ формулъ (141), (142), (143), (145) находимъ:

$$\mathfrak{A} = p^2A + q^2A' + r^2A'' + 2pqb + 2prc + 2qrg. \tag{146}$$

*) Результаты этихъ вычисленій приведены у Бріоски. Онъ ведетъ вычисленія нѣсколько иначе и, по видимому, сложнѣе.

Digitized by Google

Подставивъ въ эту формулу вмѣсто A', A'', b, c, g выраженія этихъ величинъ (131), получаемъ:

$$\mathfrak{A}=p^2A+q^2(8A^2B+C)+r^2(4ABC-3B^2)+ \\ +6pqB+2prC+2qr(4A^2C-AB^2). \tag{147}$$

Отсюда видно, что если въ данномъ уравненіи Якоби (124) коэффиціентъ A былъ отличенъ отъ нуля, то раціональнымъ преобразованіемъ можно достичь того, чтобы преобразованное уравненіе было того же Якобіева типа и имѣло параметръ $\mathfrak{A}$ равный нулю. Въ самомъ дѣлѣ, для этой цѣли достаточно выбрать параметры p, q и r такъ, чтобы выраженіе (147) обратилось въ нуль.

Приравнявъ выраженіе (147) нулю, мы находимъ одно квадратное уравненіе между двумя независимыми между собою величинами:

$$\frac{q}{p} \text{ и } \frac{r}{p}.$$

Слѣдовательно, существуетъ безчисленное множество раціональныхъ подстановокъ, преобразующихъ уравненіе Якоби въ новое уравненіе того же типа, имѣющее при томъ коэффиціентъ A равный нулю.

Положивъ:

$$r=0,$$

и приравнявъ выраженіе (147) нулю, мы находимъ слѣдующее уравненіе для опредѣленія величины $\frac{q}{p}$:

$$A+6B\frac{q}{p}+(8A^2B+C)\frac{q^2}{p^2}=0. \tag{148}$$

Корни этого уравненія выражаются черезъ одинъ квадратный радикалъ.

Если въ уравненіи (124) коэффиціентъ B равенъ нулю, то можно обратить выраженіе (147) въ нуль, полагая:

Digitized by Google

$$p = q = 0, \; r = 1.$$

Въ этомъ случаѣ преобразованное уравненіе будетъ имѣть корнями величины:

$$y_\infty'', \; y_0'', \; y_1'', \; y_2'', \; y_3'', \; y_4''. \qquad (134)$$

И дѣйствительно, мы видимъ, что коэффиціентъ этого преобразованнаго уравненія:

$$A'' = 4ABC - 3B^3$$

обращается въ нуль при $B = 0$.

Итакъ, если въ уравненіи (124) коэффиціентъ B равенъ 0, то уравненіе (124) раціональнымъ преобразованіемъ *съ раціональными коэффиціентами* приводится къ новому уравненію Якоби, имѣющему коэффиціентъ $\mathfrak{A}$ равный нулю.

Возвращаясь къ общему случаю, когда въ уравненіи Якоби (124) ни одинъ изъ коэффиціентовъ A, B, C не равенъ 0, мы можемъ сказать, что *всякое уравненіе Якоби 6-ой степени раціональной подстановкой можетъ быть преобразовано въ новое уравненіе Якоби, имѣющее коэффиціентъ $\mathfrak{A}$ равный нулю*:

$$Y^6 + 10\mathfrak{B}Y^3 - 4\mathfrak{C}Y + 5\mathfrak{B}^2 = 0. \qquad (149)$$

Коэффиціенты этой раціональной подстановки содержатъ въ себѣ одинъ квадратный радикалъ.

Уравненіе (149) есть простѣйшій видъ уравненія Якоби 6-ой степени. Оно содержитъ въ себѣ только два независимыхъ параметра $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$. Его мы будемъ называть *главнымъ* уравненіемъ Якоби.

Резольвента 6-ой степени типа Якоби, разсмотрѣнная нами въ главѣ X, принадлежитъ къ числу главныхъ уравненій Якоби.

Къ числу уравненій Якоби 6-ой степени принадлежитъ извѣстное изъ теоріи эллиптическихъ функцій уравненіе множителя, соотвѣтствующее преобразованію 5-ой степени *).

*) Объ уравненіяхъ модулярномъ и уравненіи множителя мы говорили уже выше во введеніи.

Digitized by Google

Уравненіе множителя для преобразованія 5-ой степени таково:

$$(M-1)^5(M-5)+256k^2k'^2M=0\ *). \qquad (150)$$

Это уравненіе сдѣлается тождественнымъ съ уравненіемъ (124), если мы положимъ:

$$y=M,\ A=1,\ B=0,\ C=-64k^2k'^2. \qquad (151)$$

Отсюда видно, что уравненіе (150) не есть главное уравненіе Якоби. Такъ какъ въ этомъ уравненіи коэффиціентъ B равенъ нулю, то оно раціональною подстановкою съ раціональными коэффиціентами преобразуется въ главное.

§ 56. **Рѣшеніе уравненія Якоби 6-ой степени.**

Сравнимъ уравненіе:

$$Y^6+10\mathfrak{B}Y^3-4\mathfrak{C}Y+5\mathfrak{B}^2=0 \qquad (149)$$

съ резольвентой 6-ой степени икосаэдрическаго уравненія:

$$Y^6-\frac{10z}{h^3}Y^3+\frac{12z^2}{h^5}Y+\frac{5z^2}{h^6}=0\ **). \qquad (152)$$

Эти уравненія сдѣлаются тождественными между собою, если мы выберемъ z и h такъ, чтобы они удовлетворяли условіямъ:

$$\frac{z}{h^3}=-\mathfrak{B},\ \frac{3z^2}{h^5}=-\mathfrak{C}. \qquad (153)$$

Изъ уравненій (153) находимъ:

$$z=\frac{\mathfrak{C}^3}{27\mathfrak{B}^5},\ h=-\frac{\mathfrak{C}}{3\mathfrak{B}^2}. \qquad (154)$$

Итакъ, давая z и h значенія (154), мы достигнемъ того, чтобы уравненія (149) и (152) были между собою тождественны. Пусть величины z и h имѣютъ именно эти значенія.

---

*) См. Joubert. Sur les équations qui se rencontrent dans la théorie de la transformation des fonctions éelliptiques. Стр. 76.

**) Глава X, уравненіе (173).

Digitized by Google

Припомнимъ формулы (172), (169), (133), (101) главы X:

$$\xi = 12(1-z)zhY, \tag{155}$$

$$\xi = 5(\eta_{11}, \eta_{12})^2, \tag{156}$$

$$\eta_{11} = u\sqrt{\frac{T_u(u)z}{f_u(u)\,H_u(u)}}, \quad \eta_{12} = \sqrt{\frac{T_u(u)z}{f_u(u)\,H_u(u)}}, \tag{157}$$

$$H_u^3(u) : T_u^2(u) : -1728f_u^5(u) = z : z-1 : 1. \tag{158}$$

Эти формулы показываютъ, что корень Y уравненія (149) есть раціональная функція корня u икосаэдрическаго уравненія:

$$H_u^3(u) : T_u^2(u) : -1728f_u^5(u) = z : z-1 : 1. \tag{158}$$

Корень Y выражается такъ:

$$Y = \frac{5}{12h(1-z)z}\left\{\frac{uT_u(u)z}{f_u(u)\,H_u(u)}\right\}^2, \tag{159}$$

гдѣ u—одинъ изъ корней уравненія (158).

Для того, чтобы получить всѣ 6 корней уравненія (149), мы должны подставить въ формулу (159) вмѣсто u послѣдовательно слѣдующія шесть величинъ:

$$u,\ \mathfrak{S}(u),\ \mathfrak{S}S(u),\ \mathfrak{S}S^2(u),\ \mathfrak{S}S^3(u),\ \mathfrak{S}S^4(u), \tag{160}$$

гдѣ u—одинъ изъ корней уравненія (158), а S и $\mathfrak{S}$ суть извѣстныя намъ основныя подстановки нормальной икосаэдрической группы.

Изъ тождественности уравненій (149) и (152) слѣдуетъ, что группы субституцій этихъ уравненій одинаковы.

Въ главѣ X мы видѣли, что основныя субституціи группы уравненія (152) таковы:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma &= (Y_\infty)\,(Y_0,\ Y_1,\ Y_2,\ Y_3,\ Y_4), \\ T &= (Y_\infty\ Y_0)\,(Y_1,\ Y_4)\,(Y_2)\,(Y_3). \end{aligned}\right\} \tag{161}$$

Digitized by Google

Таковы основныя субституціи группы главнаго уравненія Якоби.

Порядокъ группы главнаго уравненія Якоби равенъ 60.

Обѣ субституціи (161)—четныя. Слѣдовательно, всѣ подстановки группы главнаго уравненія Якоби тоже четныя.

Группа главнаго уравненія Якоби есть одна изъ подгруппъ знакоперемѣнной группы изъ шести буквъ порядка:

$$\frac{1.2.3.4.5.6}{2} = 360.$$

Отсюда слѣдуетъ, что знакоперемѣнная функція корней главнаго уравненія Якоби есть величина раціонально извѣстная. Дискриминантъ главнаго уравненія Якоби есть точный квадратъ.

Такъ какъ мы видѣли, что всякое уравненіе Якоби 6-ой степени раціональнымъ преобразованіемъ приводится къ главному, то его группа такова же, какъ и группа главнаго уравненія. Дискриминантъ его тоже точный квадратъ.

Для рѣшенія общаго уравненія Якоби, мы его преобразуемъ въ главное и затѣмъ рѣшимъ это главное уравненіе указаннымъ выше способомъ.

§ 57. Дискриминантъ уравненія Якоби 6-ой степени.

Займемся вычисленіями дискриминанта уравненія (124).

Обозначивъ для краткости лѣвую часть уравненія (124) черезъ $F(y)$, имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\sqrt{y_h}}{\partial A} &= -\frac{1}{2\sqrt{y_h}}\frac{\frac{\partial F(y_h)}{\partial A}}{\frac{\partial F(y_h)}{\partial y_h}}, \quad \frac{\partial\sqrt{y_h}}{\partial B} = -\frac{1}{2\sqrt{y_h}}\frac{\frac{\partial F(y_h)}{\partial B}}{\frac{\partial F(y_h)}{\partial y_h}}, \\ \frac{\partial\sqrt{y_h}}{\partial C} &= -\frac{1}{2\sqrt{y_h}}\frac{\frac{\partial F(y_h)}{\partial C}}{\frac{\partial F(y_h)}{\partial y_h}}, \end{aligned}\right\} \quad (162)$$

Digitized by Google

гдѣ y_h есть одинъ изъ корней уравненія (124); индексъ h имѣетъ одно изъ значеній:

$$\infty,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Подставивъ выраженія (162) въ равенства (129), находимъ:

$$\left.\begin{aligned}
-\sqrt{y_k}\,\frac{\partial F(y_k)}{\partial y_k} &= A\frac{\partial F(y_k)}{\partial A} + b\frac{\partial F(y_k)}{\partial B} + 5c\frac{\partial F(y_k)}{\partial C},\\
-\sqrt{y_k y'_k}\,\frac{\partial F(y_k)}{\partial y_k} &= b\frac{\partial F(y_k)}{\partial A} + A'\frac{\partial F(y_k)}{\partial B} + 5g\frac{\partial F(y_k)}{\partial C},\\
-\sqrt{y_k y''_k}\,\frac{\partial F(y_k)}{\partial y_k} &= c\frac{\partial F(y_k)}{\partial A} + g\frac{\partial F(y_k)}{\partial B} + 5A''\frac{\partial F(y_k)}{\partial C},
\end{aligned}\right\} \quad (163)$$

гдѣ $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$

Дадимъ параметрамъ A, B, C такія конечныя значенія, чтобы уравненіе (124) имѣло кратные корни, а величинѣ y_k дадимъ значеніе одного изъ этихъ кратныхъ корней.

Изъ уравненія (124) видно, что при A, B, C конечныхъ величины y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 конечны. Въ такомъ случаѣ изъ уравненій (120) заключаемъ, что A_0, A_1, A_2 имѣютъ тоже конечныя величины. Изъ формулъ (126) видимъ, что при A, B, C, A_0, A_1, A_2 конечныхъ и величины A_0', A_1', A_2', A_0'', A_1'', A_2'' тоже конечны. Если такъ, то на основаніи формулъ (228) можемъ утверждать, что корни:

$$y_0',\ y_1',\ y_2',\ y_3',\ y_4',$$
$$y_0'',\ y_1'',\ y_2'',\ y_3'',\ y_4''$$

также имѣютъ конечныя величины.

Итакъ, въ формулахъ (163) величины:

$$A,\ A',\ A'',\ b,\ c,\ g,\ y_k,\ y_k',\ y_k''$$

конечны.

Такъ какъ y_k есть кратный корень уравненія (124), то величина:

Digitized by Google

$$\frac{\partial F(y_k)}{\partial y_k}$$

равна нулю.

Если такъ, то лѣвыя части равенствъ (163) равны нулю. Отсюда слѣдуетъ, что имѣетъ мѣсто одинъ изъ двухъ случаевъ.

Или:

$$1)\ \frac{dF(y_k)}{dA}=0,\ \frac{dF(y_k)}{dB}=0,\ \frac{dF(y_k)}{dC}=0; \qquad (164)$$

или:

$$2)\ \begin{vmatrix} A, & b, & c \\ b, & A', & g \\ c, & g, & A'' \end{vmatrix}=0, \qquad (165)$$

Подставивъ въ равенства (164) вмѣсто $F(y_k)$ выраженіе этой функціи, находимъ, что они совмѣстны только при условіяхъ:

$$y_k=0,\ B=A^3. \qquad (166)$$

При подстановкѣ значеній (166) въ уравненіе (124) мы получаемъ тождество.

Для того, чтобы величина

$$y_k=0$$

была кратнымъ корнемъ уравненія (124) при

$$B=A^3,$$

необходимо и достаточно, чтобы величины (166) обращали въ тождество слѣдующее уравненіе:

$$\frac{dF(y_k)}{dy_k}=0. \qquad (167)$$

Для выполненія этого условія необходимо, чтобы величина C равнялась A^5.

Подставивъ величины:

$$B=A^3,\ C=A^5$$

въ опредѣлитель (165), и принявъ во вниманіе формулы (131), находимъ, что онъ обращается въ нуль.

Digitized by Google

Отсюда слѣдуетъ, что во всякомъ случаѣ для существованія кратныхъ корней уравненія (124) необходимо, чтобы опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} A, & b, & c \\ b, & A', & g \\ c, & g, & A'' \end{vmatrix} \tag{168}$$

обращался въ нуль.

Раскрывъ опредѣлитель (168), подставивъ вмѣсто величинъ:

$$A', \; A'', \; b, \; c, \; g$$

ихъ выраженія (131) и расположивъ затѣмъ полученное выраженіе по степенямъ C, мы представимъ условіе (165) въ слѣдующемъ видѣ:

$$C^3-(20A^2B-16A^5)C^2-(40A^4B^2-45AB^3)C+ \\ +25A^3B^4-27B^5=0. \tag{169}$$

Таково условіе, *необходимое* для того, чтобы уравненіе (124) имѣло кратные корни.

Отсюда слѣдуетъ, что выраженіе:

$$C^3-(20A^2B-16A^5)C^2-(40A^4B^2-45AB^3)C+ \\ +25A^3B^4-27B^5 \tag{170}$$

есть или дѣлитель дискриминанта Δ уравненія (124) или, по крайней мѣрѣ, имѣетъ съ дискриминантомъ Δ общаго дѣлителя.

Въ послѣднемъ случаѣ, зная дискриминантъ Δ, мы можемъ найти этотъ общій дѣлитель. Это будетъ нѣкоторое выраженіе, раціональное относительно коэффиціентовъ A, B, C.

Докажемъ, что выраженіе (170) не имѣетъ раціональныхъ дѣлителей.

Допустимъ, что существуетъ раціональный дѣлитель выраженія (170). Такъ какъ коэффиціентъ при C въ выраженіи

Digitized by Google

(170) равенъ 1, то дѣлитель выраженія (170) можетъ быть только линейный или квадратный относительно C. Изъ двухъ взаимно дополнительныхъ дѣлителей выраженія (170) одинъ будетъ линейный, а другой—квадратный.

Линейный дѣлитель выраженія (170) долженъ быть такого вида:

$$C - M,$$

гдѣ M есть дѣлитель свободнаго члена:

$$25A^3B^4 - 27B^5$$

выраженія (170).

Слѣдовательно, M есть выраженіе вида:

$$M = B^h(25A^3 - 27B)^k, \qquad (171)$$

гдѣ h равно одному изъ чиселъ: 0, 1, 2, 3, 4, а k—одному изъ чиселъ: 0, 1.

Если выраженіе (170) дѣлится нацѣло на

$$C - M,$$

то при подстановкѣ въ выраженіе (170) вмѣсто C величины M, выраженіе (170) должно обратиться въ нуль.

Подставивъ въ формулу (170) вмѣсто C выраженіе (171), мы замѣтимъ, что результатъ подстановки не обращается въ нуль ни при какихъ указанныхъ выше значеніяхъ показателей h и k.

Слѣдовательно, выраженіе (170) не имѣетъ раціональныхъ дѣлителей.

Если выраженіе (170) не имѣетъ раціональныхъ дѣлителей, то на основаніи сказаннаго выше мы можемъ утверждать, что оно само есть дѣлитель дискриминанта Δ.

Такъ какъ обращеніе въ нуль выраженія (170) есть условіе необходимое для того, чтобы уравненіе (124) имѣло кратные корни, то дискриминантъ Δ долженъ равняться нѣкоторой степени выраженія (170) или разниться отъ нея только постояннымъ множителемъ.

Digitized by Google

Такъ какъ мы знаемъ, что дискриминантъ Δ есть полный квадратъ, то степень эта должна быть четною.

Посмотримъ, какова эта степень.

Положимъ въ уравненіи (124):

$$y - A = Z. \tag{172}$$

Уравненіе (124) приметъ такой видъ:

$$Z^6 - 4AZ^5 + 10BZ^3 - 4CZ + 5B^2 - 4AC = 0. \tag{173}$$

Обозначивъ для краткости лѣвую часть этого уравненія черезъ $F(Z)$, имѣемъ:

$$F(Z) = 0. \tag{174}$$

Дискриминантомъ этого уравненія будетъ служить та же самая величина Δ, ибо всѣ корни его разнятся отъ корней уравненія (124) на одно и то же количество A.

Посмотримъ, каковъ *вѣсъ* *) коэффиціентовъ A, B, C уравненія (173).

Изъ уравненія (173) видно, что вѣса эти таковы:

вѣсъ коэффиціентовъ A равенъ 1,
» » B » 3,
» » C » 5.

Отсюда слѣдуетъ, что всѣ члены выраженія (170) одинаковаго вѣса, равнаго 15.

Обозначивъ производную по Z многочлена $F(Z)$ черезъ $F'(Z)$, мы можемъ представить дискриминантъ Δ въ слѣдующемъ видѣ:

---

*) Если мы выразимъ коэффиціентъ уравненія черезъ корни, то степень этой функціи относительно корней уравненія называется вѣсомъ даннаго коэффиціента. Всякій инваріантъ формы есть раціональная однородная функція ея корней. Степень этой функціи относительно корней называется вѣсомъ инваріанта.

Digitized by Google

$$\Delta = -\prod_{k=\infty,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.} F'(Z_k), \tag{175}$$

гдѣ:

$$Z_\infty,\ Z_0,\ Z_1,\ Z_2,\ Z_3,\ Z_4$$

суть корни уравненія (173).

Изъ формулы (175) видно, что вѣсъ выраженія Δ равенъ 30, т. е. въ два раза больше вѣса выраженія (170).

Отсюда слѣдуетъ, что дискриминантъ Δ, независимо отъ постояннаго множителя, равенъ квадрату выраженія (170):

$$\Delta = K\{C^3 - (20A^2B - 16A^5)C^2 - (40A^4B^2 - 45AB^3)C + \\ + 25A^3B^4 - 27B^5\}^2, \tag{176}$$

гдѣ K—нѣкоторое постоянное число, не зависящее отъ A, B, C.

Для опредѣленія K положимъ:

$$A = 0,\ B = 0,$$

а C оставимъ произвольнымъ.

Уравненіе (124) приметъ видъ:

$$y^6 - 4Cy = 0. \tag{177}$$

Дискриминантъ этого уравненія равенъ:

$$4^6\, 5^5\, C^6. \tag{178}$$

Положивъ:

$$A = 0,\ B = 0$$

въ формулѣ (176), находимъ, что тотъ же дискриминантъ равенъ:

$$KC^6. \tag{179}$$

Слѣдовательно:

$$KC^6 = 4^6\, 5^5\, C^6. \tag{180}$$

Digitized by Google

Откуда:

$$K = 4^6 5^5. \tag{181}$$

Итакъ, дискриминантъ Δ уравненія (124) равенъ:

$$\Delta = 4^6 . 5^5 \{ C^3 - (20A^2B - 16A^5)C^2 - (40A^4B^2 - 45AB^3)C + \\ + 25A^3B^4 - 27B^5 \}^2. \tag{182}$$

§ 58. **Связь между уравненіемъ 5-ой степени и уравненіемъ Якоби 6-ой степени.**

Мы видѣли, что корни главнаго уравненія 5-ой степени и корни главнаго уравненія Якоби суть раціональныя функціи корней икосаэдрическаго уравненія. Уже отсюда видна связь, существующая между уравненіемъ 5-ой степени и уравненіемъ Якоби 6-ой степени.

Эта связь была обнаружена Эрмитомъ *) и положена имъ въ основу способа рѣшенія уравненія 5-ой степени въ модулярныхъ эллиптическихъ функціяхъ.

Остановимся на уясненіи этой связи.

Обозначимъ снова буквами:

$$y_\infty, y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 \tag{117}$$

корни уравненія Якоби (124).

Субституціи группы этого уравненія могутъ быть составлены изъ двухъ основныхъ субституцій:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= (y_\infty)(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4), \\ \tau &= (y_\infty, y_0)(y_1, y_4)(y_2)(y_3). \end{aligned}\right\}^{**)} \tag{183}$$

Возьмемъ функцію:

$$U = (y_\infty - y_0)(y_1 - y_4)(y_3 - y_2). \tag{184}$$

Эта функція подъ вліяніемъ субституцій:

---

*) Hermite. Sur la résolution de l'équation du cinquième degre. Comptes Bendus. T. 46.

**) См. главу X, формулы (174).

Digitized by Google

$$\sigma^0=1,\ \sigma,\ \sigma^2,\ \sigma^3,\ \sigma^4 \qquad (185)$$

принимаетъ слѣдующія значенія:

$$\left.\begin{aligned} U_0&=(y_\infty-y_0)(y_1-y_4)(y_2-y_3),\\ U_1&=(y_\infty-y_1)(y_2-y_0)(y_4-y_3),\\ U_2&=(y_\infty-y_2)(y_3-y_1)(y_0-y_4),\\ U_3&=(y_\infty-y_3)(y_4-y_2)(y_1-y_0),\\ U_4&=(y_\infty-y_4)(y_0-y_3)(y_2-y_1). \end{aligned}\right\} \qquad (186)$$

Примѣняя къ функціямъ (186) субституцію τ, найдемъ тѣ же пять величинъ:

$$\left.\begin{aligned} \overline{U}_0&=U_0,\ \overline{U}_1=U_2,\ \overline{U}_2=U_1,\\ \overline{U}_3&=U_4,\ \overline{U}_4=U_3. \end{aligned}\right\} \qquad (187)$$

Отсюда мы заключаемъ, что подъ вліяніемъ субституцій группы уравненія Якоби функція U пріобрѣтаетъ всего пять различныхъ значеній. Функція U есть корень нѣкотораго уравненія 5-ой степени.

Займемся вычисленіемъ коэффиціентовъ этого уравненія. Изъ формулъ (118) слѣдуетъ:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{y_\infty}+\sqrt{y_0}&=-2(\varepsilon^2+\varepsilon^3)A_0+A_1+A_2\ ^*),\\ \sqrt{y_\infty}-\sqrt{y_0}&=\ \ 2(\varepsilon+\varepsilon^4)A_0-A_1-A_2,\\ \sqrt{y_1}+\sqrt{y_4}&=2A_0+(\varepsilon+\varepsilon^4)A_1+(\varepsilon+\varepsilon^4)A_2,\\ \sqrt{y_1}-\sqrt{y_4}&=\ \ (\varepsilon-\varepsilon^4)A_1-(\varepsilon-\varepsilon^4)A_2,\\ \sqrt{y_2}+\sqrt{y_3}&=2A_0+(\varepsilon^2+\varepsilon^3)A_1+(\varepsilon^2+\varepsilon^3)A_2,\\ \sqrt{y_2}-\sqrt{y_3}&=\ \ (\varepsilon^2-\varepsilon^3)A_1-(\varepsilon^2-\varepsilon^3)A_2, \end{aligned}\right\} \qquad (188)$$

*) На основаніи тождества:

$$\sqrt{5}=1+2(\varepsilon+\varepsilon^4).$$

Digitized by Google

Изъ формулъ (188) находимъ:

$$\left.\begin{aligned} &y_\infty - y_0 = 4A_0^2 - (A_1 + A_2)^2 - 2A_0(A_1 + A_2), \\ &(\sqrt{y_0} + \sqrt{y_1})(\sqrt{y_3} + \sqrt{y_2}) = \\ &= 4A_0^2 - (A_1 + A_2)^2 - 2A_0(A_1 + A_2), \\ &(\sqrt{y_1} - \sqrt{y_4})(\sqrt{y_3} - \sqrt{y_2}) = (A_1 - A_2)^2\sqrt{5}. \end{aligned}\right\} \quad (189)$$

Перемноживъ между собою равенства (189) и принявъ во вниманіе формулу (184), находимъ:

$$U = \sqrt{5}\{-4A_0^2 + (A_1 + A_2)^2 + 2A_0(A_1 + A_2)\}^2(A_1 - A_2)^2. \quad (190)$$

Положивъ:

$$\{-4A_0^2 + (A_1 + A_2)^2 + 2A_0(A_1 + A_2)\}(A_1 - A_2) = V, \quad (191)$$

находимъ:

$$U = \sqrt{5}\, V^2. \quad (192)$$

Величина V есть раціональная функція величинъ A_0, A_1, A_2. Поэтому она, такъ же какъ и U, есть раціональная функція корней уравненія Якоби (124); но число значеній ея, необходимо, вдвое больше числа значеній функціи U. Эти значенія попарно разнятся знаками:

$$\left.\begin{aligned} &V_0,\ V_1,\ V_2,\ V_3,\ V_4, \\ &-V_0,\ -V_1,\ -V_2,\ -V_3,\ -V_4. \end{aligned}\right\} \quad (193)$$

Отсюда слѣдуетъ, что уравненіе, которому удовлетворяютъ *пять* величинъ:

$$V_0,\ V_1,\ V_2,\ V_3,\ V_4 \quad (194)$$

имѣетъ коэффиціенты, ирраціональные, содержащіе въ себѣ только квадратные радикалы.

Извѣстный членъ этого уравненія равенъ:

$$-V_0\, V_1\, V_2\, V_3\, V_4 = -\frac{1}{5\sqrt[4]{5}}\sqrt{U_0\, U_1\, U_2\, U_3\, U_4}. \quad (195)$$

Digitized by Google

Выраженіе:

$$U_0\ U_1\ U_2\ U_3\ U_4,$$

какъ видно изъ формулъ (186) равно произведенію всевозможныхъ разностей корной уравненія (124) взятыхъ попарно. Слѣдовательно оно равно квадратному корню изъ дискриминанта Δ уравненія Якоби (124).

Итакъ, свободный членъ того уравненія, которому удовлетворяютъ величины (194), равенъ:

$$-\frac{1}{5\sqrt[4]{5}}\sqrt[4]{\Delta}, \tag{196}$$

гдѣ Δ есть дискриминантъ уравненія Якоби (124) и опредѣляется формулою (182).

Такъ какъ Δ есть полный квадратъ, то коэффиціенты A, B, C уравненія (124) входятъ въ формулѣ (196) только подъ знакомъ квадратнаго корня.

Введемъ вспомогательныя величины:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= -A_1(4A_0^2 - A_1A_2),\quad C_2 = 2A_0A_1^2 - A_2^3,\\ C_4 &= A_2(4A_0^2 - A_1A_2),\quad C_3 = -2A_0A_2^2 + A_1^3. \end{aligned}\right\} \tag{197}$$

Въ такомъ случаѣ, какъ видно изъ формулы (191), величина V выразится такъ:

$$V = C_1 + C_2 + C_3 + C_4. \tag{198}$$

Изъ формулъ (120) видно, что подъ вліяніемъ субституціи σ величины A_0, A_1, A_2 переходятъ въ:

$$A_0,\ \varepsilon A_1,\ \varepsilon^4 A_2.$$

Отсюда слѣдуетъ, что подъ вліяніемъ субституціи σ величины:

$$C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$$

переходятъ въ

$$\varepsilon C_1,\ \varepsilon^2 C_2,\ \varepsilon^3 C_3,\ \varepsilon^4 C_4.$$

Функція:

$$V_0 = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \tag{198'}$$

подъ вліяніемъ субституціи σ переходитъ въ

Digitized by Google

$$V_1 = \varepsilon C_1 + \varepsilon^2 C_2 + \varepsilon^3 C_3 + \varepsilon^4 C_4. \qquad (199)$$

Совершивъ надъ функціею V_0 субституцію σ^k, мы найдемъ, что подъ вліяніемъ этой субституціи она перейдетъ въ

$$V_k = \varepsilon^k C_1 + \varepsilon^{2k} C_2 + \varepsilon^{3k} C_3 + \varepsilon^{4k} C_4. \qquad (200)$$

Отсюда находимъ:

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma V_k = 0, \\ &\Sigma V_k^2 = 10(C_1 C_4 + C_2 C_3), \\ &\Sigma V_k^3 = 15(C_1^2 C_3 + C_2^2 C_1 + C_3^2 C_4 + C_4^2 C_2), \\ &\Sigma V_k^4 = 10\{3(C_1 C_4 + C_2 C_3)^2 + \\ &\quad + 2(C_1^3 C_2 + C_2^3 C_4 + C_3^3 C_1 + C_4^3 C_3) + 6 C_1 C_2 C_3 C_4\}. \end{aligned}\right\} \qquad (201)$$

Подставивъ вмѣсто C_1, C_2, C_3, C_4 выраженія (197), и пользуясь формулами (123), находимъ:

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma V_k = 0, \\ &\Sigma V_k^2 = -20B, \\ &\Sigma V_k^3 = 0, \\ &\Sigma V_k^4 = 20(AC + B^2). \end{aligned}\right\} \qquad (202)$$

Отсюда слѣдуетъ, что уравненіе, которому удовлетворяетъ функція V, таково:

$$V^5 + 10BV^3 + 5(9B^2 - AC)V - \frac{\sqrt[4]{\Delta}}{5\sqrt[4]{5}} = 0, \qquad (203)$$

гдѣ Δ есть дискриминантъ уравненія (124), опредѣляемый формулою (182).

Это—уравненіе діагональнаго типа.

Если въ уравненіи Якоби (124) коэффиціентъ B равенъ нулю, то уравненіе (203) приметъ видъ:

$$V^5 - 5ACV - \frac{\sqrt[4]{\Delta}}{5\sqrt[4]{5}} = 0. \qquad (204)$$

Это—уравненіе 5-ой степени въ формѣ Жеррарда.

Имѣя уравненіе (203), легко найти то уравненіе, которому удовлетворяетъ функція U.

Digitized by Google

Перенеся членъ:

$$\frac{\sqrt[4]{\Delta}}{5\sqrt[4]{5}}$$

во вторую часть уравненія (203) и возведя обѣ части полученнаго уравненія въ квадратъ, находимъ:

$$V^2[V^4+10BV^2+5(9B^2-AC)]^2=\frac{\sqrt{\Delta}}{25\sqrt{5}}, \qquad (205)$$

или, на основаніи равенства (192):

$$U[U^2+10\sqrt{5}BU+25(9B^2-AC)]^2=\sqrt{\Delta}. \qquad (206)$$

Въ этомъ уравненіи всѣ коэффиціенты раціональны, потому что Δ есть полный квадратъ.

Если коэффиціентъ B равенъ нулю, то уравненіе (206) приметъ такой видъ:

$$U^5-50ACU^3+5^4A^3C^2U-\sqrt{\Delta}=0. \qquad (207)$$

Это—уравненіе діагональнаго типа.

ЗАКЛЮЧЕНІЕ.

Заканчивая свою работу, позволю себѣ еще разъ указать на ея главную задачу.

Литература той области математики, которой касается моя работа, весьма обширна, какъ сама по себѣ, такъ въ особенности по количеству тѣхъ побочныхъ вопросовъ, которые, необходимо, приходится въ ней разсматривать.

Собрать эту литературу, разбросанную главнымъ образомъ по журналамъ, обработать ее и представить возможно болѣе стройное и полное рѣшеніе поставленной задачи—было моею цѣлью.

При этомъ, понятно, приходилось весьма многое разрабатывать вновь или пополнять своими изслѣдованіями.

Размѣры работы оказались значительно больше, чѣмъ я предполагалъ въ началѣ. Вотъ почему, чтобы не увеличивать ихъ еще болѣе, мнѣ пришлось обойти нѣсколько вопросовъ, могущихъ легко возникнуть при чтеніи работы.

Digitized by Google

Такъ, задача Куммера о раціональномъ или, даже, вообще алгебраическомъ интегрированіи уравненія:

$$[R(z)]_z + \frac{1}{c^2}\left(\frac{dR(z)}{dz}\right)^2\left\{\frac{1-\frac{1}{\lambda_1^2}}{\frac{2}{c^2}R^2(z)} + \frac{1-\frac{1}{\lambda_2^2}}{2\left(\frac{1}{c}R(z)-1\right)^2} + \frac{\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda^2}-1}{\frac{2}{c}R(z)\left(\frac{1}{c}R(z)-1\right)}\right\} = \frac{1-\frac{1}{\lambda_1'^2}}{2z^2} + \frac{1-\frac{1}{\lambda_2'^2}}{2(z-1)^2} + \frac{\frac{1}{\lambda_1'^2}+\frac{1}{\lambda_2'^2}-\frac{1}{\lambda'^2}-1}{2z(z-1)}$$

находится въ тѣсной связи съ изслѣдованіями главы VIII. Я ограничился указаніемъ на очевидное рѣшеніе задачи:

$$\lambda' = \lambda,\ \lambda_1' = \lambda_1,\ \lambda_2' = \lambda_2,\ \frac{1}{c}R(z) = z.$$

Подробное изученіе рѣшенія задачи Куммера можно найти у Гурза, Папперицъ, Клейна, Бріоски, Фишера.

Точно также я не имѣлъ возможности остановиться подробнѣе на уравненіяхъ 5-ой степени и уравненіяхъ Якоби. Эти изслѣдованія можно найти у Эрмита, Бріоски, Кронекера, Клейна. Не говорю уже о трансцендентномъ рѣшеніи алгебраическихъ уравненій, о которомъ неоднократно было мною упомянуто. Во всякомъ случаѣ, когда основные вопросы задачи ясно поставлены и разсмотрѣны достаточно полно, то рѣшенія ихъ дѣлаются точками отправленія для дальнѣйшихъ изслѣдованій, отношеніе которыхъ къ основной задачѣ вполнѣ ясно.

Если мнѣ удалось освѣтить рѣшеніе этой основной задачи, то моя цѣль достигнута.

Приведу, наконецъ, литературу, послужившую отчасти непосредственнымъ источникомъ моей работы, отчасти касающуюся вопросовъ, имѣющихъ къ ней близкое отношеніе.

Digitized by Google

ЛИТЕРАТУРА.

1) *Schwarz.* Gesammelte Mathematische Abhandlhngen. Berin. 1890.

2) *Klein.* Vorlesungen über das Ikosaeder. Leipzig, 1884.

3) *Klein.* Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen. Leipzig, 1890, 1892.

4) *Klein.* Ueber eine geometrische Representation der Resolventen algebraischer Gleichungen. Math. Ann. Bd. IV.

5) *Klein.* Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst. Math. Ann. Bd. IX.

6) *Klein.* Ueber lineare Differentialgleichungen. Math. Ann. Bd. XI, XII.

7) *Klein.* Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder. Math. Ann. Bd. XII, а также въ Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen. 9 Heft.

8) *Klein.* Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünten Grades. Math. Ann. Bd. XIV.

9) *Klein.* Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade. Math. Ann. Bd. XV.

10) *Klein.* Zur Theorie der allgemeinen Gleichungen 6 und 7 Grades Math. Ann. Bd. XXVIII.

11) *Klein.* Ueber lineare Differentialgleichungen. Sitzungsberichte der physikalich-medicinischen Sociät zu Erlangen. 8 Heft.

12) *Brioschi.* Extrait d'une lettre a M. Klein. Math. Ann. Bd. XI.

Digitized by Google

13) *Brioschi.* La theorie des Formes dans l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre. Math. Ann. Bd. XI.

14) *Brioschi.* Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. Math. Ann. Bd. XIII.

15) *Brioschi.* Sur quelques équations différentielles. Math. Ann. Bd. XXVI.

16) *Brioschi.* Sulle equazioni del moltiplicatore per la transformazione della funzioni ellittische. Annali di Matematica. T. I, serie I.

17) *Brioschi.* Sulla risoluzione dell equazioni di quinto grado два мемуара въ Annali di Matematica. T. I, serie I.

18) *Brioschi.* La soluzione generale delle equazioni del 5 grado. Annali di Matematica. T. I, serie II.

19) *Brioschi.* Sulle equazioni differenziali del tetraedro, del ottaedro e del icosaedro. Annali di Matematica. T. X, serie II.

20) *Brioschi.* Sur l'équation du 5-me degré (lettre à M. Hermite) Comptes Rendus. Vol. 73.

21) *Brioschi.* Sur quelques formes binaires. Sitzunsberichte der physikalich-medicinischen Sociätat zu Erlanden. 8 Heft.

22) *Brioschi.* Sopra alcuni recenti risultati ottenuti dal sig. Klein nella risoluzione delle equazioni del quinto grado. Atti della Reale Accademia dei Lincei. Transunti. Vol. I, serie III.

23) *Brioschi.* Sulla equazione dell ottaedro. Atti della Reale Accademia dei Lincei. Transunti. Vol. III, serie III.

24) *Gordan.* Ueber endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen. Math. Ann. Bd. XII.

25) *Gordan.* Binäre Formen mit verschwindenden Covarianten. Math. Ann. Bd. XII. Весьма интересныя изслѣдованія Гордана, сюда относящіеся, приведены въ его курсѣ: Vorlesungen über Invariantentheorie. Bd. II. Leipzig, 1887.

26) *Gordan.* Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. Math. Ann. Bd. XIII.

Digitized by Google

27) *Gordan.* Ueber die Gleichungen fünften Grades. Math. Ann. Bd. XXVIII

28) *Gordan.* Ueber die Auflösung der Gleichungen fünften Grades. Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen. 8 Heft.

29) *Fuchs.* Ueber die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen und eine neue Anwendung der Invariantentheorie. Два мемуара. Crelles Journal. Bd. 81, 85.

30) *Cayley.* On the correspondence of Homographics and Partitions. Math. Ann. Bd. XV.

31) *Cayley.* On the finite Groups of linear Transformations of a Variable Math. Ann. Bd. XV.

32) *Cayley.* Note on a hypergeometric series. Quarterly journal of pure and applied Mathematics. Vol. XVI.

33) *Cayley.* Note on the octaedron function. Quarterly journal of pure and applied Mathematics. Vol. XVI.

34) *Cayley.* On the Schwarzian Derivative and the Pelyhedral Functions. Transactions of the Cambridge philosophcal society. Vol. XIII.

35) *Cayley.* On the Jacobian sextic Equation. Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. Vol. XVIII.

36) *Poincaré.* Théorie des Groupes fuchsiennes. Acta Math. T. I

37) *Poincaré.* Memoire sur les Groupes Kleineens. Acta Math. T. III.

38) *Hermite.* Sur la théorie des équations modulaires et la résolution de l'équation du cinquième degré. Paris 1859.

39) *Hermite.* Sur l'invariant du 18-e ordre des formes du 5-e degré et sur le rôle qn'il joue dans la résolution de l'équation du 5 degré. Crelles Journal. Bd. 59.

40) *Kronecker.* Ueber die Gleichungen fünften Grades. Crelles Journal. Bd. 59.

41) *Kronecker.* Mittheilung über seine algebraische Arbeiten. Monatsberichte der Königlichen Akademie zu Berlin. 1861.

Digitized by Google

42) *Kiepert.* Auflösung der Gleichungen fünften Grades. Crelles Journal. Bd. 87.

43) *Jordan.* Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique. Crelles Journal. Bd. 84.

44) *Jordan.* Sur la résolution des équations les unes par les autres. Comptes Rendus. Vol. 72.

45) *Jordan.* Sur les équations linéaires du 2-e ordre, dont les intégrales sont algébriques. Comptes Rendus. Vol. 82.

46) *Cole.* A Contribution of the Theory of the General Equation of the sixth Degree. American Journal of Mathematics. Vol. VIII.

47) *Cole.* Kleins Jkosaeder. American Journal of Mathematics. Vol. IX.

48) *Fischer.* Konforme Abbildung sphärischer Dreiecke auf einander mittelst algebraischer Functionen. Leipzig, 1885.

49) *Pepin.* Méthode pour obtenir les intégrales algébriques des équations différentielles linéaires du second ordre. Atti dell' Accademia pontifica dei nuovi Lincei. 1881.

50) *Puchta.* Das Oktaeder und die Gleichungen vierten Grades. Denkschrift der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Bd. 41.

51) *Autonne.* Sur les intégrales algébriques des équations différentielles à coefficients rationnelles. Comptes Rendus. Vol. 96.

52) *Besso.* Sopra una classe d'equazioni del sesto grado risolubili per serie ipergeometrische. Atti della Reale Accademia dei Lincei. Serie III. Vol. XIV.

53) *Goursat.* Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéometrique. Thèses présenteés à la Faculté des sciences de Paris. 1881.

54) *Васильевъ.* О функціяхъ раціональныхъ, аналогичныхъ съ функціями двоякопериодическими. Казань. 1880.

55) *Савичъ.* О линейныхъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ. С.-Петербургъ. 1892.

56) *Ермаковъ.* Круговое преобразованіе. Мат. Сб. 1888.

Digitized by Google

ОПЕЧАТКИ.

Стр.	*Строка.*	*Напечатано.*	*Должно быть.*
621	8 сн.	$z = a_i$	$z = \alpha_i$
622	13 св.	$\varphi_i(z-\alpha_i)$	$\varphi_j(z-\alpha_i)$
627	10 сн.	(20)	(21)
627	5 »	$\eta_1 = \left[-C\int\frac{dz}{\eta_1^2}+Const'\right]\eta_1$	$\eta_2 = \left[-C\int\frac{dz}{\eta_1^2}+Const'\right]\eta_1$
633	13 св. / 14 »	(34)	(35)
641	6 сн.	$\varphi_1(z-\alpha_i)$	$\varphi_2(z-\alpha_i)$
657	14 св.	$\gamma\eta_1'+\delta\eta''+\eta_2$	$\gamma\eta_1'+\delta\eta''=\eta_2$
687	12 »	$\frac{1-\frac{1}{\lambda_1^2}}{2\left(\frac{1}{c}R(z)-1\right)^2}$	$\frac{1-\frac{1}{\lambda_2^2}}{2\left(\frac{1}{c}R(z)-1\right)^2}$
709	5 сн.	u_1	u
719	5 св.	α_2	λ_2
742	4 сн.	$\theta = \frac{1}{2\cos 36^0}$	$tg\theta = \frac{1}{2\cos 36^0}$
771	7 св.	$= \begin{vmatrix} e^{\frac{\pi i}{m}}, & 0 \\ 0, & e^{-\frac{\pi i}{m}} \end{vmatrix}$	$\sigma = \begin{vmatrix} e^{\frac{\pi i}{m}}, & 0 \\ 0, & e^{-\frac{\pi i}{m}} \end{vmatrix}$
774	14 сн.	$S\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda_2}, z\right)$	$s\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda_2}, z\right)$
781	7 св.	$(u^4+2i\sqrt{3}\,u^2+1)^2$	$(u^4+2i\sqrt{3}\,u^3+1)^3$
788	5 »	§ 29	§ 26
790	6 »	m_2	m_3

Digitized by Google

Томъ XVII.

Стр.	*Строка.*	*Напечатано.*	*Должно быть.*
15	15 сн.	$(\zeta-3)^2$	$(\zeta-3)^3$
22		Во второмъ членѣ правой части равенства (82) пропущенъ множитель $z^{\frac{1}{3}}$.	
25		Во второмъ членѣ правой части равенства (94) пропущенъ множитель $z^{\frac{1}{3}}$.	
49	6 сн.	$\overset{h=4}{P}$ $\underset{h=1}{}$	$\overset{h=4}{P}$ $\underset{h=0}{}$
55	1 св.	$z^{\frac{5}{24}}$	$z^{-\frac{5}{24}}$
57		Во второй части равенства (100) пропущенъ множитель $z^{-\frac{11}{60}}$.	
65	2 сн.	(11)	(9)
66	2 св.	I_0	Γ_0
83	12 сн.	$R(u)$	$R(z)$
85	9 св.	$F_1(u)$	$F_1(\zeta)$
108	1 сн.	$[\mathfrak{S}S(u)]^2$	$[\mathfrak{S}S(u)]^3$
115	13 »	12	6
147	9 св.	$n-2$	$n-1$
156	8 »	I	Γ

Digitized by Google

ПОПРАВКА.

На стр. 652 тома XVI вып. 4 при формулировкѣ теоремы 21 есть неточность. Эту теорему слѣдуетъ формулировать такъ:

«*При* $N=n$ *уравненіе* (93) *неприводимо и тождественно съ уравненіемъ* (83). *При* $N=\frac{n}{2}$ *уравненіе* (93) *распадается на два неприводимыхъ уравненія степени* $\frac{n}{2}$; *одно изъ этихъ уравненій тождественно съ уравненіемъ* (83)».

Сообразно съ этимъ разсужденія начиная съ строки 13 слѣдуетъ измѣнить такъ:

«Отсюда слѣдуетъ, что функціи:

$$\frac{H^{\mu_1}(u)}{f^{\mu}(u)} \text{ и } \mathfrak{R}(z)$$

суть полные квадраты. Поэтому:

$$\mu=2\lambda,\ \mu_1=2\lambda_1,\ \mathfrak{R}(z)=R^2(z), \qquad (94)$$

гдѣ λ и λ_1 суть цѣлыя числа, а $R(z)$—раціональная функція z.

Одно изъ двухъ уравненій степени $\frac{n}{2}$:

$$\frac{H^{\lambda_1}(u)}{f^{\lambda}(u)} = \pm R(z),$$

Digitized by Google

—его мы будемъ представлять въ видѣ:

$$\frac{H^{\lambda_1}(u)}{f^{\lambda}(u)} = R(z), \qquad (95)$$

имѣетъ съ неприводимымъ уравненіемъ (83) той же степени $\frac{n}{2}$ общій корень. Слѣдовательно, оно тождественно съ уравненіемъ (83)».

Digitized by Google

ОГЛАВЛЕНІЕ. Т. XVI.

Стран.

Введеніе..... 597

Глава I.

Свойства алгебраическихъ уравненій, имѣющихъ корнями частные интегралы линейнаго дифференціальнаго уравненія втораго порядка.

§ 1. Основныя свойства..... 615
§ 2. Первичныя формы..... 631
§ 3. Уравненія, которымъ удовлетворяютъ отношенія корней уравненій разсматриваемаго класса..... 648
§ 4. Случай, когда дифференціальное уравненіе имѣетъ первичную форму второй степени..... 657

Глава II.

Свойства алгебраическихъ уравненій, имѣющихъ корнями отношенія частныхъ интегралов линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка.

§ 5. Основныя свойства..... 661
§ 6. Дифференціальное уравненіе 3-го порядка, которому удовлетворяютъ корни алгебраическаго уравненія изучаемаго класса. 681
§ 7. Двучленное уравненіе..... 688

Глава III.

О функціяхъ Шварца.

§ 8. Линейное преобразованіе на плоскости комплекснаго перемѣннаго..... 690
§ 9. Нѣкоторыя теоремы теоріи гипергеометрическихъ функцій. 701
§ 10. Основныя свойства функцій Шварца..... 703
§ 11. Свойства сѣти треугольниковъ..... 717
§ 12. Построеніе четырехъ типовъ сѣти треугольниковъ, у которыхъ сумма внутреннихъ угловъ больше π..... 724

Digitized by Google

Глава IV.

Конечныя группы линейныхъ подстановокъ. Т. XVI.

Стран.

§ 13. Общіе пріемы вычисленія подстановокъ группы, соотвѣтствующей данной сѣти треугольниковъ 730
§ 14. Геометрическія представленія для группъ конечныхъ порядковъ 736
§ 15. Группа двупирамидная 743
§ 16. Группа тетраэдрическая 746
§ 17. Группа октаэдрическая 753
§ 18. Группа икосаэдрическая 758
§ 19. Циклическая группа конечнаго порядка 762
§ 20. Конечныя группы бинарныхъ линейныхъ подстановокъ. 764

Глава V.

Нормальные виды алгебраическихъ уравненій, имѣющихъ корнями отношенія частныхъ интеграловъ линейнаго дифференціальнаго уравненія втораго порядка.

§ 21. Общіе пріемы вычисленія коэффиціентовъ уравненія, соотвѣтствующаго данной группѣ 773
§ 22. Уравненіе двупирамидное 776
§ 23. Уравненіе тетраэдрическое 778
§ 24. Уравненіе октаэдрическое 783
§ 25. Уравненіе икосаэдрическое 787

Глава VI.

Инваріантныя свойства первичныхъ формъ $f(y', y'')$, $H(y', y'')$, $T(y', y'')$. Соотношенія между первичными функціями различныхъ типовъ.

§ 26. Коваріантъ $(f, f)^4$ первичной формы наименьшей степени $f(y', y'')$ 788
§ 27. Выраженіе формы, инваріантной по отношенію къ бинарнымъ линейнымъ подстановкамъ конечной группы, черезъ первичныя формы: $f(y', y'')$, $H(y', y'')$, $T(y', y'')$ 796
§ 28. Тождества, связывающія между собою первичныя функціи $f(u)$, $H(u)$, $T(u)$ различныхъ типовъ 804

Digitized by Google

Глава VII.

Т. XVII.

Стран.

Рѣшеніе уравненій, имѣющихъ корнями отношенія частныхъ интеграловъ линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка.

§ 29. Критерій для рѣшенія вопроса о томъ, не служатъ ли корни даннаго алгебраическаго уравненія отношеніями частныхъ интеграловъ линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка. 1

§ 30. Приведеніе уравненія къ нормальному виду..... 7

§ 31. Рѣшеніе въ радикалахъ уравненій: двупирамиднаго, тетраэдрическаго и октаэдрическаго..... 11

§ 32. Невозможность рѣшенія икосаэдрическаго уравненія въ радикалахъ..... 14

§ 33. Рѣшеніе уравненій изучаемаго класса въ гипергеометрическихъ функціяхъ..... 16

Глава VIII.

Алгебраическія уравненія, имѣющія корнями частные интегралы линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка.

§ 34. Предварительныя замѣчанія..... 28

§ 35. Выраженія первичныхъ формъ $f(\eta_1, \eta_2)$, $H(\eta_1, \eta_2)$, $T(\eta_1, \eta_2)$ въ видѣ радикаловъ изъ раціональныхъ функцій перемѣннаго ε.. 34

§ 36. Внѣшній видъ уравненій, имѣющихъ корнями частные интегралы дифференціальнаго уравненія вида: $\frac{d^2\eta}{dz^2} = P\eta$..... 37

§ 37. Алгебраическія уравненія, имѣющія корнями частные интегралы гипергеометрическихъ дифференціальныхъ уравненій... 51

Глава IX.

Общая задача объ алгебраическихъ уравненіяхъ, разрѣшимыхъ въ гипергеометрическихъ функціяхъ.

§ 38. Нѣкоторыя свойства группъ линейныхъ подстановокъ.. 58

§ 39. Понятіе объ аутоморфныхъ функціяхъ..... 66

40. Упрощеніе общей задачи объ алгебраическихъ уравненіяхъ, разрѣшимыхъ въ гипергеометрическихъ функціяхъ..... 73

Digitized by Google

Глава X.

Резольвенты уравненій, имѣющихъ группу линейныхъ подстановокъ.

Т. XVII.

Стран.

§ 41. Свойства резольвентъ уравненій, имѣющихъ группу линейныхъ подстановокъ..... 87
§ 42. Подгруппы конечныхъ порядковъ..... 95
§ 43. Резольвента уравненія двупирамиднаго типа..... 103
§ 44. Резольвента уравненія тетраэдрическаго типа..... 107
§ 45. Резольвенты уравненія октаэдрическаго типа..... 110
§ 46. Резольвенты уравненія икосаэдрическаго типа..... 115
§ 47. Нѣкоторыя замѣчанія о группахъ уравненій, найденныхъ въ предыдущихъ параграфахъ..... 139

Глава XI.

Рѣшеніе уравненій: 3-ей, 4-ой, 5-ой степени и уравненія Якоби 6-ой степени

§ 48. Геометрическія представленія, связанныя съ алгебрическими уравненіями..... 145
§ 49. Геометрическія изображенія для уравненій 5-ой степени. 149
§ 50. Рѣшеніе главнаго уравненія 5-ой степени..... 161
§ 51. Рѣшеніе уравненія 5-ой степени общаго вида..... 166
§ 52. Рѣшеніе уравненія 5-ой степени въ формѣ Жерарда. 171
§ 53. Рѣшеніе уравненія 4-ой степени..... 173
§ 54. Рѣшеніе уравненія 3-ей степени..... 176
§ 55. Уравненіе Якоби 6-ой степени..... 178
§ 56. Рѣшеніе уравненія Якоби 6-ой степени..... 189
§ 57. Дискриминантъ уравненія Якоби 6-ой степени..... 191
§ 58. Связь между уравненіемъ 5-ой степени и уравненіемъ Якоби 6-ой степени..... 198

Заключеніе..... 203

Digitized by Google

О РАСПРЕДѢЛЕНІИ КОРНЕЙ ОДНОГО КЛАССА ЦѢЛЫХЪ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХЪ ФУНКЦІЙ.

В. Я. Букрѣева.

Общій видъ цѣлой трансцендентной функціи m-го рода (genre по терминологіи Laguerre'a), какъ извѣстно, слѣдующій:

$$F_m(x)=x^n e^{G(x)} \prod_{\nu} \left\{ \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) e^{Q_m\left(\frac{x}{a_\nu}\right)} \right\},$$

гдѣ n цѣлое положительное число; $a_\nu (\nu = 1, 2, \ldots \infty)$ корни функціи, отличные отъ нуля и при томъ такіе, что

$$lim \mid a_\nu \mid = \infty \ (\nu = \infty);$$

$G(x)$ имѣетъ тотъ же характеръ, что и $F_m(x)$; наконецъ:

$$Q_m(z) = z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^m}{m}.$$

Для случая $m = 0$, $G(x) = const.$ Berloty (C. R. T. XCIX, п. 18) между прочимъ доказалъ, что *если корни функціи располагаются въ части плоскости, ограниченной двумя параллельными прямыми, то въ той же части плоскости будутъ лежать и корни первой производной* и въ частности, *если корни лежатъ на прямой, то и корни первой производной будутъ лежать на той же прямой.*

Digitized by Google

Въ послѣдующемъ я имѣю въ виду изучить распредѣленіе корней первой производной при тѣхъ же условіяхъ для случая $m = 1$, $G(x) = const$, $n = 0$.

Итакъ, положимъ, что мы имѣемъ дѣло съ функціей перваго рода:

$$F_1(x) = \prod_{\nu} \left\{ \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) e^{\frac{x}{a_\nu}} \right\}, \qquad (1)$$

гдѣ мы опустили постояннаго множителя въ виду того, что это не можетъ оказать никакого вліянія на наши нижеслѣдующія разсужденія. Пусть корни a_ν располагаются въ части A плоскости между двумя параллельными прямыми:

$$\begin{aligned} (L) \qquad & \xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi - p = 0, \\ (M) \qquad & \xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi - q = 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Къ A будемъ причислять также и точки этихъ прямыхъ, такъ что корни a_ν могутъ лежать не только между (L) и (M), но также и на самыхъ этихъ прямыхъ. Количества p и q предположимъ отличными отъ нуля и притомъ одного и того же знака, а для большей опредѣленности допустимъ, что прямая (L) ближе къ началу координатъ, чѣмъ (M). Наконецъ $\xi + i\eta = x$.

Взявъ логариѳмическую производную отъ (1), получимъ:

$$\frac{F_1'(x)}{F_1(x)} = \sum_{\nu} \left\{ \frac{1}{x - a_\nu} + \frac{1}{a_\nu} \right\}.$$

Такъ какъ кратные корни уравненія $F(x)=0$ суть въ то же время и корни уравненія $F'(x) = 0$, то достаточно будетъ разсмотрѣть лишь тѣ корни этого послѣдняго уравненія, которые отличны отъ кратныхъ корней уравненія $F(x) = 0$. Полагая теперь въ уравненіи:

$$\sum_{\nu} \left\{ \frac{1}{x - a_\nu} + \frac{1}{a_\nu} \right\} = 0 \qquad (3)$$

Digitized by Google

$a_\nu = \alpha_\nu + i\beta_\nu$ и отдѣляя дѣйствительную часть отъ мнимой, получимъ:

$$\sum_\nu \frac{1}{\Delta_\nu}\{(\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2)\xi+\alpha_\nu(\xi^2+\eta^2)-2\alpha_\nu(\alpha_\nu\xi+\beta_\nu\eta)\}=0,$$
$$\sum_\nu \frac{1}{\Delta_\nu}\{(\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2)\eta+\beta_\nu(\xi^2+\eta^2)-2\beta_\nu(\alpha_\nu\xi+\beta_\nu\eta)\}=0, \quad (4)$$

гдѣ существенно положительная величина:

$$\Delta_\nu=(\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2)\{(\xi-\alpha_\nu)^2+(\eta-\beta_\nu)^2\}=(\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2)\delta_\nu^2.$$

Умножая первое изъ уравненій (4) на $cos\varphi$, второе на $sin\varphi$ и складывая, послѣ небольшаго преобразованія, получимъ:

$$\sum_\nu \frac{\xi cos\varphi+\eta sin\varphi-(\alpha_\nu cos\varphi+\beta_\nu sin\varphi)}{\delta_\nu^2}+\sum_\nu \frac{\alpha_\nu cos\varphi+\beta_\nu sin\varphi}{\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2}=0. \quad (5)$$

Каждую изъ входящихъ сюда суммъ мы раздѣлимъ на двѣ части: первая изъ нихъ пусть распространяется на тѣ значенія ν, которыя соотвѣтствуютъ корнямъ, лежащимъ на прямой (M); вторая—на всѣ остальныя значенія ν. Эти части будемъ различать черточками $'$ и $''$, поставленными у знака суммы. Такимъ образомъ (5) можетъ быть написано въ такомъ видѣ:

$$(\xi cos\varphi+\eta sin\varphi-q)\sum_\nu{}' \frac{1}{\delta_\nu^2}+$$
$$+\sum_\nu{}'' \frac{1}{\delta_\nu^2}\{\xi cos\varphi+\eta sin\varphi-(\alpha_\nu cos\varphi+\beta_\nu sin\varphi)\}+$$
$$+q\sum_\nu{}' \frac{1}{\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2}+\sum_\nu{}'' \frac{\alpha_\nu cos\varphi+\beta_\nu sin\varphi}{\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2}=0. \quad (6)$$

Digitized by Google

Прежде всего нетрудно убѣдиться, что уравненіе (3) не можетъ удовлетворяться такими значеніями (ξ, η), которыя соотвѣтствуютъ точкамъ, лежащимъ съ той стороны отъ (M), гдѣ нѣтъ начала координатъ, т. е. со стороны, которая противоположна части A. Для этого обратимся къ уравненію (5), при чемъ видоизмѣнимъ его такъ:

$$\sum_{\nu} \frac{\xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi - q - (\alpha_\nu\cos\varphi + \beta_\nu\sin\varphi - q)}{\delta_\nu^2} +$$

$$+ \sum_{\nu} \frac{\alpha_\nu\cos\varphi + \beta_\nu\sin\varphi - p}{\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2} + p\sum_{\nu}\frac{1}{\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2} = 0.$$

Тѣ изъ количествъ $\alpha_\nu\cos\varphi + \beta_\nu\sin\varphi - p$, которыя отличны отъ нуля, будутъ того же знака, что и p. Очевидно, что для вышеупомянутыхъ значеній (ξ, η) всѣ количества:

$$\xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi - q - (\alpha_\nu\cos\varphi + \beta_\nu\sin\varphi - q)$$

также будутъ того же знака, что и q. Но въ такомъ случаѣ всѣ члены предыдущей суммы будутъ одного и того же знака, ибо, согласно условію, p и q одинаковаго знака.

Покажемъ далѣе, что уравненіе (3) не удовлетворяется также и тѣми значеніями (ξ, η), которыя соотвѣтствуютъ точкамъ, хотя и лежащимъ на прямой (M), однако отличнымъ отъ находящихся на этой же прямой корней α_ν. Это видно изъ формы (6) уравненія (5), гдѣ слѣдовательно нужно положить $\xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi = q$, такъ что (6) можетъ быть представлено въ слѣдующемъ видѣ:

$$-\sum_{\nu}'' \frac{1}{\delta_\nu^2}(\alpha_\nu\cos\varphi + \beta_\nu\sin\varphi - q) + q\sum_{\nu}' \frac{1}{\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2} +$$

$$+ \sum_{\nu}'' \frac{\alpha_\nu\cos\varphi + \beta\sin\varphi - p}{\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2} + p\sum_{\nu}'' \frac{1}{\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2} = 0.$$

Digitized by Google

Если p и q одного знака, то каждая изъ входящихъ сюда суммъ будетъ того же знака, ибо количества $\alpha_\nu cos\varphi + \beta_\nu sin\varphi - q$, входящія подъ знакъ первой суммы, всѣ знака обратнаго знаку q, а количества $\alpha_\nu cos\varphi + \beta_\nu sin\varphi - p$ имѣютъ тотъ же знакъ, что и p. Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ относительно функцій вида (1).

Теорема. *Если корни функціи (1) перваго рода располагаются въ части A плоскости между двумя параллельными прямыми (2), если начало координатъ лежитъ внѣ A, то корни первой производной, вообще говоря, могутъ лежать во всѣхъ частяхъ плоскости, кромѣ той, которая прилегаетъ къ A вдоль прямой (M), наиболѣе удаленной отъ начала координатъ, т. е. въ которой не лежитъ начала координатъ. Сверхъ того, на прямой (M) могутъ лежать лишь тѣ корни первой производной, которые являются въ то же время кратными корнями начальной функціи.*

Разсмотримъ теперь частный случай, когда обѣ прямыя (2) совпадаютъ въ одну прямую (L), не проходящую чрезъ начало координатъ. Предыдущая теорема получитъ тогда слѣдующую формулировку.

Теорема. *Если корни функціи (1) перваго рода лежатъ на прямой, не проходящей чрезъ начало координатъ, то корни первой производной могутъ располагаться лишь по ту сторону отъ прямой, съ какой лежитъ начало координатъ. На самой же прямой могутъ лежать лишь такіе корни первой производной, которые суть кратные корни первоначальной функціи.*

Въ самомъ дѣлѣ уравненіе (5) принимаетъ въ этомъ случаѣ видъ:

$$(\xi cos\varphi + \eta sin\varphi - p)\sum_\nu \frac{1}{\delta_\nu^2} + p\sum_\nu \frac{1}{\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2} = 0,$$

а это уравненіе можетъ удовлетворяться лишь такими значеніями (ξ, η), для которыхъ $\xi cos\varphi + \eta sin\varphi - p$ имѣетъ знакъ, обратный знаку p. Наконецъ, такъ какъ по условію p отлично отъ нуля, то уравненію нельзя удовлетворить такими значе-

Digitized by Google

ніями (ξ, η), которыя соотвѣтствуютъ точкамъ, хотя и лежащимъ на прямой (L), однако отличнымъ отъ точекъ a_ν.

Замѣчаніе. Въ предыдущемъ само собою подразумѣвалось, что рядъ:

$$\sum_\nu \frac{1}{|a_\nu|^2}$$

сходящійся ($|a_\nu| = mod a_\nu$); при этомъ предположеніи, а также при условіи, что прямыя (L) и (M) находятся въ конечномъ разстояніи другъ отъ друга, и будутъ правильны тѣ видоизмѣненія въ суммированіи, которыя были нами сдѣланы.

Кіевъ.
10 сентября 1892.

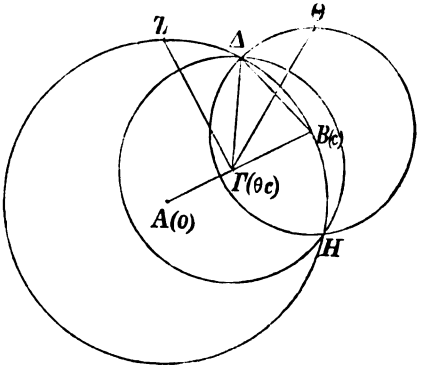
Digitized by Google

КЪ ТЕОРІИ АНАЛИТИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЙ.

И. В. Слешинскаго.

1. *Опредѣленіе.* Особымъ числомъ функціи $f(x)$ называется число c, обладающее тѣмъ свойствомъ, что не существуетъ разложенія этой функціи въ рядъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ $x-c$.

2. *Лемма.* Пусть A будетъ центръ круга сходимости $Z\Delta BH$ ряда $\mathfrak{P}(x)$ и B—одна изъ точекъ его окружности. Если вблизи B существуетъ разложеніе $\mathfrak{P}_1(x-c)$ той же аналитической функціи и кругъ сходимости его — $\Delta\Theta H$, то радіусъ круга сходимости для разложенія вблизи точки Γ, лежащей на прямой AB, будетъ больше ΓB.



Доказательство. По извѣстному свойству окружности будетъ $\Gamma\Delta < \Gamma Z$, гдѣ Z—какая-либо точка дуги ΔZH. На томъ же основаніи будетъ $\Gamma\Delta < \Gamma\Theta$, гдѣ Θ какая-либо точка дуги $\Delta\Theta H$. Отсюда слѣдуетъ, что кругъ, описанный изъ точки Γ радіусомъ $\Gamma\Delta$, не выходитъ за предѣлы первыхъ двухъ круговъ. Слѣдовательно внутри него нѣтъ особыхъ точекъ. По-

Digitized by Google

этому, по теоремѣ *Cauchy* *), радіусъ круга сходимости, описаннаго изъ центра Γ, будетъ не меньше $\Gamma\Delta$ и, слѣдовательно, необходимо больше ΓB.

3. *Лемма.* Пусть радіусъ круга сходимости ряда $\mathfrak{P}(x)$ будетъ равенъ $|c|$. Пусть θ—правильная положительная дробь. Если радіусъ круга сходимости ряда $\mathfrak{P}_1(x-\theta c)$, выведеннаго изъ $\mathfrak{P}(x)$, равенъ $(1-\theta)|c|$, то c—особое число функціи, опредѣляемой рядомъ $\mathfrak{P}(x)$.

Доказательство. Допустивъ противное, мы должны, по 1, допустить существованіе разложенія $\mathfrak{P}_2(x-c)$ для разсматриваемой функціи. Пусть радіусъ сходимости этого разложенія будетъ $B\Delta$. Тогда, по предыдущей леммѣ, радіусъ круга сходимости $\mathfrak{P}_1(x-\theta c)$ будетъ больше ΓB т. е. больше $|c-\theta c|$, т. е. больше $(1-\theta)|c|$, что противорѣчитъ условію.

4. *Лемма.* Если для числъ:

$$\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_m, \tag{1}$$

имѣемъ:

$$\lim_{m=\infty} \delta_m = 0, \tag{2}$$

то, при всякомъ n, въ ряду:

$$|\delta_n|, |\delta_{n+1}|, |\delta_{n+2}|, \ldots \tag{3}$$

существуетъ наибольшее число Δ_n и $\lim_{n=\infty} \Delta_n = 0$.

Доказательство. Сравнивая $|\delta_n|$ съ каждымъ изъ слѣдующихъ за нимъ числъ ряда (3), дойдемъ до числа, послѣ котораго всѣ числа ряда будутъ меньше $|\delta_n|$. Это слѣдуетъ изъ условія (2). Пусть это число будетъ $|\delta_p|$. Тогда наибольшее изъ числъ

$$|\delta_n|, |\delta_{n+1}|, \ldots |\delta_p|$$

будетъ, вмѣстѣ съ тѣмъ, и наибольшимъ изъ числъ (3). Итакъ наибольшее число ряда (3) существуетъ. Обозначимъ его чрезъ Δ_n. Тогда будетъ $\Delta_n = |\delta_q|$, гдѣ q—одно изъ

*) Stolz. Vorlesungen über Arithmetik. Zweiter Theil. стр. 186.

Digitized by Google

чиселъ n, $n+1,\ldots$, т. е. $q \geqq n$. Поэтому съ возрастаніемъ n до ∞ возрастаетъ и q до ∞. Слѣдовательно $\lim_{n=\infty} \Delta_n = 0$.

5. *Теорема.* Если въ ряду:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \qquad (1)$$

коэффиціенты суть вещественныя числа, и существуетъ

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = c, \qquad (2)$$

гдѣ c—конечное, неравное нулю число, то $x=c$ представляетъ особое число аналитической функціи $f(x)$.

Доказательство. Для доказательства этого предложенія достаточно, по 3, показать, что радіусъ круга сходимости разложенія $f(x)$ по степенямъ $x-\theta c$ равенъ $(1-\theta)\,|\,c\,|$. Обозначивъ $x-\theta c$ чрезъ h, имѣемъ:

$$f(\theta c + h) = f(\theta c) + hf'(\theta c) + \frac{h^2}{2!} f''(\theta c) + \ldots \qquad (3)$$

Радіусъ круга сходимости опредѣляется, какъ извѣстно *), предѣломъ абсолютной величины отношенія n-го коэффиціента къ $(n+1)$-му при $n = \infty$ (если этотъ предѣлъ существуетъ). Это отношеніе въ данномъ случаѣ равно:

$$\frac{(n+1) f^{(n)}(\theta c)}{f^{(n+1)}(\theta c)}. \qquad (4)$$

Изслѣдуемъ это выраженіе. Изъ (1) имѣемъ:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 2a_3 x^2 + \ldots + (n+1) a_{n+1} x^n + \ldots \qquad (5)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} f(x) - (c-x) f'(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \\ &\quad - a_1 c - 2a_2 cx - 3a_3 cx^2 - \ldots - n a_n c x^{n-1} - \ldots \\ &\quad + a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + \ldots + n a_n x^n + \ldots \\ &= a_0 - a_1 c + 2(a_1 - a_2 c) x + \ldots \\ &\quad + (n+1)(a_n - a_{n+1} c) x^n + \ldots \end{aligned}$$

*) Stolz. l. c. стр. 154.

Digitized by Google

или

$$f(x)-(c-x)f'(x)=a_1\delta_0+2a_2\delta_1 x+3a_3\delta_2 x^2+\ldots, \qquad (6)$$

гдѣ

$$\delta_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}-c. \qquad (7)$$

Взявъ производныя порядка n отъ обѣихъ частей (6) и замѣтивъ, что производная лѣвой части будетъ:

$$f^{(n)}(x)-(1-x)f^{(n+1)}(x)+nf^{(n)}(x)$$

или

$$(n+1)f^{(n)}(x)-(1-x)f^{(n+1)}(x),$$

получимъ:

$$(n+1)f^{(n)}(x)-(1-x)f^{(n+1)}(x)=(n+1)!\,a_{n+1}\delta_n+$$
$$+\frac{(n+2)!}{1!}a_{n+2}\delta_{n+1}x+\ldots$$

Взявъ производныя порядка n отъ обѣихъ частей (5), найдемъ:

$$f^{(n+1)}(x)=(n+1)!\,a_{n+1}+\frac{(n+2)!}{1!}a_{n+2}x+\ldots$$

Раздѣлимъ почленно предпослѣднее равенство на послѣднее и во второй части полученнаго равенства раздѣлимъ числителя и знаменателя на $(n+1)!\,a_{n+1}$. Тогда получимъ:

$$\frac{(n+1)f^{(n)}(x)}{f^{(n+1)}(x)}-(c-x)=$$
$$=\frac{\delta_n+\frac{n+2}{1}\cdot\frac{a_{n+2}x}{a_{n+1}}\delta_{n+1}+\frac{(n+3)(n+2)}{1.2}\cdot\frac{a_{n+3}x^2}{a_{n+1}}\delta_{n+2}+\ldots}{1+\frac{n+2}{1}\cdot\frac{a_{n+2}x}{a_{n+1}}+\frac{(n+3)(n+2)}{1.2}\cdot\frac{a_{n+3}x^2}{a_{n+1}}+\ldots}.$$

Поэтому:

$$\frac{(n+1)f^{(n)}(\theta c)}{f^{(n+1)}(\theta c)}-(1-\theta)c=$$
$$=\frac{\delta_n+\frac{n+2}{1}\cdot\frac{a_{n+2}\theta c}{a_{n+1}}\delta_{n+1}+\frac{(n+3)(n+2)}{1.2}\cdot\frac{a_{n+2}\theta^2c^2}{a_{n+1}}\delta_{n+2}+\ldots}{1+\frac{n+2}{1}\cdot\frac{a_{n+2}\theta c}{a_{n+1}}+\frac{(n+3)(n+2)}{1.2}\cdot\frac{a_{n+3}\theta^2c^2}{a_{n+1}}+\ldots}.$$

Digitized by Google

Отсюда:

$$\left|\frac{(n+1)f^{(n)}(\theta c)}{f^{(n+1)}(\theta c)} - (1-\theta)c\right| < \tag{8}$$

$$< \frac{|\delta_n| + \frac{n+2}{1}\cdot\left|\frac{a_{n+2}\theta c}{a_{n+1}}\right||\delta_{n+1}| + \ldots}{\left|1 + \frac{n+2}{1}\cdot\frac{a_{n+2}\theta c}{a_{n+1}} + \ldots\right|}.$$

Такъ какъ

$$\frac{a_{n+1}c}{a_n} = c:\frac{a_n}{a_{n+1}},$$

то, по (2),

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}c}{a_n} = 1.$$

Кромѣ того, отношеніе $\frac{a_{n+1}c}{a_n}$, по предположенію,—число вещественное. Поэтому для достаточно большихъ значеній n, оно будетъ постоянно числомъ положительнымъ. Такимъ образомъ числа

$$\frac{a_{n+2}c}{a_{n+1}}, \frac{a_{n+3}c}{a_{n+2}}, \frac{a_{n+4}c}{a_{n+3}}, \ldots$$

будутъ положительны. Поэтому числа:

$$\frac{a_{n+2}c}{a_{n+1}}, \frac{a_{n+3}c^2}{a_{n+1}}, \frac{a_{n+4}c^3}{a_{n+1}}, \ldots$$

изъ коихъ первое равно первому числу предыдущаго ряда, второе равно произведенію первыхъ двухъ чиселъ предыдущаго ряда, третье—произведенію первыхъ трехъ и т. д., будутъ также числами положительными. Поэтому будетъ:

$$\left|1 + \frac{n+2}{1}\frac{a_{n+2}\theta c}{a_{n+1}} + \ldots\right| = 1 + \frac{n+2}{1}\cdot\frac{a_{n+2}\theta c}{a_{n+1}} + \ldots,$$

$$|\delta_n| + \frac{n+2}{1}\cdot\left|\frac{a_{n+2}\theta c}{a_{n+1}}\right||\delta_{n+1}| + \ldots$$

$$= |\delta_n| + \frac{n+2}{1}\cdot\frac{a_{n+2}\theta c}{a_{n+1}}|\delta_{n+1}| + \ldots$$

Digitized by Google

На этомъ основаніи изъ (8) получимъ:

$$\left|\frac{(n+1)f^{(n)}(\theta c)}{f^{(n+1)}(\theta c)} - (1-\theta)c\right| < \tag{9}$$

$$< \frac{|\delta_n| + \frac{n+2}{1}\cdot\frac{a_{n+2}\theta c}{a_{n+1}}|\delta_{n+1}| + \ldots}{1 + \frac{n+2}{1}\cdot\frac{a_{n+2}\theta c}{a_{n+1}} + \ldots}.$$

Но, по (2) и (7),— $\lim_{n=\infty}\delta_n = 0$. Поэтому, по предыдущей леммѣ, для чиселъ $|\delta_n|, |\delta_{n+1}|, \ldots$ существуетъ наибольшее число Δ_n. Такъ что имѣемъ:

$$|\delta_n| \leqq \Delta_n, \quad |\delta_{n+1}| \leqq \Delta_n \ldots$$

Отсюда

$$|\delta_n| + \frac{n+2}{1}\cdot\frac{a_{n+2}\theta c}{a_{n+1}}|\delta_{n+1}| + \ldots <$$

$$< \left(1 + \frac{n+2}{1}\cdot\frac{a_{n+2}\theta c}{a_{n+1}} + \ldots\right)\Delta_n.$$

Поэтому, на основаніи (9),

$$\left|\frac{(n+1)f^{(n)}(\theta c)}{f^{(n+1)}(\theta c)} - (1-\theta)c\right| < \Delta_n.$$

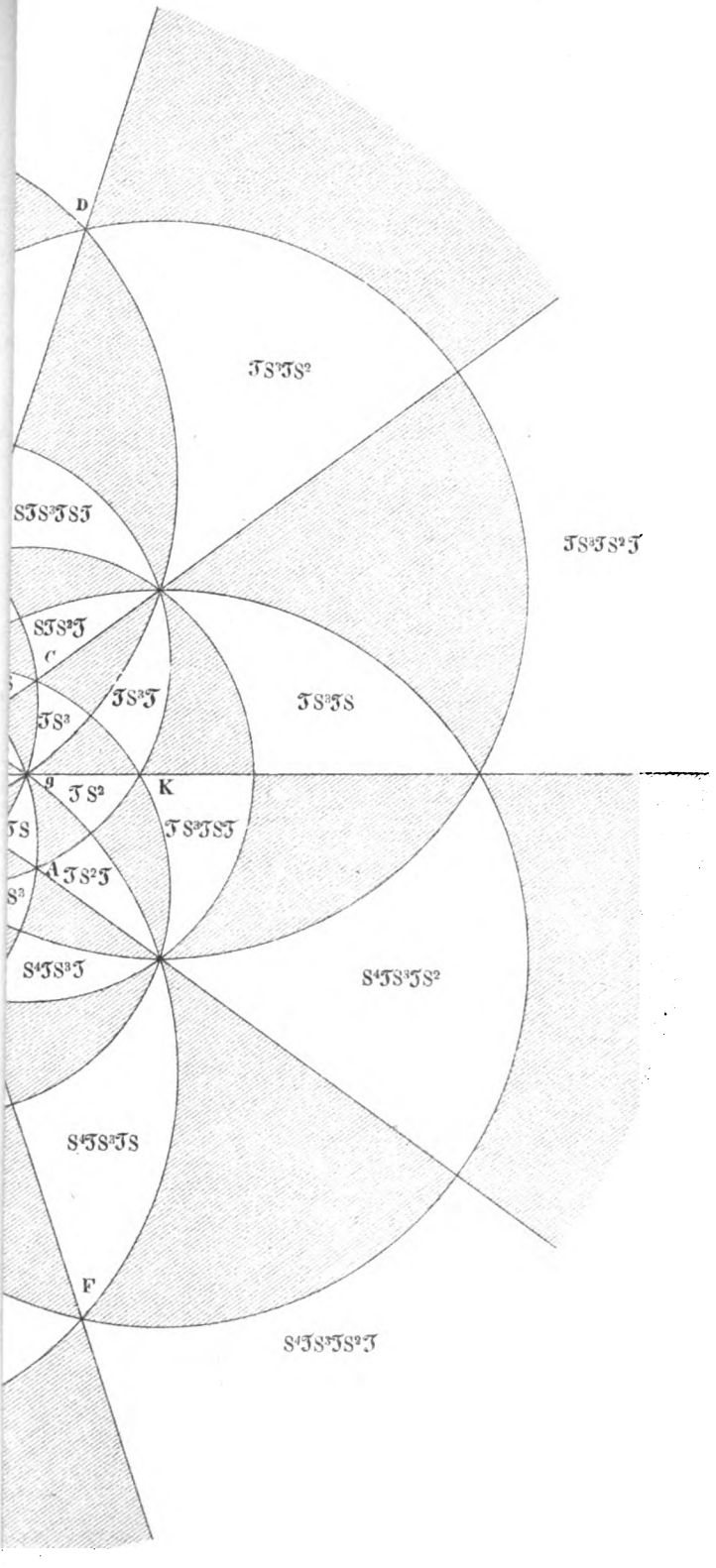
Но, по той же леммѣ, $\lim_{n=\infty}\Delta_n = 0$. Поэтому:

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{(n+1)f^{(n)}(\theta c)}{f^{(n+1)}(\theta c)}\right| = (1-\theta)|c|,$$

то есть радіусъ круга сходимости дѣйствительно равенъ $(1-\theta)|c|$.

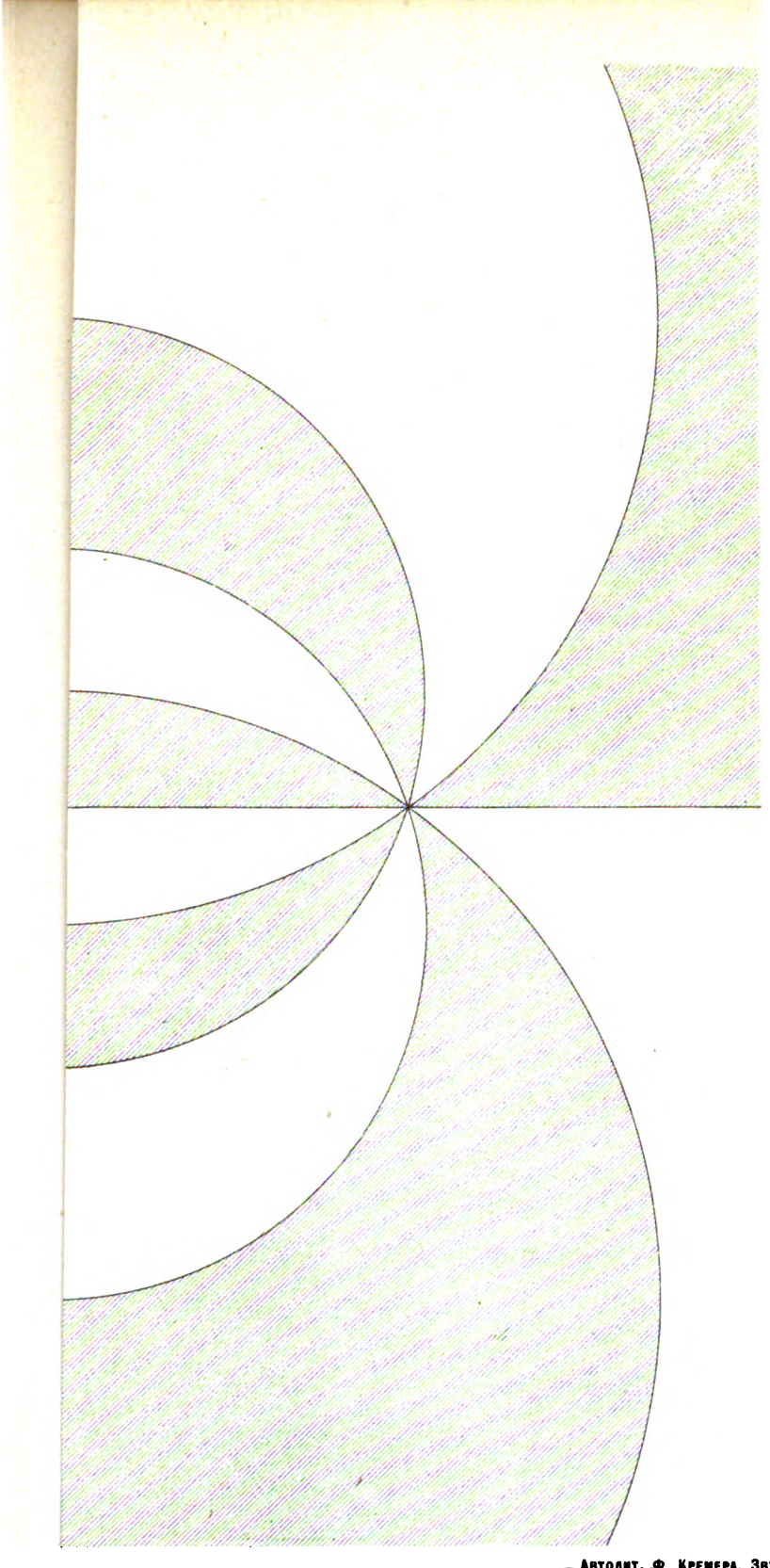
Одесса,
20 ноября 1892 года.

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

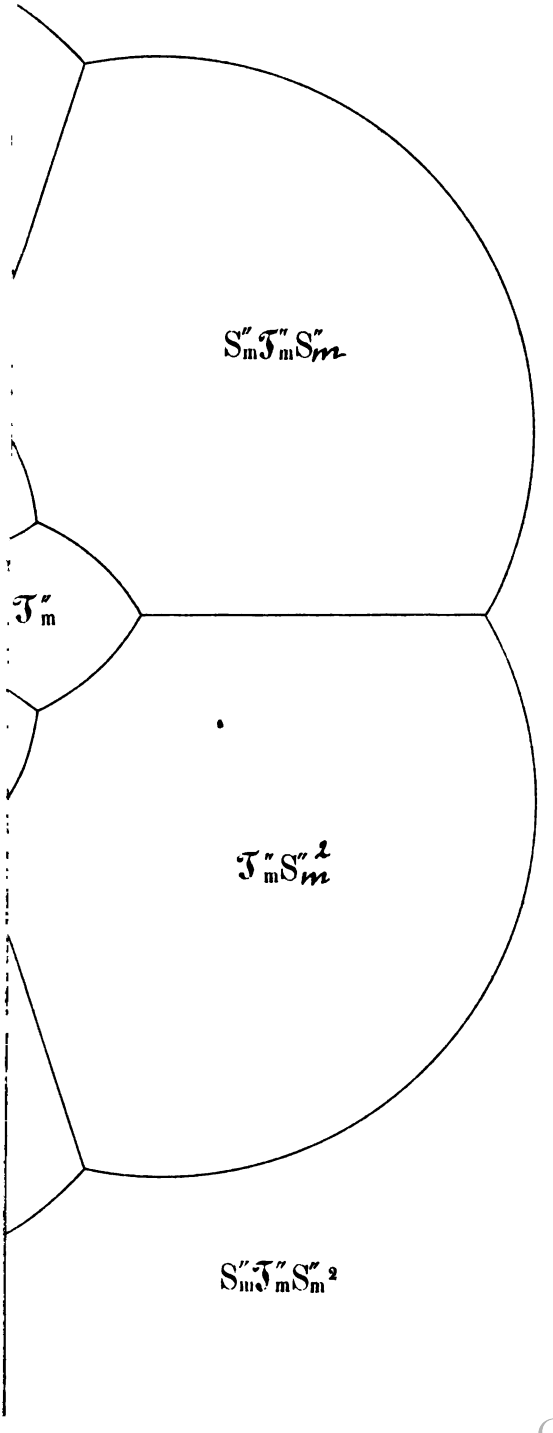


Автолит. Ф Кремера, Звѣринская 46, С

Digitized by Google

Digitized by Google

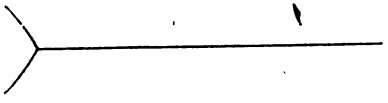
Черт. III.



Digitized by Google

Digitized by Google

S^3U



S^2U

Digitized by Google

Digitized by Google

КЪ ВОПРОСУ О НАИБОЛЬШЕМЪ И НАИМЕНЬШЕМЪ ЗНАЧЕНІИ ОПРЕДѢЛЕННАГО ИНТЕГРАЛА.

В. А. Циммермана.

Въ извѣстномъ сочиненіи Moigno «Calcul des variations» доказывается слѣдующее положеніе: интегралъ

$$S=\int_{x_1}^{x_2} V dx,$$

въ которомъ $V=f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)})$, не имѣетъ ни maximum'а, ни minimum'а, если предѣлы x_1, x_2 и предѣльныя значенія неизвѣстной функціи y и ея производныхъ не подчинены никакимъ условіямъ.

Разсужденія, которыми Moigno доказываетъ это положеніе, страдаютъ существенными недостатками, и самое положеніе оказывается невѣрнымъ.

На ошибку Moigno обратилъ вниманіе Е. Ѳ. Сабининъ и вполнѣ доказалъ неправильность вышеуказаннаго общаго положенія: въ статьѣ г. Сабинина, озаглавленной: «О мемуарѣ Саррюса» и напечатанной въ 14 томѣ Математическаго Сборника, приведены два интеграла, имѣющіе minimum, несмотря на отсутствіе ограниченій для предѣльныхъ значеній перемѣнной независимой, искомой функціи и ея производныхъ.

Не ограничиваясь доказательствами ошибочности самаго положенія Moigno, Е. Ѳ. Сабининъ обнаруживаетъ и бездоказательность мотивовъ, приведшихъ Moigno къ невѣрному

Digitized by Google

заключенію. Однако неправильность въ разсужденіяхъ Moigno раскрыта Е. Ѳ. Сабининымъ не вполнѣ, и въ той части статьи Е. Ѳ. Сабинина, гдѣ критикуется указанное доказательство Moigno *), замѣчается неясность, устранить которую желательно тѣмъ болѣе, что положеніе вопроса объ абсолютномъ maximum'ѣ и minimum'ѣ опредѣленнаго интеграла въ томъ освѣщеніи, которое далъ этому вопросу Е. Ѳ. Сабининъ, вошло уже въ университетскіе курсы варіаціоннаго исчисленія.

Вопросъ объ абсолютномъ maximum'ѣ и minimum'ѣ интеграла съ перемѣнными предѣлами

$$S = \int_{x_1}^{x_2} V dx,$$

гдѣ V есть функція перемѣнной независимой x, неизвѣстной функціи y и ея n производныхъ $y', y'', \ldots y^{(n)}$, приводится къ дифференціальному уравненію порядка $2n$, которому должна удовлетворять функція y, и къ $2n+2$ предѣльнымъ уравненіямъ.

Уравненія эти, вводя извѣстныя обозначенія, можно представить въ видѣ *):

$$P - \frac{dP_1}{dx} + \frac{d^2P_2}{dx_2} - \ldots \pm \frac{d^nP_n}{dx^n} = 0; \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Big/^{x_1}(P_1) = 0, \quad \Big/^{x_1}(P_2) = 0, \ldots \quad \Big/^{x_1}(P_n) = 0. \\ \Big/^{x_2}(P_2) = 0, \quad \Big/^{x_2}(P_n) = 0, \ldots \quad \Big/^{x_2}(P_n) = 0. \end{array}\right\} \tag{2}$$

$$\Big/^{x_1} V = 0, \quad \Big/^{x_2} V = 0. \tag{3}$$

---

*) Математическій Сборникъ, т. 14, стр. 463—464.

*) Moigno. Calcul des variations. P. 112.

Digitized by Google

Написаннымъ уравненіямъ, въ случаѣ maximum'а или minimum'а, *должны* удовлетворять функція y и предѣлы x_1 и x_2; иными словами, уравненія (1), (2) и (3) представляютъ собою необходимое, (хотя и не достаточное) условіе maximum'а и minimum'а.

Если, такимъ образомъ, для какого нибудь интеграла S оказывается невозможнымъ подыскать функцію y и предѣлы x_1 и x_2, которые удовлетворяли бы уравненіямъ (1), (2) и (3), или же если функція y и предѣлы x_1 и x_2, удовлетворяющіе этимъ уравненіямъ, въ дѣйствительности не обращаютъ интеграла ни въ maximum, ни въ minimum, то задача не имѣетъ рѣшенія: интегралъ не имѣетъ ни maximum'а, ни minimum'а

Разсужденія, которыми Moigno желаетъ оправдать свой выводъ, и направлены къ тому, чтобы показать, что значенія функціи y и предѣловъ x_1 и x_2, которыя опредѣляются уравненіями (1), (2) и (3), не соотвѣтствуютъ ни maximum'у, ни minimum'у.

Сущность разсужденій Moigno состоитъ въ слѣдующемъ: дифференціальное уравненіе (1) порядка $2n$ даетъ для функціи y выраженіе, содержащее $2n$ произвольныхъ постоянныхъ. Вставивъ это выраженіе въ уравненія (2) и (3), можемъ опредѣлить изъ $2n$ уравненій (2) произвольныя постоянныя функціи y въ функціяхъ x_1 и x_2; полученныя выраженія для произвольныхъ постоянныхъ будутъ функціями симметрическими относительно x_1 и x_2, что слѣдуетъ изъ того, что x_1 и x_2 входятъ въ уравненія (2) совершенно одинаковымъ образомъ. Если затѣмъ внесемъ въ уравненія (3) найденныя выраженія для произвольныхъ постоянныхъ и выполнимъ подстановки, то получимъ, очевидно, два уравненія вида:

$$f(x_1, x_2) = 0, \; f(x_2, x_1) = 0,$$

изъ которыхъ каждое получается изъ другаго путемъ подстановки x_1 и x_2. Разрѣшая эти уравненія послѣдовательно относительно x_1 и x_2, получимъ для обоихъ предѣловъ одно и то же значеніе, или $x_1 = x_2$. Но при равныхъ предѣлахъ интегралъ, получая нулевое значеніе, не обращается ни въ maximum,

Digitized by Google

ни въ minimum; слѣдовательно разсматриваемый интегралъ вообще не имѣетъ ни maximum'а, ни minimum'а.

Въ изложенномъ доказательствѣ Moigno есть два слабыхъ пункта, на одинъ ихъ которыхъ обратилъ вниманіе въ упомянутой статьѣ Е. Ѳ. Сабининъ.

Именно, для существованія maximum'а или minimum'а интеграла S необходимо, чтобы $2n$ произвольными постоянными функціи y и двумя предѣлами x_1 и x_2 удовлетворялась система $2n+2$ уравненій (2) и (3). Очевидно, эта система $2n+2$ уравненій можетъ удовлетворяться извѣстной системой значеній указанныхъ $2n+2$ неизвѣстныхъ, и въ то же время система, состоящая изъ $2n$ уравненій (2), можетъ не удовлетворяться никакими значеніями $2n$ произвольныхъ постоянныхъ функціи y, если при этомъ x_1 и x_2 остаются неопредѣленными. Между тѣмъ Moigno именно предполагаетъ, что уравненія (2) совмѣстны въ указанномъ смыслѣ, что, какъ мы замѣтили, совершенно не вытекаетъ изъ предположенія (необходимаго при существованіи maximum'а или minimum'а) о совмѣстности $2n+2$ уравненій системы (2) и (3) *).

*) Критикуя разобранное выше ошибочное положеніе Moigno, Е. Ѳ Сабининъ говоритъ (на стр. 464 т. 14 Мат. Сб.): „Такое положеніе дѣйствительно невозможно само по себѣ: изъ вышеозначенныхъ уравненій (2) для каждаго изъ $2n$ произвольныхъ постоянныхъ никакъ нельзя найти выраженіе въ x_1 и x_2, такъ какъ эти уравненія (2) образуютъ два ряда n уравненій, составленные такъ, что въ каждой изъ нихъ $2n$ произвольныхъ постоянныхъ входятъ совершенно одинаковымъ образомъ". Эти слова, конечно, нужно понимать въ томъ смыслѣ, что нельзя *вообще* утверждать, что уравненія (2) даютъ для каждаго изъ $2n$ произвольныхъ постоянныхъ выраженіе въ x_1 и x_2. Ибо утвержденіе, что изъ уравненій (2) *никогда* нельзя получить $2n$ произвольныхъ постоянныхъ въ функціяхъ x_1 и x_2, было бы неправильнымъ. Такъ, напримѣръ, въ уравненія

$$\Big/^{x_1} x^2+px+q=0,$$

$$\Big/^{x_2} x^2+px+q=0,$$

неопредѣленные коэффиціенты p и q входятъ совершенно одинаковымъ образомъ, однако же изъ уравненій этихъ, оставляя x_1 и x_2 произвольными, можно опредѣлить p и q въ функціяхъ x_1 и x_2.

Digitized by Google

Несмотря на важность указаннаго упущенія Moigno, мы должны тѣмъ не менѣе признать, что упущеніе это не имѣетъ существеннаго значенія въ занимающемъ насъ вопросѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, разсужденіе Moigno можно замѣнить слѣдующимъ, свободнымъ отъ указаннаго выше недостатка и приводящимъ къ тому же результату: изъ системы $2n+2$ уравненій (которыя *должны* быть совмѣстны, если существуетъ maximum или minimum) исключаемъ всѣ неизвѣстныя, кромѣ x_1, затѣмъ всѣ, кромѣ x_2; въ результатѣ исключеній получимъ уравненія вида:

$$\varphi(x_1) = 0, \quad \varphi(x_2) = 0,$$

которыя представляютъ собою частный случай уравненій Moigno $f(x_1, x_2) = 0$ и $f(x_2, x_1) = 0$. Второй слабый пунктъ въ разсужденіи Moigno, который и является дѣйствительной причиной неправильнаго вывода, заключается въ томъ, что изъ уравненій $f(x_1, x_2) = 0$, $f(x_2, x_1) = 0$, которымъ удовлетворяютъ предѣлы, Moigno выводитъ слишкомъ поспѣшное заключеніе, что $x_1 = x_2$. Между тѣмъ изъ этихъ уравненій слѣдуетъ только, что x_1 и x_2 должны удовлетворять одному и тому же уравненію:

$$\varphi(x) = 0. \qquad (4)$$

Безспорно, между системами значеній неизвѣстныхъ, удовлетворяющими уравненіямъ (2) и (3), существуютъ такія, въ которыхъ $x_1 = x_2$; эти системы должны быть отброшены, какъ не соотвѣтствующія ни maximum'у, ни minimum'у. Но могутъ существовать, вообще говоря, и такія системы значеній неизвѣстныхъ, въ которыхъ x_1 и x_2 представляютъ собою два *различныхъ* корня уравненія (4); подобныя системы могутъ соотвѣтствовать maximum'у или minimum'у, и вопросъ окончательно рѣшается только разсмотрѣніемъ второй варіаціи.

Все вышесказанное наглядно обнаруживается на тѣхъ двухъ примѣрахъ, которые приведены въ статьѣ Е. Ѳ. Сабинина.

Digitized by Google

1-й примѣръ. Найти абсолютный minimum интеграла

$$U = \int_{x_1}^{x_2} V dx,$$

въ которомъ

$$V = x^2 - x + yp - p + p^2,$$

гдѣ

$$p = \frac{dy}{dx}.$$

Полагая *)

$$N = \frac{\partial V}{\partial y}$$

и

$$P = \frac{\partial V}{\partial p},$$

получимъ для опредѣленія y дифференціальное уравненіе:

$$N - \frac{dP}{dx} = p - p - 2\frac{dp}{dx} = -2\frac{dp}{dx} = 0. \qquad (1)$$

Интегрированіе уравненія (1) даетъ:

$$y = ax + b,$$

гдѣ a и b—произвольныя постоянныя.

Предѣльныя уравненія въ разсматриваемомъ случаѣ будутъ:

$$\left.\begin{aligned} \Big|^{x_1} P = 0, \text{ или } \Big|^{x_1} ax + b - 1 + 2a = 0, \\ \Big|^{x_2} P = 0, \text{ или } \Big|^{x_2} ax + b - 1 + 2a = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \Big|^{x_1} V = 0, \text{ или } \Big|^{x_1} x^2 - x + a^2 x + ab - a + a^2 = 0, \\ \Big|^{x_2} V = 0, \text{ или } \Big|^{x_2} x^2 - x + a^2 x + ab - a + a^2 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

*) Мы сохраняемъ обозначенія Е. Ѳ. Сабинина.

Digitized by Google

Е. Ѳ. Сабининъ опредѣляетъ произвольныя постоянныя a и b и предѣлы x_1 и x_2, слѣдуя рекомендуемому имъ пути: находитъ сначала x_1 и x_2, какъ корни уравненія $V = 0$, и вставляетъ найденныя выраженія для x_1 и x_2 въ уравненія (2), откуда и опредѣляются a и b, а затѣмъ, помощью этихъ величинъ, x_1 и x_2. Но въ данномъ случаѣ къ той же цѣли приводитъ и путь, указанный Moigno. Дѣйствительно, мы можемъ опредѣлить изъ уравненій (2) a и b (оставляя x_1 и x_2 неопредѣленными); для этого вычтемъ сначала второе уравненіе (2) изъ перваго уравненія (2), послѣ чего получимъ:

$$a(x_1 - x_2) = 0,$$

откуда (исключая случай $x_1 = x_2$, не приводящій ни къ maximum'у, ни къ minimum'у)

$$a = 0;$$

затѣмъ изъ уравненія (2) находимъ:

$$b = 1.$$

Уравненія (3) принимаютъ такимъ образомъ видъ:

$$x_1^2 - x_1 = 0, \quad x_2^2 - x_2 = 0,$$

т. е. x_1 и x_2 удовлетворяютъ уравненію:

$$x^2 - x = 0.$$

Выбирая

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1$$

и примѣняя критерій Якоби, убѣждаемся, что интегралъ U имѣетъ абсолютный minimum при $y = 1$, будучи взятъ между предѣлами 0 и 1.

Мы видимъ, что въ разсмотрѣнномъ примѣрѣ произвольныя постоянныя могутъ быть опредѣлены такъ, какъ указываетъ Moigno, и несмотря на это, интегралъ, вопреки утвержденію Moigno, имѣетъ абсолютный minimum.

Digitized by Google

2-й примѣръ. Найти абсолютный minimum интеграла

$$U=\int_{x_1}^{x_2} V dx,$$

въ которомъ

$$V=-\frac{7}{48}x^4+xy+p^2+5,$$

гдѣ

$$p=\frac{dy}{dx}.$$

Полагая, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ,

$$N=\frac{\partial V}{\partial y}$$

и

$$P=\frac{\partial V}{\partial p},$$

получимъ для опредѣленія y дифференціальное уравненіе:

$$N-\frac{dP}{dx}=x-2\frac{dp}{dx}=x-2\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

интегрируя которое, находимъ:

$$y=\frac{x^3}{12}-c_1x-c_2.$$

Предѣльныя уравненія будутъ:

$$\left.\begin{array}{l} \Big|^{x_1}P=0, \text{ или } \Big|^{x_1}\frac{x^2}{2}-2c_1=0, \\ \Big|^{x_2}P=0, \text{ или } \Big|^{x_2}\frac{x^2}{2}-2c_1=0, \end{array}\right\} \quad (2)$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} \int^{x_1} V=0, \text{ или } \int^{x_1} -\frac{3}{2}c_1x^2-c_2x+c_1^2+5=0, \\ \int^{x_2} V=0, \text{ или } \int^{x_2} -\frac{3}{2}c_1x^2-c_2x+c_1^2+5=0, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Уравненіямъ (2) нельзя удовлетворить насчетъ c_1 и c_2—оставляя при этомъ x_1 и x_2 неопредѣленными: имѣемъ слѣдовательно случай, упущенный изъ виду Moigno. Однако для всей системы уравненій (2) и (3) можно найти значенія c_1, c_2, x_1, x_2, удовлетворяющія этой системѣ.

Изъ уравненій (2) находимъ прежде всего:

$$c_1 = \frac{x_1^2}{4} = \frac{x_2^2}{4}.$$

Исключивъ затѣмъ изъ уравненій (3) c_1, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{3}{8}x_1^4-c_2x_1+\frac{x_1^4}{16}+5=0, \\ -\frac{3}{8}x_2^4-c_2x_2+\frac{x_2^4}{16}+5=0, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Вычтя второе уравненіе изъ перваго и замѣтивъ, что $x_1^2=x_2^2$, найдемъ:

$$c_2(x_2-x_1)=0,$$

откуда

$$c_2=0.$$

Уравненія (4), послѣ упрощеній, принимаютъ видъ:

$$x_1^4-16=0,$$

$$x_2^4-16=0,$$

откуда заключаемъ, что x_1 и x_2 должны быть корнями уравненія

$$x^4-16=0.$$

Digitized by Google

Выбирая

$$x_1 = -2,\ x_2 = +2$$

и слѣдовательно

$$c_1 = 1,$$

убѣждаемся, прилагая критерій Якоби, что интегралъ U имѣетъ абсолютный minimum при $y = \frac{x^3}{12} - x$, будучи взятъ между предѣлами —2 и +2.

Въ заключеніе считаемъ не лишнимъ сдѣлать одно замѣчаніе.

На стр. 113 своего сочиненія Moigno слѣдующимъ разсужденіемъ подтверждаетъ справедливость своего вывода: «...si la fonction y et les limites x_1, x_2 peuvent se déformer en même temps, sans être assujeties à aucune restriction, il est clair que l'intégrale proposée pourra elle-même croître ou decroître indéfiniment, et qu'il n'y aura plus lieu à chercher sa valeur maxima ou minima».

Е. Ѳ. Сабининъ называетъ это разсужденіе голословнымъ. Какъ намъ кажется, разсужденія и выводъ можно признать вообще правильными; но Moigno даетъ этому выводу неправильное толкованіе.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ того, что функція y произвольна, слѣдуетъ, что можно вообще положить

$$V = F(x),$$

гдѣ $F(x)$ какая нибудь функція. Выбирая приличнымъ образомъ эту функцію $F(x)$ и предѣлы x_1 и x_2, можемъ дать интегралу какое угодно большое значеніе и какое угодно малое. Такъ что дѣйствительно интегралъ U не имѣетъ ни наибольшаго, ни наименьшаго значенія,—однако не въ смыслѣ аналитическаго maximum'а и minimum'а: въ анализѣ подъ maximum'омъ и minimum'омъ разумѣютъ не наибольшее и

Digitized by Google

наименьшее значеніе перемѣнной величины, а тѣ значенія, которыя больше или меньше смежныхъ значеній *).

Если мы обратимся къ приведеннымъ выше примѣрамъ, то на нихъ легко подтвердится сказанное.

Давая въ первомъ примѣрѣ функціи y постоянное значеніе c, получимъ интегралъ:

$$U_1 = \int_{x_1}^{x_2} (x^2 - x)dx,$$

который, очевидно, насчетъ предѣловъ можетъ быть сдѣланъ неопредѣленно большимъ и неопредѣленно малымъ: ни наибольшаго, ни наименьшаго значенія въ обыкновенномъ (не аналитическомъ) смыслѣ интегралъ U слѣдовательно не имѣетъ; между тѣмъ, какъ мы видѣли, онъ имѣетъ аналитическій minimum.

Къ такому же заключенію придемъ и относительно интеграла, взятаго въ качествѣ втораго примѣра, если положимъ $y = c$.

Одесса,
26 ноября 1892 года.

---

*) Moigno указываетъ на стр. 214 своего сочиненія на точный смыслъ аналитическаго maximum'а и minimum'а, и упускаетъ его совершенно изъ виду на стр. 113.

Digitized by Google

О ЧИСЛАХЪ, ДѢЛЯЩИХСЯ НА ЧИСЛО СВОИХЪ ДѢЛИТЕЛЕЙ.

А. П. Минина.

(Читано въ засѣданіи Математическаго Общества 16 февраля 1893 года).

§ 1. Вопросъ объ опредѣленіи чиселъ, дѣлящихся на число своихъ дѣлителей, приводится къ рѣшенію уравненія

$$N = m.\rho(N),$$

въ которомъ m число цѣлое и положительное, а $\rho(N)$ числовая функція, выражающая число дѣлителей N.

Въ настоящей статьѣ мы ограничимся разборомъ только одного частнаго случая этого уравненія, именно уравненія

$$N = q.\rho(N), \qquad (1)$$

гдѣ q число простое.

Числа, удовлетворяющія уравненію (1), имѣютъ то свойство, что, при дѣленіи на число своихъ дѣлителей, даютъ въ частномъ простыя числа.

Приступая къ рѣшенію уравненія (1), раздѣлимъ всѣ числа N на слѣдующія группы:

$$N=a,\ N=a^\alpha,\ N=a.b.c.d\ldots,\ N=b.a^\alpha,\ N=b.c.a^\alpha,$$

$$N=b.c.d.a^\alpha,\ N=b.c.d\ldots r.s.t.a^\alpha,\ N=a^\alpha b^\beta,\ N=a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots,$$

$$N=p.r.s.t\ldots\ a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots,$$

Digitized by Google

гдѣ $a, b, c, d \ldots p, r, s, t \ldots$ простыя числа,
и остановимся на разборѣ каждой группы отдѣльно.

§ 2. **Числа вида:** $N = a$.

Основное уравненіе задачи принимаетъ видъ:

$$q(1 + 1) = a$$

и даетъ $q = 1$, $a = 2$.

Такимъ образомъ въ этомъ случаѣ получается только одно число

$$N = 2.$$

Это число равно числу своихъ дѣлителей.

§ 3. **Числа вида:** $N = a^\alpha$.

Основное уравненіе задачи принимаетъ видъ:

$$q(\alpha + 1) = a^\alpha.$$

Замѣтивъ, что при $q = 1$ это уравненіе не даетъ рѣшеній, соотвѣтствующихъ разсматриваемому вопросу, положимъ въ немъ

$$\alpha + 1 = q^t, \qquad (2)$$

гдѣ $t > 0$.

Мы будемъ имѣть

$$q^{t+1} = a^\alpha,$$

откуда

$$a = q; \quad \alpha = t + 1.$$

Если найденную для α величину внесемъ въ уравненіе (2) то получимъ уравненіе

$$t + 2 = q^t,$$

которому можно удовлетворить, сдѣлавъ относительно t два предположенія: 1) $t = 1$; 2) $t = 2$. Первое предположеніе даетъ $q = 3$, второе $q = 2$. Такимъ образомъ получается два числа вида a^α:

Digitized by Google

$$N_1 = a^\alpha = q^{t+1} = 3^2 = 9,$$

$$N_2 = a^\alpha = q^{t+1} = 2^3 = 8.$$

Первое изъ этихъ чиселъ равно тройному числу своихъ дѣлителей, второе—двойному числу своихъ дѣлителей.

§ 4. **Числа вида:** $N = a.b.c.d.$

Основное уравненіе задачи принимаетъ видъ:

$$2^\mu . q = a.b.c.d...$$

и показываетъ, что между числами разсматриваемаго вида нѣтъ такихъ, которыя удовлетворяютъ уравненію (1).

§ 5. **Числа вида:** $N = b.a^\alpha$.

Замѣтивъ, что основное уравненіе задачи принимаетъ видъ:

$$2q(\alpha + 1) = b.a^\alpha,$$

положимъ въ немъ

$$\alpha + 1 = 2^k . p^s, \qquad (3)$$

гдѣ p простое число большее 2, а k и s могутъ получать всѣ цѣлыя и положительныя значенія, начиная съ нуля.

Мы будемъ имѣть уравненіе

$$2^{k+1} . q . p^s = b.a^\alpha, \qquad (4)$$

въ которомъ относительно s сдѣлаемъ три предположенія: 1) $s = 0$; 2) $s = 1$; 3) $s > 1$.

Первое предположеніе: $s = 0$.

Уравненіе (4) обращается въ

$$2^{k+1} . q = b.a^\alpha$$

и дастъ два равенства

$$q = b$$

$$2^{k+1} = a^\alpha.$$

Изъ послѣдняго имѣемъ

Digitized by Google

$$a = 2$$

$$\alpha = k + 1$$

Вноси полученную для α величину въ уравненіе (3) и принимая во вниманіе, что $s = 0$, найдемъ уравненіе

$$k + 2 = 2^k,$$

которое даетъ единственное рѣшеніе, соотвѣтствующее разсматриваемому вопросу, именно $k = 2$.

Такимъ образомъ имѣемъ

$$\alpha = k + 1 = 2 + 1 = 3; \quad a = 2; \quad b = q,$$

и слѣдовательно

$$N = 2^3 . q,$$

гдѣ q простое число большее двухъ.

Всякое число вида $2^3 . q$, при дѣленіи на число своихъ дѣлителей, даетъ въ частномъ простое число q.

Такъ, напримѣръ:

$$40 = 2^3 . 5 = 5 . \rho(40) = 5 . (3 + 1) . 2.$$

Второе предположеніе: $s = 1$.

Уравненіе (4) обращается въ

$$2^{k+1} q . p = b . a^\alpha \qquad (5)$$

Будемъ разлагать слѣдующіе случаи:

$$1)\ q = 1;\ 2)\ q = 2,\ 3)\ q = p.$$

1-й случай: $q = 1$.

Уравненіе (5) принимаетъ видъ:

$$2^{k+1} . p = b . a^\alpha$$

и приводитъ къ равенствамъ:

$$b = p$$

$$a = 2$$

Digitized by Google

$$\alpha = k + 1.$$

Полагая въ уравненіи (3) $s = 1$ и внося въ это уравненіе найденное для α значеніе, будемъ имѣть

$$k + 2 = 2^k . p.$$

Это уравненіе не даетъ рѣшеній, соотвѣтствующихъ разсматриваемой задачѣ.

2-й случай: $q = 2$.

Уравненіе (5) обращается въ

$$2^{k+2} . p = b . a^\alpha$$

и даетъ

$$b = p; \; 2^{k+2} = a^\alpha.$$

Изъ послѣдняго равенства слѣдуетъ, что $a = 2$ и $\alpha = k + 2$. Внося полученную для α величину въ уравненіе (3) и принимая во вниманіе, что $s = 1$, будемъ имѣть

$$k + 3 = 2^k . p.$$

Такъ какъ это уравненіе, при условіяхъ разсматриваемой задачи, можетъ быть удовлетворено только при $k = 0$, $p = 3$, то имѣемъ

$$\alpha = k + 2 = 0 + 2 = 2; \; a = 2; \; b = p = 3; \; q = 2,$$

и слѣдовательно

$$N = 2^2 . 3 = 12.$$

Это число, при дѣленіи на число своихъ дѣлителей, даетъ въ частномъ 2.

3-й случай: $q = p$.

Уравненіе (5) принимаетъ видъ

$$2^{k+1} . q^2 = b . a^\alpha.$$

Такъ какъ $\alpha > 1$ и $q > 2$, то $k = 0$, и мы имѣемъ:

$$b = 2; \; q^2 = a^\alpha; \; q = a; \; \alpha = 2.$$

Digitized by Google

Уравненіе (3) даетъ для этихъ значеній

$$a = 3,$$

и потому

$$N = b.a^{\alpha} = 2.3^{2} = 18.$$

Это число, при дѣленіи на число своихъ дѣлителей, даетъ, въ частномъ 3.

Третье предположеніе: $s > 1$.

Если $s > 1$, то въ уравненіи (4), въ силу того, что $p > 2$

$$k = 0;\ q = p,$$

и потому

$$2.p^{s+1} = b.a^{\alpha},$$

откуда

$$b = 2;\ a = p;\ \alpha = s + 1.$$

При этихъ значеніяхъ уравненіе (3) приметъ видъ

$$s + 2 = p^{s}.$$

Это уравненіе не даетъ рѣшеній, соотвѣтствующихъ разсматриваемой задачѣ.

§ 6. **Числа вида:** $N = b\ c.a^{\alpha}$.

Замѣтивъ, что основное уравненіе задачи принимаетъ видъ

$$2^{2}.(\alpha + 1).q = b.c.a^{\alpha}, \qquad (6)$$

сдѣлаемъ относительно q три предположенія: 1) $q=1$; 2) $q=2$; 3) $q > 2$.

Первое предположеніе: $q = 1$.

Уравненіе (6) обращается въ

$$2^{2}(\alpha + 1) = b.c.a^{\alpha}.$$

Если положимъ здѣсь

$$\alpha + 1 = 2^{\mu}.p_{1}.p_{2}, \qquad (7)$$

Digitized by Google

гдѣ p_1, p_2 простыя числа > 2, а μ можетъ принимать всѣ цѣлыя и положительныя значенія, начиная съ нуля, то будемъ имѣть:

$$2^{2+\mu}.p_1.p_2 = b.c.a^{\alpha},$$

откуда

$$b = p_1,\ c = p_2,\ a = 2,\ \alpha = 2 + \mu.$$

Внося полученную для α величину въ уравненіе (7), найдемъ

$$\mu + 3 = 2^{\mu}.p_1.p_2.$$

Это уравненіе не даетъ рѣшеній, соотвѣтствующихъ разсматриваемому вопросу.

Второе предположеніе: $q = 2$.

Уравненіе (6) обращается въ

$$2^3.(\alpha + 1) = b.c.a^{\alpha}.$$

Полагая здѣсь

$$\alpha + 1 = 2^{\mu}.p_1.p_2, \qquad (8)$$

будемъ имѣть

$$2^{3+\mu}.p_1.p_2 = b.c.a^{\alpha},$$

откуда

$$p_1 = b,\ p_2 = c,\ a = 2,\ \alpha = 3 + \mu.$$

Внеся послѣднюю величину въ уравненіе (8), найдемъ

$$\mu + 4 = 2^{\mu}.p_1.p_2.$$

При тѣхъ условіяхъ, которыя разсматриваемый вопросъ налагаетъ на величины p_1, p_2, μ, первая часть этого соотношенія не можетъ быть равна второй. Отсюда слѣдуетъ, что между числами разсматриваемаго вида нѣтъ чиселъ, равныхъ двойному числу своихъ дѣлителей.

Третье предположеніе: $q > 2$.

Если въ уравненіи (6) положимъ

$$\alpha + 1 = 2^{\mu}.p, \qquad (9)$$

Digitized by Google

то будемъ имѣть

$$2^{\mu+2}.p.q = b.c.a^{\alpha},$$

откуда

$$b = p;\ c = q;\ a = 2;\ \alpha = \mu + 2.$$

Подставляя найденную для α величину въ уравньніе (9), получимъ уравненіе

$$\mu + 3 = 2^{\mu}.p,$$

которое даетъ

$$1)\ \mu = 0,\quad p = 3,$$

$$2)\ \mu = 1,\quad p = 2.$$

Такъ какъ $p = b > 2$, то должно быть взято только первое рѣшеніе. Этому рѣшенію соотвѣтствуетъ число

$$N = 3.2^{2}.q,$$

гдѣ q простое число > 3.

Каждое число такого вида, при дѣленіи на число своихъ дѣлителей, даетъ въ частномъ простое число q.

§ 7. **Числа вида:** $N = b.c.d.a^{\alpha}$.

Замѣтивъ, что основное уравненіе задачи принимаетъ видъ

$$2^{3}.(\alpha + 1).q = b.c.d.a^{\alpha}, \qquad (10)$$

сдѣлаемъ относительно q три предположенія: 1) $q=1$, 2) $q=2$, 3) $q > 2$.

Первое предположеніе: $q = 1$.

Уравненіе (10) обращается въ

$$2^{3}.(\alpha + 1) = b.c.d.a^{\alpha}.$$

Если положимъ здѣсь:

$$\alpha + 1 = 2^{k}.p_1.p_2.p_3, \qquad (11)$$

гдѣ p_1, p_2, p_3 простыя числа > 2, а k можетъ получать всѣ

Digitized by Google

цѣлыя и положительныя значенія, начиная съ 0, то будемъ имѣть

$$2^{k+3}.p_1.p_2.p_3 = b.c.d.a^{\alpha},$$

откуда

$$b = p_1;\ c = p_2;\ d = p_3;\ a = 2;\ \alpha = k+3.$$

Вставляя $\alpha = k+3$ въ уравненіе (11), найдемъ

$$k+4 = 2^k.p_1.p_2.p_3. \qquad (12)$$

Такъ какъ при тѣхъ условіяхъ, которыя разсматриваемый вопросъ налагаетъ на величины p_1, p_2, p_3, k, первая часть этого соотношенія не можетъ быть равна второй, то отсюда слѣдуетъ, что между числами разсматриваемаго вида нѣтъ такихъ, которыя равнялись бы числу своихъ дѣлителей.

Второе предположеніе: $q = 2$.

Уравненіе (10) обращается въ

$$2^4.(\alpha+1) = b.c.d.a^{\alpha}.$$

Полагая здѣсь

$$\alpha+1 = 2^k.p_1.p_2.p_3,$$

найдемъ

$$2^{k+4}.p_1.p_2.p_3 = b.c.d.a^{\alpha},$$

откуда

$$b = p_1,\ c = p_2,\ d = p_3,\ a = 2,\ \alpha = k+4,$$

и слѣдовательно

$$k+5 = 2^k.p_1.p_2.p_3. \qquad (13)$$

Относительно этого уравненія можно тдѣлать то же заключеніе, какое было сдѣлано относительно уравненія (12); отсюда слѣдуетъ, что между числами разсматриваемаго вида нѣтъ такихъ, которыя равнялись бы двойному числу своихъ дѣлителей.

Третье предположеніе: $q > 2$.

Такъ какъ при этомъ предположеніи въ уравненіи

Digitized by Google

$$2^3.(\alpha+1).q = b.c.d.a^\alpha$$

q должно быть равно одному изъ простыхъ множителей второй части, напримѣръ b, то имѣемъ

$$2^3.(\alpha+1) = c.d.a^\alpha.$$

Полагая здѣсь

$$\alpha+1 = 2^k.p_1.p_2,$$

найдемъ

$$2^{3+k}.p_1p_2 = c.d.a^\alpha,$$

откуда

$$c = p_1,\ d = p_2,\ a = 2,\ \alpha = 3+k$$

и потому

$$k+4 = 2^k.p_1.p_2.$$

Относительно этого уравненія можно сдѣлать то же заключеніе, какое было сдѣлано относительно уравненій (12) и (13). Такимъ образомъ оказывается, что между числами разсматриваемаго вида нѣтъ ни одного, которое удовлетворяло бы уравненію $N = q.\rho(N)$.

§ 8. **Числа вида:** $N = b.c.d\ldots r.s.t.a^\alpha$.

Мы предполагаемъ, что μ число простыхъ множителей $b, c, d\ldots, r, s, t$, входящихъ въ N, больше трехъ. Случаи $\mu = 1$, $\mu = 2$, $\mu = 3$ разобраны въ §§ 5, 6 и 7.

Пріемомъ, которымъ мы пользовались въ § 7, можно обнаружить, что числа этого вида не могутъ удовлетворять уравненію $N = q.\rho(N)$.

§ 9. **Числа вида:** $N = a^\alpha.b^\beta$.

Основное уравненіе задачи принимаетъ видъ:

$$q.(\alpha+1).(\beta+1) = a^\alpha b^\beta. \qquad (14)$$

Будемъ различать два случая: 1) $q = 1$, 2) $q > 1$.

1-й случай: $q = 1$.

Замѣтивъ, что уравненіе (14) обращается въ

Digitized by Google

$$(\alpha + 1)(\beta + 1) = a^{\alpha} b^{\beta},$$

и полагая въ немъ

$$\alpha + 1 = p_1^{k} . p_2^{r}, \qquad (15)$$

$$\beta + 1 = p_1^{k_1} . p_2^{r_1},$$

будемъ имѣть

$$p_1^{k+k_1} . p_2^{r+r_1} = a^{\alpha} b^{\beta},$$

откуда

$$1)\ p_1 = a,\ \alpha = k + k_1$$

$$p_2 = b,\ \beta = r + r_1,$$

$$2)\ p_1 = b,\ \beta = k + k_1$$

$$p_2 = a,\ \alpha = r + r_1.$$

Подставляя найденныя для α и β величины въ уравненія (15), найдемъ:

$$k + k_1 + 1 = p_1^{k} . p_2^{\nu},$$

$$r + r_1 + 1 = p_1^{k_1} . p_2^{\nu_1}, \qquad (16)$$

$$r + r_1 + 1 = p_1^{k}\ p_2^{r},$$

$$k + k_1 + 1 = p_1^{k_1} . p_2^{r_1}. \qquad (16')$$

Сдѣлаемъ относительно k_1 слѣдующія предположенія:

$$1)\ k_1 = 0,\ 2)\ k_1 < r,\ 3)\ k_1 > r,\ 4)\ k_1 = r.$$

Легко замѣтить, что ни при одномъ изъ этихъ предположеній, при соблюденіи тѣхъ условій, которыя разсматриваемый вопросъ налагаетъ на величины p_1, p_2, k, k_1, r, r_1, уравненія (16) совмѣстно существовать не могутъ; точно также не могутъ совмѣстно существовать и уравненія (16′). Отсюда слѣдуетъ, что между числами вида $a^{\alpha} b^{\beta}$ нѣтъ такихъ, которыя равнялись бы числу своихъ дѣлителей.

Digitized by Google

2-й случай: $q > 1$.

Если $q > 1$, то въ уравненіи

$$q.(\alpha + 1).(\beta + 1) = a^{\alpha} b^{\beta}$$

q должно быть равно или a или b; принимая $q = a$, будемъ имѣть

$$(\alpha + 1)(\beta + 1) = a^{\alpha - 1}.b^{\beta}.$$

Полагая затѣмъ

$$\begin{aligned} \alpha + 1 &= p_2^{\,k}.p_2^{\,r}, \\ \beta + 1 &= p_1^{\,k_1}.p_2^{\,r_1}, \end{aligned} \tag{17}$$

найдемъ

$$p_1^{\,k+k_1}.p_2^{\,r+r_1} = a^{\alpha-1} b^{\beta}.$$

Послѣднему уравненію можно удовлетворить въ двухъ предположеніяхъ: или полагая

$$p_1 = a, \quad k + k_1 = \alpha - 1$$

$$p_2 = b, \quad r + r_1 = \beta$$

или полагая

$$p_1 = b, \quad k + k_1 = \beta,$$

$$p_2 = a, \quad r + r_1 = \alpha - 1.$$

Внося въ уравненія (17) величины α и β, полученныя въ первомъ предположеніи, будемъ имѣть

$$\begin{aligned} k + k_1 + 2 &= p_1^{\,k}.p_2^{\,r} \\ r + r_1 + 1 &= p_1^{\,k_1}.p_2^{\,r_1}. \end{aligned} \tag{18}$$

Внося въ уравненія (17) величины α и β, полученныя во второмъ предположеніи, найдемъ

$$\begin{aligned} r + r_1 + 2 &= p_1^{\,k}.p_2^{\,r}, \\ k + k_1 + 1 &= p_1^{\,k_1}\, p_2^{\,r_1}. \end{aligned} \tag{19}$$

Digitized by Google

Легко убѣдиться въ томъ, что, при условіяхъ разсматриваемаго вопроса, равенства (18) совмѣстно существовать не могутъ; точно также не могутъ совмѣстно существовать и равенства (19). Отсюда слѣдуетъ, что между числами вида $a^\alpha b^\beta$ нѣтъ чиселъ, удовлетворяющихъ уравненію $N = q.\varphi(N)$.

§ 10. **Числа вида**: 1) $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, 2) $N = p.r.s \ldots a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$

Пріемами, подобными тѣмъ, которыми мы пользовались въ предыдущихъ параграфахъ, можно обнаружить, что какъ между числами перваго вида, такъ и между числами второго вида нѣтъ чиселъ, удовлетворяющихъ уравненію $N = q.\varphi(N)$.

§ 11. **Заключеніе.** Мы нашли, что уравненію

$$N = q.\varphi(N)$$

удовлетворяютъ только слѣдующія числа:

$$2;\ 8;\ 9;\ 12;\ 18;\ 8q, \text{ гдѣ } q > 2;\ 12q, \text{ гдѣ } q > 3,$$

и слѣдовательно только эти числа имѣютъ то свойство, что, при дѣленіи на число своихъ дѣлителей, даютъ въ частномъ простыя числа.

Digitized by Google

ИЗСЛѢДОВАНІЕ ОДНОГО ИЗЪ ОСОБЕННЫХЪ СЛУЧАЕВЪ ЗАДАЧИ ОБЪ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНІЯ.

А. М. Ляпунова.

1. Задача, о которой идетъ здѣсь рѣчь, приводится къ слѣдующему:

Дана система дифференціальныхъ уравненій вида

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n, \tag{1}$$

гдѣ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ суть нѣкоторыя данныя вещественныя функціи вещественныхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$, уничтожающіяся при

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

и гдѣ величины x_s разсматриваются, какъ неизвѣстныя функціи перемѣннаго t. Требуется узнать, можно ли для всякаго даннаго положительнаго числа l выбирать другое положительное число ε такъ, чтобы всякій разъ, когда начальныя значенія функцій x_s, соотвѣтствующія, допустимъ, $t=0$, выбираются согласно условіямъ

$$|x_1| \leqq \varepsilon, \ |x_2| \leqq \varepsilon, \ \ldots, \ |x_n| \leqq \varepsilon,$$

для всѣхъ положительныхъ значеній t выполнялись неравенства

$$|x_1| < l, \ |x_2| < l, \ \ldots, \ |x_n| < l. \tag{2}$$

Предполагая, что t означаетъ время, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дан-

Digitized by Google

ныя функціи координатъ и скоростей нѣкоторой матеріальной системы, находящейся подъ дѣйствіемъ данныхъ силъ (функціи эти могутъ зависѣть явнымъ образомъ и отъ времени), допустимъ, что всякому вещественному рѣшенію системы уравненій (1) соотвѣтствуетъ нѣкоторое движеніе нашей матеріальной системы. Тогда поставленная такимъ образомъ задача представитъ то, что мы здѣсь называемъ задачей объ устойчивости движенія

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

по отношенію къ величинамъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *).

Движеніе это мы называемъ устойчивымъ или неустойчивымъ, смотря по тому, утвердительно или отрицательно разрѣшается поставленный вопросъ.

Если при рѣшеніи этого вопроса разсматриваются не всякія возмущенія (такъ будемъ называть начальныя значенія функцій x_s), какъ это предполагалось здѣсь, а лишь такія, которыя удовлетворяютъ нѣкоторымъ условіямъ вида

$$f = 0 \quad \text{или} \quad f \geqq 0,$$

гдѣ f функція величинъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, уничтожающаяся при

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

и если при этихъ условіяхъ онъ разрѣшается въ утвердительномъ смыслѣ, то мы говоримъ, что невозмущенное движеніе (такъ называемъ движеніе, устойчивость котораго изслѣдуется) обладаетъ условною устойчивостью. Безусловно оно можетъ быть при этомъ и неустойчивымъ.

Говоря объ устойчивости и не упоминая о какихъ либо условіяхъ для возмущеній, будемъ, конечно, подразумѣвать,

---

*) Можно разсматривать болѣе общую задачу: объ устойчивости того же движенія, но по отношенію не ко всѣмъ, а только къ нѣкоторымъ изъ величинъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, напр. — по отношенію къ величинамъ $x_1, x_2, \ldots, x_m$ $(m < n)$. Постановка этой задачи получается изъ предыдущей замѣною неравенствъ (2) слѣдующими:

$$|x_1| < l, \; |x_2| < l, \ldots, \; |x_m| < l.$$

Digitized by Google

что рѣчь идетъ объ устойчивости безусловной, какъ она опредѣлена выше.

Мы будемъ предполагать, что вторыя части уравненій (1) не зависятъ явнымъ образомъ отъ t и что это суть голоморфныя функціи перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$. При достаточно малыхъ $|x_s|$ онѣ представятся поэтому рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ величинъ x_s съ постоянными коэффиціентами.

Въ большинствѣ случаевъ для рѣшенія вопроса объ устойчивости достаточно разсматривать въ этихъ рядахъ только члены перваго измѣренія относительно величинъ x_s. Но существуютъ случаи, когда для этой цѣли должны быть принимаемы въ разсчетъ и члены высшихъ измѣреній. Такіе случаи задачи объ устойчивости мы называемъ *особенными*.

Если

$$p_{s1}, \quad p_{s2}, \quad \cdots, \quad p_{sn}$$

суть значенія частныхъ производныхъ

$$\frac{\partial X_s}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial X_s}{\partial x_2}, \ldots, \quad \frac{\partial X_s}{\partial x_n},$$

соотвѣтствующія

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

то особенными будутъ всѣ тѣ случаи, когда уравненіе

$$\begin{vmatrix} p_{11}-x & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-x & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}-x \end{vmatrix} = 0, \qquad (3)$$

не имѣя корней съ положительными вещественными частями, имѣетъ корни, вещественныя части которыхъ суть нули *).

*) См. мою замѣтку: *Къ вопросу объ устойчивости движенія* (Сообщенія Харьк. Мат. Общ., 2 серія, томъ III).

Digitized by Google

Два простѣйшихъ изъ этихъ особенныхъ случаевъ были разсмотрѣны мною въ сочиненіи *Общая задача объ устойчивости движенія* (Харьковъ, 1892; изданіе Харьк. Мат. Общества). Одинъ изъ нихъ есть тотъ, когда уравненіе (3) имѣетъ одинъ равный нулю корень при остальныхъ корняхъ съ отрицательными вещественными частями; другой—тотъ, когда уравненіе это при такихъ же остальныхъ корняхъ имѣетъ два чисто мнимыхъ корня.

Здѣсь я намѣренъ разобрать случай нѣсколько болѣе сложный, когда уравненіе (3) имѣетъ два равныхъ нулю корня, въ предположеніи, что всѣ остальные его корни (когда оно выше второй степени) обладаютъ отрицательными вещественными частями.

Я однако не буду здѣсь разсматривать этого случая во всѣхъ его подробностяхъ, а ограничусь лишь предположеніемъ, что *изъ первыхъ миноровъ опредѣлителя, фигурирующаго въ уравненіи* (3), *по крайней мѣрѣ одинъ не дѣлается нулемъ при* $\varkappa=0$.

При этомъ условіи всегда найдется такая линейная подстановка съ постоянными вещественными коэффиціентами, посредствомъ которой уравненія (1) преобразуются къ виду

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = y + X, \qquad \frac{dy}{dt} = Y, \\ &\frac{dz_s}{dt} = q_{s1}z_1 + q_{s2}z_2 + \ldots + q_{sk}z_k + Z_s, \\ &\qquad\qquad (s = 1, 2, \ldots, k) \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

гдѣ X, Y, Z_s суть голоморфныя функціи новыхъ перемѣнныхъ x, y, z_1, z_2, ..., z_k ($k=n-2$), несодержащія въ своихъ разложеніяхъ членовъ ниже второго измѣренія, а $q_{s\sigma}$—вещественныя постоянныя такого свойства, что уравненіе

$$\begin{vmatrix} q_{11}-\varkappa & \ldots & q_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{k1} & \ldots & q_{kk}-\varkappa \end{vmatrix} = 0$$

Digitized by Google

обладаетъ только корнями съ отрицательными вещественными частями.

Уравненія (4) и послужатъ точкою отправленія для нашихъ изысканій.

При рѣшеніи нашего вопроса мы будемъ основываться на принципахъ, установленныхъ въ цитированномъ выше сочиненіи, руководясь при этомъ такими же соображеніями, какими пользовались тамъ при разсмотрѣніи подобныхъ же, хотя и менѣе сложныхъ, вопросовъ.

Прежде однако, чѣмъ перейти къ общему случаю, мы разсмотримъ тотъ, когда $k = 0$, т. е. когда изслѣдуемая система уравненій есть второго порядка.

Въ этомъ случаѣ задача допускаетъ, конечно, многія упрощенія, вообще невозможныя для системъ высшихъ порядковъ.

Мы увидимъ, что въ этомъ частномъ случаѣ задача не представляетъ никакихъ существенныхъ особенностей сравнительно съ тѣми задачами, которыя разсматривались въ упомянутомъ сочиненіи. Напротивъ, для системъ высшихъ порядковъ мы встрѣтимся съ нѣкоторыми новыми обстоятельствами, благодаря которымъ въ извѣстныхъ случаяхъ могутъ возникнуть совершенно особыя затрудненія.

Digitized by Google

ГЛАВА I.

Системы второго порядка.

2. Допустимъ, что разсматриваемая задача объ устойчивости приводится къ изслѣдованію уравненій

$$\frac{dx}{dt} = y + X, \qquad \frac{dy}{dt} = Y, \tag{1}$$

въ которыхъ X и Y суть независящія отъ t голоморфныя функціи перемѣнныхъ x и y, несодержащія въ своихъ разложеніяхъ членовъ ниже второго измѣренія.

Нетрудно видѣть, что, вводя вмѣсто y нѣкоторое новое перемѣнное y_1, задачу эту, если угодно, можно привести къ изслѣдованію уравненій того же вида

$$\frac{dx}{dt} = y_1 + X_1, \qquad \frac{dy_1}{dt} = Y_1,$$

въ которыхъ X_1 будетъ произвольно заданною голоморфною функціей x и y_1, несодержащею членовъ ниже второго измѣренія.

Дѣйствительно, для этого между x, y и y_1 должно установить зависимость

$$y + X = y_1 + X_1,$$

въ силу которой, при $|x|$, $|y|$, $|y_1|$ достаточно малыхъ, y_1 будетъ голоморфною функціей x и y, уничтожающеюся при $x = y = 0$, и y — голоморфною функціей x и y_1, уничтожающеюся при $x = y_1 = 0$; а при такой зависимости между перемѣнными задача объ устойчивости движенія $x = y = 0$ по отношенію къ величинамъ x и y будетъ вполнѣ равносильною задачѣ объ устойчивости движенія $x = y_1 = 0$ по отношенію къ величинамъ x и y_1.

Digitized by Google

Допустимъ, что преобразованіе наше выбирается такъ, чтобы функція X_1 уничтожалась при $y_1 = 0$.

Составляя въ этомъ предположеніи функцію Y_1, располагаемъ ее по восходящимъ степенямъ y_1:

$$Y_1 = f(x) + \varphi(x) y_1 + \dots .$$

Здѣсь $f(x)$, $\varphi(x)$ и т. д. будутъ нѣкоторыми голоморфными функціями перемѣннаго x.

Если функція $f(x)$ не равна тожественно нулю, то располагая ее по восходящимъ степенямъ x и разумѣя подъ a отличное отъ нуля постоянное, будемъ писать

$$f(x) = a x^{\alpha} + a_1 x^{\alpha+1} + \dots .$$

Число α будетъ при этомъ не менѣе 2.

Точно также, если функція $\varphi(x)$ не равна тожественно нулю, то располагая ее по восходящимъ степенямъ x и предполагая постоянное b отличнымъ отъ нуля, будемъ писать

$$\varphi(x) = b x^{\beta} + b_1 x^{\beta+1} + \dots .$$

Число β будетъ здѣсь не менѣе 1.

Числа a, α, b и β будутъ играть въ нашемъ изслѣдованіи весьма значительную роль.

Изъ безчисленнаго множества преобразованій, подчиненныхъ условію, чтобы при $y_1 = 0$ функція X_1 дѣлалась нулемъ, укажемъ здѣсь одно, изъ котораго выводится простѣйшій способъ составленія функцій $f(x)$ и $\varphi(x)$.

Преобразованіе это соотвѣтствуетъ подстановкѣ

$$y = F(x) + y_1,$$

гдѣ $F(x)$ есть уничтожающаяся при $x = 0$ голоморфная функція x, получаемая рѣшеніемъ относительно y уравненія

$$y + X = 0.$$

При такомъ преобразованіи функція $f(x)$, очевидно, найдется, какъ результатъ замѣны y функціей $F(x)$ въ выраженіи Y, а функція $\varphi(x)$—какъ результатъ той же замѣны въ выраженіи

Digitized by Google

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}.$$

Если бы мы воспользовались какимъ либо другимъ преобразованіемъ, то для функцій $f(x)$ и $\varphi(x)$ могли бы, конечно, получить иныя выраженія. Но нетрудно убѣдиться, что, каково бы ни было наше преобразованіе, выраженія эти всегда вышли бы вида

$$f(x) = f_1(x)[1 + \theta(x)],$$

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + f_1(x)\ \psi(x).$$

Здѣсь $f_1(x)$ и $\varphi_1(x)$ суть функціи $f(x)$ и $\varphi(x)$, соотвѣтствующія нѣкоторому опредѣленному преобразованію, а $\theta(x)$ и $\psi(x)$ голоморфныя функціи x, зависящія отъ выбора нашего преобразованія. Изъ нихъ $\psi(x)$ можетъ быть какою угодно, а $\theta(x)$ всегда такова, что при $x = 0$ дѣлается нулемъ.

Изъ этихъ выраженій видно, что, если для какого либо преобразованія функція $f(x)$ выходитъ тожественно равною нулю, то же будетъ и для всякаго другого преобразованія. Функція $\varphi(x)$ тогда отъ выбора преобразованія зависѣть не будетъ. Если же $f(x)$ не равна нулю, то хотя при переходѣ отъ одного преобразованія къ другому она и можетъ мѣняться, числа a и α будутъ оставаться всегда одни и тѣ же. Если при этомъ $\beta < \alpha$, то и числа b и β отъ перемѣны преобразованія мѣняться не будутъ. Напротивъ, при $\beta \geqq \alpha$ ихъ можно сдѣлать какими угодно съ соблюденіемъ, разумѣется, этого условія.

Отсюда видно, что числа b и β только въ тѣхъ случаяхъ могутъ имѣть для насъ интересъ, когда $\beta < \alpha$ или когда $f(x) = 0$.

Мы начнемъ наше изслѣдованіе съ этого послѣдняго случая.

3. Здѣсь и въ послѣдующемъ, гдѣ не будетъ сказано противнаго, мы будемъ предполагать, что функція X при $y = 0$ дѣлается нулемъ. Предположеніе это, какъ мы видѣли, приводится къ нѣкоторому всегда возможному преобразованію системы (1).

Мы будемъ поэтому полагать

Digitized by Google

$$Y = f(x) + \varphi(x)y + \ldots,$$

разумѣя подъ $f(x)$ и $\varphi(x)$ функціи, разсматривавшіяся въ предыдущемъ параграфѣ.

Начнемъ съ случая, когда $f(x) = 0$ тожественно.

Въ этомъ случаѣ въ уравненіи

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{y + X}, \tag{2}$$

выводящемся изъ системы (1), вторая часть будетъ голоморфною функціей x и y.

Поэтому, разсматривая y, какъ функцію x и называя значеніе ея, соотвѣтствующее $x = 0$, черезъ c, на основаніи извѣстной теоремы найдемъ

$$y = c + \psi(x, c), \tag{3}$$

гдѣ $\psi(x, c)$ означаетъ нѣкоторую голоморфную функцію x и c, уничтожающуюся при $x = 0$.

Пользуясь этимъ выраженіемъ y, приведемъ первое изъ уравненій (1) къ виду

$$\frac{dx}{dt} = c + \theta(x, c). \tag{4}$$

Функція $\theta(x, c)$ будетъ здѣсь также голоморфною, притомъ, подобно $\psi(x, c)$, несодержащею членовъ ниже второго измѣренія относительно x и c.

Если не только $f(x)$, но и $\varphi(x)$ тожественно равна нулю, вторая часть уравненія (2) будетъ уничтожаться при $y = 0$; а потому функція $\psi(x, c)$ будетъ уничтожаться при $c = 0$.

Но тогда тѣмъ же свойствомъ будетъ обладать и функція $\theta(x, c)$, и слѣдовательно въ уравненіи

$$\int_0^x \frac{c\,dx}{c + \theta(x, c)} = ct + c',$$

которое выведемъ изъ (4), разумѣя подъ c' постоянное произвольное, первая часть будетъ голоморфною функціей x и c.

Digitized by Google

Изъ этого уравненія будетъ поэтому слѣдовать, что въ случаѣ $\varphi(x) = 0$ невозмущенное движеніе неустойчиво.

Допустимъ теперь, что функція $\varphi(x)$ не равна нулю тожественно.

Вторая часть уравненія (2) будетъ обращаться тогда при $y = 0$ въ голоморфную функцію x съ младшимъ членомъ bx^β.

Поэтому младшимъ членомъ функціи $\psi(x, 0)$ будетъ

$$\frac{b}{\beta + 1} x^{\beta+1}.$$

Таковъ же будетъ и младшій членъ функціи $\theta(x, 0)$.

Вслѣдствіе этого, если разсмотримъ частное рѣшеніе системы (1), соотвѣтствующее предположенію $c = 0$, то уравненіе (4) приметъ видъ:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{b}{\beta + 1} x^{\beta+1} + \ldots,$$

гдѣ далѣе слѣдуютъ члены съ высшими степенями x.

Изъ этого уравненія достаточно ясно видно, что, когда β есть число нечетное, или когда при четномъ β постоянное b положительно, невозмущенное движеніе неустойчиво.

Намъ остается поэтому разсмотрѣть только случай, когда при β четномъ b есть число отрицательное.

Для этого прежде всего замѣчаемъ, что, каково бы ни было вещественное постоянное c, при β четномъ всегда можно положить

$$c = -\frac{b}{\beta + 1} \gamma^{\beta+1},$$

разумѣя подъ γ также вещественное постоянное.

Вводя это постоянное вмѣсто c во вторую часть уравненія (3), представимъ ее подъ видомъ голоморфной функціи x и γ, въ которой совокупность членовъ наинизшаго измѣренія относительно x и γ будетъ равна

$$\frac{b}{\beta + 1} (x^{\beta+1} - \gamma^{\beta+1}).$$

Digitized by Google

Поэтому, если сдѣлаемъ

$$c + \psi(x, c) = 0,$$

то для x получимъ $\beta + 1$ опредѣленій подъ видомъ голоморфныхъ функцій γ, изъ которыхъ только одна будетъ вещественною. Означимъ ее черезъ $\sigma(\gamma)$.

Младшимъ членомъ функціи $\sigma(\gamma)$ будетъ γ.

Поэтому, если вмѣсто x введемъ перемѣнное ξ, полагая

$$x = \sigma(\gamma) + \xi,$$

то вторая часть уравненія (3) представится подъ видомъ голоморфной функціи ξ и γ, уничтожающейся при $\xi = 0$, въ которой совокупность членовъ наинизшаго измѣренія относительно ξ и γ будетъ равна

$$\frac{b}{\beta + 1}[(\xi + \gamma)^{\beta+1} - \gamma^{\beta+1}].$$

Въ такомъ же видѣ представится при этомъ и вторая часть въ уравненіи (4), которое преобразуется такимъ образомъ въ слѣдующее:

$$\frac{d\xi}{dt} = bH\xi, \tag{5}$$

если подъ H будемъ разумѣть голоморфную функцію ξ и γ, въ которой совокупность членовъ наинизшаго измѣренія выражается формой

$$\frac{(\xi + \gamma)^{\beta+1} - \gamma^{\beta+1}}{(\beta + 1)\xi}.$$

Но при β четномъ форма эта есть опредѣленная и положительная. Поэтому для численныхъ значеній γ и ξ можно назначить такой отличный отъ нуля предѣлъ l, чтобы при всякихъ вещественныхъ γ и ξ, удовлетворяющихъ условіямъ

$$|\gamma| \leqq l, \quad |\xi| \leqq l,$$

выполнялось слѣдующее:

Digitized by Google

$$H \geqq 0.$$

Допустимъ, что γ и значеніе ξ_0 функціи ξ, соотвѣтствующее $t = 0$, выбраны численно меньшими l.

Тогда, представляя уравненіе (5) подъ видомъ

$$\xi = \xi_0 e^{b\int_0^t H dt},$$

заключимъ, что при b отрицательномъ для всѣхъ положительныхъ значеній t будетъ выполняться условіе

$$|\xi| \leqq |\xi_0|.$$

Отсюда, принимая въ разсчетъ существующую между величинами x, y, ξ и γ зависимость, нетрудно вывести, что невозмущенное движеніе будетъ устойчивымъ.

4. Мы видѣли, что при β нечетномъ невозмущенное движеніе неустойчиво. Но можно показать, что оно обладаетъ въ этомъ случаѣ извѣстною условною устойчивостью. Можно именно показать, что оно устойчиво для возмущеній, подчиненныхъ условію

$$by \leqq 0. \qquad (6)$$

Для этого обращаемся къ уравненію

$$y + \Psi(x, y) = c, \qquad (7)$$

выводимому изъ (3) разрѣшеніемъ относительно c.

Въ этомъ уравненіи $\Psi(x,y)$ есть голоморфная функція x и y, способная быть представленною подъ видомъ:

$$\Psi(x, y) = yv - \frac{b}{\beta + 1} x^{\beta+1}(1 + u),$$

гдѣ u и v означаютъ голоморфныя функціи, уничтожающіяся при $x = y = 0$.

Поэтому при β нечетномъ первая часть уравненія (7) будетъ такою функціей x и y, которая при условіи (6) и при величинахъ x и y, численно достаточно малыхъ, будетъ со-

Digitized by Google

хранять знакъ, противуположный знаку b, обращаясь въ нуль только при $x = y = 0$. Другими словами, по терминологіи, которою я пользовался въ своемъ сочиненіи (и которою буду пользоваться также и здѣсь), это будетъ функціей знакоопредѣленною при условіи (6).

Но вслѣдствіе того, что функція Y уничтожается при $y = 0$, условіе это, будучи выполнено въ начальный моментъ времени, необходимо будетъ выполняться, если не постоянно, то по крайней мѣрѣ все время, пока величины x и y остаются численно достаточно малыми для того, чтобы функціи X и Y можно было представлять рядами, расположенными по степенямъ x и y.

Поэтому, пользуясь обычными въ такихъ случаяхъ разсужденіями, изъ разсмотрѣнія уравненія (7) выведемъ, что, какъ бы мало ни было данное положительное число l, всегда найдется такое положительное число ε, чтобы при условіяхъ

$$by \leqq 0, \quad |x| \leqq \varepsilon, \quad |y| \leqq \varepsilon,$$

выполненныхъ въ начальный моментъ времени, функціи x и y оставались всегда численно меньшими l.

Можно замѣтить, что въ разсматриваемомъ случаѣ (т.-е. при β нечетномъ) невозмущенное движеніе устойчиво также для возмущеній, подчиненныхъ условіямъ

$$y = \psi(x, 0), \quad bx < 0. \tag{8}$$

Но устойчивость при условіи (6) существеннымъ образомъ отличается отъ устойчивости при этихъ послѣднихъ условіяхъ: въ случаѣ условія (6) функціи x и y, когда ихъ начальныя значенія численно достаточно малы, измѣняются между предѣлами, сколь угодно численно малыми не только при безпредѣльномъ возрастаніи, но и при безпредѣльномъ убываніи t, тогда какъ въ случаѣ условій (8) дѣло происходитъ такъ только при безпредѣльномъ возрастаніи t.

Мы встрѣчаемъ здѣсь, слѣдовательно, примѣры двухъ родовъ устойчивости: одна такова, что послѣ замѣны t на $-t$

Digitized by Google

переходитъ также въ устойчивость; другая переходитъ послѣ этого въ неустойчивость.

Устойчивость перваго рода мы будемъ называть *консервативною.*

Въ предыдущемъ параграфѣ было показано, что въ случаѣ β четнаго и b отрицательнаго имѣетъ мѣсто устойчивость. Устойчивость эта, очевидно, не есть консервативная.

Случаи безусловной консервативной устойчивости, съ которыми можно встрѣтиться въ занимающемъ насъ вопросѣ, будутъ указаны въ своемъ мѣстѣ.

5. Нетрудно видѣть, что во всѣхъ разсмотрѣнныхъ до сихъ поръ случаяхъ безусловной или условной устойчивости функціи x и y, когда ихъ начальныя значенія численно достаточно малы, съ безпредѣльнымъ возрастаніемъ t приближаются къ нѣкоторымъ предѣламъ, изъ которыхъ соотвѣтствующій функціи y всегда есть нуль.

Мы будемъ выражать это обстоятельство, говоря, что возмущенное движеніе асимптотически приближается къ одному изъ движеній, соотвѣтствующихъ уравненіямъ

$$x = C, \quad y = 0$$

при произвольномъ постоянномъ C.

Въ случаѣ, когда $f(x) = 0$ тожественно, такія движенія всегда существуютъ.

Предполагая $|C|$ достаточно малымъ, разсмотримъ вопросъ объ устойчивости этихъ движеній по отношенію къ величинамъ $x - C$ и y.

Мы будемъ предполать C настолько численно малымъ, чтобы послѣ подстановки

$$x = C + \xi$$

вторыя части уравненій (1) выходили голоморфными относительно ξ и y.

Въ этомъ предположеніи, выписывая только члены перваго измѣренія относительно ξ и y, преобразуемъ эти уравненія къ виду:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= (1 + C')y + \ldots,\\ \frac{dy}{dt} &= \varphi(C)y + \ldots\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Здѣсь C' означаетъ постоянное, представляющее нѣкоторую голоморфную функцію C, уничтожающуюся при $C = 0$.

Мы замѣчаемъ теперь, что опредѣляющее уравненіе *) системы (9) обладаетъ слѣдующими корнями:

$$\varphi(C) \text{ и } 0.$$

Поэтому всякій разъ, когда $\varphi(C) > 0$, имѣетъ мѣсто неустойчивость.

То же будетъ и въ случаѣ, когда $\varphi(C) = 0$, если только число $1 + C'$ не нуль, ибо случай этотъ приводится къ тому изъ разсмотрѣнныхъ въ параграфѣ 3-емъ, когда функція $\varphi(x)$ тожественно равна нулю.

Если наконецъ $\varphi(C) < 0$, то такъ какъ вторыя части уравненій (9) уничтожаются при $y = 0$, по доказанному въ моемъ сочиненіи должно заключить, что имѣетъ мѣсто устойчивость.

Такимъ образомъ, предполагая $|C|$ достаточно малымъ для того, чтобы функція $\varphi(C)$, если она не равна нулю тожественно, обладала знакомъ своего младшаго члена bC^β, и чтобы число $1 + C'$ не было нулемъ, можемъ утверждать, что, если $\varphi(x) = 0$ тожественно, всѣ разсматриваемыя движенія неустойчивы, и что въ противномъ случаѣ, если β число нечетное, тѣ изъ этихъ движеній, для которыхъ $bC > 0$, неустойчивы, а тѣ, для которыхъ $bC < 0$, устойчивы; если же β число четное, всѣ они при $b > 0$ неустойчивы, а при $b < 0$ устойчивы.

6. Переходимъ теперь къ случаямъ, когда функція $f(x)$ не равна нулю тожественно.

Въ большинствѣ случаевъ этой категоріи вопросъ разрѣ-

*) Такъ называемъ уравненіе (3), соотвѣтствующее системѣ (1) (пар. 1).

Digitized by Google

шается тотчасъ же на основаніи одного легко доказываемаго общаго предложенія, игравшаго весьма значительную роль въ моемъ сочиненіи, не разъ упоминавшемся выше.

Предложеніе это состоитъ въ слѣдующемъ:

Пусть удалось найти вещественную голоморфную функцію V перемѣнныхъ x и y, производная которой по t

$$V' = (y + X)\frac{\partial V}{\partial x} + Y\frac{\partial V}{\partial y},$$

составленная при посредствѣ уравненій (1), представляла бы знакоопредѣленную функцію тѣхъ же перемѣнныхъ. Тогда, если функція V, которую предполагаемъ уничтожающеюся при $x = y = 0$, такова, что надлежащимъ выборомъ вещественныхъ x и y, сколь угодно численно малыхъ, ее можно дѣлать одинаковаго знака съ V', невозмущенное движеніе неустойчиво; если же V сама есть функція знакоопредѣленная и противоположна по знаку съ V', движеніе это устойчиво.

Можно прибавить, что въ послѣднемъ случаѣ всякое возмущенное движеніе, для котораго возмущенія численно достаточно малы, будетъ асимптотически приближаться къ невозмущенному.

Чтобы воспользоваться этимъ предложеніемъ въ занимающемъ насъ случаѣ, обращаемся къ уравненію

$$(y + X)\frac{\partial F}{\partial x} + [Y - f(x)]\frac{\partial F}{\partial y} = y\Phi, \qquad (10)$$

въ которомъ Φ означаетъ какую либо данную голоморфную функцію перемѣнныхъ x и y, а F неизвѣстную функцію послѣднихъ.

Замѣчая, что уравненіе это даетъ для $\frac{\partial F}{\partial x}$ выраженіе вида

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P\frac{\partial F}{\partial y} + Q,$$

въ которомъ P и Q суть голоморфныя функціи x и y, на основаніи извѣстной теоремы можемъ утверждать, что ему

Digitized by Google

всегда можно удовлетворить, предполагая функцію F также голоморфною, и что при томъ функцію эту можно подчинить условію (которое опредѣлитъ ее вполнѣ), чтобы при $x = 0$ она обращалась въ произвольно заданную голоморфную функцію одного y.

Наша задача будетъ состоять теперь въ выборѣ подходящихъ гипотезъ относительно функціи Φ и этой голоморфной функціи перемѣннаго y.

Положимъ

$$\Phi = ay,$$

разумѣя подъ a коэффиціентъ младшаго члена ax^α функціи $f(x)$, и подчинимъ функцію F условію обращаться въ y при $x = 0$.

Означая найденную въ этихъ предположеніяхъ голоморфную функцію F черезъ V, на основаніи уравненія (10) будемъ имѣть

$$V' = ay^2 + f(x)\,\frac{\partial V}{\partial y}. \qquad (11)$$

Но по опредѣленію функціи V, производная $\frac{\partial V}{\partial y}$ обращается въ 1 при $x = 0$.

Поэтому, если α число четное, полученное выраженіе V' представляетъ знакоопредѣленную функцію x и y.

Отсюда, замѣчая, что функціи V можно приписывать значенія любого знака, заключаемъ, что при α четномъ невозмущенное движеніе всегда неустойчиво.

Останавливаясь на прежнемъ выборѣ функціи Φ, подчинимъ теперь функцію F условію уничтожаться при $x = 0$.

Если V есть соотвѣтствующая этимъ предположеніямъ функція F, то по прежнему будемъ имѣть равенство (11). Но теперь функція V не будетъ содержать членовъ ниже второго измѣренія относительно x и y; единственнымъ же членомъ второго измѣренія въ ней будетъ axy, такъ что функція $\frac{\partial V}{\partial y}$ (уничтожающаяся при $x = 0$) будетъ вида

Digitized by Google

$$\frac{\partial V}{\partial y} = ax(1 + u),$$

гдѣ u уничтожается при $x = y = 0$.

Поэтому при α нечетномъ и a положительномъ разсматриваемая теперь функція V будетъ знакоопредѣленною. Функція же V, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, будетъ способною принимать значенія любого знака.

Мы должны поэтому заключить, что и при нечетномъ α, если только при этомъ a есть число положительное, невозмущенное движеніе неустойчиво.

Допустимъ наконецъ, что α есть число нечетное и a число отрицательное.

Допустимъ кромѣ того, что $\beta < \alpha$.

Пусть

$$y + \Psi(x, y)$$

есть голоморфная функція x и y, удовлетворяющая уравненію (10) въ предположеніи $\Phi = 0$ и обращающаяся въ y при $x = 0$.

Функція $\Psi(x, y)$ не будетъ содержать членовъ ниже второго измѣренія относительно x и y. При томъ она будетъ такова, что младшій членъ функціи $\Psi(x, 0)$ выйдетъ равнымъ

$$-\frac{b}{\beta+1}\, x^{\beta+1}.$$

Поэтому, если положимъ

$$[y + \Psi(x, y)]\left[1 + \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y}\right] = \psi(x) + y(1 + H),$$

разумѣя подъ H голоморфную функцію x и y, уничтожающуюся при $x = y = 0$, то таковъ же будетъ и младшій членъ функціи $\psi(x)$.

Дѣлаемъ теперь въ уравненіи (10)

$$\Phi = by^{\alpha+\beta} - 2\,(1 + H)\, f(x)$$

и голоморфную функцію F подчиняемъ условію уничтожаться при $x = 0$.

Digitized by Google

Найденная въ этихъ предположеніяхъ функція F, которую означимъ черезъ U, очевидно, будетъ вида

$$U = -\frac{2a}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + u,$$

гдѣ u не содержитъ членовъ ниже $(\alpha+2)$-го измѣренія относительно x и y.

Поэтому, если сдѣлаемъ

$$V = [y + \Psi(x, y)]^2 + U,$$

то эта функція V при разсматриваемыхъ предположеніяхъ будетъ знакоопредѣленною и положительною.

Составимъ ея производную по t на основаніи уравненій (1). Такъ какъ функція V необходимо удовлетворяетъ уравненію (10) при сдѣланномъ сейчасъ выборѣ функціи Φ, то для этой производной найдемъ слѣдующее выраженіе:

$$V' = 2[y + \Psi(x, y)]\left[1 + \frac{\partial\Psi(x, y)}{\partial y}\right]f(x) + \frac{\partial U}{\partial y}f(x) +$$

$$+ by^{\alpha+\beta+1} - 2y(1 + H)f(x) =$$

$$= 2\psi(x)f(x) + by^{\alpha+\beta+1} + (fx)\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Но по допущенному $\beta < \alpha$, а функція $f(x)\frac{\partial u}{\partial y}$ не содержитъ членовъ ниже $(2\alpha+1)$-го измѣренія относительно x и y.

Поэтому совокупность членовъ наинизшаго измѣренія въ найденномъ выраженіи V' приводится къ

$$by^{\alpha+\beta+1} - \frac{2ab}{\beta+1}x^{\alpha+\beta+1}.$$

При β четномъ функція V' будетъ, слѣдовательно, знакоопредѣленною того же знака, что и b.

Отсюда, принимая въ разсчетъ указанное выше свойство функціи V, заключаемъ, что, если при нашихъ допущеніяхъ β есть число четное, то въ случаѣ положительнаго b невоз-

Digitized by Google

мущенное движеніе неустойчиво, а въ случаѣ отрицательнаго устойчиво и при томъ—такъ, что всякое возмущенное движеніе, для котораго возмущенія численно достаточно малы, будетъ асимптотически приближаться къ невозмущенному.

Изъ всѣхъ возможныхъ случаевъ намъ остается теперь разсмотрѣть лишь тѣ, когда при α нечетномъ и a отрицательномъ или β, будучи менѣе α, есть число нечетное, или $\beta \geqq \alpha$ [сюда же включаемъ мы и случай, когда $\varphi(x) = 0$].

Для изслѣдованія этихъ случаевъ мы должны будемъ прибѣгнуть къ соображеніямъ, отличнымъ отъ предыдущихъ.

7. Обращаемся къ уравненію

$$(y + X)\frac{dy}{dx} = Y, \qquad (12)$$

выводимому изъ системы (1) исключеніемъ dt.

Посмотримъ, возможно ли при неравной нулю $f(x)$ удовлетворить ему въ предположеніи, что y есть голоморфная функція перемѣннаго x, уничтожающаяся при $x = 0$.

Пусть hx^k есть младшій членъ разложенія этой функціи по восходящимъ степенямъ x, такъ что k есть нѣкоторое цѣлое положительное число и h отличное отъ нуля постоянное.

Такъ какъ, согласно допущенному, функція X не содержитъ членовъ, независящихъ отъ y, то младшимъ членомъ первой части равенства (12) необходимо будетъ

$$kh^2x^{2k-1}.$$

Таковъ же долженъ быть и младшій членъ второй части этого равенства, который, будучи такимъ образомъ $(2k—1)$-ой степени, необходимо будетъ совпадать съ младшимъ членомъ функціи

$$f(x) + \varphi(x)y. \qquad (13)$$

Мы должны теперь разобрать три случая: 1) $\alpha > \beta + k$, 2) $\alpha < \beta + k$ [или $\varphi(x) = 0$] и 3) $\alpha = \beta + k$.

Въ первомъ младшимъ членомъ функціи (13) будетъ

$$bhx^{\beta+k},$$

Digitized by Google

вслѣдствіе чего мы должны имѣть:

$$k = \beta + 1, \quad h = \frac{b}{\beta + 1}.$$

Случай этотъ характеризуется условіемъ

$$\beta < \frac{\alpha - 1}{2}. \tag{14}$$

Во второмъ случаѣ младшимъ членомъ функціи (13) будетъ ax^z, вслѣдствіе чего найдемъ:

$$k = \frac{\alpha + 1}{2}, \quad h = \pm\sqrt{\frac{2a}{\alpha + 1}}.$$

Случай этотъ возможенъ поэтому только при α нечетномъ и [если $\varphi(x)$ не нуль] при условіи

$$\beta > \frac{\alpha - 1}{2}. \tag{15}$$

Если же желаемъ, чтобы искомое рѣшеніе уравненія (12) было вещественнымъ (т.-е. при вещественныхъ x давало вещественныя значенія для y), то должны будемъ поставить еще условіе $a > 0$.

Обращаясь наконецъ къ третьему случаю, мы можемъ сдѣлать два предположенія: 1) $2k - 1 > \alpha$ и 2) $2k - 1 = \alpha$.

Но на первомъ $\left(\text{въ которомъ было бы } k = \alpha - \beta, \; h = -\frac{a}{b} \text{ и, какъ въ первомъ случаѣ, } \beta < \frac{\alpha - 1}{2}\right)$, возможномъ только при извѣстныхъ соотношеніяхъ между коэффиціентами функцій $f(x)$ и $\varphi(x)$, останавливаться не будемъ. Что же касается второго, то изъ него слѣдуетъ

$$k = \frac{\alpha + 1}{2} = \beta + 1,$$

причемъ для опредѣленія h получается уравненіе

$$(\beta + 1)h^2 - bh - a = 0. \tag{16}$$

Digitized by Google

Это предположеніе возможно, слѣдовательно, только при условіи

$$\beta = \frac{\alpha - 1}{2} \tag{17}$$

и можетъ привести къ вещественному рѣшенію только при

$$b^2 + 4(\beta + 1)a \geqq 0. \tag{18}$$

Условіями (14), (17) и (15) или $\varphi(x) = 0$ исчерпываются всѣ возможные случаи. Но мы видѣли, что при выполненіи одного изъ двухъ послѣднихъ условій случай четнаго α долженъ быть исключенъ.

Если сдѣлаемъ это, то легко докажемъ, что для всѣхъ остальныхъ случаевъ задача наша всегда возможна.

Допустимъ напр., что имѣемъ дѣло съ однимъ изъ случаевъ, когда выполняется условіе (14) или (17).

Преобразовываемъ уравненіе (12) посредствомъ подстановки

$$y = x^{\beta+1}(h + z),$$

разумѣя подъ h число $\frac{b}{\beta+1}$ въ случаѣ условія (14) и одинъ изъ корней уравненія (16) въ случаѣ условія (17).

Замѣчая, что въ обоихъ случаяхъ

$$f(x) + hx^{\beta+1}\varphi(x) = (\beta + 1)h^2x^{2\beta+1} + \ldots,$$

гдѣ далѣе слѣдуютъ члены съ высшими степенями x, найдемъ, что въ преобразованномъ уравненіи

$$x\frac{dz}{dx} = -(\beta + 1)(h + z) + \frac{Y}{(y + X)x^{\beta}}$$

вторая часть будетъ голоморфною функціей x и z, уничтожающеюся при $x = z = 0$.

Уравненіе это будетъ, слѣдовательно, вида

$$x\frac{dz}{dx} = \lambda z + \mu x + Z, \tag{19}$$

Digitized by Google

гдѣ λ и μ суть нѣкоторыя постоянныя, а Z голоморфная функція, несодержащая членовъ ниже второго измѣренія относительно x и z.

Для постояннаго λ получится при томъ слѣдующее выраженіе

$$\lambda = \frac{b - 2(\beta + 1)h}{h}.$$

Поэтому въ случаѣ условія (14)

$$\lambda = -(\beta + 1),$$

а въ случаѣ условія (17) λ найдется, какъ корень уравненія

$$a\lambda^2 + [b^2 + 4(\beta + 1)a]\lambda + (\beta + 1)[b^2 + 4(\beta + 1)a] = 0,$$

которое, въ случаѣ вещественности его корней т.-е при выполненіи условія (18), или дастъ $\lambda = 0$, или доставитъ двѣ величины λ, изъ которыхъ по крайней мѣрѣ одна будетъ отрицательною.

Такимъ образомъ всегда можно предположить, что λ не есть цѣлое положительное число. А этого условія, какъ извѣстно, достаточно для возможности удовлетворить уравненію (19) голоморфною функціей z перемѣннаго x, уничтожающеюся при $x = 0$.

Возможность нашей задачи въ случаяхъ условій (14) и (17) можетъ считаться, слѣдовательно, доказанною.

Подобнымъ же образомъ докажется и возможность ея въ случаѣ, когда при выполненіи условія (15) [или $\varphi(x) = 0$] α есть число нечетное.

Должно замѣтить, что въ случаѣ условія (14) разсматриваемое голоморфное рѣшеніе уравненія (12) всегда будетъ вещественнымъ, а въ случаѣ условія (17)—только при выполненіи условія (18). Если $a < 0$, то случаи эти будутъ при томъ единственными, въ которыхъ задача наша можетъ допускать вещественныя рѣшенія.

8. Предыдущій анализъ тотчасъ же приводитъ къ рѣшенію вопроса объ устойчивости для нѣкоторыхъ изъ случаевъ, остающихся еще неизслѣдованными.

Digitized by Google

Допустимъ, что имѣемъ дѣло или съ условіемъ (14), или съ условіями (17) и (18).

Въ обоихъ случаяхъ, какъ мы видѣли, уравненіе (12) допускаетъ вещественное голоморфное рѣшеніе съ младшимъ членомъ вида $hx^{\beta+1}$.

Разсмотримъ соотвѣтствующее ему частное рѣшеніе системы (1).

Въ этомъ рѣшеніи x, какъ функція t, будетъ опредѣляться уравненіемъ

$$\frac{dx}{dt} = hx^{\beta+1} + \ldots, \qquad (20)$$

въ которомъ вторая часть будетъ вещественною голоморфною функціей x съ младшимъ членомъ $hx^{\beta+1}$.

Мы можемъ поэтому утверждать, что, когда при условіи (14) или при условіяхъ (17) и (18) β есть число нечетное, невозмущенное движеніе всегда неустойчиво.

Случай четнаго β при тѣхъ же условіяхъ входитъ въ число разсмотрѣнныхъ въ параграфѣ 6-мъ, и мы видѣли, что, если тогда α есть число нечетное и a число отрицательное, все зависитъ отъ знака постояннаго b.

Замѣтимъ, что изъ разсмотрѣнія уравненія (20) могутъ быть выведены нѣкоторые случаи условной устойчивости. Но на этомъ останавливаться не будемъ.

9. Всѣ случаи, которые намъ остается изслѣдовать, относятся къ предположенію, что α есть число нечетное и a число отрицательное. Въ этомъ предположеніи и будемъ дѣлать дальнѣйшія изысканія.

Мы положимъ

$$\alpha = 2n - 1,$$

такъ что n будетъ цѣлымъ числомъ, не меньшимъ 2.

Всѣ случаи, которые намъ придется разсмотрѣть, распадутся при этомъ на двѣ категоріи: 1) тѣ, въ которыхъ $\beta > n-1$ или $\varphi(x) = 0$, и 2) тѣ, въ которыхъ $\beta = n - 1$, а b удовлетворяетъ неравенству

Digitized by Google

$$b^2 + 4na < 0, \qquad (21)$$

противоположному условію (18).

Впрочемъ изъ случаевъ, въ которыхъ $\beta < \alpha$ (каковы напр. всѣ случаи второй категоріи), достаточно будетъ разсмотрѣть лишь тѣ, для которыхъ β есть число нечетное. Анализъ нашъ однако не потребуетъ такого ограниченія.

Случаи обѣихъ указанныхъ категорій будутъ существенно отличными отъ всѣхъ, съ которыми мы имѣли до сихъ поръ дѣло: тогда какъ въ послѣднихъ рѣшеніе вопроса объ устойчивости получалось немедленно, въ указанныхъ сейчасъ случаяхъ разысканіе его вообще потребуетъ выполненія извѣстнаго ряда вычисленій.

По характеру этихъ вычисленій, случаи обѣихъ категорій будутъ вполнѣ аналогичными. Но въ извѣстномъ отношеніи случаи первой категоріи представляются болѣе простыми. Съ нихъ мы и начнемъ наше изслѣдованіе.

Прежде всего обратимъ вниманіе на простѣйшій изъ случаевъ первой категоріи, въ которомъ

$$X = 0, \qquad Y = ax^{2n-1}.$$

Въ этомъ случаѣ вопросъ объ устойчивости разрѣшается всегда въ утвердительномъ смыслѣ, ибо система (1) допускаетъ интегралъ

$$ny^2 - ax^{2n},$$

представляющій (при нашемъ допущеніи, что $a < 0$) знакоопредѣленную функцію перемѣнныхъ x и y.

Остановимся на этомъ случаѣ, чтобы проинтегрировать систему (1), такъ какъ это приведетъ насъ къ функціямъ, которыя въ дальнѣйшемъ будутъ играть весьма значительную роль. Интегрированіе это дастъ при томъ то, что въ извѣстномъ смыслѣ можно разсматривать, какъ первое приближеніе при интегрированіи какихъ угодно уравненій, относящихся къ случаямъ первой категоріи.

10. Мы сдѣлаемъ $a = -1$, ибо къ такому случаю легко приводится всякій другой.

Digitized by Google

Уравненія наши будутъ, слѣдовательно, вида

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -x^{2n-1}, \tag{22}$$

и интегрированіе ихъ тотчасъ же сведется къ квадратурамъ, если воспользуемся слѣдующимъ изъ нихъ интегральнымъ уравненіемъ

$$x^{2n} + ny^2 = c^{2n},$$

въ которомъ c означаетъ произвольное постоянное.

Но чтобы функціи, которыми вопросъ будетъ рѣшаться окончательно, опредѣлить независимо отъ всякихъ постоянныхъ произвольныхъ, мы примемъ вмѣсто t за независимое перемѣнное

$$\vartheta = c^{n-1}t + \gamma,$$

разумѣя подъ γ новое произвольное постоянное, и положимъ:

$$x = c\,\mathrm{Cs}\,\vartheta, \qquad y = -c^n\,\mathrm{Sn}\,\vartheta.$$

Тогда дѣло приведется къ изученію свойствъ функцій $\mathrm{Cs}\vartheta$ и $\mathrm{Sn}\vartheta$ перемѣннаго ϑ, связанныхъ соотношеніемъ

$$\mathrm{Cs}^{2n}\vartheta + n\,\mathrm{Sn}^2\vartheta = 1 \tag{23}$$

и удовлетворяющихъ слѣдующимъ дифференціальнымъ уравненіямъ:

$$\frac{d\mathrm{Cs}\,\vartheta}{d\vartheta} = -\,\mathrm{Sn}\,\vartheta, \qquad \frac{d\mathrm{Sn}\vartheta}{d\vartheta} = \mathrm{Cs}^{2n-1}\vartheta. \tag{24}$$

Для болѣе точнаго опредѣленія этихъ функцій, согласно (23) можно принять

$$\mathrm{Cs}\,0 = 1, \qquad \mathrm{Sn}\,0 = 0,$$

и тогда уравненіями (24) функціи наши опредѣлятся вполнѣ для всѣхъ вещественныхъ значеній ϑ.

Онѣ опредѣлятся этими уравненіями однозначнымъ образомъ и будутъ непрерывными также и для всѣхъ значеній ϑ вида

Digitized by Google

$$\vartheta = \rho + \sigma\sqrt{-1},$$

гдѣ ρ и σ вещественныя числа, изъ которыхъ первое совершенно произвольно, а второе подчинено условію, чтобы его абсолютная величина не превосходила извѣстнаго предѣла, разысканіемъ котораго здѣсь заниматься не будемъ.

Разсматривая въ случаѣ надобности и такія значенія ϑ, мы будемъ однако же чаще всего предполагать, что аргументъ нашихъ функцій остается вещественнымъ.

Функція $\mathrm{Cs}\,\vartheta$ будетъ четною, а функція $\mathrm{Sn}\,\vartheta$ печетною. При томъ обѣ будутъ періодическими, какъ это выводится изъ уравненій

$$\vartheta = -\sqrt{n}\int_1^{\mathrm{Cs}\vartheta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} = \int_0^{\mathrm{Sn}\vartheta} (1-nx^2)^{\frac{1-2n}{2n}}\,dx,$$

которыя слѣдуютъ изъ (23) и (24) и могутъ служить для опредѣленія нашихъ функцій, если пути интегрированія подчинить нѣкоторымъ ограниченіямъ и сдѣлать надлежащія предположенія относительно ирраціональностей, входящихъ подъ знаки интеграловъ.

Если положимъ

$$\omega = 2\sqrt{n}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} = 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-nx^2)^{\frac{1-2n}{2n}}\,dx,$$

предполагая въ обоихъ интегралахъ перемѣнное x вещественнымъ, а dx положительнымъ, то число 2ω будетъ періодомъ для обѣихъ функцій.

Число это выражается при помощи функціи Γ, ибо изъ написанныхъ сейчасъ формулъ (если входящія въ нихъ ирраціональности будемъ считать положительными) найдемъ:

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi}{n}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2n}\right)}.$$

Digitized by Google

Чтобы дать формулы, которыми функціи наши опредѣлялись бы однозначнымъ образомъ по крайней мѣрѣ для всякихъ вещественныхъ значеній ϑ, вводимъ вспомогательное перемѣнное φ, опредѣляемое въ функціи ϑ уравненіемъ

$$\vartheta = \sqrt{n}\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2\varphi + \ldots + \cos^{2n-2}\varphi}}. \qquad (25)$$

Тогда, если, ограничиваясь вещественными значеніями ϑ, допустимъ, что φ, какъ въ верхнемъ предѣлѣ, такъ и въ подъинтегральной функціи остается вещественнымъ, то найдемъ:

$$\mathrm{Cs}\,\vartheta = \cos\varphi, \quad \mathrm{Sn}\,\vartheta = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{n}}\sqrt{1 + \cos^2\varphi + \ldots + \cos^{2n-2}\varphi}.$$

Если предположимъ, что входящіе сюда радикалы положительны, то въ силу (25) φ будетъ возрастающею функціей ϑ, получающею приращеніе π всякій разъ, когда ϑ получаетъ приращеніе ω.

Мы будемъ поэтому имѣть:

$$\mathrm{Cs}(\vartheta + \omega) = -\mathrm{Cs}\,\vartheta, \quad \mathrm{Sn}(\vartheta + \omega) = -\mathrm{Sn}\,\vartheta,$$

откуда между прочимъ найдемъ:

$$\mathrm{Cs}(\omega - \vartheta) = -\mathrm{Cs}\,\vartheta, \qquad \mathrm{Sn}(\omega - \vartheta) = \mathrm{Sn}\,\vartheta.$$

Изъ этихъ послѣднихъ формулъ заключаемъ, что функціи наши будутъ извѣстны для всѣхъ вещественныхъ значеній ϑ, коль скоро извѣстны ихъ значенія для величинъ ϑ, лежащихъ между 0 и $\frac{\omega}{2}$.

Можно замѣтить, что съ возрастаніемъ ϑ отъ нуля до $\frac{\omega}{2}$ функція $\mathrm{Cs}\,\vartheta$ убываетъ, а функція $\mathrm{Sn}\,\vartheta$ возрастаетъ, и что при $\vartheta = \frac{\omega}{2}$ онѣ достигаютъ слѣдующихъ значеній:

$$\mathrm{Cs}\,\frac{\omega}{2} = 0, \quad \mathrm{Sn}\,\frac{\omega}{2} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Digitized by Google

Указанными свойствами функціи $\mathrm{Cs}\vartheta$ и $\mathrm{Sn}\vartheta$ напоминаютъ функціи $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$, въ которыя онѣ и обращаются при $n=1$.

Но въ нашемъ изслѣдованіи наименьшее изъ возможныхъ значеній n есть 2.

Въ этомъ случаѣ наши функціи обращаются въ эллиптическія: а именно,

$$\mathrm{Cs}\vartheta = \mathrm{cn}\,\vartheta, \qquad \mathrm{Sn}\vartheta = \mathrm{sn}\,\vartheta\,\mathrm{dn}\,\vartheta$$

при модулѣ $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Онѣ выражаются при помощи эллиптическихъ функцій также и въ случаѣ $n=3$. Но выраженія ихъ дѣлаются тогда довольно сложными и заключаютъ въ себѣ ирраціональности.

Такъ какъ выраженія эти не представляютъ ничего особенно интереснаго, то приводить ихъ здѣсь не будемъ.

Возвращаемся къ системѣ (22), общій интегралъ которой представится уравненіями:

$$x = c\,\mathrm{Cs}(c^{n-1}t+\gamma), \qquad y = -c^n\,\mathrm{Sn}(c^{n-1}t+\gamma).$$

Если постоянныя c и γ предположимъ вещественными и ограничимся разсмотрѣніемъ вещественныхъ значеній t, то этими уравненіями опредѣлятся непрерывныя вещественныя періодическія функціи t съ періодомъ

$$\frac{2\omega}{c^{n-1}}$$

Періодъ этотъ будетъ, слѣдовательно, зависѣть отъ начальныхъ значеній функцій x и y и при томъ — такъ, что дѣлая эти значенія численно достаточно малыми, его можно будетъ сдѣлать сколь угодно большимъ.

Замѣтимъ, что, если постоянное c предполагать безконечно-малымъ и порядокъ его принять за единицу, то *вообще* функція x будетъ безконечно-малою перваго порядка, а функція y безконечно-малою n-аго порядка.

Digitized by Google

11. Возвращаемся къ нашей задачѣ.

Допуская, что имѣемъ дѣло съ однимъ изъ случаевъ первой категоріи, беремъ систему (1) въ нашемъ обычномъ предположеніи, что функція X уничтожается при $y = 0$.

Каково бы ни было отрицательное число a, мы всегда можемъ перейти къ случаю, когда $a = -1$. Для этого стоитъ только вмѣсто системы (1) разсматривать ея преобразованіе посредствомъ подстановки

$$x = (-a)^{-\frac{1}{2(n-1)}} x_1, \qquad y = (-a)^{-\frac{1}{2(n-1)}} y_1.$$

Допустимъ поэтому, какъ и въ предыдущемъ параграфѣ, что $a = -1$.

По характеру занимающихъ насъ случаевъ, функція Y будетъ тогда такова, что если x разсматривать какъ величину перваго измѣренія, y какъ величину n-го измѣренія, то членомъ наинизшаго измѣренія въ ней будетъ $-x^{2n-1}$.

При томъ же допущеніи въ функціи X не будетъ членовъ ниже $(n+1)$-го измѣренія.

Вслѣдствіе этого, если въ предположеніи, что x, y, $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ суть безконечно-малыя величины соотвѣтственно 1-го, n-го, n-го и $(2n-1)$-го порядковъ, въ каждомъ изъ уравненій (1) удержать только члены наинизшаго порядка, то уравненія эти обратятся въ тѣ, съ которыми мы имѣли дѣло въ предыдущемъ параграфѣ.

Естественно поэтому для интегрированія нашихъ уравненій прибѣгнуть къ методѣ измѣненія постоянныхъ произвольныхъ, и принимая для x и y выраженія, найденныя въ предыдущемъ параграфѣ, разсматривать въ нихъ c и γ, какъ новыя неизвѣстныя функціи.

Проще будетъ, однако, вмѣсто γ ввести комбинацію

$$c^{n-1}t + \gamma.$$

Мы остановимся поэтому на преобразованіи посредствомъ подстановки

Digitized by Google

$$= r\,\mathrm{Cs}\,\vartheta, \qquad y = -r^n\,\mathrm{Sn}\,\vartheta, \tag{26}$$

принимая за новыя неизвѣстныя функціи r и ϑ.

Въ силу (23) уравненія (26) даютъ:

$$x^{2n} + ny^2 = r^{2n}, \tag{27}$$

откуда

$$x^{2n-1}\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = r^{2n-1}\frac{dr}{dt}.$$

Изъ тѣхъ же уравненій въ силу (24) и (23) находимъ:

$$ny\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = r^{n+1}\frac{d\vartheta}{dt}.$$

Замѣняя здѣсь производныя $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ ихъ выраженіями, слѣдующими изъ уравненій (1), мы получаемъ такимъ образомъ уравненія

$$r^{2n-1}\frac{dr}{dt} = x^{2n-1}X + y(x^{2n-1} + Y)$$

$$r^{n+1}\frac{d\vartheta}{dt} = r^{2n} + nyX - x(x^{2n-1} + Y),$$

вторыя части которыхъ, будучи выражены въ перемѣнныхъ r и ϑ, представятся рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ r съ періодическими относительно ϑ коэффиціентами.

Но въ силу указаннаго выше свойства функцій X и Y во второй части перваго изъ этихъ уравненій, очевидно, не будетъ членовъ ниже $3n$-ой степени относительно r, а во второй части второго младшимъ членомъ будетъ r^{2n}.

Уравненія эти приведутся поэтому къ виду:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= r^{n+1}R,\\ \frac{d\vartheta}{dt} &= r^{n-1} + r^n\Theta,\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Digitized by Google

гдѣ R и Θ означаютъ ряды, расположенные по цѣлымъ положительнымъ степенямъ r съ періодическими относительно ϑ коэффиціентами.

Эти коэффиціенты будутъ нѣкоторыми цѣлыми раціональными функціями отъ $\mathrm{Cs}\vartheta$ и $\mathrm{Sn}\vartheta$ и потому представятъ функціи, опредѣленныя и непрерывныя для всѣхъ вещественныхъ значеній ϑ, а ряды R и Θ при величинахъ r, численно достаточно малыхъ, будутъ сходящимися равномѣрно для всѣхъ такихъ значеній ϑ.

12. Обращаясь къ уравненіямъ (26) и (27), мы замѣчаемъ тотчасъ же, что интересующая насъ задача объ устойчивости приводится къ задачѣ объ устойчивости по отношенію къ перемѣнному r; а по первому изъ уравненій (28) (вторая часть котораго уничтожается при $r = 0$, вслѣдствіе чего r, по крайней мѣрѣ пока остается численно достаточно малымъ, будетъ сохранять знакъ своего начальнаго значенія) заключаемъ, что она можетъ быть разбита на двѣ задачи объ условной устойчивости, соотвѣтствующія — одна условію $r > 0$, другая условію $r < 0$.

Но эти двѣ задачи въ сущности не различаются между собою, такъ какъ перемѣняя r на $-r$ и ϑ на $\omega - (-1)^n\vartheta$, мы не измѣняемъ уравненій (26).

Мы можемъ поэтому ограничиться рѣшеніемъ какой либо одной изъ нихъ, наприм. той, которая соотвѣтствуетъ условію $r > 0$.

Останавливаясь на этой послѣдней задачѣ, мы замѣчаемъ теперь, что при рѣшеніи ея перемѣнное t можно замѣнять перемѣннымъ ϑ, разсматривая его, какъ время.

Дѣйствительно, въ вопросахъ объ устойчивости роль времени можетъ играть всякая его функція, непрерывная и возрастающая, лишь бы только съ безпредѣльнымъ возрастаніемъ времени она возрастала также безпредѣльно. При томъ, если роль эту желательно приписать функціи, которая не дается a priori, а опредѣляется лишь извѣстными условіями, зависящими отъ перемѣнныхъ, по отношенію къ которымъ изслѣдуется устойчивость, то нѣтъ надобности, чтобы ука-

Digitized by Google

занными свойствами она всегда обладала: достаточно, чтобы она обладала ими, пока названныя перемѣнныя остаются численно меньшими какихъ либо заранѣе выбранныхъ сколь угодно малыхъ предѣловъ.

Что касается нашей задачи, то, очевидно, всегда найдется положительное число l, достаточно малое для того, чтобы все время, пока выполняется условіе

$$0 < r < l, \qquad (29)$$

перемѣнное ϑ непрерывно возрастало вмѣстѣ съ t.

Справедливость нашего замѣчанія обнаружится поэтому тотчасъ же, если покажемъ, что число l можно выбирать достаточно малымъ для того, чтобы во всѣхъ случаяхъ (если только таковые возможны), въ которыхъ условіе (29) сохраняется все время, слѣдующее за начальнымъ моментомъ, перемѣнное ϑ съ безпредѣльнымъ возрастаніемъ t возрастало *безпредѣльно*.

Но этому требованію, какъ сейчасъ увидимъ, удовлетворяетъ всякое число l, если оно достаточно мало для того, чтобы при условіи (29) ряды R и Θ были сходящимися равномѣрно для всѣхъ вещественныхъ значеній ϑ, и чтобы при томъ же условіи при всякомъ вещественномъ ϑ выполнялось неравенство

$$1 + r\Theta > \lambda, \qquad (30)$$

гдѣ λ означаетъ какую угодно данную положительную правильную дробь.

Въ самомъ дѣлѣ, если возможно движеніе, въ которомъ при такомъ выборѣ числа l условіе (29) сохранялось бы для всѣхъ положительныхъ значеній t (за начальный моментъ мы принимаемъ $t = 0$), то для движенія этого при такихъ же значеніяхъ t будетъ выполняться неравенство

$$\frac{d\vartheta}{dt} > \lambda r^{n-1},$$

слѣдующее въ силу (30) изъ второго изъ уравненій (28).

Digitized by Google

Но если значеніе функціи r, соотвѣтствующее $t = 0$, назовемъ r_0, то первое изъ уравненій (28) представится подъ видомъ:

$$\frac{1}{r_0^{n-1}} - \frac{1}{r^{n-1}} = (n-1)\int_0^t rRdt,$$

откуда, означая черезъ M положительное число, для котораго выполнялось бы неравенство

$$rR > -M$$

при всякомъ r, удовлетворяющемъ условію (29), и при всякомъ вещественномъ ϑ (по самому выбору числа l такое число M всегда найдется), мы получимъ для разсматриваемаго движенія еще слѣдующее неравенство:

$$\frac{1}{r_0^{n-1}} - \frac{1}{r^{n-1}} > -(n-1)Mt,$$

или

$$r^{n-1} > \frac{r_0^{n-1}}{1 + (n-1)Mr_0^{n-1}t},$$

справедливое также для всякаго положительнаго t.

Мы найдемъ поэтому

$$\frac{d\vartheta}{dt} > \frac{\lambda r_0^{n-1}}{1 + (n-1)Mr_0^{n-1}t},$$

и слѣдовательно при всякомъ положительномъ t будемъ имѣть:

$$\vartheta - \vartheta_0 > \frac{\lambda}{(n-1)M}\log[1 + (n-1)Mr_0^{n-1}t],$$

гдѣ ϑ_0 есть значеніе ϑ, соотвѣтствующее $t = 0$.

Отсюда ясно, что съ безпредѣльнымъ возрастаніемъ t перемѣнное ϑ будетъ возрастать также безпредѣльно.

Возвращаясь къ нашей задачѣ, мы замѣчаемъ, что система (28) приводитъ къ уравненію

Digitized by Google

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{r^2 R}{1 + r\Theta}, \qquad (31)$$

вторая часть котораго представляется подъ видомъ ряда

$$R_1 r^2 + R_2 r^3 + \ldots,$$

расположеннаго по цѣлымъ положительнымъ степенямъ r съ періодическими относительно ϑ коэффиціентами R_s (цѣлыми раціональными относительно $\mathrm{Cs}\,\vartheta$ и $\mathrm{Sn}\,\vartheta$) и сходящагося при достаточно маломъ r равномѣрно для всѣхъ вещественныхъ значеній ϑ.

Разсматривая въ этомъ уравненіи ϑ, какъ время, мы приводимъ такимъ образомъ нашу задачу къ одному изъ простѣйшихъ случаевъ задачи объ устойчивости періодическихъ движеній.

Этотъ случай разсматривался въ моемъ сочиненіи и согласно указанному тамъ правилу трактуется слѣдующимъ образомъ.

Пусть функція r, удовлетворяющая уравненію (31), ищется подъ видомъ ряда

$$r = c + u_2 c^2 + u_3 c^3 + \ldots, \qquad (32)$$

расположеннаго по цѣлымъ положительнымъ степенямъ постояннаго произвольнаго c, въ предположеніи, что u_2, u_3 и т. д. суть независящія отъ c функціи ϑ.

Функціи эти находятся послѣдовательно изъ уравненій

$$\frac{du_2}{d\vartheta} = R_2, \qquad \frac{du_3}{d\vartheta} = R_3 + 2u_2 R_2, \quad \ldots\ldots$$

Составляя ихъ до тѣхъ поръ, пока не встрѣтимъ непріодическую, допустимъ, что первая такая въ ряду функцій

$$u_2, \quad u_3, \quad u_4, \quad \ldots \qquad (33)$$

есть u_m. Она необходимо будетъ вида

$$u_m = g\vartheta + v,$$

Digitized by Google

гдѣ g означаетъ отличное отъ нуля постоянное, а v нѣкоторую періодическую функцію ϑ.

Найдя постоянное g, мы можемъ задачу нашу считать рѣшенною, ибо принимая въ разсчетъ условіе $r > 0$, можемъ утверждать тотчасъ же, что при $g > 0$ невозмущенное движеніе неустойчиво, а при $g < 0$ устойчиво.

Въ послѣднемъ случаѣ возмущенныя движенія, соотвѣтствующія достаточно малымъ возмущеніямъ, будутъ асимптотически приближаться къ невозмущенному.

Можетъ, конечно, случиться, что въ ряду (33), какъ бы далеко онъ ни былъ продолжаемъ, будутъ встрѣчаться только періодическія функціи.

Если доказано, что мы имѣемъ дѣло съ такимъ случаемъ, и если вычисленіе ведется такъ, чтобы при нѣкоторомъ данномъ вещественномъ значеніи ϑ всѣ функціи u_s уничтожались, то можно утверждать, что рядъ, находящійся во второй части уравненія (32), при достаточно маломъ c будетъ сходящимся равномѣрно для всѣхъ вещественныхъ значеній ϑ.

На основаніи этого уравненія, представляющаго общій интегралъ уравненія (31), можно поэтому заключить, что имѣетъ мѣсто устойчивость.

Устойчивость эта, очевидно, будетъ при томъ консервативною (пар. 4).

Можно замѣтить, что, если вычисленіе функцій u_s не подчиняется никакимъ спеціальнымъ условіямъ, то опредѣленіе каждой изъ нихъ будетъ сопровождаться введеніемъ постояннаго произвольнаго. Но эти постоянныя всегда будутъ входить въ нихъ такъ, что, если при какомъ либо ихъ выборѣ между функціями u_s находятся неперіодическія, то то же будетъ и при всякомъ другомъ, при чемъ числа m и g всегда выйдутъ одни и тѣ-же.

13. Изложенная метода, требующая послѣдовательнаго вычисленія функцій

$$u_2 = \int R_2 d\vartheta, \quad u_3 = u_2' + \int R_3 d\vartheta, \quad \ldots,$$

Digitized by Google

до тѣхъ поръ, пока не встрѣтится непеpіодической, приводится къ выполненію извѣстнаго ряда квадратуръ надъ цѣлыми раціональными функціями отъ $\mathrm{Cs}\,\vartheta$, $\mathrm{Sn}\,\vartheta$ и найденныхъ раньше функцій u_s.

Разсмотримъ простѣйшія изъ этихъ квадратуръ, съ разысканія которыхъ приходится начинать вычисленіе.

Это суть тѣ, въ которыхъ подъ знаками интеграловъ находятся цѣлыя раціональныя функціи отъ $\mathrm{Cs}\,\vartheta$ и $\mathrm{Sn}\,\vartheta$, и изученіе которыхъ сводится поэтому на изученіе интеграловъ вида

$$\int \mathrm{Sn}^p\vartheta\,\mathrm{Cs}^q\vartheta\,d\vartheta, \qquad (34)$$

гдѣ p и q суть цѣлыя неотрицательныя числа.

Всѣ такіе интегралы легко преобразовываются въ интегралы отъ дифференціальныхъ биномовъ. Но мы не будемъ прибѣгать къ этому преобразованію и будемъ трактовать ихъ непосредственно на основаніи свойствъ функцій $\mathrm{Sn}\,\vartheta$ и $\mathrm{Cs}\vartheta$, выражающихся въ уравненіяхъ (23) и (24).

Прежде всего замѣчаемъ, что уравненія (24) тотчасъ же даютъ два слѣдующихъ интеграла:

$$\int \mathrm{Sn}\vartheta\,\mathrm{Cs}^q\vartheta\,d\vartheta = -\frac{\mathrm{Cs}^{q+1}\vartheta}{q+1} + \text{const.},$$

$$\int \mathrm{Sn}^p\vartheta\,\mathrm{Cs}^{2n-1}\vartheta\,d\vartheta = \frac{\mathrm{Sn}^{p+1}\vartheta}{p+1} + \text{const.}$$

Зная эти два интеграла, интегралъ (34) можно находить въ двухъ случаяхъ: 1) когда p есть число нечетное, и 2) когда q при дѣленіи на $2n$ даетъ остатокъ $2n-1$.

Въ обоихъ случаяхъ интегралъ найдется простымъ преобразованіемъ, основаннымъ на уравненіи (23), и выразится цѣлою раціональною функціей въ первомъ случаѣ отъ $\mathrm{Cs}\,\vartheta$, во второмъ — отъ $\mathrm{Sn}\,\vartheta$.

Чтобы обнаружить другіе случаи интегрируемости, обращаемся къ слѣдующимъ формуламъ приведенія:

$$\int \mathrm{Sn}^p\vartheta\,\mathrm{Cs}^q\vartheta\,d\vartheta = -\frac{\mathrm{Sn}^{p-1}\vartheta\,\mathrm{Cs}^{q+1}\vartheta}{(p-1)n+q+1} +$$

Digitized by Google

$$+\frac{p-1}{(p-1)n+q+1}\int \mathrm{Sn}^{p-2}\vartheta\,\mathrm{Cs}^{q}\vartheta\,d\vartheta,$$

$$\int \mathrm{Sn}^{p}\vartheta\,\mathrm{Cs}^{q}d\vartheta=\frac{n\,\mathrm{Sn}^{p+1}\vartheta\,\mathrm{Cs}^{q-2n+1}\vartheta}{(p-1)n+q+1}+$$

$$+\frac{q-2n+1}{(p-1)n+q+1}\int \mathrm{Sn}^{p}\vartheta\,\mathrm{Cs}^{q-2n}\vartheta\,d\vartheta,$$

которыя получаются интегрированіемъ по частямъ съ небольшимъ преобразованіемъ посредствомъ уравненія (23) и легко провѣряются диффсренцированіемъ.

Послѣдовательное примѣненіе этихъ формулъ, позволяющихъ понижать показатель p на двѣ единицы, а показатель q на $2n$ единицъ, даетъ возможность находить интегралъ (34) какъ въ указанныхъ выше двухъ случаяхъ, такъ еще и тогда, когда q есть число, дѣлящееся на $2n$.

Въ двухъ случаяхъ этого послѣдняго рода $p=2$, $q=0$ и $p=0$, $q=2n$ формулы эти непосредственно даютъ:

$$\int \mathrm{Sn}^{2}\vartheta\,d\vartheta=-\frac{\mathrm{Sn}\vartheta\,\mathrm{Cs}\vartheta}{n+1}+\frac{\vartheta}{n+1}+\mathrm{const.}$$

$$\int \mathrm{Cs}^{2n}\vartheta\,d\vartheta=\frac{n\mathrm{Sn}\vartheta\,\mathrm{Cs}\vartheta}{n+1}+\frac{\vartheta}{n+1}+\mathrm{const.}$$

Вообще въ случаѣ четнаго p разсматриваемыя формулы окончательно приводятъ къ интеграламъ

$$\int \mathrm{Cs}^{q}\vartheta\,d\vartheta,$$

для которыхъ $q<2n$. Но изъ этихъ послѣднихъ, кромѣ соотвѣтствующихъ $q=0$ и $q=2n-1$, мы можемъ выразить при помощи нашихъ функцій еще только одинъ, соотвѣтствующій $q=n-1$.

Интегралъ этотъ найдется по формулѣ

$$\int \mathrm{Cs}^{n-1}\vartheta\,d\vartheta=\frac{1}{\sqrt{n}}\arccos \mathrm{Cs}^{n}\vartheta+\mathrm{const.},$$

Digitized by Google

если остановимся на такомъ опредѣленіи функціи arc cos, для котораго

$$\sin \operatorname{arc\,cos} \operatorname{Cs}^n \vartheta = \sqrt{n}\ \operatorname{Sn}\vartheta.$$

Остальные $2n-3$ интеграловъ, соотвѣтствующіе

$$q = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-2,\ n,\ n+1,\ \ldots,\ 2n-2,$$

потребуютъ особаго изученія *).

Сопоставляя все сказанное, заключаемъ, что интегралъ (34) можетъ быть найденъ во всѣхъ случаяхъ, когда p есть число нечетное, или когда q удовлетворяетъ одному изъ трехъ слѣдующихъ сравненій:

$$q \equiv 0, \quad q \equiv n-1, \quad q \equiv 2n-1 \quad (\text{mod. } 2n).$$

Въ другихъ случаяхъ придется довольствоваться преобразованіемъ его къ виду:

$$\int \operatorname{Sn}^p\vartheta \operatorname{Cs}^q\vartheta\, d\vartheta = F(\operatorname{Sn}\vartheta, \operatorname{Cs}\vartheta) + A\int \operatorname{Cs}^r\vartheta\, d\vartheta,$$

гдѣ F означаетъ нѣкоторую цѣлую раціональную функцію отъ $\operatorname{Sn}\vartheta$ и $\operatorname{Cs}\vartheta$, A—отличное отъ нуля постоянное и r—остатокъ отъ дѣленія числа q на $2n$.

Къ такому виду формулы наши всегда позволятъ привести разсматриваемый интегралъ, если только p есть число четное.

Такъ какъ интегралъ, фигурирующій во второй части написаннаго сейчасъ равенства, при $r < 2n-1$ навѣрно не будетъ выражаться цѣлою раціональною функціей отъ $\operatorname{Sn}\vartheta$ и $\operatorname{Cs}\vartheta$, то можно утверждать, что интегралъ (34) представится такою функціей только въ двухъ случаяхъ, указанныхъ въ самомъ началѣ, когда p есть число нечетное, или когда q удовлетворяетъ сравненію

*) Можно замѣтить, что для дифференціальныхъ биномовъ, къ которымъ приводятся подъинтегральныя функціи въ этихъ интегралахъ, если за независимое перемѣнное принять функцію $\operatorname{Cs}\vartheta$, ни одно изъ извѣстныхъ условій интегрируемости выполняться не будетъ.

Digitized by Google

$$q \equiv 2n - 1 \pmod{2n}.$$

Для нашей задачи важно указать случаи, когда разсматриваемые интегралы выходятъ періодическими функціями ϑ.

Нетрудно видѣть, что это будетъ всякій разъ, когда по крайней мѣрѣ одно изъ чиселъ p и q есть нечетное, и что при томъ, если числа эти оба суть нечетныя, періодомъ (который вообще равенъ 2ω) можетъ служить число ω.

Это выводится тотчасъ же изъ основныхъ свойствъ функцій $\mathrm{Sn}\,\vartheta$ и $\mathrm{Cs}\,\vartheta$, обнаруживающихся при измѣненіи аргумента на ω.

Если числа p и q оба суть четныя, интегралъ нашъ не будетъ періодическою функціей и представится подъ видомъ:

$$\int \mathrm{Sn}^p\vartheta\,\mathrm{Cs}^q\vartheta\,d\vartheta = \Phi(\vartheta) + G\vartheta,$$

гдѣ $\Phi(\vartheta)$ означаетъ періодическую функцію ϑ съ періодомъ ω, а G постоянное, опредѣляемое формулой

$$G = \frac{2}{\omega}\int_0^{\frac{\omega}{2}} \mathrm{Sn}^p\vartheta\,\mathrm{Cs}^q\vartheta\,d\vartheta.$$

Постоянное это, если угодно, можно выразить при помощи функціи Γ, ибо нетрудно убѣдиться въ справедливости слѣдующей формулы:

$$\int_0^{\frac{\omega}{2}} \mathrm{Sn}^p\vartheta\,\mathrm{Cs}^q\vartheta\,d\vartheta = \frac{1}{2n^{\frac{p+1}{2}}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+\frac{q+1}{2n}\right)}.$$

14. Предполагая, что между функціями u_s находятся непріодическія, мы означили черезъ m значекъ первой непріодической въ ряду

$$u_2, \quad u_3, \quad u_4, \quad \ldots$$

Digitized by Google

Укажемъ нѣкоторыя свойства этого числа m, обнаруживающіяся при ближайшемъ разсмотрѣніи уравненія (31).

Покажемъ вопервыхъ, что при четномъ n и число m будетъ четнымъ, а при нечетномъ n—нечетнымъ.

Для этого замѣчаемъ, что уравненіе (31) отъ замѣны r на $-r$ и ϑ на $\omega-(-1)^n\vartheta$ не должно мѣняться, ибо отъ такой замѣны, какъ уже было указано, уравненія (26) не мѣняются.

Мы можемъ поэтому утверждать, что, если въ ряду (32) вмѣсто ϑ поставить $\omega-(-1)^n\vartheta$ и у всѣхъ членовъ перемѣнить знаки, то новый рядъ, какъ и прежній, будетъ формально удовлетворять уравненію (31).

Но роль постояннаго c будетъ играть въ немъ $-c$, и чтобы получить рядъ того же вида, что и (32), мы должны еще замѣнить c на $-c$.

Допустимъ, что получаемый такимъ путемъ рядъ есть слѣдующій:

$$c + v_2c^2 + v_3c^3 + \ldots, \qquad (35)$$

гдѣ v_2, v_3 и т. д. суть независящія отъ c функціи ϑ.

Мы можемъ утверждать a priori, что первою непериодическою въ ряду функцій

$$v_2, \quad v_3, \quad v_4, \ldots$$

будетъ v_m, и что функція эта будетъ вида

$$g\vartheta + \text{період. функція}.$$

Но изъ способа полученія ряда (35) слѣдуетъ, что вообще

$$v_s = -(-1)^s u_s[\omega-(-1)^n\vartheta],$$

если $u_s(\vartheta)$ есть означеніе u_s, какъ функціи перемѣннаго ϑ.

Отсюда находимъ:

$$v_m = (-1)^{m+n} g\vartheta + \text{період. функція}.$$

Мы должны поэтому заключить, что $(-1)^{m+n}=1$, и что слѣдовательно $m+n$ есть число четное.

Digitized by Google

Мы покажемъ теперь, что для числа m существуетъ нѣкоторый низшій предѣлъ, зависящій отъ чиселъ n и β.

Обращаемся для этого къ выраженіямъ функцій R и Θ посредствомъ функцій X и Y.

Эти выраженія, слѣдующія изъ формулъ параграфа 11-го, могутъ быть представлены подъ видомъ:

$$R = \frac{X}{r^{n+1}} \mathrm{Cs}^{2n-1}\vartheta - \frac{x^{2n-1} + Y}{r^{2n}} \mathrm{Sn}\vartheta,$$

$$\Theta = -\frac{X}{r^{n+1}} n\mathrm{Sn}\vartheta - \frac{x^{2n-1} + Y}{r^{2n}} \mathrm{Cs}\vartheta.$$

Мы замѣчаемъ теперь, что по свойству функціи X (которая уничтожается при $y = 0$) въ разложеніи

$$\frac{X}{r^{n+1}}$$

по восходящимъ степенямъ r всѣ члены ниже $(n-1)$-ой степени относительно r будутъ обладать коэффиціентами вида

$$K \mathrm{Cs}^k\vartheta \mathrm{Sn}\vartheta,$$

гдѣ K нѣкоторое постоянное и k цѣлое положительное число.

Мы замѣчаемъ далѣе, что, если подъ N въ случаѣ, когда $\beta \geqq 2n-1$ или когда $\varphi(x) = 0$, разумѣть число $n-1$, а въ случаѣ, когда $\beta < 2n-1$, — число $\beta - n$, то въ разложеніи

$$\frac{x^{2n-1} + Y}{r^{2n}}$$

всѣ члены ниже N-ой степени относительно r будутъ обладать коэффиціентами, цѣлыми раціональными относительно $\mathrm{Cs}\vartheta$.

Разумѣя подъ $E(x)$ вообще цѣлую раціональную функцію отъ x, мы можемъ поэтому утверждать, что коэффиціенты въ членахъ ниже N-ой степени относительно r для функціи R будутъ вида $E(\mathrm{Cs}\vartheta)\,\mathrm{Sn}\vartheta$, а для функціи Θ—вида $E(\mathrm{Cs}\vartheta)$, и что слѣдовательно между коэффиціентами R_s разложенія второй части уравненія (31) всѣ тѣ, для которыхъ $s < N+2$, будутъ вида $E(\mathrm{Cs}\vartheta)\,\mathrm{Sn}\vartheta$.

Digitized by Google

Отсюда нетрудно заключить, что всѣ u_s, для которыхъ $s < N + 2$, будутъ цѣлыми раціональными функціями отъ $\mathrm{Cs}\vartheta$.

Число m не можетъ быть поэтому менѣе $N + 2$.

Принимая въ разсчетъ, что $m + n$ всегда будетъ числомъ четнымъ, мы приходимъ такимъ образомъ къ слѣдующему выводу:

Всякій разъ, когда $\beta \geqq 2n - 1$ или когда $\varphi(x) = 0$ тожественно, число m (если только оно существуетъ) будетъ удовлетворять неравенству

$$m > n + 1,$$

и всякій разъ, когда β менѣе $2n - 1$ и представляетъ число нечетное, число m будетъ удовлетворять неравенству

$$m > \beta - n + 2.$$

Къ этому прибавимъ, что если β, будучи менѣе $2n - 1$, есть число четное, то всегда

$$m = \beta - n + 2.$$

Дѣйствительно, нетрудно видѣть, что въ этомъ случаѣ функція $R_{\beta-n+2}$ будетъ вида

$$b\,\mathrm{Cs}^{\beta}\vartheta\,\mathrm{Sn}^{2}\vartheta + E(\mathrm{Cs}\vartheta)\,\mathrm{Sn}\vartheta.$$

Къ такому же виду приведется поэтому и вторая часть уравненія

$$\frac{du_{\beta-n+2}}{d\vartheta} = R_{\beta-n+2} + F(u_2, u_3, \ldots, u_{\beta-n+1}, \mathrm{Cs}\vartheta)\,\mathrm{Sn}\vartheta,$$

которое послужитъ для опредѣленія функціи $u_{\beta-n+2}$, ибо F представитъ здѣсь цѣлую раціональную функцію означенныхъ въ скобкахъ величинъ, которыя, по доказанному, всѣ будутъ цѣлыми раціональными относительно $\mathrm{Cs}\vartheta$.

Мы видимъ такимъ образомъ, что при четномъ β функція $u_{\beta-n+2}$ навѣрно не будетъ періодическою.

Обращаясь къ выраженію постояннаго g, которое найдется въ этомъ случаѣ по формулѣ

Digitized by Google

$$g = \frac{b}{\omega}\int_0^{\omega} \mathrm{Cs}^{\beta}\vartheta \cdot \mathrm{Sn}^{2}\vartheta \, d\vartheta,$$

мы придемъ къ заключенію, что при b положительномъ невозмущенное движеніе неустойчиво, а при b отрицательномъ устойчиво.

Этотъ результатъ находится уже въ числѣ выводовъ, полученныхъ инымъ путемъ въ параграфѣ 6-мъ.

15. Мы показали, какимъ образомъ рѣшается вопросъ объ устойчивости, какъ въ случаѣ періодичности всѣхъ функцій u_s, такъ и въ случаѣ существованія между ними непериодическихъ. Но мы не указали признаковъ, по которымъ можно было бы узнавать a priori, съ которымъ изъ этихъ двухъ случаевъ имѣемъ дѣло.

Въ отсутствіи подобныхъ признаковъ кроется, конечно, весьма серьезное затрудненіе. Но затрудненіе это обусловливается сущностью самаго вопроса и при общей постановкѣ послѣдняго едва ли можетъ быть устранено.

Все, что можемъ мы сдѣлать,—это указать нѣкоторыя условія, при выполненіи которыхъ можно было бы считать несомнѣннымъ, что функціи u_s всѣ будутъ періодическими.

Къ числу такихъ условій, очевидно, принадлежатъ всѣ тѣ, которыми обусловливается существованіе для системы (1) независящаго отъ t интеграла, голоморфнаго относительно x и y.

Всякій разъ, когда подобный интегралъ существуетъ, всѣ функціи u_s будутъ цѣлыми раціональными относительно $\mathrm{Cs}\vartheta$ и $\mathrm{Sn}\vartheta$.

Таковъ будетъ, напр., случай, когда система (1) есть каноническая, т. е. когда функціи X и Y удовлетворяютъ соотношенію

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0.$$

Изъ другихъ случаевъ этого рода укажемъ тотъ, когда при замѣнѣ y на $-y$ и t на $-t$ система (1) не мѣняется.

Digitized by Google

Въ этомъ случаѣ функціи X и Y необходимо будутъ вида

$$X = yf(x, y^2), \quad Y = \varphi(x, y^2),$$

гдѣ f и φ суть голоморфныя функціи x и y^2, уничтожающіяся при $x = y = 0$. Поэтому въ уравненіи

$$\frac{dy^2}{dx} = \frac{2yY}{y + X}$$

вторая часть будетъ голоморфною относительно x и y^2, изъ чего нетрудно заключить о существованіи для системы (1) независящихъ отъ t интеграловъ, голоморфныхъ относительно x и y^2.

Существованіе интеграловъ указаннаго характера не есть условіе необходимое для періодичности функцій u_s, ибо можно указать случаи, когда и при отсутствіи подобныхъ интеграловъ всѣ эти функціи будутъ періодическими.

Сюда относится вообще тотъ случай, когда система (1) не мѣняется при замѣнѣ x на $-x$ и t на $-t$.

Въ этомъ случаѣ, какъ легко убѣдиться на примѣрахъ, функціи u_s могутъ не быть цѣлыми раціональными относительно $\mathrm{Cs}\vartheta$ и $\mathrm{Sn}\vartheta$, и слѣдовательно система (1) можетъ не обладать независящими отъ t голоморфными интегралами; но тѣмъ не менѣе всѣ функціи u_s всегда будутъ періодическими.

Чтобы доказать это, мы замѣчаемъ, что въ случаѣ, о которомъ идетъ рѣчь, уравненіе (31), а слѣдовательно и дифференціальныя уравненія, служащія для опредѣленія функцій u_s, отъ замѣны ϑ на $\omega - \vartheta$ не будутъ мѣняться, и потому, если имъ можно удовлетворить, полагая

$$u_2 = \Phi_2(\vartheta), \quad u_3 = \Phi_3(\vartheta), \ \ldots,$$

то можно удовлетворить также и полагая

$$u_2 = \Phi_2(\omega - \vartheta), \quad u_3 = \Phi_3(\omega - \vartheta), \ \ldots.$$

Но функціи $\Phi_s(\vartheta)$ и $\Phi_s(\omega - \vartheta)$, получающія при $\vartheta = \frac{\omega}{2}$ одинаковыя значенія, по свойству уравненій, которымъ онѣ удовлетворяютъ, должны быть тожественными.

Digitized by Google

Мы будемъ такимъ образомъ имѣть:

$$\Phi_2(\omega - \vartheta) = \Phi_2(\vartheta), \quad \Phi_3(\omega - \vartheta) = \Phi_3(\vartheta), \ \ldots$$

для всякаго вещественнаго ϑ.

Отсюда между прочимъ найдемъ:

$$\Phi_2\left(3\frac{\omega}{2}\right) = \Phi_2\left(-\frac{\omega}{2}\right), \quad \Phi_3\left(3\frac{\omega}{2}\right) = \Phi_3\left(-\frac{\omega}{2}\right), \ \ldots. \quad (36)$$

Мы замѣчаемъ далѣе, что нашимъ уравненіямъ можно удовлетворить также, дѣлая

$$u_2 = \Phi_2(\vartheta + 2\omega), \qquad u_3 = \Phi_3(\vartheta + 2\omega), \ \ldots,$$

и что въ силу (36) функціи $\Phi_s(\vartheta)$ и $\Phi_s(\vartheta + 2\omega)$ для $\vartheta = -\frac{\omega}{2}$ принимаютъ одинаковыя значенія.

Мы можемъ поэтому утверждать, что

$$\Phi_2(\vartheta + 2\omega) = \Phi_2(\vartheta), \qquad \Phi_3(\vartheta + 2\omega) = \Phi_3(\vartheta), \ \ldots$$

для всякаго вещественнаго ϑ.

Къ указаннымъ сейчасъ тремъ случаямъ мы можемъ прибавить еще тѣ, которые удается приводить къ нимъ посредствомъ перемѣны независимаго перемѣннаго при помощи уравненій вида

$$dt = (1 + H)\, dt_1,$$

гдѣ t_1 новое независимое перемѣнное и H голоморфная функція x и y, уничтожающаяся при $x = y = 0$.

Замѣтимъ, что всякій разъ, когда всѣ u_s выходятъ періодическими, перемѣнныя x и y, когда ихъ начальныя значенія численно достаточно малы, будутъ періодическими функціями t съ періодомъ T, зависящимъ отъ этихъ начальныхъ значеній такъ, что дѣлая послѣднія численно достаточно малыми, его можно сдѣлать сколь угодно большимъ.

Этотъ періодъ найдется по формулѣ:

$$T = \int_0^{2\omega} \frac{d\vartheta}{r^{n-1} + r^n \Theta}.$$

Digitized by Google

[см. ур. (28)], если подъ r будемъ разумѣть рѣшеніе уравненія (31), соотвѣтствующее разсматриваемымъ начальнымъ значеніямъ функцій x и y.

Періодъ T будетъ вполнѣ опредѣленною функціей значенія c функціи r, соотвѣтствующаго $\vartheta = 0$, и если это значеніе предположимъ численно достаточно малымъ, представится рядомъ, расположеннымъ по восходящимъ цѣлымъ степенямъ его съ младшимъ членомъ вида

$$\frac{2\omega}{c^{n-1}}.$$

Если сдѣлаемъ

$$\tau = \frac{2\omega t}{T} + \gamma,$$

разумѣя подъ γ постоянное, опредѣляемое условіемъ, чтобы при $\vartheta = 0$ было $\tau = 0$, то при $|c|$ достаточно маломъ функціи x и y представятся рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ c съ коэффиціентами, зависящими отъ одного τ и періодическими по отношенію къ нему съ періодомъ 2ω.

Выписывая въ этихъ рядахъ только младшіе ихъ члены, будемъ имѣть:

$$x = c\,\mathrm{Cs}\tau + \ldots, \qquad y = -c^n \mathrm{Sn}\tau + \ldots.$$

16. Переходимъ къ случаямъ второй категоріи, характеризуемымъ одновременнымъ существованіемъ равенства $\beta = n-1$ и неравенства (21).

Допуская, подобно предыдущему, что $a = -1$, преобразовываемъ систему (1) посредствомъ прежней подстановки (26).

Такимъ путемъ при разсматриваемыхъ теперь условіяхъ приходимъ къ уравненіямъ вида:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= br^n \mathrm{Sn}^2\vartheta \mathrm{Cs}^{n-1}\vartheta + r^{n+1}R, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= (1 + b\,\mathrm{Sn}\vartheta \mathrm{Cs}^n\vartheta) r^{n-1} + r^n\Theta, \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

Digitized by Google

гдѣ R и Θ суть функціи такого же характера, какъ и въ системѣ (28).

Задача наша по прежнему приводится къ задачѣ объ устойчивости по отношенію къ перемѣнному r, и при рѣшеніи ея по прежнему можно поставить условіе $r > 0$.

При томъ, удерживая это условіе и принимая за независимое перемѣнное ϑ, это перемѣнное по прежнему можно разсматривать, какъ время.

Послѣднее докажется такъ же, какъ въ параграфѣ 12-мъ, ибо приведенное тамъ доказательство основывалось на двухъ свойствахъ системы (28), принадлежащихъ также и системѣ (37), которыя состоятъ въ слѣдующемъ: 1) младшій относительно r членъ въ уравненіи, содержащемъ $\frac{dr}{dt}$, старше младшаго члена въ уравненіи, содержащемъ $\frac{d\vartheta}{dt}$, и 2) коэффиціентъ при наинизшей степени r въ уравненіи, содержащемъ $\frac{d\vartheta}{dt}$, никогда не дѣлается нулемъ и при томъ положителенъ.

Для системы (37) въ справедливости этого послѣдняго свойства убѣждаемся, замѣчая, что наименьшее изъ всѣхъ значеній функціи

$$1 + b \operatorname{Sn}\vartheta \operatorname{Cs}^n\vartheta, \tag{38}$$

равное

$$1 - \frac{|b|}{2\sqrt{n}},$$

въ силу условія (21) (въ которомъ дѣлаемъ $a = -1$) положительно.

Рѣшеніе нашей задачи будетъ зависѣть отъ изслѣдованія уравненія

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{br\operatorname{Sn}^2\vartheta \operatorname{Cs}^{n-1}\vartheta + r^2R}{1 + b \operatorname{Sn}\vartheta \operatorname{Cs}^n\vartheta + r\Theta}, \tag{39}$$

вторая часть котораго представится подъ видомъ ряда

Digitized by Google

$$R_1 r + R_2 r^2 + R_3 r^3 + \ldots,$$

расположеннаго по цѣлымъ положительнымъ степенямъ r съ періодическими относительно ϑ коэффиціентами R_s.

При достаточно маломъ r рядъ этотъ будетъ сходящимся равномѣрно для всѣхъ вещественныхъ значеній ϑ.

Что касается вида коэффиціентовъ R_s, то это будутъ раціональныя функціи отъ $\mathrm{Sn}\vartheta$ и $\mathrm{Cs}\vartheta$ съ знаменателями, равными различнымъ степенямъ функціи (38).

Коэффиціентъ R_1 опредѣлится слѣдующей формулой:

$$R_1 = \frac{b\,\mathrm{Sn}^2\vartheta\,\mathrm{Cs}^{n-1}\vartheta}{1 + b\mathrm{Sn}\vartheta\mathrm{Cs}^n\vartheta}.$$

Мы замѣчаемъ теперь, что для уравненія (39) характеристичное уравненіе, соотвѣтствующее періоду 2ω, обладаетъ корнемъ

$$e^{\int_0^{2\omega} R_1 d\vartheta}$$

и что слѣдовательно всякій разъ, когда интегралъ, находящійся въ показателѣ, не нуль, вопросъ объ устойчивости рѣшается знакомъ этого интеграла такъ, что отрицательныя значенія интеграла соотвѣтствуютъ утвердительному рѣшенію вопроса, положительныя — отрицательному.

Таковъ именно случай нечетнаго n.

Мы можемъ тогда утверждать, что при $b < 0$ невозмущенное движеніе устойчиво, при $b > 0$ неустойчиво.

Этотъ результатъ, подобно указанному въ концѣ параграфа 14-го, представляетъ только нѣкоторый частный случай найденнаго въ параграфѣ 6-мъ.

Но допустимъ, что n есть число четное.

Тогда разсматриваемый интегралъ будетъ нулемъ, а слѣдовательно интегралъ

$$\int R_1 d\vartheta$$

представитъ періодическую функцію ϑ.

Digitized by Google

Въ этомъ случаѣ, полагая

$$r = \rho e^{\int_0^{\vartheta} R_1 d\vartheta},$$

изъ (39) выведемъ уравненіе

$$\frac{d\rho}{d\vartheta} = P_2\rho^2 + P_3\rho^3 + \ldots, \qquad (40)$$

въ которомъ коэффиціенты

$$P_s = R_s\, e^{(s-1)\int_0^{\vartheta} R_1 d\vartheta}$$

будутъ также періодическими функціями ϑ.

Получаемое такимъ путемъ уравненіе того же характера, что и (31); а потому задача наша, которую, очевидно, можно разсматривать, какъ задачу объ устойчивости по отношенію къ перемѣнному ρ, будетъ рѣшаться тѣмъ же способомъ, какой указанъ былъ въ параграфѣ 12-мъ.

Для этого послѣдовательно составляемъ функціи

$$u_2, \quad u_3, \quad u_4, \quad \ldots \qquad (41)$$

перемѣннаго ϑ, опредѣляемыя изъ условія, чтобы выраженіе

$$\rho = c + u_2c^2 + u_3c^3 + \ldots$$

при произвольномъ постоянномъ c удовлетворяло уравненію (40).

Если между функціями этими встрѣчаются непериодическія, то первая непериодическая въ ряду (41), которую означимъ u_m, будетъ вида

$$u_m = g\vartheta + \text{період. функція},$$

гдѣ g нѣкоторое постоянное.

Все дѣло сводится при этомъ на опредѣленіе знака g, ибо въ случаѣ $g > 0$ имѣетъ мѣсто неустойчивость, въ случаѣ $g < 0$ — устойчивость.

Digitized by Google

Но можетъ случиться, что рядъ (41), какъ бы далеко онъ ни былъ продолжаемъ, будетъ заключать въ себѣ только однѣ періодическія функціи.

Если доказано, что мы имѣемъ дѣло съ такимъ случаемъ, то можно утверждать, что имѣетъ мѣсто устойчивость и что устойчивость эта есть консервативная.

17. Какъ видно изъ сейчасъ изложеннаго, при четномъ n случаи второй категоріи вполнѣ аналогичны случаямъ первой.

Какъ и въ послѣднихъ, дѣло приводится здѣсь вообще къ выполненію извѣстнаго ряда квадратуръ. Но квадратуры эти въ случаяхъ разсматриваемой категоріи гораздо сложнѣе, ибо простѣйшіе изъ интеграловъ, съ которыми мы можемъ здѣсь встрѣтиться и съ разысканія которыхъ придется начинать вычисленія, суть интегралы слѣдующаго типа:

$$\int e^{k\int_0^{\vartheta} R_1 d\vartheta} \frac{\mathrm{Sn}^p\vartheta\,\mathrm{Cs}^q\vartheta\,d\vartheta}{(1+b\,\mathrm{Sn}\vartheta\,\mathrm{Cs}^n\vartheta)^s}, \qquad (42)$$

гдѣ k, p, q, s цѣлыя неотрицательныя числа, изъ которыхъ первое всегда отлично отъ нуля.

Подъинтегральная функція зависитъ здѣсь отъ интеграла

$$\int_0^{\vartheta} R_1 d\vartheta,$$

который, если угодно, можно выразить при помощи функцій $\mathrm{Cs}\vartheta$ и $\mathrm{Sn}\vartheta$: интегралъ этотъ равенъ

$$\int_0^{\vartheta} \frac{b\,\mathrm{Sn}^2\vartheta\,\mathrm{Cs}^{n-1}\vartheta\,d\vartheta}{1+b\,\mathrm{Sn}\vartheta\,\mathrm{Cs}^n\vartheta} = \frac{b}{n\sqrt{4n-b^2}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\sqrt{4n^2-b^2}\,\mathrm{Sn}\vartheta}{2\mathrm{Cs}^n\vartheta+b\,\mathrm{Sn}\vartheta} -$$

$$-\frac{1}{2n}\log(1+b\mathrm{Sn}\vartheta\,\mathrm{Cs}^n\vartheta)$$

(если функція arc tg подчинена условію уничтожаться вмѣстѣ съ ϑ).

Digitized by Google

Не останавливаясь на подробномъ изученіи интеграловъ вида (42), укажемъ нѣкоторыя формулы, позволяющія всѣ такіе интегралы приводить къ опредѣленному числу нѣкоторыхъ изъ нихъ.

Означая интегралъ (42) черезъ $I_{p,q,s}$, можемъ тотчасъ же написать два слѣдующихъ равенства:

$$I_{p,q,s} = I_{p,q,s+1} + bI_{p+1,q+n,s+1}; \tag{43}$$

$$nI_{p,q,s} = I_{p-2,q,s} - I_{p-2,q+2n,s}. \tag{44}$$

Кромѣ того, полагая

$$e^{k\int_0^{\vartheta} R_1 d\vartheta} \frac{\mathrm{Sn}^p\vartheta\ \mathrm{Cs}^q\vartheta}{(1+b\,\mathrm{Sn}\vartheta\,\mathrm{Cs}^n\vartheta)^s} = L_{p,q,s}$$

и замѣчая, что

$$\frac{d}{d\vartheta}L_{p+1,q+1,s-1} = (p-s+2)L_{p,q,s-1} +$$

$$+[k-q-1+(2s-p-3)n]L_{p+2,q,s-1} +$$

$$+(s-1)L_{p,q,s} - [k+2(s-1)n]L_{p+2,q,s},$$

имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned}[k+2(s-1)n]I_{p+2,q,s} - (s-1)\ I_{p,q,s} = \\ = [k-q-1+(2s-p-3)n]I_{p+2,q,s-1} + \\ +(p-s+2)\ I_{p\,q,s-1} - L_{p+1,q+1,s-1}.\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Уравненія (43), (44) и (45) позволяютъ, какъ сейчасъ увидимъ, всѣ наши интегралы выражать при помощи тѣхъ, для которыхъ s имѣетъ какое либо данное значеніе.

Такъ какъ уравненіе (43) даетъ выраженіе интеграла $I_{p,q,s}$ черезъ тѣ, для которыхъ s на единицу болѣе, то для этого, очевидно, достаточно имѣть еще формулы, которыя позволяли бы выражать этотъ интегралъ черезъ тѣ, для которыхъ s на единицу менѣе.

Digitized by Google

Такія формулы могутъ быть получены слѣдующимъ образомъ.

Изъ уравненій (43) и (44) выводится слѣдующее легко провѣряемое уравненіе:

$$nb^2 I_{p+4,q,s} - b^2 I_{p+2,q,s} + I_{p,q,s} = I_{p,q,s-1} - bI_{p+1,q+n,s-1}.$$

Присоединяя къ нему уравненіе (45) и то, которое выводится изъ послѣдняго замѣною p на $p+2$, получимъ систему трехъ уравненій первой степени относительно нашихъ интеграловъ, изъ которыхъ будутъ входить въ нихъ слѣдующіе:

$$I_{p+4,q,s}, \quad I_{p+2,q,s}, \quad I_{p,q,s}, \tag{46}$$

$$I_{p,q,s-1}, \quad I_{p+2,q,s-1}, \quad I_{p+4,q,s-1}, \quad I_{p+1,q+n,s-1}. \tag{47}$$

Эти уравненія всегда можно будетъ разрѣшить относительно величинъ (46), такъ какъ опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} nb^2 & -b^2 & 1 \\ k+2(s-1)n & -(s-1) & 0 \\ 0 & k+2(s-1)n & -(s-1) \end{vmatrix},$$

составленный изъ ихъ коэффиціентовъ при этихъ величинахъ, приводящійся къ виду

$$[k+2(s-1)n]^2 - (s-1)b^2[k+2(s-1)n] + n(s-1)^2b^2,$$

при условіи $b^2 < 4n$ и при k отличномъ отъ нуля, не можетъ быть нулемъ.

Такимъ образомъ эти уравненія всегда дадутъ возможность интегралъ $I_{p,q,s}$ выразить при помощи интеграловъ (47) и функцій ϑ, которыя мы разсматриваемъ, какъ извѣстныя.

Указавши возможность приведенія всѣхъ нашихъ интеграловъ къ тѣмъ, для которыхъ s имѣетъ какое угодно данное значеніе, мы должны теперь указать соотношенія между интегралами, соотвѣтствующими одному и тому же s.

Digitized by Google

Рядъ подобныхъ соотношеній получается изъ уравненія (44), позволяющаго всѣ наши интегралы выражать при помощи тѣхъ, для которыхъ $p = 0$ или $p = 1$.

Но между разсматриваемыми интегралами существуетъ еще другой рядъ соотношеній, позволяющій, какъ увидимъ, случай $p = 1$ приводить къ случаю $p = 0$.

Соотношенія эти получаются изъ уравненія, которое выводится изъ (45) замѣною интеграловъ $I_{p,q,s-1}$ и $I_{p+2,q,s-1}$ слѣдующими изъ (43) для нихъ выраженіями черезъ интегралы

$$I_{p,q,s}, \quad I_{p+1,q+n,s}, \quad I_{p+2,q,s}, \quad I_{p+3,q+n,s}.$$

Получаемое такимъ путемъ уравненіе есть слѣдующее:

$$[q+1+(p+1)n]\,I_{p+2,q,s} - (p+1)\,I_{p,q,s} = \\ = [k-q-1+(2s-p-3)n]\,bI_{p+3,q+n,s} + \\ + (p-s+2)\,b\,I_{p+1,q+n,s} - L_{p+1,q+1,s-1}.$$

Дѣлая здѣсь поочередно $p = -1$ и $p = 0$, и исключая затѣмъ при помощи (44) интегралы, для которыхъ первый значекъ больше единицы, находимъ:

$$\left.\begin{aligned} n(q+1)I_{1,q,s} = {} & [k-q-1+(s-1)n]\,b\,I_{0,q+n,s} - \\ & - [k-q-1+2(s-1)n]\,b\,I_{0,q+2n,s} - nL_{0,q+1,s-1}, \end{aligned}\right\} \quad (48)$$

$$\left.\begin{aligned} & (q+1)I_{0,q,s} - (q+n+1)I_{0,q+3n,s} = \\ & = -nL_{1,q+1,s-1} + [k-q-1+(s-1)n]\,b\,I_{1,q+n,s} - \\ & \qquad - [k-q-1+(2s-3)n]\,b\,I_{1,q+3n,s}. \end{aligned}\right\} \quad (49)$$

Уравненіе (48) позволяетъ всѣ разсматриваемые интегралы вида $I_{1,q,s}$ выражать при помощи интеграловъ вида $I_{0,q,s}$.

Вопросъ приводится поэтому къ изученію этихъ послѣднихъ.

Положимъ

$$k - 1 + (2s-3)\,n = x$$

и вмѣсто $I_{0,q,s}$ введемъ болѣе простое обозначеніе I_q.

Изъ (48) и (49) получимъ при этомъ слѣдующее уравненіе:

$$A_q\,I_{q+6n} = B_q\,I_{q+4n} + C_q\,I_{q+2n} + D_q\,I_q + L_q, \quad (50)$$

гдѣ

Digitized by Google

$$A_q = (q + n + 1)(x - q)(x - 2n - q)\,b^2,$$

$$B_q = (q + n + 1)(x - q)[x - (s + 1)n - q]\,b^2 + (q + 3n + 1)(x - q)[x - (s-2)n - q]b^2,$$

$$C_q = -(q + 3n + 1)\Big\{n(q + n + 1)^2 + [x - (s-1)n - q][x - (s-2)n - q]b^2\Big\},$$

$$D_q = n(q + 1)(q + n + 1)(q + 3n + 1),$$

$$L_q = n(q + 3n + 1)[x - (s-2)n - q]b\,L_{0,q+n,+1,s-1} + n(q + n + 1)\Big\{n(q + 3n + 1)L_{1,q+1,s-1} - (x - q)b\,L_{0,q+3n+1,s-1}\Big\}.$$

Уравненіе (50) даетъ возможность, какъ сейчасъ покажемъ, всѣ разсматриваемые интегралы вида I_q (мы разсматриваемъ только тѣ, для которыхъ $q \geqq 0$) выражать при помощи нѣкоторыхъ $6n-2$ изъ нихъ.

Допустимъ сначала, что $x < 0$.

Замѣчая, что при $q \geqq 0$ коэффиціентъ A_q не можетъ въ этомъ случаѣ сдѣлаться нулемъ, заключаемъ, что, пользуясь уравненіемъ (50), всѣ наши интегралы можно выразить при помощи тѣхъ I_q, для которыхъ $q < 6n$.

Но между этими послѣдними интегралами существуютъ два соотношенія, изъ которыхъ одно получается изъ (50), если тамъ сдѣлать $q = -1$, другое—изъ того же уравненія, если въ немъ сдѣлать $q = -n-1$ или $q = -3n-1$ [а также—изъ (48), если въ немъ сдѣлать $q = -1$]. Соотношенія эти суть:

$$\left.\begin{aligned}[k + (2s-3)n][k + (2s-5)n]\,b^2 I_{6n-4} &= \\ = [k + (2s-3)n][4k + (4s-7)n]\,b^2 I_{4n-4} &- \\ - 3\Big\{n^3 + [k + (s-1)n][k + (s-2)n]\,b^2\Big\}I_{2n-4} &+ \\ + 3n^3 L_{1,0,s-1} + 3n[k + (s-1)n]\,b\,L_{0,n,s-1} &- \\ - n[k + (2s-3)n]\,b\,L_{0,3n,s-1}, &\end{aligned}\right\} \quad (51)$$

Digitized by Google

$$[k + 2(s-1)n]\, b\, I_{3n-1} = [k + (s-1)n]\, b\, I_{n-1} - n\, L_{0,0,s-1}. \quad (52)$$

Такимъ образомъ интеграловъ, при помощи которыхъ можно выразить остальные, будетъ $6n-2$.

Всякій интегралъ I_q, для котораго q не удовлетворяетъ сравненію

$$q + 1 \equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ n), \qquad (53)$$

выразится въ этомъ случаѣ при помощи трехъ слѣдующихъ:

$$I_{r+4n}, \quad I_{r+2n}, \quad I_r, \qquad (54)$$

гдѣ r остатокъ отъ дѣленія числа q на $2n$; а интегралъ, для котораго удовлетворяется это сравненіе, выразится при помощи двухъ изъ интеграловъ (54).

Допустимъ теперь, что $\varkappa \geqq 0$.

Всякій интегралъ I_q, для котораго число $q-\varkappa$ не дѣлится на $2n$, выразится въ этомъ случаѣ такъ же, какъ и въ предыдущемъ. Но интегралы, для которыхъ $q-\varkappa$ дѣлится на $2n$, вслѣдствіе того, что $A_\varkappa = 0$, не будутъ способны выражаться подобнымъ образомъ.

Взамѣнъ того, эти послѣдніе интегралы всегда можно будетъ выразить при помощи трехъ слѣдующихъ:

$$I_{\varkappa+6n}, \quad I_{\varkappa+4n}, \quad I_{\varkappa+2n}. \qquad (55)$$

При этомъ тѣ изъ нихъ, для которыхъ $q \leqq \varkappa$, выразятся черезъ одинъ только интегралъ $I_{\varkappa+2n}$.

Дѣйствительно, подставляя вмѣсто q въ уравненіе (50) всѣ неотрицательныя числа ряда

$$\varkappa, \quad \varkappa-2n, \quad \varkappa-4n, \quad \ldots,$$

получимъ уравненія

$$\left.\begin{array}{r} C_\varkappa I_{\varkappa+2n} + D_\varkappa I_\varkappa + L_\varkappa = 0, \\ B_{\varkappa-2n} I_{\varkappa+2n} + C_{\varkappa-2n} I_\varkappa + D_{\varkappa-2n} I_{\varkappa-2n} + L_{\varkappa-2n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right\} (56)$$

Digitized by Google

въ которыхъ буква I не будетъ встрѣчаться со значками, бо́льшими $x+2n$, и въ которыхъ коэффиціенты D_x, D_{x-2n} и т. д. будутъ отличными отъ нуля (ибо D_q при $q \geqq 0$ не можетъ быть нулемъ).

Уравненія эти позволятъ поэтому интегралы I_x, I_{x-2n} и т. д. выразить послѣдовательно черезъ интегралъ I_{x+2n}.

Когда не выполняется ни одно изъ двухъ сравненій

$$x+1 \equiv 0, \quad x+1 \equiv n \pmod{2n}, \qquad (57)$$

уравненіе (50) не даетъ никакихъ соотношеній между интегралами (55). Въ случаѣ же выполненія котораго либо изъ нихъ оно позволяетъ, какъ сейчасъ покажемъ, интегралъ I_{x+2n} выразить при помощи извѣстныхъ функцій.

Допустимъ сначала, что выполняется первое сравненіе.

Составляемъ систему (56) и присоединяемъ къ ней уравненіе (51), заключающее, при сдѣланномъ допущеніи, тѣ же интегралы.

Такимъ путемъ получаемъ систему, содержащую столько же уравненій, какъ и интегралов.

Система эта всегда будетъ разрѣшима относительно послѣднихъ, ибо извѣстными членами ея уравненій будутъ служить функціи

$$L_x, \quad L_{x-2n}, \quad \ldots, \quad L_{2n-1}, \quad \frac{1}{n} L_{-1},$$

между которыми, какъ достаточно ясно видно изъ выраженія L_q, не можетъ существовать никакого линейнаго соотношенія.

Разсматриваемая система позволитъ поэтому найти всѣ входящіе въ нее интегралы, которые суть слѣдующіе:

$$I_{x+2n}, \quad I_x, \quad \ldots, \quad I_{4n-1}, \quad I_{2n-1}.$$

Допустимъ теперь, что выполняется второе сравненіе.

Составляя систему (56) и присоединяя къ ней уравненіе (52), получимъ, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, систему, со-

Digitized by Google

держащую столько же уравненій, сколько интегралов. А разсматривая въ ней извѣстные члены, подобно предыдущему, убѣдимся, что система эта всегда будетъ разрѣшима относительно входящихъ въ нее интегралов

$$I_{x+2n} \quad I_x, \quad \ldots, \quad I_{3n-1}, \quad I_{n-1}.$$

Послѣдніе выразятся поэтому при помощи извѣстных функцій ϑ.

Изъ изложеннаго видно, что при $x \geqq 0$, какъ и при $x < 0$, интегралъ I_q, въ случаѣ выполненія сравненія (53), выразится вообще при помощи двухъ, въ противномъ случаѣ— при помощи трехъ интегралов типа (54) или (55), и что интегралов, при помощи которыхъ выразятся всѣ I_q, по прежнему будетъ $6n-2$.

При помощи тѣхъ же $6n-2$ интегралов выразятся и всякіе другіе интегралы вида (42), соотвѣтствующіе тому же k.

Выше мы указали группу интегралов типа I_q, которые могутъ быть выражаемы при помощи функцій $\mathrm{Cs}\vartheta$ и $\mathrm{Sn}\vartheta$.

Это суть интегралы, для которых q есть одно изъ положительных чиселъ ряда

$$x+2n, \quad x, \quad x-2n, \quad \ldots,$$

и для которых выполняется одно изъ двухъ сравненій (57).

Замѣчая, что въ силу равенства

$$x+1 = k+(2s-3)n$$

это послѣднее условіе равносильно условію дѣлимости числа k на n, можемъ такимъ образомъ утверждать, что при помощи нашихъ функцій могутъ быть выражаемы всякіе интегралы типа

$$\int e^{ln\int_0^{\vartheta} R_1 d\vartheta} \frac{\mathrm{Cs}^q\vartheta\, d\vartheta}{(1+b\ \mathrm{Sn}\vartheta\mathrm{Cs}^n\vartheta)^s},$$

Digitized by Google

гдѣ l какое угодно цѣлое число, бо́льшее $1-2s$, а q положительное число вида

$$q = (2\sigma + l - 1)n - 1,$$

подчиненное условію, чтобы цѣлое число σ не превосходило s.

Такъ напримѣръ имѣемъ:

$$\int e^{2n\int_0^{\vartheta} R_1 d\vartheta} \mathrm{Cs}^{n-1}\vartheta d\vartheta = \frac{1}{b} e^{2n\int_0^{\vartheta} R_1 d\vartheta} (1 + b\,\mathrm{Sn}\vartheta \mathrm{Cs}^n\vartheta) + \text{const.},$$

$$\int e^{3n\int_0^{\vartheta} R_1 d\vartheta} \mathrm{Cs}^{2n-1}\vartheta\, d\vartheta =$$

$$= \frac{e^{3n\int_0^{\vartheta} R_1 d\vartheta}}{n + 2b^2} (n\,\mathrm{Sn}\vartheta + 2b\,\mathrm{Cs}^n\vartheta)(1 + b\,\mathrm{Sn}\vartheta\mathrm{Cs}^n\vartheta) + \text{const.}$$

Къ этимъ интеграламъ можемъ присоединить еще слѣдующій:

$$\int e^{n\int_0^{\vartheta} R_1 d\vartheta} \mathrm{Cs}^{3n-1}\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{b} e^{n\int_0^{\vartheta} R_1 d\vartheta} (1 + b\,\mathrm{Sn}\vartheta\mathrm{Cs}^n\vartheta) + \text{const.},$$

не принадлежащій къ указанному типу.

Изъ интегралов, которые находятся при какомъ угодно k, укажемъ слѣдующіе:

$$\int e^{k\int_0^{\vartheta} R_1 d\vartheta} \frac{\mathrm{Sn}^2\vartheta\, \mathrm{Cs}^{n-1}\vartheta\, d\vartheta}{1 + b\mathrm{Sn}\vartheta\mathrm{Cs}^n\vartheta} = \frac{1}{kb} e^{k\int_0^{\vartheta} R_1 d\vartheta} + \text{const.},$$

$$\int e^{k\int_0^{\vartheta} R_1 d\vartheta} \frac{\mathrm{Sn}\vartheta\, \mathrm{Cs}^{k-1}\vartheta\, d\vartheta}{1 + b\,\mathrm{Sn}\vartheta\mathrm{Cs}^n\vartheta} = -\frac{1}{k} e^{k\int_0^{\vartheta} R_1 d\vartheta} \mathrm{Cs}^k\vartheta + \text{const.}$$

Digitized by Google

18. Въ случаѣ четнаго n, который одинъ только и будемъ здѣсь разсматривать, интегралъ (42) представится подъ видомъ:

$$\Phi(\vartheta) + G\vartheta,$$

гдѣ $\Phi(\vartheta)$ періодическая функція ϑ съ періодомъ 2ω, а G постоянное, опредѣляемое по формулѣ:

$$G = \frac{1}{2\omega}\int_0^{2\omega} e^{k\int_0^{\vartheta} R_1 d\vartheta} \frac{\mathrm{Sn}^p\vartheta\,\mathrm{Cs}^q\vartheta\,d\vartheta}{(1 + b\,\mathrm{Sn}\vartheta\,\mathrm{Cs}^n\vartheta)^s}.$$

Обращаясь къ выраженію функціи R_1, легко убѣждаемся въ справедливости слѣдующаго равенства:

$$\int_0^{\omega-\vartheta} R_1\,d\vartheta = \int_0^{\vartheta} R_1 d\vartheta,$$

изъ котораго, означая черезъ R_1' то, во что обращается R_1 послѣ замѣны b на $-b$, выводимъ:

$$\int_0^{\omega+\vartheta} R_1\,d\vartheta = \int_0^{-\vartheta} R_1\,d\vartheta = \int_0^{\vartheta} R'_1\,d\vartheta.$$

Основываясь на этихъ равенствахъ и полагая

$$\int_0^{\frac{\omega}{2}} e^{k\int_0^{\vartheta} R_1 d\vartheta} \frac{\mathrm{Sn}^p\vartheta\,\mathrm{Cs}^q\vartheta\,d\vartheta}{(1 + b\,\mathrm{Sn}\vartheta\,\mathrm{Cs}^n\vartheta)^s} = F(b), \qquad (38)$$

легко найдемъ:

$$2\omega G = [1 + (-1)^q][F(b) + (-1)^{p+q} F(-b)].$$

Отсюда видно, что всякій разъ, когда q число нечетное, постоянное G будетъ нулемъ, и слѣдовательно интегралъ (42) представитъ періодическую функцію ϑ.

Digitized by Google

Въ случаѣ четнаго q будемъ имѣть:

$$\omega G = F(b) + (-1)^p F(-b),$$

что при четномъ p навѣрно не будетъ нулемъ, а при нечетномъ p, если и можетъ дѣлаться нулемъ, то только для нѣкоторыхъ частныхъ значеній b.

Поэтому въ случаѣ четнаго q, если мы не имѣемъ дѣла съ нѣкоторыми исключительными значеніями b, которыя могутъ существовать только при нечетномъ p, интегралъ (42) не будетъ періодическою функціей.

Число b мы предполагаемъ здѣсь лежащимъ между предѣлами $-2\sqrt{n}$ и $+2\sqrt{n}$ невключительно.

При этомъ условіи функція $F(b)$, какъ нетрудно усмотрѣть изъ ея выраженія (58), можетъ быть представляема подъ видомъ ряда, расположеннаго по цѣлымъ положительнымъ степенямъ b.

Первый членъ этого ряда, равный $F(0)$, опредѣлится интеграломъ

$$\int_0^{\frac{\omega}{2}} \mathrm{Sn}^p\vartheta \, \mathrm{Cs}^q\vartheta \, d\vartheta,$$

который, какъ было указано въ параграфѣ 13-мъ, можетъ быть выраженъ при помощи функціи Г. Но слѣдующіе члены будутъ зависѣть отъ интеграловъ болѣе общаго типа:

$$\int_0^{\frac{\omega}{2}} \varphi^l \, \mathrm{Sn}^{p'}\vartheta \, \mathrm{Cs}^{q'}\vartheta \, d\vartheta, \qquad (59)$$

гдѣ

$$\varphi = \sqrt{n} \int_0^{\vartheta} \mathrm{Cs}^{n-1}\vartheta \, d\vartheta = \mathrm{arc\ cos}\, \mathrm{Cs}^n\vartheta$$

Digitized by Google

(см. пар. 13), а l, p', q' нѣкоторыя цѣлыя неотрицательныя числа. Такъ напримѣръ коэффиціентъ при первой степени b опредѣлится выраженіемъ:

$$\frac{k}{2n\sqrt{n}}\int_0^{\frac{\omega}{2}} \varphi \,\mathrm{Sn}^p\vartheta\,\mathrm{Cs}^q\vartheta\,d\vartheta - \frac{k+2ns}{2n}\int_0^{\frac{\omega}{2}} \mathrm{Sn}^{p+1}\vartheta\,\mathrm{Cs}^{q+n}\vartheta\,d\vartheta.$$

Принимая за независимое перемѣнное φ, преобразуемъ интегралъ (59) къ виду:

$$n - \frac{p'+1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^l \sin^{p'}\varphi\cos^{q''}\varphi\,d\varphi,$$

гдѣ

$$q'' = \frac{q'+1}{n} - 1.$$

Интегрированіемъ по частямъ интегралы, подобные сейчасъ написанному, могутъ быть приводимы къ интеграламъ того же типа, для которыхъ $p' = 0$ и $q'' = \frac{r}{n}$ при цѣломъ неотрицательномъ r, меньшемъ $2n$.

Указанное разложеніе можетъ служить для опредѣленія постояннаго G при величинахъ b, численно достаточно малыхъ.

Чтобы дать нѣкоторыя основанія для сужденія о томъ же постоянномъ при величинахъ b, близкихъ къ его предѣламъ $-2\sqrt{n}$ и $2\sqrt{n}$, укажемъ соотвѣтствующія предѣльныя значенія функціи $F(b)$.

Что касается предѣльнаго значенія, соотвѣтствующаго $b = 2\sqrt{n}$, то оно находится безъ всякихъ затрудненій, такъ какъ при какомъ угодно положительномъ b подъинтегральная функція въ интегралѣ (58) остается опредѣленною для всѣхъ значеній ϑ, лежащихъ между предѣлами интегрированія. Это значеніе мы найдемъ поэтому тотчасъ же, дѣлая въ (58) $b = 2\sqrt{n}$.

Digitized by Google

Такимъ образомъ, замѣчая, что при этомъ значеніи числа b

$$\int_0^{\vartheta} R_1 d\vartheta = \frac{\operatorname{Sn}\vartheta}{\sqrt{n}\,(\operatorname{Cs}^n\vartheta + \sqrt{n}\operatorname{Sn}\vartheta)} - \\ - \frac{1}{2n}\log(1 + 2\sqrt{n}\operatorname{Sn}\vartheta\operatorname{Cs}^n\vartheta),$$

и принимая за независимое перемѣнное функцію

$$\frac{\sqrt{n}\operatorname{Sn}\vartheta}{\operatorname{Cs}^n\vartheta + \sqrt{n}\operatorname{Sn}\vartheta} = x,$$

послѣ нѣкоторыхъ преобразованій получимъ:

$$F(2\sqrt{n}) = n^{-\frac{p+1}{2}} \int_0^1 e^{\frac{kx}{n}} \frac{x^p(1-x)^{q'}dx}{[x^2 + (1-x)^2]^{s'}},$$

гдѣ

$$q' = \frac{q+1}{n} - 1, \quad s' = \frac{q+1-k}{2n} + \frac{p+1}{2} - s. \qquad (60)$$

Чтобы получить предѣльное значеніе, соотвѣтствующее $b = -2\sqrt{n}$, мы замѣчаемъ, что, полагая

$$\frac{b\operatorname{Cs}^{n-1}\vartheta[(k+2ns)\operatorname{Sn}^2\vartheta - s]}{1 + b\operatorname{Sn}\vartheta\operatorname{Cs}^n\vartheta} = v,$$

можно написать

$$F(b) = \int_0^{\frac{\omega}{2}} e^{\int_0^{\vartheta} v\,d\vartheta} \operatorname{Sn}^p\vartheta\operatorname{Cs}^q\vartheta\,d\vartheta.$$

Пусть ϑ_1 и ϑ' суть числа, лежащія между 0 и $\frac{\omega}{2}$, для которыхъ

$$\operatorname{Sn}^2\vartheta_1 = \frac{s}{k+2ns} \quad \text{и} \quad \sqrt{n}\operatorname{Sn}\vartheta' = \operatorname{Cs}^n\vartheta' = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Нетрудно видѣть, что $\vartheta_1 < \vartheta'$.

Digitized by Google

Приписывая b какое либо значеніе, лежащее между 0 и $-2\sqrt{n}$ невключительно, найдемъ, что интегралъ

$$\int_0^{\vartheta} v\,d\vartheta, \qquad (61)$$

при возрастаніи ϑ отъ 0 до ϑ_1, будетъ возрастать, а при дальнѣйшемъ возрастаніи ϑ отъ ϑ_1 до $\frac{\omega}{2}$, будетъ убывать.

При такихъ значеніяхъ b мы будемъ поэтому имѣть:

$$\int_0^{\vartheta} v d\vartheta < \int_0^{\vartheta'} v\,d\vartheta,$$

для всякаго ϑ, лежащаго между ϑ' и $\frac{\omega}{2}$.

Но интегралъ

$$\int_0^{\vartheta'} v d\vartheta = \frac{kb}{n\sqrt{4n-b^2}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{2\sqrt{n}-b}{2\sqrt{n}+b}} - \frac{k+2ns}{2n} \log\left(1+\frac{b}{2\sqrt{n}}\right)$$

(гдѣ arc tg лежитъ между 0 и $\frac{\pi}{2}$) при b достаточно близкомъ къ $-2\sqrt{n}$ дѣлается отрицательнымъ и сколь угодно численно большимъ.

Вслѣдствіе этого, когда b приближается къ $-2\sqrt{n}$,

$$\lim e^{\int_0^{\vartheta} v d\vartheta} = 0$$

при всякомъ ϑ, лежащемъ между ϑ' и $\frac{\omega}{2}$.

Такимъ образомъ, означая искомое предѣльное значеніе черезъ $F(-2\sqrt{n})$, будемъ имѣть:

Digitized by Google

$$F(-2\sqrt{n}) = \lim \int_0^{\vartheta'} e^{\int_0^{\vartheta} v d\vartheta} \operatorname{Sn}^p\vartheta \operatorname{Cs}^q\vartheta \, d\vartheta.$$

Отсюда, замѣчая, что интегралъ

$$\int_0^{\vartheta_1} v \, d\vartheta,$$

представляющій наибольшее значеніе интеграла (61) между 0 и ϑ', съ приближеніемъ b къ $-2\sqrt{n}$ приближается къ нѣкоторому предѣлу, и означая черезъ v_0 функцію, въ которую обращается v при $b = -2\sqrt{n}$, находимъ:

$$F(-2\sqrt{n}) = \int_0^{\vartheta'} e^{\int_0^{\vartheta} v_0 d\vartheta} \operatorname{Sn}^p\vartheta \operatorname{Cs}^q\vartheta d\vartheta.$$

Если теперь замѣтимъ, что при $0 < \vartheta < \vartheta'$

$$\int_0^{\vartheta} v_0 d\vartheta = \frac{-k \operatorname{Sn}\vartheta}{\sqrt{n}(\operatorname{Cs}^n\vartheta - \sqrt{n}\operatorname{Sn}\vartheta)} - \frac{k+2ns}{2n} \log(1 - 2\sqrt{n}\operatorname{Sn}\vartheta \operatorname{Cs}^n\vartheta),$$

и за независимое перемѣнное примемъ функцію

$$\frac{\sqrt{n}\operatorname{Sn}\vartheta}{\operatorname{Cs}^n\vartheta - \sqrt{n}\operatorname{Sn}\vartheta} = x,$$

то послѣ нѣкоторыхъ преобразованій получимъ:

$$F(-2\sqrt{n}) = n^{-\frac{p+1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{kx}{n}} \frac{x^p(1+x)^{q'}dx}{[x^2+(1+x)^2]^{s'}}.$$

Digitized by Google

Числа q' и s' опредѣляются здѣсь по прежнему формулами (60).

Для функціи $F(b)$ мы имѣемъ выраженіе подъ видомъ опредѣленнаго интеграла, подъ знакомъ котораго фигурируютъ функціи $\mathrm{Sn}\,\vartheta$ и $\mathrm{Cs}\,\vartheta$. Но интегралъ этотъ, если угодно, можно преобразовать въ другой, подъ знакомъ котораго вмѣсто послѣднихъ будутъ встрѣчаться тригонометрическія функціи.

Для этого за независимое перемѣнное принимаемъ уголъ φ, опредѣляемый уравненіями

$$\cos\varphi = \frac{2\,\mathrm{Cs}^n\vartheta + b\,\mathrm{Sn}\vartheta}{2\sqrt{1 + b\,\mathrm{Sn}\vartheta\,\mathrm{Cs}^n\vartheta}},$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{4n - b^2}\,\mathrm{Sn}\vartheta}{2\sqrt{1 + b\,\mathrm{Sn}\vartheta\,\mathrm{Cs}^n\vartheta}}$$

вмѣстѣ съ условіемъ при $0 < \vartheta < \frac{\omega}{2}$ лежать между 0 и π.

При этомъ будемъ имѣть:

$$\int_0^{\vartheta} v\,d\vartheta = \frac{k\,b\,\varphi}{n\sqrt{4n - b^2}} - \frac{k + 2ns}{2n}\log(1 + b\,\mathrm{Sn}\vartheta\,\mathrm{Cs}^n\vartheta),$$

и если положимъ

$$\frac{b}{2\sqrt{n}} = \cos\varepsilon, \quad \frac{\sqrt{4n - b^2}}{2\sqrt{n}} = \sin\varepsilon,$$

разумѣя подъ ε уголъ, заключающійся между 0 и π, то послѣ нѣкоторыхъ преобразованій найдемъ:

$$F(b) = \frac{n^{-\frac{p+1}{2}}}{\sin^{\sigma}\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} e^{\frac{k\varphi}{n\,\mathrm{tg}\,\varepsilon}} \frac{\sin^p\varphi\,\sin^{q'}(\varepsilon - \varphi)\,d\varphi}{[\sin^2\varphi + \sin^2(\varepsilon - \varphi)]^{s'}}.$$

Здѣсь q' и s' суть по прежнему числа (60) и

$$\sigma = \frac{k}{n} + 2s - 1.$$

Digitized by Google

19. Возвращаемся къ нашей задачѣ.

Въ параграфѣ 14-мъ для случаевъ первой категоріи было доказано, что $m + n$ есть всегда число четное. Но приведенное тамъ доказательство, очевидно, можетъ быть приложено и къ случаямъ, разсматриваемымъ здѣсь.

Такъ какъ число n мы предполагаемъ здѣсь четнымъ, то можемъ такимъ образомъ утверждать, что и m всегда будетъ четнымъ.

Разсмотримъ простѣйшій случай, когда $m = 2$, и составимъ для него общее выраженіе постояннаго g.

Въ этомъ случаѣ уже первая въ ряду функцій (41) не будетъ періодическою, и постоянное g найдется по формулѣ:

$$g = \frac{1}{2\omega}\int_0^{2\omega} e^{\int_0^{\vartheta} R_1 d\vartheta} R_2 d\vartheta.$$

Разсматривая разложеніе по степенямъ r второй части уравненія (39), находимъ:

$$R_2 = \frac{(1 + b\,\mathrm{Sn}\vartheta\,\mathrm{Cs}^n\vartheta)R_0 - b\,\mathrm{Sn}^2\vartheta\,\mathrm{Cs}^{n-1}\vartheta\,\Theta_0}{(1 + b\,\mathrm{Sn}\vartheta\,\mathrm{Cs}^n\vartheta)^2},$$

гдѣ R_0 и Θ_0 суть функціи, въ которыя обращаются R и Θ при $r = 0$, и которыя поэтому находятся, какъ независящіе отъ r члены въ разложеніяхъ выраженій

$$\frac{1}{r^{3n}}\left\{x^{2n-1}X + y(x^{2n-1} + Y)\right\} - \frac{b}{r}\mathrm{Sn}^2\vartheta\,\mathrm{Cs}^{n-1}\vartheta$$

и

$$\frac{1}{r^{2n+1}}\left\{nyX - x(x^{2n-1} + Y)\right\} - \frac{b}{r}\mathrm{Sn}\vartheta\,\mathrm{Cs}^n\vartheta.$$

Пусть, разлагая функцію Y по восходящимъ степенямъ y, имѣемъ:

$$Y = f(x) + \varphi(x)y + \psi(x)y^2 + \ldots.$$

Согласно нашимъ допущеніямъ, здѣсь

Digitized by Google

$$f(x) = -x^{2n-1} + a_1 x^{2n} + \ldots,$$
$$\varphi(x) = bx^{n-1} + b_1 x^n + \ldots.$$

Если теперь положимъ $\psi(0) = c$ и значеніе частной производной

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y},$$

соотвѣтствующее $x = y = 0$, назовемъ черезъ D, то согласно сдѣланному выше замѣчанію будемъ имѣть:

$$R_0 = -(D + a_1)\,\mathrm{Sn}\,\vartheta\,\mathrm{Cs}^{2n}\vartheta + b_1 \mathrm{Sn}^2\vartheta\,\mathrm{Cs}^n\vartheta - c\,\mathrm{Sn}^3\vartheta,$$
$$\Theta_0 = (nD - c)\,\mathrm{Sn}^2\vartheta\,\mathrm{Cs}\,\vartheta + b_1\,\mathrm{Sn}\,\vartheta\,\mathrm{Cs}^{n+1}\vartheta - a_1 \mathrm{Cs}^{2n+1}\vartheta.$$

Пользуясь этими формулами, находимъ:

$$R_2 = \frac{(b_1 - Db)\,\mathrm{Sn}^2\vartheta\,\mathrm{Cs}^n\vartheta - (D + a_1)\,\mathrm{Sn}\,\vartheta\,\mathrm{Cs}^{2n}\vartheta - c\,\mathrm{Sn}^3\vartheta}{(1 + b\,\mathrm{Sn}\,\vartheta\,\mathrm{Cs}^n\vartheta)^2}.$$

Отсюда получимъ:

$$g = (b_1 - Db)\,G_{2,n,2} - (D + a_1)G_{1,2n,2} - c\,G_{3,0,2},$$

если постоянное G, разсматривавшееся въ предыдущемъ параграфѣ, какъ функцію чиселъ p, q, s, означимъ черезъ $G_{p,q,s}$.

Между величинами $G_{p,q,s}$, соотвѣтствующими различнымъ p, q, s, существуютъ соотношенія, получаемыя изъ соотношеній параграфа 17-го замѣною буквы I буквою G и величинъ $L_{p,q,s}$ — нулями.

Изъ этихъ соотношеній, въ которыхъ для нашего случая должно сдѣлать $k = 1$, нетрудно усмотрѣть, что величины $G_{2,n,2}$, $G_{1,2n,2}$ и $G_{3,0,2}$, отъ которыхъ зависитъ постоянное g, могутъ быть выражены при помощи нѣкоторой одной изъ величинъ $G_{p,q,s}$.

Такъ напр. ихъ можно выразить при помощи $G_{0,n,2}$.

Дѣйствительно, изъ (45), дѣлая $p = 0$, $q = n$, $s = 2$, находимъ:

$$(2n + 1)G_{2,n,2} = G_{0,n,2},$$

откуда

$$G_{0,3n,2} = G_{0,n,2} - nG_{2,n,2} = \frac{n+1}{2n+1}\,G_{0,n,2}.$$

Digitized by Google

Далѣе, изъ (48), дѣлая послѣдовательно $q = 2n$, $s = 2$ и $q = 0$, $s = 2$, выводимъ:

$$(2n + 1)\, G_{1,2n,2} = -\, b\, G_{0,3n,2},$$

$$G_{1,0,2} = bG_{0,n,2} - 2\, b\, G_{0,3n,2}.$$

Отсюда, замѣчая, что

$$G_{3,0,2} = \frac{1}{n}\, G_{1,0,2} - \frac{1}{n} G_{1,2n,2},$$

находимъ:

$$G_{2,n,2} = \frac{1}{2n + 1} G_{0,n,2},$$

$$G_{1,2n,2} = -\frac{(n + 1)b}{(2n + 1)^2} G_{0,n,2},$$

$$G_{3,0,2} = -\frac{b}{(2n + 1)^2} G_{0,n,2}.$$

Такимъ образомъ для постояннаго g получаемъ слѣдующее выраженіе:

$$g = \left\{[c + (n + 1)a_1 - nD]\, b + (2n + 1)b_1\right\} \frac{G_{0,n,2}}{(2n + 1)^2}.$$

Такъ какъ

$$G_{0,n,2} = \frac{1}{2\omega} \int_0^{2\omega} e^{\int_0^{\vartheta} R_1 d\vartheta} \frac{\mathrm{Cs}^n \vartheta\, d\vartheta}{(1 + b\, \mathrm{Sn}\vartheta\, \mathrm{Cs}^n \vartheta)^2}$$

есть величина положительная, то знакъ этого выраженія будетъ одинаковъ со знакомъ слѣдующаго:

$$[c + (n + 1)\, a_1 - nD]\, b + (2n + 1)b_1.$$

Всякій разъ, когда послѣднее отрицательно, невозмущенное движеніе будетъ устойчивымъ, и когда оно положительно—неустойчивымъ.

20. Въ параграфѣ 15-омъ, разсматривая случаи первой категоріи, мы указали нѣкоторые признаки, несомнѣнно обусловливающіе періодичность функцій u_s.

Digitized by Google

Однимъ изъ этихъ признаковъ можетъ обладать система (1) и въ случаяхъ, разсматриваемыхъ здѣсь.

Мы разумѣемъ тотъ, который выражается въ неизмѣняемости этой системы при замѣнѣ x на $-x$ и t на $-t$.

Всякій разъ, когда система (1) обладаетъ такимъ свойствомъ, функціи u_s будутъ всѣ періодическими и въ случаяхъ второй категоріи. Докажется это такъ же, какъ и для случаевъ первой категоріи, если принять въ разсчетъ, что интегралъ

$$\int_0^{\vartheta} R_1 \, d\vartheta \qquad (62)$$

отъ замѣны ϑ на $\omega - \vartheta$ не мѣняется.

Что же касается тѣхъ признаковъ, которыми обусловливается существованіе для системы (1) независящихъ отъ t голоморфныхъ интеграловъ, то для случаевъ, разсматриваемыхъ здѣсь, они не могутъ имѣть значенія, ибо въ этихъ случаяхъ система (1) не можетъ допускать подобныхъ интеграловъ.

Дѣйствительно, функцію r, удовлетворяющую уравненію (39) и принимающую для $\vartheta = 0$ значеніе c, при c достаточно маломъ (по крайней мѣрѣ въ извѣстныхъ предѣлахъ измѣняемости ϑ) можно представлять подъ видомъ ряда, расположеннаго по степенямъ c, и нетрудно видѣть, что, если бы система (1) допускала независящій отъ t голоморфный интегралъ, всѣ коэффиціенты въ этомъ ряду были бы алгебраическими функціями отъ $\mathrm{Cs}\vartheta$ или $\mathrm{Sn}\vartheta$. Но послѣднее невозможно, ибо коэффиціентъ при первой степени c, равный

$$e^{\int_0^{\vartheta} R_1 \, d\vartheta},$$

необходимо будетъ трансцендентною функціей отъ $\mathrm{Cs}\vartheta$, какъ это видно изъ выраженія интеграла (62), приведеннаго въ параграфѣ 17-омъ.

Digitized by Google

Періодичностью функцій u_s во всякомъ случаѣ будетъ обусловливаться періодичность x и y, какъ функцій перемѣннаго t, удовлетворяющихъ уравненіямъ (1), если только начальныя значенія этихъ функцій численно достаточно малы.

Періодъ этихъ функцій въ разсматриваемыхъ здѣсь случаяхъ будетъ опредѣляться выраженіемъ

$$T = \int_0^{2\omega} \frac{d\vartheta}{(1 + b\,\mathrm{Sn}\vartheta\,\mathrm{Cs}^n\vartheta)r^{n-1} + \Theta\, r^n}$$

[см. ур. (37)], если подъ r разумѣть рѣшеніе уравненія (39), соотвѣтствующее выбраннымъ начальнымъ значеніямъ функцій x и y.

Періодъ этотъ будетъ функціей значенія c функціи r, соотвѣтствующаго $\vartheta = 0$, и при c достаточно маломъ представится подъ видомъ ряда, расположеннаго по восходящимъ цѣлымъ степенямъ c съ младшимъ членомъ

$$\frac{\Omega}{c^{n-1}},$$

гдѣ

$$\Omega = \int_0^{2\omega} e^{-(n-1)\int_0^{\vartheta} R_1\, d\vartheta} \frac{d\vartheta}{1 + b\,\mathrm{Sn}\vartheta\,\mathrm{Cs}^n\vartheta}.$$

Если положимъ

$$\tau = \frac{\Omega(t - t_0)}{T},$$

разумѣя подъ t_0 значеніе t, для котораго $\vartheta = 0$, то x и y будутъ вполнѣ опредѣленными функціями τ и c, которыя при c достаточно маломъ будутъ способными разлагаться въ ряды по цѣлымъ положительнымъ степенямъ c. Коэффиціенты въ этихъ рядахъ будутъ періодическими функціями τ съ періодомъ Ω.

Выписывая въ этихъ рядахъ только младшіе ихъ члены, будемъ имѣть:

Digitized by Google

$$x = c\,e^{\int_0^{\zeta} R_1\,d\vartheta}\,\mathrm{Cs}\,\zeta + \ldots,$$

$$y = -\,c^n e^{n\int_0^{\zeta} R_1\,d\vartheta}\,\mathrm{Sn}\,\zeta + \ldots.$$

Здѣсь ζ означаетъ функцію τ, опредѣляемую уравненіемъ:

$$\int_0^{\zeta} e^{-(n-1)\int_0^{\vartheta} R_1\,d\vartheta}\,\frac{d\vartheta}{1 + b\,\mathrm{Sn}\,\vartheta\,\mathrm{Cs}^n\vartheta} = \tau.$$

21. До сихъ поръ мы разсматривали уравненія (1) въ предположеніи, что функція X уничтожается при $y = 0$.

Въ этомъ предположеніи въ случаяхъ, разсматривавшихся въ послѣднихъ параграфахъ, мы пользовались подстановкой (26) и такимъ путемъ приводили вопросъ къ изслѣдованію уравненій типа (28) или (37).

Но легко видѣть, что предположеніе это не необходимо, и что для полученія уравненій того же типа, преобразованіемъ уравненій (1) посредствомъ той же подстановки (26), достаточно, чтобы въ функціи X послѣ положенія $y = 0$ не оставалось членовъ ниже $(n+1)$-ой степени относительно x.

Дѣйствительно, если $y = F(x)$ есть уничтожающееся при $x = 0$ голоморфное рѣшеніе уравненія

$$y + X = 0, \qquad (63)$$

то при сказанномъ условіи въ функціи $F(x)$ не будетъ членовъ ниже $(n+1)$-ой степени относительно x, и слѣдовательно, если разложеніе по восходящимъ степенямъ y даетъ:

$$Y = f_1(x) + \varphi_1(x)\,y + \ldots,$$

то функція

$$\varphi(x) - \varphi_1(x) = \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)_{y = F(x)} - \varphi_1(x)$$

не будетъ содержать членовъ ниже n-ой, а функція

Digitized by Google

$$f(x) - f_1(x) = \left(Y\right)_{y=F(x)} - f_1(x)$$

—ниже $2n$-ой степени относительно x.

Поэтому функція $\varphi_1(x)$ въ случаяхъ первой категоріи не будетъ содержать членовъ ниже n-ой степени относительно x, а въ случаяхъ второй будетъ обладать младшимъ членомъ bx^{n-1}; функція же $f_1(x)$ въ случаяхъ обѣихъ категорій будетъ обладать младшимъ членомъ ax^{2n-1}.

Отсюда нетрудно вывести, что, если $a = -1$, то подстановка (26) по прежнему приведетъ къ уравненіямъ вида (28) въ случаяхъ первой категоріи и къ уравненіямъ вида (37) въ случаяхъ второй.

Если система (1) не удовлетворяетъ указанному сейчасъ условію, то чтобы преобразовать ее къ виду, для котораго условіе это выполнялось бы, очевидно, достаточно ввести вмѣсто y перемѣнное y_1, полагая

$$y = y_1 + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_nx^n$$

и разумѣя подъ A_2, A_3 и т. д. коэффиціенты разложенія

$$A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots$$

функціи $y = F(x)$, опредѣляемой уравненіемъ (63) вмѣстѣ съ условіемъ уничтожаться при $x = 0$.

Если при томъ желательно придти къ случаю, когда $a = -1$, то можно воспользоваться преобразованіемъ

$$x = (-a)^{-\frac{1}{2(n-1)}} x_1,$$

$$y = (-a)^{-\frac{1}{2(n-1)}} y_1 + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_nx^n.$$

Роль числа b будетъ играть послѣ этого число $\frac{b}{\sqrt{-a}}$.

Въ параграфѣ 19-омъ мы нашли общее выраженіе постояннаго g для простѣйшаго изъ случаевъ второй категоріи, когда $m = 2$.

Digitized by Google

Выраженіе это было найдено въ предположеніи, что функція X уничтожается при $y = 0$, и что $a = -1$. Но нетрудно видѣть, что оно справедливо для какихъ угодно уравненій вида (1), для которыхъ

$$\left(Y\right)_{y=F(x)} = -x^{2n-1} + a_1 x^{2n} + \ldots,$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)_{y=F(x)} = bx^{n-1} + b_1 x^n + \ldots$$

при $b^2 < 4n$, и для которыхъ c есть коэффиціентъ при y^1 въ разложеніи по степенямъ x и y функціи Y, а D—коэффиціентъ при xy въ разложеніи функціи X.

Для случая, когда a есть отличное отъ -1 отрицательное число, выраженіе постояннаго g получится изъ предыдущаго замѣною

a_1	на	$a_1(-a)^{-\frac{2n-1}{2n-2}}$,
b	»	$b\,(-a)^{-\frac{n-1}{2n-2}}$,
b_1	»	$b_1(-a)^{-\frac{n}{2n-2}}$,
c	»	$c\,(-a)^{-\frac{1}{2n-2}}$,
D	»	$D(-a)^{-\frac{1}{2n-2}}$.

Поэтому условіе устойчивости напишется въ этомъ случаѣ такъ:

$$[c - (n+1)\frac{a_1}{a} - nD]b + (2n+1)b_1 < 0.$$

Digitized by Google

Условіе неустойчивости выразится противоположнымъ неравенствомъ.

22. Разобравши всѣ случаи, которые можетъ представить система (1), считаемъ умѣстнымъ сопоставить здѣсь главнѣйшіе изъ найденныхъ результатовъ.

Предполагая, что дифференціальныя уравненія возмущеннаго движенія имѣютъ видъ:

$$\frac{dx}{dt} = y + X, \quad \frac{dy}{dt} = Y,$$

гдѣ X и Y суть какія угодно голоморфныя функціи перемѣнныхъ x и y, несодержащія членовъ ниже второго измѣренія относительно x и y, составляемъ уравненіе

$$y + X = 0,$$

изъ котораго для y выводимъ выраженіе подъ видомъ ряда

$$y = A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \ldots,$$

расположеннаго по восходящимъ степенямъ x.

Пусть $f(x)$ есть результатъ подстановки этого ряда вмѣсто y въ функцію Y, а $\varphi(x)$—результатъ той же подстановки въ функцію

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}.$$

Когда функція $f(x)$ не равна тожественно нулю, младшій членъ ея разложенія по восходящимъ степенямъ x пусть будетъ ax^α, и когда функція $\varphi(x)$ не равна тожественно нулю, младшій членъ ея разложенія пусть будетъ bx^β.

Установивши это, мы можемъ различать 10 случаевъ, которые перечисляемъ здѣсь, указывая вмѣстѣ съ тѣмъ, какъ рѣшается въ нихъ вопросъ объ устойчивости.

I. α число четное.

II. α число нечетное, $a > 0$.

Въ обоихъ случаяхъ невозмущенное движеніе неустойчиво.

III. α число нечетное, $a < 0$; β число четное, меньшее α, $b < 0$.

Digitized by Google

Невозмущенное движеніе устойчиво.

IV. β число четное, $b > 0$; функція $f(x)$ не содержитъ членовъ ниже $(\beta + 1)$-ой степени.

V. β число нечетное; функція $f(x)$ не содержитъ членовъ ниже $2(\beta + 1)$-ой степени.

VI. β число нечетное; $\alpha = 2\beta + 1$;

$$b^2 + 4(\beta + 1)a \geqq 0.$$

Во всѣхъ трехъ случаяхъ невозмущенное движеніе неустойчиво.

VII. α число нечетное, $a < 0$; функція $\varphi(x)$ не содержитъ членовъ ниже $\left(\frac{\alpha + 1}{2}\right)$-ой степени.

Полагая $\alpha = 2n-1$, преобразовываемъ наши дифференціальныя уравненія сначала посредствомъ подстановки

$$x = (-a)^{-\frac{1}{2n-2}} x_1,$$

$$y = (-a)^{-\frac{1}{2n-2}} y_1 + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n,$$

затѣмъ посредствомъ подстановки

$$x_1 = r \operatorname{Cs} \vartheta, \qquad y_1 = -r^n \operatorname{Sn} \vartheta,$$

разумѣя подъ $\operatorname{Cs}\vartheta$ и $\operatorname{Sn}\vartheta$ функціи перемѣннаго ϑ, опредѣляемыя уравненіями

$$\frac{d \operatorname{Cs}\vartheta}{d\vartheta} = -\operatorname{Sn}\vartheta, \qquad \frac{d \operatorname{Sn}\vartheta}{d\vartheta} = \operatorname{Cs}^{2n-1}\vartheta$$

при условіи

$$\operatorname{Cs} 0 = 1, \quad \operatorname{Sn} 0 = 0.$$

Исключая изъ преобразованныхъ уравненій dt, придемъ къ дифференціальному уравненію вида:

$$\frac{dr}{d\vartheta} = R_2 r^2 + R_3 r^3 + \ldots,$$

Digitized by Google

гдѣ R_2, R_3 и т. д. будутъ нѣкоторыми періодическими функціями ϑ.

Интегрируемъ это уравненіе посредствомъ ряда

$$r = c + u_2 c^2 + u_3 c^3 + \ldots,$$

расположеннаго по степенямъ произвольнаго постояннаго c.

Коэффиціенты u_s въ этомъ ряду найдутся послѣдовательно въ порядкѣ возрастанія значка s при помощи квадратуръ:

$$u_2 = \int R_2 d\vartheta, \quad u_3 = u_2{}^2 + \int R_3 d\vartheta, \quad \ldots,$$

и если между ними находятся неперіодическіе по отношенію къ ϑ, то первый такой коэффиціентъ будетъ вида

$$g\vartheta + \text{період. функція},$$

гдѣ g нѣкоторое постоянное.

Тогда при $g > 0$ невозмущенное движеніе будетъ неустойчивымъ, при $g < 0$—устойчивымъ.

Въ случаѣ, когда всѣ коэффиціенты u_s суть періодическія функціи ϑ, невозмущенное движеніе всегда будетъ устойчивымъ.

VIII. β число нечетное, $\alpha = 2\beta + 1$;

$$b^2 + 4(\beta + 1)a < 0.$$

Полагая $\alpha = 2n - 1$ и

$$\int_0^{\vartheta} \frac{b\,\mathrm{Sn}^2\vartheta\,\mathrm{Cs}^{n-1}\vartheta\,d\vartheta}{\sqrt{-a + b\,\mathrm{Sn}\vartheta\,\mathrm{Cs}^n\vartheta}} = \Theta,$$

преобразовываемъ наши дифференціальныя уравненія посредствомъ двойной подстановки:

$$x = (-a)^{-\frac{1}{2n-2}} x_1,$$

$$y = (-a)^{-\frac{1}{2n-2}} y_1 + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n;$$

Digitized by Google

$$x_1 = \rho\, e^{\Theta}\, \mathrm{Cs}\vartheta, \qquad y_1 = -\rho''e''^{\Theta}\, \mathrm{Sn}\vartheta;$$

затѣмъ изъ преобразованныхъ уравненій исключаемъ dt.

Такимъ путемъ приходимъ къ уравненію вида

$$\frac{d\rho}{d\vartheta} = P_2\rho^2 + P_3\rho^3 + \ldots,$$

въ которомъ P_2, P_3 и т. д. будутъ нѣкоторыми періодическими функціями ϑ.

Для рѣшенія вопроса объ устойчивости уравненіе это трактуется такъ же, какъ подобное уравненіе въ предыдущемъ случаѣ.

IX. $f(x) = 0$; β число четное, $b < 0$.

Невозмущенное движеніе устойчиво.

X. $f(x) = 0$; $\varphi(x) = 0$.

Невозмущенное движеніе неустойчиво.

23. Приведемъ примѣры.

Примѣръ 1.—Пусть дифференціальныя уравненія возмущеннаго движенія суть слѣдующія:

$$\frac{dx}{dt} = y + Ax^2 + Bxy + Cy^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = \quad Lx^2 + Mxy + Ny^2,$$

гдѣ A, B, C, L, M, N нѣкоторыя постоянныя.

Извѣстнымъ способомъ легко находимъ:

$$f(x) = Lx^2 - AMx^3 + \ldots,$$

$$\varphi(x) = (2A + M)\,x + \ldots.$$

Отсюда видно, что, если L не нуль, мы будемъ имѣть дѣло съ случаемъ I.

Если $L = 0$, а числа A и M противоположныхъ знаковъ, будемъ имѣть дѣло съ случаемъ II.

Если при $L = 0$ числа A и M одинаковыхъ знаковъ, то замѣчая, что тогда

Digitized by Google

$$a = -AM, \quad \beta = 1, \quad b = 2A + M,$$

найдемъ:

$$b^2 + 4(\beta + 1)a = (2A - M)^2,$$

и слѣдовательно будемъ имѣть дѣло съ случаемъ VI.

Если при $L = 0$ одно изъ чиселъ A и M есть нуль, другое отлично отъ нуля, будемъ имѣть дѣло съ случаемъ V.

Наконецъ, если $L = M = A = 0$, будемъ имѣть дѣло съ случаемъ X.

Вслѣдствіе этого заключаемъ, что, каковы бы ни были коэффиціенты въ нашихъ уравненіяхъ, невозмущенное движеніе неустойчиво.

Примѣръ 2.—Пусть дано уравненіе

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(x, \frac{dx}{dt}\right),$$

вторая часть котораго представляетъ цѣлую однородную функцію какой либо степени k означенныхъ въ скобкахъ величинъ, и пусть требуется изслѣдовать устойчивость движенія $x = 0$ по отношенію къ x и $\frac{dx}{dt}$.

Замѣняя это уравненіе системой

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = F(x, y) \tag{64}$$

и полагая

$$F(x, y) = L_0 x^k + L_1 x^{k-1} y + \ldots + L_{k-1} x y^{k-1} + L_k y^k,$$

находимъ:

$$f(x) = L_0 x^k, \qquad \varphi(x) = L_1 x^{k-1}.$$

Допустимъ сначала, что k есть число четное.

Тогда при L_0 отличномъ отъ нуля будемъ имѣть дѣло съ случаемъ I, а при $L_0 = 0$ —или съ случаемъ V, или съ случаемъ X.

Мы должны поэтому заключить, что изслѣдуемое движеніе неустойчиво.

Digitized by Google

Допустимъ теперь, что k есть число нечетное.

Тогда при $L_0 > 0$ будемъ имѣть дѣло съ случаемъ II, при $L_1 > 0$— съ случаемъ IV, при $L_0 = L_1 = 0$ — съ случаемъ X, и движеніе наше будетъ неустойчивымъ.

При $L_1 < 0$, $L_0 \leqq 0$ будемъ имѣть дѣло съ случаемъ III или IX, и слѣдовательно движеніе наше будетъ устойчивымъ.

Наконецъ, при $L_0 < 0$, $L_1 = 0$ будемъ имѣть дѣло съ случаемъ VII.

Если въ этомъ случаѣ не только L_1, но и всѣ остальные L_s, соотвѣтствующіе нечетнымъ s, равны нулю, то система (64), очевидно, будетъ обладать независящимъ отъ t голоморфнымъ интеграломъ (голоморфнымъ относительно x и y^2), и движеніе наше будетъ устойчивымъ.

Но допустимъ, что между названными коэффиціентами находятся неравные нулю.

Полагая $k = 2n - 1$ и разумѣя подъ p одно изъ чиселъ 2, 3, ..., n, допустимъ, что

$$L_1 = L_3 = \ldots = L_{2p-3} = 0, \qquad (65)$$

но что L_{2p-1} не нуль.

Дѣлая для упрощенія письма $L_0 = -1$ и преобразовывая наши уравненія посредствомъ подстановки

$$x = r\,\mathrm{Cs}\vartheta, \qquad y = -r^n \mathrm{Sn}\vartheta,$$

находимъ:

$$\frac{dr}{dt} = \qquad -\mathrm{Sn}\vartheta\, U r^{3n-2},$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = r^{n-1} - \mathrm{Cs}\vartheta U r^{3n-3}.$$

Здѣсь

$$U = \sum_{s=2}^{2n-1} (-1)^s L_s\, \mathrm{Cs}^{2n-s-1}\vartheta\, \mathrm{Sn}^s\vartheta\, r^{(n-1)(s-2)}.$$

Digitized by Google

Исключая изъ этихъ уравненій dt, выводимъ слѣдующее:

$$\frac{dr}{d\vartheta} = -\operatorname{Sn}\vartheta\, U r^{2n-1} \sum_{i=0}^{\infty} \operatorname{Cs}^i\vartheta\, U^i r^{2(n-1)i},$$

вторая часть котораго представится подъ видомъ ряда

$$R_{2n-1} r^{2n-1} + R_{3n-2} r^{3n-2} + \ldots,$$

расположеннаго по степенямъ r, возрастающимъ на $n-1$, съ младшимъ членомъ $(2n-1)$-ой степени.

Мы можемъ поэтому r, какъ функцію перемѣннаго ϑ, искать подъ видомъ ряда

$$r = c + u_{2n-1} c^{2n-1} + u_{3n-2} c^{3n-2} + \ldots,$$

расположеннаго по степенямъ произвольнаго постояннаго c, возрастающимъ также на $n-1$.

Коэффиціенты u_s въ этомъ ряду найдутся послѣдовательно изъ уравненій вида:

$$\frac{du_s}{d\vartheta} = R_s + U_s,$$

$$(s = 2n-1,\ 3n-2,\ \ldots)$$

гдѣ U_s въ случаѣ $s = 2n-1$ есть нуль, а въ случаѣ $s > 2n-1$ представляетъ извѣстный полиномъ, составленный изъ тѣхъ u_σ и R_σ, для которыхъ $\sigma < s$.

Мы замѣчаемъ теперь, что при допущеніи (65) наши формулы даютъ для всѣхъ R_s, соотвѣтствующихъ

$$s < (n-1)(2p-1) + 1,$$

такія же выраженія, какъ и въ случаѣ, когда всѣ L_i, соотвѣтствующіе нечетнымъ i, равны нулю.

Поэтому всѣ u_s, для которыхъ $s < (n-1)(2p-1) + 1$, необходимо будутъ періодическими функціями ϑ.

Обращаемся къ тому u_s, для котораго

$$s = (n-1)(2p-1) + 1.$$

Digitized by Google

Разумѣя подъ $R_s^{(0)}$ то, во что обращается R_s послѣ положенія $L_{2p-1} = 0$, мы можемъ утверждать, что при указанномъ сейчасъ значеніи s интегралъ

$$\int \left(R_s^{(0)} + U_s \right) d\vartheta$$

представитъ періодическую функцію ϑ.

Но для того же s наши формулы даютъ

$$R_s = L_{2p-1} \operatorname{Cs}^{2(n-p)}\vartheta \operatorname{Sn}^{2p}\vartheta + R_s^{(0)}.$$

Поэтому при L_{2p-1} неравномъ нулю разсматриваемая функція

$$u_s = \int \left(R_s + U_s \right) d\vartheta$$

не будетъ періодическою и дастъ

$$g = \frac{L_{2p-1}}{\omega} \int_0^{\omega} \operatorname{Sn}^{2p}\vartheta \operatorname{Cs}^{2(n-p)}\vartheta \, d\vartheta .$$

Отсюда заключаемъ, что при $L_{2p-1} > 0$ изслѣдуемое движеніе неустойчиво, при $L_{2p-1} < 0$ — устойчиво.

Мы предполагали $L_0 = -1$. Но нетрудно видѣть, что формулированное сейчасъ заключеніе справедливо и при всякомъ другомъ отрицательномъ L_0.

Мы можемъ такимъ образомъ утверждать, что въ нашемъ примѣрѣ устойчивость возможна только при нечетномъ k и дѣйствительно имѣетъ мѣсто въ трехъ случаяхъ: 1) когда $L_1 = 0$, $L_1 < 0$, 2) когда при $L_0 < 0$ первый неравный нулю въ ряду коэффиціентовъ

$$L_1, \quad L_3, \quad L_5, \quad \ldots$$

съ нечетными значками отрицателенъ и 3) когда при $L_0 < 0$ всѣ такіе коэффиціенты суть нули.

Во всѣхъ другихъ случаяхъ изслѣдуемое движеніе неустойчиво.

Примѣръ 3.—Въ заключеніе разсмотримъ случай канонической системы

Digitized by Google

$$\frac{dx}{dt} = y + \frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

разумѣя подъ H голоморфную функцію x и y, несодержащую членовъ ниже третьяго измѣренія.

Такъ какъ для этой системы находимъ:

$$\varphi(x) = 0,$$

то разсматривая ее, можемъ встрѣтить только одинъ изъ четырехъ случаевъ: I, II, VII или X.

Изъ нихъ устойчивость возможна только въ случаѣ VII, и всякій разъ, когда онъ представится, навѣрно будетъ имѣть мѣсто, ибо система наша допускаетъ независящій отъ t голоморфный интегралъ

$$y^2 + 2H. \qquad (66)$$

Въ случаѣ VII интегралъ этотъ необходимо будетъ знакоопредѣленною функціей перемѣнныхъ x и y, ибо, будучи преобразованъ посредствомъ подстановокъ, указанныхъ въ предыдущемъ параграфѣ, къ перемѣннымъ r и ϑ, обратится въ рядъ, расположенный по степенямъ r, изъ которыхъ младшая необходимо будетъ сопровождаться постояннымъ коэффиціентомъ.

Можно утверждать a priori, что всякій разъ, когда интегралъ (66) есть функція знакоопредѣленная (такъ-что при величинахъ x и y, численно достаточно малыхъ, можетъ уничтожаться не иначе, какъ при $x = y = 0$), невозмущенное движеніе устойчиво.

Къ этому можно теперь прибавить, что *во всѣхъ другихъ случаяхъ оно неустойчиво.*

Такимъ образомъ для канонической системы вопросъ приводится къ изслѣдованію функціи (66) и требуетъ для своего рѣшенія такого же анализа, какъ и вопросъ о maxima'хъ и minima'хъ функцій отъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ.

Digitized by Google

ПО ПОВОДУ МЕМУАРА M. A. PUJET «SUR LA FONCTION RÉSOLVANTE DE L'ÉQUATION $x^m + px + q = 0$», ПОМѢЩЕННАГО ВЪ 91 ТОМѢ COMPTES RENDUS.

Л. К. Лахтина.

Въ 91 томѣ Comptes Rendus (за 1880 годъ) M. A. Pujet помѣстилъ небольшую статью, озаглавленную такъ: «Sur la fonction résolvante de l'équation $x^m + p + q = 0$».

Результаты, приводимые авторомъ этой статьи, весьма интересны съ перваго взгляда; но при болѣе внимательномъ разсмотрѣніи формулы, даваемой авторомъ, не трудно убѣдиться, что результаты имъ приведенные, ошибочны.

Ошибка происходитъ вслѣдствіе неправильнаго толкованія авторомъ статьи полученной имъ формулы.

Изложу въ короткихъ словахъ содержаніе мемуара M. A. Pujet.

Пусть дано уравненіе:

$$x^m + px + q = 0. \tag{1}$$

Полагаемъ:

$$y = -q,\ k = \frac{p}{q}.$$

Уравненіе (1) приметъ видъ:

$$x^m - kyx - y = 0. \tag{2}$$

Digitized by Google

Вводимъ въ уравненіе (2) вмѣсто x новое неизвѣстное t, полагая:

$$x = \frac{m}{[t+(1-m)]k}. \tag{3}$$

Въ такомъ случаѣ величина t и y оказываются связанными между собою дифференціальнымъ соотношеніемъ:

$$\frac{mdt}{(m-1-t)(1+t)\sqrt{\psi(t)}} = \frac{k^{\frac{m}{2}}dy}{\sqrt{m^m y - k^m(1-m)^{m-1}y^2}}, \tag{4}$$

гдѣ

$$\psi(t) = \frac{(1+t)(t+1-m)^{m-1} - (1-m)^{m-1}}{t^2}. \tag{5}$$

Такъ какъ въ формулѣ (5) дѣленіе выполняется нацѣло, то $\psi(t)$ есть цѣлый многочленъ степени $m-2$.

Положивъ:

$$\frac{mdt}{(m-1-t)(1+t)\sqrt{\psi(t)}} = \frac{k^{\frac{m}{2}}dy}{\sqrt{m^m y - k^m(1-m)^{m-1}y^2}} = du, \tag{6}$$

Pujet говоритъ: «u est une fonction connue de la variable y, $u = F(y)$; c'est en même temps une fonction de la variable t, de sorte qu'on peut écrire $t = R(u)$, en appelant R la fonction inverse de celle-là.

On a donc:

$$t = R[F(y)] \text{ *)}.$$

Pour le cinquième et le sixième degré R est le symbole d'une fonction elliptique; c'est une fonction abélienne pour les degrés supérieurs... Le cadre resteint de cette note m'empêche de donner les détails de calcul qui seraient nécessaires pour la compléter».

---

*) Это—обычная форма трансцендентныхъ рѣшеній алгебраическихъ уравненій.

Digitized by Google

Разсматривая дифференціальное уравненіе (4), можно замѣтить, что оно интегрируется въ логариѳмахъ. Интегралъ его таковъ:

$$\frac{i}{(1-m)^{\frac{m-1}{2}}} \times$$

$$\times log\left\{\frac{2(1-m)^{m-1}-(t+1)(t+1-m)^{m-1}+2t\sqrt{-(1-m)^{m-1}\psi(t)}}{(t+1)(t+1-m)^{m-1}}\right\}=$$

$$=\frac{i}{(1-m)^{\frac{m-1}{2}}} log\left\{y-\frac{m^m}{2k^m(1-m)^{m-1}}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{y^2-\frac{m^m y}{k^m(1-m)^{m-1}}}\right\}+Const. \qquad (7)$$

Совершивъ переходъ отъ логариѳмовъ къ числамъ и выбравъ надлежащимъ образомъ величину *Const*, мы вернемся къ алгебраическому уравненію, связывающему величины t и y, а затѣмъ и къ уравненіямъ (2) и (1).

Такимъ образомъ соотношеніе (6) вовсе не приводитъ къ разрѣшенію уравненія (1).

Ошибка Pujet состоитъ въ томъ, что онъ псевдоультраэллиптическій интегралъ считаетъ ультраэллиптическимъ.

Юрьевъ
5-го апрѣля 1893 г.

Digitized by Google

О КРИВОИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЙ ПЕРВАГО ВИДА.

В. Е. Сердобинскаго.

Геометрическое представленіе эллиптическихъ функцій основывается на обобщеніи начала, положеннаго въ основу геометрическаго представленія круговыхъ функцій.

Извѣстно, что уравненіе:

$$ds = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

представляетъ окружность радіуса единицы. Желая получить уравненіе кривой, которая для эллиптическихъ функцій исполняла бы ту же роль, какую исполняетъ окружность для тригонометрическихъ функцій, полагаютъ, что такая кривая должна опредѣляться уравненіемъ

$$ds = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}, \qquad (1)$$

причемъ постоянную интегрированія предѣляютъ изъ условія, что $y = 1$ при $x = 0$.

Во второмъ томѣ Математическаго Сборника *) А. Ю. Давидовъ, исходя изъ уравненія (1), указалъ главнѣйшія свойства представляемой имъ кривой, аналогичныя свойствамъ окружности и вывелъ формулу, опредѣляющую радіусъ ея кривизны. Это прекрасное изслѣдованіе А. Ю. Давидова дополняется въ настоящей замѣткѣ рѣшеніемъ вопро-

*) Стр. 129.

Digitized by Google

совъ о разверткѣ той же кривой и о связи абциссъ ея точекъ съ эллиптическими интегралами.

1°. Въ уравненіи (1) положимъ

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2};$$

найдемъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{y\sqrt{1+k^2-k^2y^2}} \tag{2}$$

и чрезъ дифференцированіе получимъ:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2k^2y^2-k^2-1}{y^3(1+k^2-k^2y^2)^2}.$$

Означивъ чрезъ α и β координаты центра кривизны, имѣемъ уравненія:

$$x - \alpha + (y-\beta)\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0;$$

исключивъ изъ нихъ и изъ уравненія (2) x и y, получимъ, какъ извѣстно, уравненіе развертки. Для этой цѣли выводимъ:

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{y^2(1+k^2-k^2y^2)},$$

$$y - \beta = \frac{-y(1+k^2-k^2y^2)}{2k^2y^2-k^2-1},$$

$$\beta = \frac{k^2y^3}{2k^2y^2-k^2-1}. \tag{3}$$

По свойству развертки имѣемъ:

$$1 + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

а потому

$$-\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{y\sqrt{1+k^2-k^2y^2}},$$

Digitized by Google

$$1 + \left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)^2 = \frac{1}{y^2 + k^2y^2 - k^2y^4},$$

и чрезъ дѣленіе получаемъ:

$$-\frac{\beta}{1 + \left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)^2} = k^2y^5,$$

откуда:

$$y = \frac{-\beta^{\frac{1}{5}}}{k^{\frac{2}{5}}\left[1 + \left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)^2\right]^{\frac{1}{5}}}.$$

Подставивъ это выраженіе въ уравненіе (3), получаемъ дифференціальное уравненіе развертки:

$$-(1+k^2)\beta^{\frac{2}{5}}\left[1 + \left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)^2\right]^{\frac{2}{5}} + 2k^{\frac{6}{5}}\beta^{\frac{4}{5}}\left[1 + \left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)^2\right]^{\frac{1}{5}} + k^{\frac{4}{5}} = 0.$$

Для интегрированія этого уравненія должно рѣшить его, какъ кубичное относительно

$$\left[1 + \left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)^2\right]^{\frac{1}{5}},$$

причемъ это выраженіе опредѣлится, какъ функція количества β; вслѣдствіе этого $\frac{d\alpha}{d\beta}$ тоже опредѣлится какъ функція β и интегрированіе совершится чрезъ отдѣленіе перемѣнныхъ.

2°. Разсматривая вмѣстѣ съ А. Ю. Давидовымъ одни лишь отрицательныя значенія $\frac{dy}{dx}$, опредѣляемыя уравненіемъ (2), положимъ, какъ и онъ,

$$1 + k^2 - k^2y^2 = \frac{1}{u^2},$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 - k^2y^2}} = \sin\psi;$$

найдемъ:

$$k\,dx = -\frac{d\psi}{\sin^2\psi\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}}.$$

Digitized by Google

Интегрируя это уравненіе, получаемъ:

$$x = -\frac{1}{k}\int \frac{d\psi}{\sin^2\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}, \qquad (4)$$

причемъ постоянное интеграціи опредѣлится изъ условія, что при $x=0 \quad \psi=\frac{\pi}{2}$.

Представивъ уравненіе (4) въ видѣ:

$$x = -\frac{1}{k}\int \frac{1-k^2\sin^2\psi+k^2\sin^2\psi}{\sin^2\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}d\psi,$$

и получивъ:

$$x = +\frac{1}{k}\int \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\, d\operatorname{ctg}\psi - k\int \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}},$$

находимъ чрезъ интегрированіе по частямъ:

$$x = \frac{1}{k}\operatorname{ctg}\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi} - k\int \frac{\sin^2\psi\, d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}},$$

или

$$x = \frac{1}{k}\operatorname{ctg}\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi} - \frac{1}{k}\int \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} + \\ + \frac{1}{k}\int \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\, d\psi.$$

Такимъ образомъ, абсцисса разсматриваемой кривой опредѣляется помощью эллиптическихъ интеграловъ.

Digitized by Google

СПОСОБЪ В. Г. ИМШЕНЕЦКАГО ДЛЯ НАХОЖДЕНІЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХЪ РАЦІОНАЛЬНЫХЪ ДРОБНЫХЪ РѢШЕНІЙ ЛИНЕЙНАГО ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО УРАВНЕНІЯ.

П. А. Некрасова.

Способъ В. Г. Имшенецкаго *) для нахожденія алгебраическихъ раціональныхъ дробныхъ рѣшеній уравненія

$$P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_n y = V, \qquad (1)$$

гдѣ P_0, P_1, ..., P_n и V суть цѣлые многочлены, вызвалъ извѣстныя возраженія **), которыхъ самъ В. Г. Имшенецкій успѣлъ коснуться только въ устномъ своемъ сообщеніи въ засѣданіи Московскаго Математическаго Общества 19 мая 1892 года и не успѣлъ разъяснить съ должною полнотою и обстоятельностію.

---

*) *В. Г. Имшенецкій*: 1. „Общій способъ нахожденія раціональныхъ дробныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами". Записки Имп. Акад. Наукъ, т. LV, прилож. № 9. 1887.

2. „Дополненіе теоріи и одно приложеніе общаго способа нахожденія раціональныхъ дробныхъ рѣшеній линейныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами", Записки Имп. Акад. Наукъ, т. LVIII, стр. 1–28. 1888.

**) См. „Извлеченіе изъ письма проф. К. А. Поссе (отъ него лично и отъ имени проф. А. Н. Коркина и проф. Д. К. Бобылева)". Матем. Сборникъ, томъ XVII, вып. 2; 1-е приложеніе къ протоколу засѣданія 20 апрѣля 1893 года. 1893.

Digitized by Google

Возстановивъ по порученію Математическаго Общества сущность содержанія этого сообщенія *), я счелъ своимъ долгомъ принять на себя и болѣе полное разъясненіе способа В. Г. Имшенецкаго, каковой трудъ, вѣроятно, исполнилъ бы самъ В. Г. Имшенецкій, если бы его не постигла неожиданная смерть.

Трудъ этотъ, потребовавшій отъ меня тщательнаго и всесторонняго изученія вопроса о нахожденіи дробныхъ рѣшеній уравненія (1), я принялъ на себя съ особенной охотой и съ глубокимъ интересомъ, такъ какъ былъ увѣренъ, что мемуары В. Г. Имшенецкаго по этому вопросу не могутъ не заслуживать серьезнаго вниманія ученыхъ. Само имя В. Г. Имшенецкаго служило для меня безусловнымъ ручательствомъ плодотворности его идей даже въ томъ случаѣ, если изложеніе его мемуаровъ имѣетъ нѣкоторые недостатки, подавшіе поводъ къ возраженіямъ.

Изучивъ вопросъ во всѣхъ деталяхъ, я непосредственно убѣдился въ богатствѣ идей В. Г. Имшенецкаго, которыя приводятъ къ самымъ совершеннымъ общимъ пріемамъ рѣшенія вопроса о нахожденіи дробныхъ рѣшеній уравненія (1). Чтобы сразу оцѣнить достоинства этихъ пріемовъ, достаточно сказать, что сравненіе ихъ съ соотвѣтствующими пріемами Ліувилля **), сдѣланное въ концѣ настоящей статьи, показываетъ, что пріемы Ліувилля по ихъ качествамъ безусловно уступаютъ мѣсто пріемамъ, основаннымъ на идеяхъ В. Г. Имшенецкаго.

Не надо думать, что значеніе пріемовъ и формулъ, выдви-

---

*) См. „О сообщеніи академика В. Г. Имшенецкаго, доложенномъ въ засѣданіи Московскаго Математическаго Общества 19 мая 1892 года". Матем. Сборникъ, томъ XVII, вып. 2; 2-е приложеніе къ протоколу засѣданія 20 апрѣля 1893 года. 1893.

**) *J. Liouville*, „Sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique". Premier et seconde mémoire. Journ. de l'Ec. Polyt., t. XIV, 22 cahier, pp. 153—183. 1833.—Тѣ же мемуары Ліувилля перепечатаны безъ измѣненій въ Mémoires presentés par divers savants à l'Académie des Sciences, t. V. 1838.

Digitized by Google

гаемыхъ В. Г. Имшенецкимъ въ своей теоріи нахожденія дробныхъ рѣшеній, исчерпывается только приложеніемъ ихъ къ этой задачѣ. Напротивъ, эти пріемы и формулы В. Г. Имшенецкаго навели меня на соображенія, *которыя проливаютъ совершенно новый свѣтъ на общую теорію линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, внося въ нее капитальное упрощеніе*, относящееся къ такъ называемымъ неправильнымъ интеграламъ.

Я покажу это въ статьѣ, которая подготовляется мною къ печати. Идеямъ В. Г. Имшенецкаго, какъ я убѣдился, свойственно то, что часто случается съ глубоко задуманными идеями: онѣ оказываются плодотворными въ болѣе широкой области, чѣмъ та, которую авторъ ихъ имѣлъ въ виду первоначально.

Выставляя на видъ достоинства превосходныхъ идей В. Г. Имшенецкаго, я не желаю быть пристрастнымъ, умалчивая о недостаткахъ его мемуаровъ, и считаю должнымъ теперь же указать главнѣйшіе изъ этихъ недостатковъ.

Недостатки эти не колеблятъ сущности способа В. Г. Имшенецкаго, а относятся только къ изложенію и состоятъ въ слѣдующемъ.

1) Разъяснивъ при помощи подробныхъ указаній и наглядныхъ примѣровъ сущность своего способа, В. Г. Имшенецкій въ первомъ своемъ мемуарѣ оставилъ безъ доказательства основы своего способа, а во второмъ мемуарѣ привелъ доказательства, слишкомъ сложныя и неубѣдительныя.

2) Выяснивъ важное значеніе интегрирующаго множителя μ, В. Г. Имшенецкій въ примѣненіяхъ этой богатой идеи воспользовался не всѣми выгодами ея, такъ какъ разсмотрѣлъ только такую форму интегрирующаго множителя μ, которая даетъ искомыя рѣшенія большею частію въ осложненной формѣ. Этотъ недостатокъ не вполнѣ устраненъ даже тою улучшенною формою интегрирующаго μ, которая была потомъ указана В. Г. Имшенецкимъ въ сообщеніи 19 мая 1892 г. *).

*) Я не касаюсь здѣсь нѣкоторыхъ мелочныхъ недостатковъ изложенія, указывающихъ на то, что мемуары В. Г. Имшенецкаго возник-

Digitized by Google

Предлагаемая статья содержитъ новое изложеніе способа В. Г. Имшенецкаго для нахожденія дробныхъ рѣшеній урав-

---

ли и выпущены въ свѣтъ слишкомъ быстро. Самъ В. Г. Имшенецкій признавалъ, что онъ поторопился выпускомъ въ свѣтъ этихъ своихъ мемуаровъ. Такъ авторы, слишкомъ продуктивные и въ наукѣ и сферѣ другихъ занятій, часто увлекаются соблазномъ поспѣшнаго изданія своихъ трудовъ, опасаясь, что новыя мысли и занятія отвлекутъ ихъ въ сторону. Но даже и при этихъ неблагопріятныхъ обстоятельствахъ особая прозорливость, характеризующая силу таланта В. Г. Имшенецкаго, обезпечила полный успѣхъ его идеямъ.

Указывая здѣсь на недостатки изложенія мемуаровъ В. Г. Имшенецкаго по вопросу о нахожденіи дробныхъ рѣшеній уравненія (1), я далекъ отъ мысли, „что желающимъ изучить этотъ предметъ лучше знакомиться съ нимъ по мемуару Ліувилля, чѣмъ по вышеупомянутымъ мемуарамъ В. Г. Имшенецкаго“. Напротивъ мой личный опытъ изученія мемуаровъ того и другаго автора, приведшій меня къ настоящей статьѣ, есть наглядное опроверженіе этой мысли, не только неправильной по существу (какъ оказалось), но и содержащей совѣтъ, несовмѣстимый съ правильнымъ отношеніемъ къ выдающимся представителямъ науки. Такъ какъ идеи выдающихся ученыхъ часто бываютъ плодотворными даже при недостаткахъ изложенія (что еще разъ подтвердилось и на мемуарахъ В. Г. Имшенецкаго о дробныхъ рѣшеніяхъ линейнаго дифференціальнаго уравненія), то нельзя подавать совѣта, подобнаго тому, который содержится въ указанной выше мысли и въ сущности рекомендуетъ оставить безъ вниманія примѣчательный рядъ трудовъ такого выдающагося ученаго, какъ В. Г. Имшенецкій.

Оппонируя тому же неправильному совѣту, я напротивъ нахожу, что въ интересахъ науки необходимо внимательнѣйшее отношеніе къ ея корифеямъ, которое обезпечиваетъ естественный ея ростъ и которое должно состоять *въ тщательномъ сохраненіи, изученіи и разъясненіи каждой ихъ идеи, хотя бы она высказана была неясно или неловко.* Таковы по крайней мѣрѣ, отношенія, установившіяся въ европейской наукѣ къ ея выдающимся представителямъ,—и благодаря этимъ отношеніямъ многія геніальныя, но неотчетливо выраженныя идеи (Коши, Римана и проч.) не только не пропали для науки, но развились въ цѣлые обширные отдѣлы ея. Еще недавно Парижская академія наукъ назначила даже премію за разъясненіе остающихся пока неразгаданными идей Римана по теоріи чиселъ.

Для умовъ, чрезмѣрно формальныхъ, недостатки изложенія служатъ непреодолимымъ препятствіемъ къ пониманію сущности изложенія, и

Digitized by Google

ненія (1), устраняющее, какъ мнѣ кажется, всѣ указанные выше недостатки и не подающее поводовъ ни къ какимъ возраженіямъ *).

§ 1. **Каноническая форма дифференціальнаго уравненія (1) и форма его, преобразованная при помощи интегрирующаго множителя μ.**

Уравненіе (1) будемъ называть *основнымъ*, предполагая, что полиномы $P_0, P_1, \ldots, P_n$ и V не имѣютъ общаго дѣлителя.

Основное уравненіе (1), которымъ Ліувилль въ своемъ способѣ пользуется непосредственно, В. Г. Имшенецкій преобразуетъ, представляя его подъ формой:

$$\frac{d^n(Q_0 y)}{dx^n} + \frac{d^{n-1}(Q_1 y)}{dx^{n-1}} + \ldots + Q_n y = V, \qquad (2)$$

которая, какъ извѣстно, играетъ важную роль во многихъ вопросахъ теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій.

люди съ такимъ умомъ выступаютъ съ возраженіями противъ неотчетливо изложенныхъ идей, хотя бы онѣ были выдающимися. Такъ выступалъ, напримѣръ, Максимиліанъ Мари противъ геніальныхъ идей Коши. Такія возраженія даже законны, если они выражены въ надлежащей формѣ. Но они не должны увлекать остальныхъ ученыхъ слишкомъ далеко въ сторону сомнѣній и отрицанія.

Прибавимъ къ сказанному, что только весьма немногочисленные труды В. Г. Имшенецкаго, изданные въ послѣдніе годы его жизни, имѣютъ нѣкоторые недостатки изложенія; вообще же обширные и многочисленные труды его прекрасно обработаны со стороны изложенія и многіе изъ нихъ даже представляютъ собою классическіе образцы превосходнаго изложенія.

*) По недостатку времени я не касаюсь въ своемъ изложеніи той весьма интересной части мемуара В. Г. Имшенецкаго, гдѣ онъ распространяетъ свою теорію на совокупность линейныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами. Не касаюсь также и весьма важныхъ приложеній теоріи къ вопросамъ анализа, указаннымъ въ мемуарахъ Ліувилля и В. Г. Имшенецкаго. Замѣчу, что теорія прилагается еще къ вопросамъ, намѣченнымъ въ § VII моей статьи о линейныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ, напечатанной въ XV томѣ Математ. Сборника.

Digitized by Google

Въ уравненіи (2) функціи Q_0, Q_1,..., Q_n суть полиномы, которые представляются посредствомъ полиномовъ P_0, P_1,..., P_n такъ:

$$
\left.\begin{aligned}
&Q_0 = P_0,\\
&Q_1 = P_1 - \binom{n}{1}\frac{dP_0}{dx},\\
&Q_2 = P_2 - \binom{n-1}{1}\frac{dP_1}{dx} + \binom{n}{2}\frac{d^2P_0}{dx^2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&Q_i = P_i - \binom{n-i+1}{1}\frac{dP_{i-1}}{dx} + \binom{n-i+2}{2}\frac{d^2P_{i-2}}{dx^2} - \cdots\\
&\qquad\qquad \cdots + (-1)^i\binom{n}{i}\frac{d^iP_0}{dx^i},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&Q_{n-1} = P_{n-1} - \binom{2}{1}\frac{dP_{n-2}}{dx} + \binom{3}{2}\frac{d^2P_{n-3}}{dx^2} - \cdots\\
&\qquad\qquad \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\frac{d^{n-1}P_0}{dx^{n-1}},\\
&Q_n = P_n - \frac{dP_{n-1}}{dx} + \frac{d^2P_{n-2}}{dx^2} - \cdots + (-1)^n\frac{d^nP_0}{dx^n},
\end{aligned}\right\} \qquad (3)
$$

гдѣ вообще полагаемъ

$$\binom{n}{i} = \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2\ldots i}. \qquad (4)$$

Повѣряя правильность равенствъ (3), отождествимъ коэффиціенты при соотвѣтственныхъ производныхъ функціи y въ первыхъ частяхъ уравненій (1) и (2). Такимъ образомъ получимъ равенства:

Digitized by Google

$$
\left.
\begin{aligned}
P_0 &= Q_0, \\
P_1 &= Q_1 + \binom{n}{1}\frac{dQ_0}{dx}, \\
P_2 &= Q_2 + \binom{n-1}{1}\frac{dQ_1}{dx} + \binom{n}{2}\frac{d^2Q_0}{dx^2}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
P_i &= Q_i + \binom{n-i+1}{1}\frac{dQ_{i-1}}{dx} + \binom{n-i+2}{2}\frac{d^2Q_{i-2}}{dx^2} + \\
&\quad \cdots + \binom{n-1}{i-1}\frac{d^{i-1}Q_1}{dx^{i-1}} + \binom{n}{i}\frac{d^iQ_0}{dx^i}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
P_{n-1} &= Q_{n-1} + \binom{2}{1}\frac{dQ_{n-2}}{dx} + \binom{3}{2}\frac{d^2Q_{n-3}}{dx^2} + \cdots \\
&\quad \cdots + \binom{n-1}{n-2}\frac{d^{n-2}Q_1}{dx^{n-2}} + \binom{n}{n-1}\frac{d^{n-1}Q_0}{dx^{n-1}}, \\
P_n &= Q_n + \frac{dQ_{n-1}}{dx} + \frac{d^2Q_{n-2}}{dx^2} + \cdots + \\
&\quad + \frac{d^{n-1}Q_1}{dx^{n-1}} + \frac{d^nQ_0}{dx^n},
\end{aligned}
\right\} \quad (5)
$$

изъ которыхъ заключеніемъ отъ i къ $i+1$ выводится общая формула для опредѣленія Q_i, именно:

$$
\begin{aligned}
Q_i = P_i &- \binom{n-i+1}{1}\frac{dP_{i-1}}{dx} + \binom{n-i+2}{2}\frac{d^2P_{i-2}}{dx^2} - \cdots \\
&\cdots + (-1)^i\binom{n}{i}\frac{d^iP_0}{dx^i}.
\end{aligned}
$$

Если полиномы $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ имѣютъ общій наибольшій

Digitized by Google

дѣлитель M, то уравненіе (2) будемъ подвергать преобразованію, полагая

$$My = z. \tag{5'}$$

По преобразованіи уравненіе (2) будетъ имѣть болѣе простой видъ:

$$\frac{d^n(q_0 z)}{dx^n} + \frac{d^{n-1}(q_1 z)}{dx^{n-1}} + \ldots + q_n z = V, \tag{2'}$$

гдѣ $q_0, q_1, \ldots, q_n$ суть полиномы, не имѣющіе общаго дѣлителя и опредѣляемые равенствами вида:

$$Mq_i = Q_i, \ (i = 0, 1, \ldots n).$$

Изысканіе дробныхъ рѣшеній уравненія (1), очевидно, сводится къ изысканію цѣлыхъ и дробныхъ рѣшеній уравненія (2'). Такъ какъ нахожденіе цѣлыхъ рѣшеній не представляетъ затрудненій (см. примѣчаніе I въ концѣ настоящаго параграфа), то нужно сосредоточить вниманіе только на дробныхъ рѣшеніяхъ уравненія (2').

Уравненіе (2'), характеризуемое тѣмъ, что въ немъ полиномы $q_0, q_1, \ldots, q_n$ не имѣютъ общаго дѣлителя, будемъ называть *каноническимъ*.

Эта каноническая форма важна не только потому, что она есть болѣе простая сама по себѣ, но и потому, что она, какъ увидимъ ниже, ведетъ ко *особому* упрощенію теоріи нахожденія дробныхъ рѣшеній дифференціальнаго уравненія (1).

Преобразованіе (5') всегда даетъ возможность привести уравненіе (2) къ каноническому виду. Поэтому, слѣдуя В. Г. Имшенецкому, ниже будемъ предполагать, что само уравненіе (2) есть уже каноническое, т. е. полиномы $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ не имѣютъ общаго дѣлителя.

Вмѣстѣ съ формой (2) уравненія (1) въ способѣ В. Г. Имшенецкаго играетъ существенную роль такъ называемый интегрирующій множитель μ. Если прежде преобразованія уравненія (1) умножить его на μ и потомъ воспользоваться

Digitized by Google

преобразованіемъ его къ виду (2), то уравненіе (1) представится въ формѣ:

$$\frac{d^n(S_0 y)}{dx^n} + \frac{d^{n-1}(S_1 y)}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{d(S_{n-1} y)}{dx} + S_n y = V\mu. \quad (6)$$

Здѣсь функціи S_0, S_1, ..., S_n аналогичны функціямъ Q_0, Q_1, ..., Q_n. Разсмотримъ выраженія функцій S_i чрезъ функціи Q_i и множитель μ съ его производными.

Если во вторыхъ частяхъ равенствъ (3) функціи P_i замѣнить соотвѣтственно функціями R_i, полагая: $R_i = \mu P_i$, то опредѣляемыя равенствами (3) величины Q_i послѣ замѣны перейдутъ въ S_i, такъ что

$$\left.\begin{aligned} S_i = R_i - \binom{n-i+1}{1}\frac{dR_{i-1}}{dx} + \binom{n-i+2}{2}\frac{d^2R_{i-2}}{dx^2} - \ldots \\ \ldots + (-1)^i \binom{n}{i}\frac{d^iR_0}{dx^i}. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Замѣчая, что

$$R_i = \mu P_i,$$

$$\frac{dR_{i-1}}{dx} = \mu\frac{dP_{i-1}}{dx} + \frac{d\mu}{dx}P_{i-1},$$

$$\frac{d^2R_{i-2}}{dx^2} = \mu\frac{dP_{i-2}}{dx^2} + 2\frac{d\mu}{dx}\frac{dP_{i-2}}{dx} + \frac{d^2\mu}{dx^2}P_{i-2},$$

. . . . . .

$$\frac{d^iR_0}{dx^i} = \mu\frac{d^iP_0}{dx^i} + \binom{i}{1}\frac{d\mu}{dx}\frac{d^{i-1}P_0}{dx^{i-1}} + \binom{i}{2}\frac{d^2\mu}{dx^2}\frac{d^{i-2}P_0}{dx^{i-2}} + \ldots + \frac{d^i\mu}{dx^i}P_0,$$

мы получимъ:

$$\left.\begin{aligned} S_i = \mu Q_i - \binom{n-i+1}{1}\frac{d\mu}{dx}Q_{i-1} + \\ + \binom{n-i+2}{2}\frac{d^2\mu}{dx^2}Q_{i-2} - \ldots + (-1)^i\binom{n}{i}\frac{d^i\mu}{dx^i}Q_0. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Digitized by Google

Такимъ образомъ функціи S_i выражены посредствомъ полиномовъ Q_i и множителя μ съ его производными. Давая въ равенствѣ (8) числу i значенія 0, 1, ..., n, будемъ имѣть:

$$
\left.\begin{aligned}
S_0 &= Q_0\mu,\\
S_1 &= Q_1\mu - \binom{n}{1}Q_0\frac{d\mu}{dx},\\
S_2 &= Q_2\mu - \binom{n-1}{1}Q_1\frac{d\mu}{dx} + \binom{n}{2}Q_0\frac{d^2\mu}{dx^2},\\
S_3 &= Q_3\mu - \binom{n-2}{1}Q_2\frac{d\mu}{dx} + \binom{n-1}{2}Q_1\frac{d^2\mu}{dx^2}\\
&\qquad - \binom{n}{3}Q_0\frac{d^3\mu}{dx^3},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
S_{n-1} &= Q_{n-1}\mu - \binom{2}{1}Q_{n-2}\frac{d\mu}{dx} + \binom{3}{2}Q_{n-3}\frac{d^2\mu}{dx^2} - \ldots\\
&\qquad \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}Q_0\frac{d^{n-1}\mu}{dx^{n-1}},\\
S_n &= Q_n\mu - Q_{n-1}\frac{d\mu}{dx} + Q_{n-2}\frac{d^2\mu}{dx^2} - \ldots +\\
&\qquad + (-1)^n Q_0\frac{d^n\mu}{dx^n}.
\end{aligned}\right\} \quad (9)
$$

Формулы (3) и (9), выдвинутые на первый планъ В. Г. Имшенецкимъ, имѣютъ важное значеніе въ разныхъ вопросахъ, относящихся къ уравненію (1).

Интегрирующій множитель μ, входящій въ уравненіе (6), можно выбирать различно.

Ниже мы *вопервыхъ* разсмотримъ (въ § 2) примѣненіе *основнаго* множителя, именно:

$$\mu = p^{m-1}, \quad p = \frac{P_0}{\Delta}, \qquad (10)$$

Digitized by Google

гдѣ Δ есть общій наибольшій дѣлитель полиномовъ P_0 и $\frac{dP_0}{dx}$ (слѣдовательно p есть произведеніе всѣхъ различныхъ линейныхъ дѣлителей полинома P_0). Этотъ основной множитель μ предложенъ В. Г. Имшенецкимъ въ сообщеніи 19 мая 1892 года взамѣнъ множителя $\mu = P_0^{m-1}$ *).

Результаты, получаемые при помощи множителя $\mu = p^{m-1}$, ведутъ къ полному рѣшенію задачи, сразу охватывая всю ея сущность; но сами по себѣ они не даютъ еще достаточно простыхъ формъ для изысканія дробныхъ рѣшеній уравненія (1) (если таковыя рѣшенія существуютъ). Поэтому *вовторыхъ* мы разсмотримъ (въ § 3) *вспомогательные* интегрирующіе множители двухъ видовъ:

$$1) \qquad \mu = (x + a)^{m-1}, \tag{10'}$$

гдѣ $x + a$ есть любой изъ линейныхъ дѣлителей полинома p, и

$$2) \qquad \mu = F^{m-1}, \tag{10''}$$

гдѣ F есть любой *неприводимый* дѣлитель полинома p.

Правила для нахожденія дробныхъ рѣшеній уравненія (1), выраженныя въ окончательной формѣ въ § 3, есть результатъ свойствъ уравненія (1), вытекающихъ изъ совмѣстнаго разсмотрѣнія основнаго множителя съ вспомогательными множителями того или другаго изъ двухъ указанныхъ видовъ.

Примѣчаніе I. Въ задачѣ о нахожденіи дробныхъ рѣшеній уравненія (2) вся суть дѣла сводится прежде всего къ отысканію знаменателей этихъ дробей. Когда знаменатель N какого либо изъ дробныхъ рѣшеній найденъ, то, отыскивая числитель z, полагаютъ:

$$y = \frac{z}{N}$$

---

*) Множитель вида: $\mu = P_0^{m-1}$ разсмотрѣнъ В. Г. Имшенецкимъ въ его мемуарахъ, но имъ же самимъ въ указанномъ сообщеніи признанъ неудобнымъ.

Digitized by Google

и вносятъ это выраженіе y въ уравненіе (1). Такимъ образомъ задача приводится къ изысканію цѣлыхъ рѣшеній z преобразованнаго уравненія, т. е. рѣшеній вида:

$$z = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + E.$$

Это изысканіе не представляетъ теоретическихъ затрудненій и сводится вопервыхъ къ изысканію показателя m степени полинома z, а затѣмъ къ нахожденію коэффиціентовъ $A, B, \ldots, E$ по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ. Что касается отысканія показателя m, то оно выполняется по извѣстному правилу, которое проф. Н. В. Бугаевъ назвалъ началомъ наибольшихъ показателей *).

Примѣчаніе II. Линейные дѣлители (т. е. дѣлители вида $x + a$) знаменателя Y дробнаго рѣшенія

$$y = \frac{X}{Y},$$

представленнаго въ видѣ несократимой дроби, суть дѣлители полиномовъ P_0 и p. Доказывая эту теорему Ліувилля положимъ: $Y = (x + a)^\alpha Z$, гдѣ Z есть цѣлый полиномъ, не дѣлящійся на дѣлитель $x + a$ полинома Y. Будемъ имѣть:

$$y = \frac{X}{(x + a)^\alpha Z}.$$

Дифференцируя послѣдовательно n разъ послѣднее уравненіе, находимъ:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha X}{Z(x + a)^{\alpha+1}} + \frac{X_1}{Z^2(x + a)^\alpha},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\alpha(\alpha + 1)X}{Z(x + a)^{\alpha+2}} + \frac{X_2}{Z^3(x + a)^{\alpha+1}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{\alpha(\alpha + 1)\ldots(\alpha + n - 1)X}{Z(x + a)^{\alpha+n}} + \frac{X_n}{Z^{n+1}(x + a)^{\alpha+n-1}},$$

*) *Н. В. Бугаевъ*, „Начало наибольшихъ и наименьшихъ показателей въ теоріи дифференціальныхъ уравненій. Цѣлые частные интегралы“. (Матем. Сборн., томъ XVI, вып. 1, стр. 39—80).

Digitized by Google

гдѣ X_1, X_2, ..., X_n означаютъ цѣлыя функціи.

Подставивъ предыдущія значенія y, $\frac{dy}{dx}$, ..., $\frac{d^n y}{dx^n}$ въ уравненіе (1) и умноживъ результатъ подстановки на

$$Z^{n+1}(x+a)^{\alpha+n-1},$$

мы получимъ во всѣхъ его членахъ цѣлыя функціи, исключая только одинъ членъ, гдѣ будемъ имѣть:

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)P_0 Z^n X}{x+a}.$$

Слѣдовательно и этотъ членъ долженъ представлять цѣлую функцію, иначе результатъ подстановки $y=\frac{X}{Z(x+a)^\alpha}$ не былъ бы тождествомъ. А такъ какъ X и Z не дѣлятся на $x+a$ по условію, то P_0 необходимо должно дѣлиться на $x+a$, ч. т. д.

§ 2. **Нахожденіе дробныхъ рѣшеній при посредствѣ основнаго множителя** $\mu=p^{m-1}$.

Опредѣляя μ при помощи равенствъ (10) и внося это значеніе μ въ уравненіе (6) и въ равенства (8) или (9), будемъ имѣть:

$$\frac{d^n(S_0 y)}{dx^n}+\frac{d^{n-1}(S_1 y)}{dx^{n-1}}+\ldots+S_n y=Vp^{m-1}, \qquad (11)$$

гдѣ

$$S_i=\sum_{\kappa=0}^{i}(-1)^k\binom{n-i+k}{k}\frac{d^k(p^{m-1})}{dx^k}\cdot Q_{i-k}. \qquad (15)$$

Замѣтивъ, что

$$\frac{d^k(p^{m-1})}{dx^k}=p^{m-k-1}\left[(m-1)(m-2)\ldots(m-k)\left(\frac{dp}{dx}\right)^k + r_k\cdot p\right], \qquad (16)$$

Digitized by Google

гдѣ r_k есть цѣлый полиномъ, убѣждаемся, что функціи S_i представляются такъ:

$$S_i = p^{m-i}\, T_i, \; (i = 0, 1, \ldots, n), \tag{17}$$

гдѣ T_i при *произвольномъ* m (не только цѣломъ, но и дробномъ или даже комплексномъ) есть *цѣлый* полиномъ.

На основаніи равенствъ (15), (16) и (17) полиномъ T_i можно представить такъ:

$$T_i = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{i}(-1)^k \binom{n-i+k}{k} Q_{i-k}\, p^{i-k-1}\left[m\ldots(m-k)\left(\frac{dp}{dx}\right)^k + r_k \cdot p \right]. \tag{18}$$

Отсюда видно слѣдующее.

1) Полиномъ T_i при произвольномъ m можетъ имѣть общихъ дѣлителей съ полиномомъ p въ томъ лишь случаѣ, если полиномы

$$Q_0 p^{-1},\; Q_1,\; Q_2 p, \ldots,\; Q_i p^{i-1} \tag{19}$$

имѣютъ общаго наибольшаго дѣлителя, который обозначимъ чрезъ δ_i.

2) Полиномъ T_i дѣлится на δ_i, а полиномъ, къ которому приводится выраженіе

$$\frac{T_i}{\delta_i},$$

при произвольномъ m не можетъ имѣть общихъ дѣлителей съ полиномомъ p.

Дѣлитель δ_i полинома T_i при $i = n$ будемъ обозначать черезъ D, т. е. $D = \delta_n$. Иначе говоря, D есть общій наибольшій дѣлитель полиномовъ

$$Q_0 p^{-1},\; Q_1,\; Q_2 p, \ldots,\; Q_n p^{n-1}. \tag{20}$$

Очевидно далѣе, что D есть общій дѣлитель полиномовъ $T_0, T_1, \ldots, T_n$ и притомъ, если m произвольное, наибольшій. Поэтому количества σ_i, опредѣляемыя равенствами вида:

Digitized by Google

$$T_i = D\,\sigma_i,\ (i = 0,\ 1, \ldots\ n), \tag{21}$$

суть цѣлые полиномы.

Изъ полиномовъ σ_i обратимъ особое вниманіе на полиномъ σ_n. Полиномъ этотъ, который можно представить такъ:

$$\sigma_n = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,\frac{Q_{n-k}p^{n-k-1}}{D}\left[m(m-1)\ldots(m-k)\left(\frac{dp}{dx}\right)^k + r_k\cdot p\right], \tag{22}$$

при произвольномъ m не имѣетъ никакихъ общихъ дѣлителей съ полиномомъ p.

Теперь уравненіе (11) можемъ представить такъ:

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{d^{n-i}(p^{m-i}D.\sigma_i.y)}{dx^{n-i}} = Vp^{m-1}. \tag{23}$$

Всякое алгебраическое раціональное рѣшеніе (дробное или цѣлое) уравненія (1) можетъ быть представлено въ слѣдующей формѣ:

$$y = \frac{z}{D.p^{\alpha}}, \tag{24}$$

гдѣ z есть цѣлый полиномъ, не дѣлящійся на p, и α есть цѣлое число, положительное или отрицательное. Если при этомъ разсматриваемое рѣшеніе есть дробное, то

$$\alpha > -\gamma, \tag{25}$$

гдѣ γ есть цѣлое число, находимое изъ условія:

$$p^{\gamma} = D.U, \tag{26}$$

въ которомъ U есть цѣлый полиномъ, не дѣлящійся на p. Если D представимъ такъ:

$$D = (x+a_1)^{\beta_1}(x+a_2)^{\beta_2}\ldots(x+a_\nu)^{\beta_\nu}, \tag{26'}$$

Digitized by Google

гдѣ $x+a_1$, $x+a_2, \ldots$, $x+a_\nu$ суть всѣ различные линейные дѣлители полинома p, то число γ совпадаетъ съ наибольшимъ изъ показателей $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$.

При $\alpha \leqq -\gamma$ рѣшеніе (24) есть цѣлое, каковой случай мы устраняемъ изъ разсмотрѣнія.

Внеся въ уравненіе (23) выраженіе y, опредѣляемое равенствомъ (24), найдемъ:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{d^{n-i}(p^{m-i-\alpha}\sigma_i z)}{dx^{n-i}} = Vp^{m-1}.$$

Выполняя здѣсь дифференцированія по формулѣ Лейбница и затѣмъ умножая результатъ на $p^{n+\alpha-m}$, получимъ:

$$\left\{ \sum_{i=0}^{n-1} (m-i-\alpha)(m-i-\alpha-1)\ldots(m-n-\alpha+1)\sigma_i \left(\frac{dp}{dx}\right)^{n-i} \right.$$

$$\left. + \sigma_n \right\} z + r \cdot p = Vp^{n+\alpha-1}, \tag{27}$$

гдѣ z есть цѣлый полиномъ.

По поводу показателя $n+\alpha-1$ степени p, стоящей во второй части (27), докажемъ слѣдующую лемму.

Лемма. *Для всякаго дробнаго рѣшенія, представленнаго подъ видомъ (24), должно имѣть силу неравенство*:

$$n+\alpha-1 > 0. \tag{28}$$

Доказательство. Сначала докажемъ, что $\gamma - n + 1 \leqq 0$. Количество D имѣетъ не менѣе одного дѣлителя вида $(x+a)^\gamma$. Того же дѣлителя имѣютъ полиномы.

$$Q_0 p^{-1},\ Q_1,\ Q_2 p, \ldots,\ Q_n p^{n-1}.$$

Если вмѣстѣ съ тѣмъ предположить, что $\gamma - n + 1 > 0$, то полиномъ Q_i имѣлъ бы дѣлителя $(x+a)^{\gamma-i+1}$ и всѣ полиномы $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ имѣли бы общаго дѣлителя $(x+a)^{\gamma-n+1}$,

Digitized by Google

что противорѣчитъ сдѣланному въ § 1 ограниченію *). Поэтому должно имѣть силу неравенство

$$\gamma - n + 1 \leqq 0. \tag{29}$$

Изъ неравенствъ (25) и (29) находимъ: $n + \alpha - 1 > 0$, что и т. д.

Доказанная лемма даетъ намъ право представить равенство (27) въ слѣдующей формѣ:

$$\left\{ \sigma_n + \sum_{i=0}^{n-1} (m - i - \alpha) \ldots (m - n - \alpha + 1) \sigma_i \left(\frac{dp}{dx}\right)^{n-i} \right\} z = \tag{30}$$

$$= R.p,$$

гдѣ R есть цѣлый полиномъ.

Теперь легко доказать основную теорему, изъ которой вытекаетъ правило В. Г. Имшенецкаго для нахожденія дробныхъ рѣшеній уравненія (1).

Теорема. *Если уравненіе (1) имѣетъ дробное рѣшеніе вида (24), то полиномъ* σ_n *при*

$$m = n + \alpha - 1 \tag{31}$$

долженъ имѣть общихъ дѣлителей съ полиномомъ p.

Доказательство. Если въ равенствѣ (30) положимъ: $m = n + \alpha - 1$, то оно получитъ видъ:

$$\sigma_n . z = R.p, \tag{30'}$$

т. е. при разсматриваемомъ значеніи m произведеніе $\sigma_n . z$ дѣлится на p. Въ виду того, что z не дѣлится на p, полиномъ σ_n при $m = n + \alpha - 1$ долженъ имѣть общихъ дѣлителей съ полиномомъ p, что и т. д.

---

*) Эти разсужденія, дающія возможность доказать нашу лемму, сохраняютъ силу именно благодаря *канонической* формѣ уравненія (2), т. е. благодаря тому, что *полиномы* $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ *не имѣютъ общаго дѣлителя*. Безъ этого условія доказываемая лемма вообще теряетъ силу, и изложеніе теоріи осложняется необходимостью разбора двухъ случаевъ: 1) когда $n + \alpha - 1 > 0$ и 2) когда $n + \alpha - 1 \leqq 0$.

Digitized by Google

Сопоставляя равенство (31) съ неравенствами (28) и (25), замѣчаемъ, что число m, опредѣляемое равенствомъ (31), есть положительное и неменьшее $n - \gamma$.

Теперь очевидно *необходимое* условіе существованія дробныхъ рѣшеній уравненія (1). Уравненіе это можетъ имѣть дробныя рѣшенія въ томъ лишь случаѣ, *если существуютъ цѣлыя положительныя и неменьшія* $n-\gamma$ *значенія* m, *при которыхъ полиномы* σ_n *и* p *имѣютъ общихъ дѣлителей.* Эти значенія m связаны съ соотвѣтствующими значеніями α посредствомъ равенства (31).

Этимъ необходимымъ условіемъ можно руководствоваться при отысканіи всѣхъ дробныхъ рѣшеній уравненія (1), если таковыя существуютъ.

Хотя выводимыя изъ разсмотрѣнія этого только необходимаго условія формы, подъ которыми изыскиваются дробныя рѣшенія уравненія (1), не имѣютъ еще всей достижимой по сущности вопроса простоты; однако мы считаемъ должнымъ прежде всего разсмотрѣть именно эти важныя для теоріи формы, такъ какъ такое разсмотрѣніе сразу охватываетъ всю сущность вопроса и способствуетъ лучшему уясненію дальнѣйшаго порядка изысканій.

Согласно вышеуказанному необходимому условію, при изысканіи дробныхъ рѣшеній уравненія (1) нужно отыскивать цѣлыя положительныя и неменьшія $n-\gamma$ значенія m, при которыхъ полиномы σ_n и p имѣютъ общаго дѣлителя. Пусть m' есть одно изъ значеній m, удовлетворяющихъ этому условію. Найдя соотвѣтственное значеніе α, опредѣляемое при $m = m'$ равенствомъ (31), и внеся эту величину α въ равенство (24), мы можемъ изыскивать соотвѣтствующее дробное рѣшеніе (если оно существуетъ) подъ формой:

$$y = \frac{s}{D.p^{m'-n+1}}, \qquad (32)$$

гдѣ s есть цѣлый полиномъ, не дѣлящійся на p.

Форма (32) разсматриваемаго дробнаго рѣшенія можетъ быть видоизмѣнена на основаніи слѣдующихъ соображеній.

Digitized by Google

При $m = m'$ произведеніе $\sigma_n . z$, какъ показываетъ равенство (30′), должно дѣлиться на p и слѣдовательно z должно дѣлиться на тѣхъ дѣлителей p, на которые не дѣлится σ_n, т. е. z должно дѣлиться на $g = p : \delta'$, гдѣ δ' есть общій наибольшій дѣлитель полиномовъ p и σ_n. По раздѣленіи числителя и знаменателя второй части равенства (32) на $g = p : \delta'$ будемъ имѣть:

$$y = \frac{\theta}{D . \delta' . p^{m'-n}}, \qquad (33)$$

гдѣ θ есть цѣлый полиномъ, не дѣлящійся на p. Задача теперь приведена къ отысканію полинома θ.

Покажемъ теперь, что дробное рѣшеніе (33) можетъ быть изыскиваемо непосредственно подъ формою, указанною въ мемуарахъ В. Г. Имшенецкаго. Съ этой цѣлью разсмотримъ количество $D_1 . p^{m'-n}$, гдѣ D_1 есть общій наибольшій дѣлитель полиномовъ:

$$\frac{S_0}{p^{m-n}}, \quad \frac{S_1}{p^{m-n}}, \quad \ldots, \quad \frac{S_n}{p^{m-n}},$$

находимый при условіи $m = m'$. Такъ какъ полиномы эти представляются подъ видомъ:

$$D . p^{n-i} \sigma_i \ (i = 0, 1, \ldots, n),$$

то

$$D_1 = D . d \text{ и } D_1 . p^{m'-n} = D . d . p^{m'-n},$$

гдѣ d есть общій наибольшій дѣлитель полиномовъ:

$$p^n \sigma_0, \ p^{n-1} \sigma_1, \ldots, \ p \sigma_{n-1}, \ \sigma_n,$$

находимый при $m = m'$.

Очевидно, d дѣлится на δ', и слѣдовательно дробное рѣшеніе (33) представляется подъ формой:

$$y = \frac{\vartheta}{D_1 . p^{m'-n}}, \qquad (34)$$

гдѣ ϑ есть цѣлый полиномъ. Форма (34) дробнаго рѣшенія

Digitized by Google

есть та, подъ которой оно отыскивается въ способѣ В. Г. Имшенецкаго.

Изъ предложеннаго вывода формы (34) видно, что эта форма не можетъ быть проще равносильной ей формы (33). Формы эти однако большею частію совпадаютъ.

Пусть M есть *наибольшее* изъ цѣлыхъ положительныхъ и неменьшихъ $n-\gamma$ значеній m, при которыхъ полиномы σ_n и p имѣютъ общаго дѣлителя. Это число M непремѣнно существуетъ при существованіи дробныхъ рѣшеній уравненія (1). При $m'=M$ знаменатель второй части равенства (33) получаетъ видъ:

$$D.\delta.p^{M-n},$$

гдѣ δ есть общій наибольшій дѣлитель полиномовъ σ_n и p при $m=M$. Очевидно, выраженіе $D.\delta.p^{M-n}$ нацѣло дѣлится на выраженіе $D\delta' p^{m'-n}$. Поэтому всѣ дробныя рѣшенія уравненія (1) могутъ быть изыскиваемы подъ слѣдующей формой:

$$y=\frac{\Theta}{D.\delta.p^{M-n}}, \qquad (35)$$

гдѣ Θ есть цѣлый полиномъ.

Такимъ образомъ выраженіе $D.\delta.p^{M-n}$ есть общій знаменатель всѣхъ дробныхъ рѣшеній уравненія (1), если таковыя существуютъ. Знаменатель этотъ можетъ самъ оказаться дробнымъ (что возможно только при $M<n$); но это обстоятельство не портитъ дѣла и даже представляетъ выгоды, понижая степень числителя.

Формулу (35) въ виду способности ея представлять всѣ дробныя рѣшенія, если ихъ существуетъ нѣсколько, будемъ называть *общей* формой дробныхъ рѣшеній.

Примѣняя изложенную теорію, полезно имѣть въ виду, что при изысканіи числа m, при которомъ полиномы σ_n и p имѣютъ общаго дѣлителя, можно въ полиномѣ σ_n отбрасывать всѣ члены, дѣлящіеся на p. Иначе говоря, вмѣсто σ_n можно брать всякій полиномъ I, удовлетворяющій сравненію

Digitized by Google

$$\sigma_n \equiv f.I \ (mod.p), \tag{36}$$

въ которомъ f есть цѣлое количество, не имѣющее общихъ дѣлителей съ p, и которое обозначаетъ, что разность $\sigma_n - f.I$ дѣлится на p.

Изыскивая такимъ образомъ болѣе простой полиномъ I, который можетъ замѣнить полиномъ σ_n, приходимъ къ слѣдующимъ n случаямъ.

1. Если $\gamma = 0$ (слѣдовательно $D = 1$, или, иначе, полиномы $Q_0 p^{-1}$ и Q_1 не имѣютъ общихъ дѣлителей), то можно полагать:

$$I = (-1)^{n-1}(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)\left\{ Q_1 - (m-n) Q_0 p^{-1} \frac{dp}{dx} \right\} \tag{36'}$$

2. Если $\gamma = 1$, то можно полагать:

$$I = (-1)^n (m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)\left\{ \frac{Q_2 p}{D} - (m-n+1)\frac{Q_1}{D}\frac{dp}{dx} + (m-n+1)(m-n)\frac{Q_0 p^{-1}}{D}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 \right\} \tag{36''}$$

И. т. д. Вообще для вскаго значенія числа γ, которое, по доказанному, удовлетворяетъ неравенству (29), можно полагать:

$$I = \frac{1}{m}\sum_{k=n-\gamma-1}^{n} (-1)^n m(m-1)\ldots(m-k)\frac{Q_{n-k} p^{n-k}}{D}\left(\frac{dp}{dx}\right)^{k-n+\gamma+1}. \tag{36'''}$$

Въ частныхъ случаяхъ эта форма I допускаетъ дальнѣйшія упрощенія отбрасываніемъ частей, дѣлящихся на p.

Такъ какъ примѣненіе изложенной теоріи достаточно разъяснено многими примѣрами, приведенными въ первомъ мемуарѣ В. Г. Имшенецкаго, то мы ограничимся разсмотрѣніемъ одного только примѣра.

Digitized by Google

Примѣръ. Разсмотримъ примѣръ К. А. Поссе, А. Н. Коркина и Д. К. Бобылева. Предположимъ, что требуется найти дробное рѣшеніе уравненія:

$$x^2(x+1)^5\frac{dy}{dx}+x(x+1)^2(3x^3+19x^2+17x+5)y = 4(9+9x-x^2). \tag{a}$$

Представимъ это уравненіе такъ:

$$\frac{d[x^2(x+1)^5y]}{dx}+x(x+1)^2(-4x^3+3x^2-6x+3)y = 4(9+9x-x^2).$$

Далѣе приведемъ это уравненіе къ *канонической* формѣ, полагая:

$$x(x+1)^2y = z. \tag{b}$$

Получимъ:

$$\frac{d[x(x+1)^3z]}{dx}+(-4x^3+3x^2-6x+3)z = 4(9+9x-x^2). \tag{c}$$

Это уравненіе не имѣетъ цѣлаго рѣшенія, и потому остается искать дробное рѣшеніе его. Для уравненія (c) имѣемъ:

$$Q_0 = P_0 = x(x+1)^3,\ Q_1 = -4x^3+3x^2-6x+3,$$

$$p = x(x+1),\ D = 1,\ \sigma_0 = (x+1)^2,$$

$$\sigma_1 \equiv -4x^3+3x^2-6x+3-(m-1)(x+1)^2.$$

Полиномы σ_1 и p будутъ имѣть общаго дѣлителя только при $m=4$. Полиномы $S_0 = p^m.\sigma_0$ и $S_1 = p^{m-1}\sigma_1$ при $m=4$ будутъ имѣть общаго дѣлителя $x^4(x+1)^3$; слѣдовательно искомое дробное рѣшеніе, если оно существуетъ, можно представить подъ формой:

$$z = \frac{\vartheta}{x^4(x+1)^3},$$

гдѣ ϑ есть цѣлое рѣшеніе уравненія

Digitized by Google

$$(x+1)^3\frac{d\vartheta}{dx} - (7x^2+6x+15)\vartheta = 4x^3(x+1)^3(9+9x-x^2).$$

Это цѣлое рѣшеніе существуетъ и представляется такъ: $\vartheta = (x+1)^3(3+4x^3)$. Слѣдовательно дробное рѣшеніе z представляется по сокращеніи такъ:

$$z = \frac{3+4x^3}{x^4}.$$

Затѣмъ получимъ:

$$y = \frac{3+4x^3}{x^5(x+1)^2}.$$

Въ сократимости первоначально полученнаго выраженія для z сказался недостатокъ изложеннаго порядка вычисленій. Однако недостатокъ этотъ теперь выразился менѣе рѣзко, чѣмъ при вычисленіяхъ, приведенныхъ въ письмѣ К. А. Поссе и основанныхъ на примѣненіи той формы интегрирующаго множителя, которая разсмотрѣна въ мемуарахъ В. Г. Имшенецкаго.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію усовершенствованныхъ формъ, служащихъ для изысканія дробныхъ рѣшеній уравненія (1) и устраняющихъ, по возможности, упомянутый сейчасъ недостатокъ.

§ 3. **Нахожденіе дробныхъ рѣшеній при посредствѣ совмѣстнаго примѣненія свойствъ, вытекающихъ изъ разсмотрѣнія основнаго интегрирующаго множителя и вспомогательныхъ множителей.**

Будемъ различать два случая: 1) когда имѣется полное рѣшеніе уравненія $P_0 = 0$ (иначе говоря, когда даны въ явной формѣ всѣ линейные дѣлители полинома p) и 2) когда уравненіе $P_0 = 0$ распадается на неприводимыя уравненія, полное рѣшеніе которыхъ избѣгается.

Ниже въ обоихъ случаяхъ предполагается, что дробное рѣшеніе уравненія (1), если таковое рѣшеніе существуетъ, представлено, между прочимъ, въ формѣ несократимой дроби, т. е. представлено такъ:

Digitized by Google

$$y = \frac{X}{Y},$$

гдѣ X и Y суть цѣлые полиномы, не имѣющіе общаго дѣлителя. Эти именно полиномы разумѣются въ послѣдующемъ, когда рѣчь идетъ о числителѣ X и знаменателѣ Y дробнаго рѣшенія.

Первый случай.

Имѣемъ:

$$p = (x + a_1)(x + a_2)\ldots(x + a_\nu).$$

Разлагая на множители знаменатель Y дробнаго рѣшенія, а также выдѣляя множителями въ числителѣ X всѣ его дѣлители, общіе съ дѣлителями полинома p, представимъ дробное рѣшеніе такъ:

$$y = \frac{Z}{(x + a_1)^{\alpha_1}(x + a_2)^{\alpha_2}\ldots(x + a_\nu)^{\alpha_\nu}}, \qquad (37)$$

гдѣ Z есть цѣлый полиномъ, не имѣющій съ p общихъ дѣлителей.

Очевидно, если $\alpha_s > 0$, гдѣ s есть одно изъ чиселъ 1, 2,..., ν, то $x + a_s$ есть дѣлитель знаменателя Y; если же $\alpha_s \leqq 0$, то $x + a_s$ не есть дѣлитель знаменателя Y. Поэтому при изысканіи знаменателя Y дробнаго рѣшенія достаточно умѣть опредѣлять только *положительныя* изъ чиселъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$.

Но для упрощенія вычисленій важно имѣть свѣдѣнія и объ отрицательныхъ изъ показателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, такъ какъ это ведетъ къ облегченію вычисленія числителя X. Поэтому ниже, *по возможности*, будемъ обращать вниманіе и на отрицательныя изъ указанныхъ показателей.

Изучая свойства показателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, обозначимъ одинъ изъ нихъ чрезъ α, а соотвѣтствующій ему дѣлитель полинома p—чрезъ $x + a$. Затѣмъ представимъ разсматриваемое дробное рѣшеніе такъ:

$$y = \frac{K}{(x + a)^\alpha . L}, \qquad (38)$$

Digitized by Google

гдѣ K и L суть цѣлые полиномы, изъ которыхъ ни одинъ не дѣлится на $x + a$.

Далѣе воспользуемся *вспомогательнымъ* интегрирующимъ множителемъ вида:

$$\mu = (x + a)^{m-1}.$$

Уравненіе (6) при этомъ множителѣ представится такъ:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{d^{n-i}(S_i y)}{dx^{n-i}} = V(x + a)^{m-1}, \qquad (39)$$

гдѣ

$$S_i = (x + a)^{m-i} T_i, \qquad T_i =$$

$$\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{i} (-1)^k \binom{n - i + k}{k} m \ldots (m - k)\, Q_{i-k} (x + a)^{i-k-1}.$$

Очевидно, T_i при произвольномъ m есть цѣлый полиномъ.

Пусть $(x + a)^\beta$ есть общій дѣлитель полиномовъ:

$$Q_0 (x + a)^{-1},\ Q_1,\ Q_2 (x + a), \ldots,\ Q_n (x + a)^{n-1}$$

и пусть число β выбрано такъ, что полиномы:

$$Q_0 (x + a)^{-1-\beta},\ Q_1 (x + a)^{-\beta},\ Q_2 (x + a)^{1-\beta}, \ldots,\ Q_n (x + a)^{n-1-\beta}$$

не имѣютъ общаго дѣлителя $x + a$.

Замѣтимъ теперь же, что

$$\beta - n + 1 \leqq 0, \qquad (40)$$

такъ какъ въ противномъ случаѣ полиномы $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ имѣли бы общаго дѣлителя $(x + a)^{\beta-n+1}$, что̀ противорѣчитъ сдѣланнымъ въ § 1 ограниченіямъ относительно уравненія (2), которое мы считаемъ *каноническимъ*.

Очевидно, $(x + a)^\beta$ есть общій дѣлитель полиномовъ T_0, $T_1, \ldots, T_n$. Поэтому количества ζ_i, опредѣляемыя равенствами вида:

$$T_i = (x + a)^\beta \zeta_i, \quad (i = 0, 1, \ldots, n), \qquad (41)$$

суть цѣлые полиномы.

Digitized by Google

Полиномъ ζ_n, заслуживающій особеннаго вниманія, представляется такъ:

$$\zeta_n = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k m(m-1)\ldots(m-k)Q_{n-k}(x+a)^{n-k-1-\beta}. \quad (42)$$

Полиномъ этотъ при произвольномъ m не дѣлится на $x+a$.

Уравненіе (39) представляется такъ:

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{d^{n-i}[(x+a)^{m-i+\beta}\zeta_i y]}{dx^{n-i}} = V(x+a)^{m-1}.$$

Внеся сюда вмѣсто y дробное рѣшеніе (38) и притомъ полагая:

$$V = (x+a)^{\varepsilon}v, \quad (43)$$

гдѣ v есть цѣлый полиномъ, не дѣлящійся на $x+a$, будемъ имѣть:

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{d^{n-i}\left[(x+a)^{m-i+\beta-\alpha}\zeta_i\frac{K}{L}\right]}{dx^{n-i}} = v.(x+a)^{m-1+\varepsilon}.$$

Выполняя здѣсь дифференцированія по формулѣ Лейбница, потомъ умножая результатъ на

$$L^{n+1}(x+a)^{\alpha-\beta+n-m},$$

получимъ:

$$\left\{\zeta_n + \sum_{i=0}^{n-1}(m-i+\beta-\alpha)\ldots(m-n+\beta-\alpha+1)\zeta_i\right\}KL^n$$

$$+ r.(x+a) = v.L^{n+1}.(x+a)^{n+\alpha-\beta-1+\varepsilon}, \quad (44)$$

гдѣ r есть цѣлый полиномъ.

Разсмотримъ тотъ основной случай, когда показатель $n+a-\beta-1+\varepsilon$ при $x+a$ во второй части равенства (44) *положительный*, т. е. когда

Digitized by Google

$$\alpha > \alpha', \tag{45}$$

гдѣ

$$\alpha' = 1 + \beta - n - \varepsilon. \tag{46}$$

Неравенство (40) показываетъ, что

$$\alpha' \leqq 0. \tag{47}$$

Слѣдовательно неравенство (45) обнимаетъ всѣ положительныя значенія α и даже можетъ иногда (при $\alpha' < 0$) обнимать отчасти отрицательныя значенія α. Поэтому разсматриваемый случай, характеризуемый неравенствомъ (45), обнимаетъ всѣ дѣлители вида $x + a$, принадлежащіе знаменателю Y дробнаго рѣшенія, и отчасти можетъ обнимать дѣлители вида $x + a$, не принадлежащіе знаменателю Y.

Въ разсматриваемомъ случаѣ (т. е. при $\alpha > \alpha'$) равенство (44) представляется такъ:

$$\left\{ \zeta_n + \sum_{i=0}^{n-1} (m - i + \beta - \alpha) \ldots (m - n + \beta - \alpha + 1) \zeta_i \right\} KL^n = R.(x + a), \tag{48}$$

гдѣ R есть цѣлый полиномъ. Полагая здѣсь

$$m = n + \alpha - \beta - 1, \tag{49}$$

получимъ:

$$\zeta_n . K . L^n = R.(x + a). \tag{50}$$

Такъ какъ K и L не дѣлятся на $x + a$, то равенство (50) показываетъ, что при разсматриваемомъ значеніи m полиномъ ζ_n долженъ дѣлиться на $x + a$. Вмѣстѣ съ тѣмъ въ силу неравенства (45) разсматриваемое значеніе m, опредѣляемое равенствомъ (49), должно удовлетворять условію:

$$m > -\varepsilon. \tag{51}$$

Такимъ образомъ всѣ дробныя рѣшенія, для которыхъ имѣетъ силу равенство (45), характеризуются тѣмъ *необхо-*

Digitized by Google

димымъ условіемъ, что *каждому изъ нихъ соотвѣтствуетъ цѣлое и неменьшее* $1-\varepsilon$ *значеніе* m, *при которомъ полиномъ* ζ_n *дѣлится на* $x+a$. Это значеніе m связано съ соотвѣтствующимъ значеніемъ α посредствомъ равенства (49).

Дробныя рѣшенія, для которыхъ неравенство (45) не имѣетъ силы и слѣдовательно имѣетъ силу неравенство:

$$\alpha \leqq \alpha', \tag{52}$$

не подчиняются указанному выше необходимому условію, такъ какъ для нихъ равенство (44) не можетъ быть представлено въ формѣ (48). Эти дробныя рѣшенія характеризуются другимъ менѣе полнымъ, но *необходимымъ* и для изысканія дробныхъ рѣшеній *достаточнымъ* условіемъ: *дѣлитель* $x+a$ *полинома* p *не можетъ принадлежать знаменателю* Y *дробнаго рѣшенія этого рода* [что видно изъ сопоставленія неравенства (52) съ неравенствомъ (47)].

Обратимъ вниманіе на тотъ примѣчательный случай, когда $V=0$, т. е. когда уравненіе (1) не имѣетъ второй части. Въ этомъ случаѣ равенство (44) всегда представляется подъ формой (48) [такъ какъ въ этомъ случаѣ можно положить: $\varepsilon=+\infty$, такъ что условіе (45) выполняется само собою]. Слѣдовательно показатель α въ разсматриваемомъ случаѣ *всегда* характеризуется тѣмъ условіемъ, что при $m=n+\alpha-\beta-1$ полиномъ ζ_n дѣлится на $x+a$. Это замѣчаніе относится не только къ дробнымъ, но и къ *цѣлымъ* рѣшеніямъ уравненія безъ второй части, такъ какъ въ этомъ случаѣ предшествующіе выводы, относящіеся къ формѣ (37), имѣютъ полную силу безразлично для цѣлыхъ и дробныхъ рѣшеній.

Такимъ образомъ свойства показателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ для всѣхъ раціональныхъ рѣшеній уравненія безъ второй части (т. е. при $V=0$) характеризуются съ особенною полнотою. Отсюда слѣдуетъ, что изысканіе дробныхъ рѣшеній линейнаго уравненія безъ второй части представляетъ бо́льшую простоту (какъ и слѣдовало ожидать).

Замѣтимъ между прочимъ, что отсутствіе какихъ бы то ни было цѣлыхъ значеній m, при которыхъ полиномъ ζ_n дѣлится

Digitized by Google

на $x + a$, *есть рѣшительный признакъ несуществованія цѣлыхъ и дробныхъ рѣшеній уравненія безъ второй части*; между тѣмъ для уравненій со второю частью этотъпростой признакъ не дѣйствителенъ.

Указанною простотою, свойственною уравненію безъ второй части, мы, по возможности, должны пользоваться даже при рѣшеніи уравненій со второю частью. Такъ, если уравненіе (1) со второю частью имѣетъ нѣсколько раціональныхъ рѣшеній, то достаточно отыскать непосредственно изъ этого уравненія только *одно* раціональное рѣшеніе (если можно даже цѣлое), которое обозначимъ чрезъ y_1; затѣмъ остальныя дробныя рѣшенія уравненія (1) найдутся при посредствѣ уравненія безъ второй части, получаемаго послѣ извѣстнаго преобразованія: $y = y_1 + z$.

Переходимъ опять къ разсмотрѣнію общаго случая, не различая того, имѣетъ ли уравненіе (1) вторую часть или нѣтъ.

Изложенныя выше необходимыя условія, характеризующія показатель α, распространяются на всѣ дѣлители $x + a_1$, $x + a_2, \ldots, x + a_\nu$ полинома p и на соотвѣтствующія имъ показатели $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$.

При этомъ распространеніи приходится имѣть дѣло съ ν полиномами ζ_n, соотвѣтствующими различнымъ значеніямъ дѣлителя $x + a$ полинома p. Чтобы свести разсмотрѣніе этихъ ν полиномовъ къ разсмотрѣнію только одного *основнаго* полинома σ_n, опредѣляемаго равенствомъ (22), разсмотримъ связь между полиномами σ_n и ζ_n.

Замѣтивъ, что

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x + a} + \rho . (x + a),$$

гдѣ ρ есть цѣлый полиномъ, затѣмъ внеся это выраженіе $\frac{dp}{dx}$ во вторую часть равенства (22) и принявъ во вниманіе равенство (42), находимъ:

$$G . \sigma_n = H . \zeta_n + (x + a) . U, \qquad (53)$$

Digitized by Google

гдѣ G, H и U суть цѣлые полиномы, изъ которыхъ первый и второй выражаются такъ:

$$G = \frac{D}{(x+a)^{\beta}} \text{ и } H = \left(\frac{p}{x+a}\right)^{n-1}.$$

Такъ какъ полиномы G и H не могутъ дѣлиться на $x+a$, то связь между полиномами σ_n и ζ_n, выражаемая равенствомъ (53), показываетъ, что *значенія m, при которыхъ полиномъ ζ_n дѣлится на $x+a$, вполнѣ совпадаютъ съ значеніями m, при которыхъ полиномъ σ_n дѣлится на дѣлитель $x+a$ полинома p.*

Такимъ образомъ всѣ значенія m, которыя играютъ роль въ указанныхъ выше необходимыхъ условіяхъ, характеризующихъ показатели $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, могутъ быть найдены при помощи полинома σ_n, *при чемъ эти значенія m приходится распредѣлять въ группы, смотря по тому, какой изъ линейныхъ дѣлителей полинома p при данномъ m дѣлается дѣлителемъ полинома σ_n.*

Теперь, исходя изъ указанныхъ выше необходимыхъ условій, характеризующихъ показатели $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ дробнаго рѣшенія (37), будемъ разсматривать болѣе простыя формы для изысканія дробныхъ рѣшеній уравненія (1).

При упрощеніи формъ дробныхъ рѣшеній полезно имѣть въ виду слѣдующіе вытекающіе изъ предыдущаго замѣчанія.

Пусть существуетъ дробное рѣшеніе, представляющееся въ формѣ:

$$y = \frac{z}{(x+a)^{\omega}.U}, \tag{54}$$

гдѣ z есть цѣлый полиномъ и U есть произведеніе степеней линейныхъ дѣлителей полинома

$$q = \frac{p}{x+a}.$$

Если $\omega > \alpha' = 1+\beta-n-\varepsilon$ и притомъ показатель ω не совпадаетъ съ какимъ либо изъ значеній α, удовлетворяющихъ

Digitized by Google

вышеуказанному необходимому условію (т. е. полиномъ σ_n при

$$m = n + \omega - \beta - 1$$

не дѣлится на $x + a$), то *z непремѣнно дѣлится на* $x + a$ *нѣсколько разъ и дробное рѣшеніе* (54) *представляется въ болѣе простой формѣ*:

$$y = \frac{z_1}{(x + a)^A . U}, \qquad (55)$$

гдѣ z_1 есть цѣлый полиномъ, $A < \omega$ и притомъ показатель A выбирается, какъ ближайшее къ ω значеніе α, большее α' и удовлетворяющее вышеуказанному необходимому условію, согласно которому полиномъ σ_n при $m = n + \alpha - \beta - 1$ дѣлится на $x + a$; при отсутствіи же таковыхъ значеній α показатель A выбирается такъ: $A = \alpha'$.

Опредѣляя такимъ образомъ число A, нужно найти: 1) всѣ цѣлыя неменьшія $1 - \varepsilon$ и небо́льшія $n + \omega - \beta - 1$ значенія m, при которыхъ полиномъ σ_n дѣлится на $x + a$, и 2) значенія α, которыя соотвѣтствуютъ этимъ значеніямъ m и опредѣляются при помощи равенства (49). Къ этимъ значеніямъ α нужно присоединить значеніе

$$\alpha = \alpha' = 1 + \beta - n - \varepsilon.$$

Число A есть *наибольшее* изъ указанныхъ значеній α.

Воспользуемся этими замѣчаніями, примѣнивъ ихъ къ формѣ (32), равносильной формѣ (33).

Знаменатель

$$Dp^{m' - n + 1}$$

формы (32) есть произведеніе множителей вида: $(x + a)^\omega$, гдѣ

$$\omega = m' - n + \beta + 1. \qquad (56)$$

Отсюда и изъ свойствъ числа m' легко усмотрѣть, что *указанное выше упрощеніе примѣняется къ формѣ* (32) *для каждаго изъ тѣхъ линейныхъ дѣлителей полинома p, на которые полиномъ* σ_n *при* $m = m'$ *не дѣлится нацѣло.*

Упрощеніе это оказывается вообще болѣе значительнымъ, чѣмъ то, которое форму (32) превратило въ равносильную ей форму (33).

Digitized by Google

рѣшеній уррвненія (60), можетъ принимать всѣ цѣлыя значенія m (безъ ограниченія низшимъ предѣломъ $n-\gamma$), при которыхъ полиномы σ_m и p имѣютъ общихъ дѣлителей.

Примѣръ. Разсмотримъ опять примѣръ К. А. Поссе, А. Н. Коркина и Д. К. Бобылева. Въ этомъ примѣрѣ данное уравненіе, по приведеніи къ канонической формѣ, представляется такъ:

$$\frac{d(Q_0 z)}{dx} + Q_1 z = V,$$

гдѣ

$$Q = x(x+1)^3,\ Q_1 = -4x^3 + 3x^2 - 6x + 3,\ V = 4(9 + 9x - x^2),$$

$$p = x(x+1),\ a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ D = 1, \sigma_1 \equiv Q_1 - (m-1)(x^2+1).$$

Опредѣляя показатели A_1 и A_2, находимъ:

$$\varepsilon_1 = 0,\ \beta_1 = 0,\ \alpha_1 = 0 \text{ и } 4,\ A_1 = 4;$$

$$\varepsilon_2 = 0,\ \beta_2 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ A_2 = 0.$$

Слѣдовательно искомое дробное рѣшеніе должно представляться подъ формой:

$$z = \frac{\xi}{(x+a_1)^{A_1}(x+a_2)^{A_2}} = \frac{\xi}{x^4},$$

гдѣ ξ есть цѣлый полиномъ. Найдя ξ, получимъ:

$$z = \frac{3 + 4x^3}{x^4}.$$

Результатъ этотъ прямо получился въ формѣ несократимой дроби, въ чемъ выразились преимущества этого способа вычисленій сравнительно съ вычисленіями, указанными въ § 2.

Второй случай.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію втораго случая, когда уравненіе $P_0 = 0$ распадается на неприводимыя уравненія. Пусть эти неприводимыя уравненія будутъ:

Digitized by Google

$$F_1 = 0,\ F_2 = 0, \ldots,\ F_\nu = 0, \tag{61}$$

при чемъ будемъ имѣть:

$$p = F_1 . F_2 \ldots F_\nu . \tag{62}$$

Неприводимость здѣсь понимается въ извѣстномъ алгебраическомъ смыслѣ, съ тѣмъ обобщеніемъ, которое состоитъ въ присоединеніи къ раціональнымъ количествамъ опредѣленныхъ группъ ирраціональныхъ количествъ. Таковыми *присоединенными* количествами въ данномъ случаѣ считаются (если существуютъ) ирраціональныя количества, входящія въ коэффиціенты полиномовъ $P_0, P_1, \ldots, P_n$ и V. Послѣдующія доказательства находятся въ связи съ извѣстными основными свойствами неприводимыхъ полиномовъ, которыя ради краткости подробно не упоминаются.

Пріемами, аналогичными тѣмъ, которые изложены въ концѣ § 1 (въ примѣч. II), можно доказать, что всякій неприводимый дѣлитель знаменателя Y дробнаго рѣшенія, если таковое существуетъ, есть дѣлитель полинома p.

Разлагая на неприводимые множители знаменатель Y дробнаго рѣшенія уравненія (1), а также выдѣляя множителями въ числителѣ X всѣ его неприводимые дѣлители, общіе съ дѣлителями полинома p, представимъ дробное рѣшеніе такъ:

$$y = \frac{Z}{F_1^{\alpha_1} . F_2^{\alpha_2} \ldots F_\nu^{\alpha_\nu}}, \tag{63}$$

гдѣ Z есть цѣлый полиномъ, не имѣющій съ p общихъ дѣлителей.

Изъ показателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ по крайней мѣрѣ одинъ долженъ быть положительнымъ, такъ какъ въ противномъ случаѣ рѣшеніе (63) было бы цѣлымъ.

Изучая свойства чиселъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, обозначимъ одно изъ нихъ черезъ α, а соотвѣтствующій ему неприводимый дѣлитель полинома p — чрезъ F. Затѣмъ представимъ разсматриваемое дробное рѣшеніе такъ:

$$y = \frac{K}{F^\mu . L}, \tag{64}$$

Digitized by Google

гдѣ K и L суть цѣлые полиномы, изъ которыхъ ни одинъ не дѣлится на F.

Далѣе воспользуемся вспомогательнымъ интегрирующимъ множителемъ вида:

$$\mu = F^{m-1}. \tag{65}$$

Дальнѣйшія выкладки, соотвѣтствующія этому множителю, аналогичны выкладкамъ, разсмотрѣннымъ выше при разборѣ перваго случая. Поэтому позволимъ себѣ излагать послѣдующее, лишь формулируя главные результаты.

Пусть F^β есть общій дѣлитель полиномовъ

$$Q_0F^{-1},\ Q_1,\ Q_2F,\ \ldots,\ Q_nF^{n-1}, \tag{66}$$

выбранный такъ, что полиномы

$$Q_0F^{-1-\beta},\ Q_1F^{-\beta},\ Q_2F^{1-\beta},\ \ldots,\ Q_nF^{n-1-\beta}$$

не имѣютъ общаго дѣлителя F.

Число β должно удовлетворять неравенству:

$$\beta - n + 1 \leqq 0, \tag{67}$$

вытекающему изъ того обстоятельства, что полиномы Q_0, $Q_1, \ldots, Q_n$ не имѣютъ общаго дѣлителя, такъ какъ уравненіе (2) мы считаемъ *каноническимъ*.

Далѣе, переходя отъ общихъ выраженій функцій S_i къ частнымъ выраженіямъ ихъ, соотвѣтствующимъ множителю (65), будемъ имѣть:

$$S_i = F^{m-1}T_i \quad \text{и} \quad T_i = F^\beta\zeta_i,$$

гдѣ ζ_i суть цѣлые полиномы. Полиномъ ζ_n, требующій особаго вниманія, представляется такъ:

$$\zeta_n = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k m(m-1)\ldots(m-k)Q_{n-k}F^{m-k-1-\beta}\left(\frac{dF}{dx}\right)^k + F.\rho, \tag{68}$$

гдѣ ρ есть цѣлый полиномъ. Очевидно, при произвольномъ m полиномъ ζ_n не можетъ дѣлиться на F.

Digitized by Google

Положивъ:

$$V = F^{\varepsilon}.v, \tag{69}$$

гдѣ v есть цѣлый полиномъ, не дѣлящійся на F, уравненіе (1) можемъ предетавить такъ:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{d^{n-i}(F^{m-i+\beta}\zeta_i y)}{dx^{n-i}} F = v.\ ^{m-i+\varepsilon}.$$

Внеся сюда выраженіе y, опредѣляемое равенствомъ (64), затѣмъ примѣнивъ формулу Лейбница и умноживъ результатъ на $L^{n+1}F^{\alpha-\beta+n-m}$, получимъ:

$$\left\{\zeta_n + \sum_{i=o}^{n-1}(m-i+\beta-\alpha)\ldots(m-n+\beta-\alpha+1)\zeta_i\left(\frac{dF}{dx}\right)^{n-i}\right\}K.L^n$$

$$+ r.F = v.L^{n+1}.\ F^{n+\alpha-\beta-i+\varepsilon}, \tag{70}$$

гдѣ r есть цѣлый полиномъ.

Разсмотримъ тотъ основной случай, когда показатель $n + \alpha - \beta - 1 + \varepsilon$ при F во второй части равенства (70) положительный, т. е. когда

$$\alpha > \beta + 1 - n - \varepsilon. \tag{71}$$

Неравенство (67) показываетъ, что

$$\beta + 1 - n - \varepsilon \leqq 0. \tag{72}$$

Слѣдовательно неравенство (71) обнимаетъ всѣ положительныя значенія α.

Если неравенство (71) имѣетъ силу, то равенство (70) получаетъ видъ:

$$\left\{\zeta_n + \sum_{i=0}^{n-1}(m-i+\beta-\alpha)\ldots(m-n+\beta-\alpha+1)\zeta_i\left(\frac{dF}{dx}\right)^{n-i}\right\}K.L^n$$

$$= R.F, \tag{73}$$

Digitized by Google

гдѣ R есть цѣлый полиномъ. При

$$m = n + \alpha - \beta - 1 \tag{74}$$

получимъ:

$$\zeta_n . KL^n = R . F, \tag{75}$$

т. е. при указанномъ значеніи m полиномъ ζ_n долженъ дѣлиться на F. Вмѣстѣ съ тѣмъ это значеніе m въ силу неравенства (71) должно удовлетворять условію:

$$m > -\varepsilon. \tag{76}$$

Такимъ образомъ всѣ дробныя рѣшенія, для которыхъ имѣетъ силу неравенство (71), характеризуются тѣмъ *необходимымъ* условіемъ, что *каждому изъ нихъ соотвѣтствуетъ цѣлое и неменьшее 1 — ε значеніе m, при которомъ полиномъ* ζ_n *дѣлится на F*. Это значеніе m связано съ соотвѣтствующимъ значеніемъ α посредствомъ равенства (74).

Дробныя рѣшенія, для которыхъ неравенство (71) не имѣетъ силы, не подчиняются указанному сейчасъ необходимому условію. Но для нихъ, очевидно, имѣетъ силу неравенство $\alpha \leqq 0$, т. е. *дѣлитель F не принадлежитъ знаменателю Y дробнаго рѣшенія этого рода.*

При $V = 0$, т. е. для уравненія безъ второй части ограниченія, представляемыя неравенствами (71) и (76), устраняются, такъ какъ они выполняются сами собою въ силу того, что можно положить: $\varepsilon = +\infty$. Такимъ образомъ изысканіе дробныхъ (а равно и цѣлыхъ) рѣшеній уравненія безъ второй части представляетъ бо́льшую простоту сравнительно съ уравненіями, имѣющими вторую часть.

Изложенныя выше необходимыя условія, характеризующія показатель α, распространяются на всѣ неприводимые дѣлители $F_1, F_2, \ldots, F_\nu$ полинома p и на соотвѣтствующіе показатели $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$. При этомъ распространеніи приходится имѣть дѣло съ ν полиномами ζ_n, соотвѣтствующими различнымъ значеніямъ неприводимаго дѣлителя F полинома p. Чтобы свести разсмотрѣніе этихъ ν полиномовъ къ разсмотрѣнію одного только *основнаго* полинома σ_n, опредѣляемаго равен-

Digitized by Google

ствомъ (22), разсмотримъ связь между полиномами σ_n и ζ_n. Замѣтивъ, что

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{F}\frac{dF}{dx} + \rho . F,$$

гдѣ ρ есть цѣлый полиномъ, затѣмъ внеся это выраженіе $\frac{dp}{dx}$ во вторую часть равенства (22) и принявъ во вниманіе равенство (68), находимъ:

$$G.\sigma_n = H.\zeta_n + F.U, \qquad (77)$$

гдѣ G, H и U суть цѣлые полиномы, изъ которыхъ первый и второй выражаются такъ:

$$G = \frac{D}{F^\beta} \text{ и } H = \left(\frac{p}{F}\right)^{n-1}.$$

Такъ какъ полиномы G и H не могутъ дѣлиться на F, то связь между полиномами σ_n и ζ_n, выражаемая равенствомъ (77), показываетъ, что *значенія m, при которыхъ полиномъ ζ_n дѣлится на F, вполнѣ совпадаютъ съ значеніями m, при которыхъ полиномъ σ_n дѣлится на дѣлитель F полинома p.*

Такимъ образомъ всѣ значенія m, которыя играютъ роль въ указанныхъ выше необходимыхъ условіяхъ, характеризующихъ числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, могутъ быть находимы при помощи одного только полинома σ_n, *при чемъ эти значенія m приходится распредѣлять въ группы, смотря по тому, какой изъ неприводимыхъ дѣлителей полинома p при данномъ m дѣлается дѣлителемъ полинома σ_n.*

Теперь, исходя изъ указанныхъ выше необходимыхъ условій, характеризующихъ показатели $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ дробнаго рѣшенія (63), составимъ простѣйшую форму, подъ которой изыскиваются дробныя рѣшенія, принадлежащія къ группѣ $[m']$, т. е. способныя представляться подъ формой (33). Порядокъ составленія этой простѣйшей формы опредѣляется слѣдующимъ правиломъ.

Правило. *Представимъ общій наибольшій дѣлитель D полиномовъ*

Digitized by Google

$$Q_0 p^{-1},\ Q_1,\ Q_2 p, \ldots,\ Q_n p^{n-1}$$

такъ:

$$D = F_1^{\beta_1} F_2^{\beta_2} \ldots F_\nu^{\beta_\nu}.$$

Далѣе представимъ полиномъ V въ слѣдующихъ формахъ:

$$V = F_1^{\varepsilon_1} v_1 = F_2^{\varepsilon_2} v_2 = \ldots = F^{\varepsilon_\nu} v_\nu,$$

гдѣ $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ суть цѣлые полиномы, выбранные такъ, что v_i не дѣлится на F_i ($i = 1, 2, \ldots, \nu$). Затѣмъ, разумѣя подъ i каждое изъ чиселъ: 1, 2, ..., ν, найдемъ (если возможно): 1) всѣ цѣлыя неменьшія 1—ε_i и небо́льшія m' значенія m, при которыхъ полиномъ σ_n дѣлится на F_i, и 2) значенія α_i, которыя соотвѣтствуютъ этимъ значеніямъ m и опредѣляются при помощи равенствъ вида:

$$m = n + \alpha_i - \beta_i - 1.$$

Къ этимъ значеніямъ α_i присоединимъ еще значеніе:

$$\alpha_i = 1 + \beta_i - n - \varepsilon_i$$

и затѣмъ возьмемъ наибольшее изъ всѣхъ указанныхъ значеній α_i, которое обозначимъ чрезъ A_i. Всѣ дробныя рѣшенія, принадлежащія къ группѣ $[m']$, могутъ быть изыскиваемы подъ формой:

$$y = \frac{\xi}{F_1^{A_1} F_2^{A_2} \ldots F_\nu^{A_\nu}}, \qquad (78)$$

гдѣ ξ есть цѣлый полиномъ.

Если числу m' припишемъ наибольшее значеніе M, то форма (78) перейдетъ въ форму, равносильную общей формѣ (35).

При $V = 0$ изложенное правило извѣстнымъ образомъ упрощается и распространяется на всѣ вообще раціональныя рѣшенія уравненія (60).

§ 4. Заключеніе.

Пріемы нахожденія дробныхъ рѣшеній уравненія (1), указанные въ § 2, совпадаютъ съ пріемами В. Г. Имшенецкаго и лишь пополнены доказательствами ихъ основъ.

Пріемы эти, сразу охватывающіе всю сущность вопроса, затѣмъ требуютъ нѣкотораго упрощенія основныхъ формъ,

Digitized by Google

подъ которыми изыскиваются дробныя рѣшенія. Это упрощеніе, изложенное въ § 3, достигается присоединеніемъ къ вычисленіямъ В. Г. Имшенецкаго особой группировки разсматриваемыхъ имъ значеній m, при которыхъ полиномы σ_n и p имѣютъ общихъ дѣлителей, каковая группировка вполнѣ достаточна для выбора наиболѣе удобныхъ формъ, служащихъ для изысканія дробныхъ рѣшеній уравненія (1).

Надо сказать, что указанная группировка устанавливается, исходя изъ тѣхъ же основныхъ идей, которыми пользовался В. Г. Имшенецкій, т. е. изъ примѣненія формы (2) линейнаго уравненія и изъ преобразованія ея при посредствѣ надлежащимъ образомъ выбранныхъ вспомогательныхъ интегрирующихъ множителей. Такимъ образомъ указанное въ § 3 дальнѣйшее усовершенствованіе способа В. Г. Имшенецкаго уже заключалось въ его основныхъ идеяхъ, изъ которыхъ В. Г. Имшенецкій лишь не успѣлъ извлечь всѣхъ выгодъ.

При указанномъ развитіи способа В. Г. Имшенецкаго способъ Ліувилля долженъ безусловно уступить мѣсто способу В. Г. Имшенецкаго, оставаясь лишь достояніемъ исторіи, свидѣтельствующей, что честь почина въ общемъ разсмотрѣніи вопроса объ отысканіи дробныхъ рѣшеній уравненія (1) принадлежитъ Ліувиллю.

Недостатки способа Ліувилля, указанные еще Пуассономъ въ докладѣ о мемуарахъ Ліувилля, представленномъ Парижской академіи наукъ, состоятъ въ необходимости разсматривать множество мелочныхъ случаевъ при отсутствіи идеи, связующей всѣ эти случаи *).

---

*) Выше (въ концѣ § 2) написаны равенства (36′), (36″) и (36‴), относящіяся къ n случаямъ. Если эти случаи еще подраздѣлить на болѣе мелкіе случаи, соотвѣтствующіе болѣе подробному различенію того, съ какимъ именно показателемъ каждый линейный дѣлитель полинома p входитъ множителемъ въ выраженіе D, то тогда получится вся масса случаевъ Ліувилля.

Въ сущности Ліувилль для уравненія порядка n ограничивается разборомъ только немногихъ произвольно выхваченныхъ случаевъ; все остальное онъ предоставляетъ догадливости читателя. Такимъ образомъ со стороны изложенія мемуары Ліувилля, оставляющіе

Digitized by Google

Способъ В. Г. Имшенецкаго, не утрачивая ни одного изъ достоинствъ способа Ліувилля, устраняетъ вполнѣ указанные выше недостатки. Въ самомъ дѣлѣ все то разнообразіе мелочныхъ случаевъ, въ которомъ вынужденъ разбираться вычисляющій по способу Ліувилля, сводится въ способѣ В. Г. Имшенецкаго, такъ сказать, къ *единственному* случаю, иначе говоря, къ одному и тому же правилу, всегда приводящему вычисленія къ однообразному процессу.

Запутанность способа Ліувилля не позволила ему для уравненій выше перваго порядка указать практически осуществимый порядокъ нахожденія дробныхъ рѣшеній уравненія (1) безъ посредства полнаго рѣшенія уравненія $P_0 = 0$. Для уравненій *выше перваго порядка* Ліувилль ограничился лишь краткимъ упоминаніемъ о возможности обойти полное рѣшеніе уравненія $P_0 = 0$, подкрѣпивъ это указаніе простою ссылкою на теорію симметрическихъ функцій. Между тѣмъ способъ В. Г. Имшенецкаго таковъ, что онъ почти съ одинаковою легкостью примѣняется какъ въ томъ случаѣ, когда имѣется полное рѣшеніе уравненія $P_0 = 0$, такъ и въ томъ случаѣ, когда представляется болѣе удобнымъ выполнять вычисленія безъ помощи полнаго рѣшенія этого уравненія.

Функціи $S_0, S_1, \ldots, S_n$ и σ_n, въ которыхъ сосредоточено все необходимое для того, чтобы характеризовать дробныя рѣшенія уравненія (1), я предлагаю называть *функціями Имшенецкаго* въ честь имени математика, который впервые обнаружилъ примѣчательныя свойства этихъ функцій, положенныя въ основу наилучшаго способа для нахожденія дробныхъ рѣшеній уравненія (1).

22 іюля
1893 года.

читателю много сомнѣній, не свободны отъ важнаго недостатка. Это изложеніе выполнено безупречно лишь по отношенію къ уравненіямъ перваго и втораго порядка, для которыхъ легче исчерпывается разнообразіе случаевъ, подавляющее читателя мемуаровъ Ліувилля при разборѣ общаго случая.

Digitized by Google

ИЗВЛЕЧЕНІЕ ИЗЪ ПРОТОКОЛОВЪ ЗАСѢДАНІЙ МОСКОВСКАГО МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

Засѣданіе 16 февраля 1893 года.

Въ засѣданіи присутствовали: *Н. В. Бугаевъ, П. А. Некрасовъ, Н. Е. Жуковскій, А. І. Круковскій, А. П. Мининъ, П. В. Преображенскій, Г. Г. Аппельротъ, Б. К. Млодзѣевскій.*

Н. В. Бугаевъ заявилъ, что *А. А. Марковымъ* прислано письмо, касающееся заявленій проф. Маркова относительно статьи Г. Г. Аппельрота: „По поводу § 1 мемуара С. В. Ковалевской". Самое письмо Президентъ, согласно опредѣленію бюро Общества, не считаетъ возможнымъ доложить въ засѣданіи Общества.

Затѣмъ Н. В. Бугаевъ заявилъ, что къ своему письму А. А. Марковъ приложилъ для храненія въ дѣлахъ Математическаго Общества письмо, полученное имъ отъ Н. В. Бугаева. Хотя Н. В. Бугаевъ и придаетъ своему письму частный, а не общественный характеръ, но такъ какъ оно не содержитъ въ себѣ ничего такого, что не могло бы быть предметомъ сужденія въ Обществѣ, то онъ съ своей стороны, ничего не имѣетъ противъ храненія письма его къ А. А. Маркову при дѣлахъ Математическаго Общества. Опредѣлено: письмо Н. В. Бугаева, присланное А. А. Марковымъ, хранить при дѣлахъ Общества.

Были сдѣланы сообщенія:

1. *Б. К. Млодзѣевскій.* Демонстрація геометрическихъ моделей, пріобрѣтенныхъ Кабинетомъ Практической Механики Московскаго Университета.

2. *Г. Г. Аппельротъ.* По поводу § 2 мемуара С. В. Ковалевской о движеніи твердаго тѣла.

3. *А. П. Мининъ.* О числахъ, дѣлящихся на число своихъ дѣлителей.

4. *Н. Е. Жуковскій.* О гироскопическомъ шарѣ Д. К. Бобылева.

5. *Б. К. Млодзѣевскій.* Къ задачѣ Гесса.

Обществу доставлены слѣдующія изданія:

1. Кіевскія Университетскія Извѣстія, № 11. 1892 г.

Digitized by Google

2. *І. М. Шиховскій.* Къ вопросу о нѣкоторыхъ патогенныхъ микроорганизмахъ.

3. *В. Татариновъ.* О свойствахъ эѳира. 1885.

4. *П. А. Некрасовъ* и *Н. Е. Жуковскій.* О движеніи твердаго тѣла около неподвижной точки.

5. Bulletin de la Société mathématique de France. Tome XX. № 7.

Засѣданіе 16 марта 1893 года.

Въ засѣданіи присутствовали: *Б. К. Млодзѣевскій, П. В. Преображенскій, Г. Г. Аппельротъ, В. Г. Алексѣевъ, А. І. Круковскій.*

Были сдѣланы сообщенія:

1. *Б. К. Млодзѣевскій.* О нормальной формѣ Римановыхъ поверхностей.

2. *Г. Г. Аппельротъ.* По поводу § 2 мемуара С. В. Ковалевской о движеніи твердаго тѣла (второе сообщеніе).

Обществу доставлены слѣдующія изданія.

1. Протоколы и рѣчи общихъ собраній четвертаго съѣзда русскихъ естествоиспытателей и врачей.

2. Труды съѣзда по отдѣленію статистико-гигіеническому секціи научной медицины.

3. Труды съѣзда по отдѣленію медицинскому секціи научной медицины.

4. Труды съѣзда по отдѣленіямъ химіи, минералогіи, геологіи и палеонтологіи.

5. Труды съѣзда по отдѣленіямъ ботаники, анатоміи и физіологіи растеній.

6. Кіевскія Университетскія Извѣстія. 1892 г. № 12, 1893 г. № 1.

7. Извѣстія С.-Петербургскаго Практическаго Технологическаго Института 1891—1892 г. С.-Петербургъ. 1892.

8. Записки Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей. Томъ XVII, вып. 2. Одесса. 1892.

9. *Алексѣевъ.* Теорія числовыхъ характеристикъ системъ кривыхъ линій. Москва. 1893.

10. Нижегородскій кружокъ любителей Физики и Астрономіи. Москва. 1893 г.

11. Casopis pro pestování matematiky a fisiky. Ročnik XXII, cislo I, II, V. Praže. 1893.

12. Bulletin de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou 1892. № 3. Moscou. 1893.

13. Bulletin de la Société mathématique de France. Tome XX, № 8. Tome XXI, №№ 1, 2.

14. Mathematische Annalen. Bd. 42, 1 Heft. 1893.

15. Journal für die reine uud angewandte Mathematik. Bd. 110. Heft. 2. 1892.

Digitized by Google

16. Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Band XXII. Jahrgang. 1890. Heft 1. Berlin. 1893.

Засѣданіе 20 апрѣля 1893 года.

Въ засѣданіи присутствовали: *Н. В. Бугаевъ, П. А. Некрасовъ, Н. Е. Жуковскій, Е. Ѳ. Сабининъ, В. В. Бобынинъ, А. І. Круковскій, А. П. Мининъ, Г. Г. Аппельротъ, Б. К. Млодзѣевскій*

Н. В. Бугаевъ заявилъ, что имъ получены отъ Ю. В. Сохоцкаго и Б. Я. Букрѣева письма съ выраженіемъ благодарности за избраніе въ члены Общества.

Б. К. Млодзѣевскій доложилъ слѣдующее письмо, подписанное членами Общества А. Н. Коркинымъ, Д. К. Бобылевымъ и К. А. Поссе:

„Милостивый Государь, Болеславъ Корнельевичъ! Въ полученныхъ „нами протоколахъ засѣданій Математическаго Общества, приложенныхъ „къ 4-му выпуску XVI тома Математическаго Сборника, мы къ удив„ленію нашему прочитали, что въ засѣданіи 19 мая 1892 года покойный „В. Г. Имшенецкій въ сообщеніи по поводу письма одного изъ насъ „къ профессору П. А. Некрасову „*разъяснилъ*, что возраженія К. А. „Поссе противъ статьи Имшенецкаго основаны на недоразумѣніи про„фессора Поссе". Мы недоумѣваемъ, какимъ образомъ докладчикъ могъ „достигнуть такого результата, стоящаго въ полномъ противорѣчіи съ „сущностью дѣла. По нашему мнѣнію, въ письмѣ на имя профессора „П. А. Некрасова, доложенномъ по нашей просьбѣ Обществу и прило„женномъ къ дѣламъ его, никакихъ недоразумѣній съ нашей стороны „не заключается, а есть подробное *разъясненіе* вполнѣ справедливыхъ „замѣчаній, сдѣланныхъ впервые А. А. Марковымъ о томъ, что способъ „Имшенецкаго для розысканія раціональныхъ рѣшеній линейныхъ диф„ференціальныхъ уравненій въ нѣкоторыхъ случаяхъ не ведетъ къ „цѣли. Письмо это не было назначено для печати, чтобы не обострять „дѣла, принявшаго и безъ того нежелательный характеръ, но въ на„стоящее время, послѣ напечатанія протоколовъ засѣданій Общества, „мы вынуждены просить о напечатаніи какъ настоящаго нашего заяв„ленія, такъ и той части письма на имя проф. П. А. Некрасова, ко„торая касается способа Имшенецкаго, для того, чтобы читатели Ма„тематическаго Сборника могли составить себѣ правильное понятіе о „дѣлѣ, о которомъ протоколъ засѣданія 19 мая 1892 года даетъ не„ясное представленіе. Примите и проч. А. Коркинъ, Д. Бобылевъ, „К. Поссе. 30 марта 1893 года".

Опредѣлено: настоящее письмо внести въ протоколъ, а часть письма К. А. Поссе отъ 7 апрѣля 1892 года, относящуюся къ способу Имшенецкаго, напечатать при протоколѣ въ видѣ приложенія. Вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣлено просить П. А. Некрасова возстановить, по возмож-

Digitized by Google

ности, сущность сообщенія, сдѣланнаго В. Г. Имшенецкимъ въ засѣданіи 19 мая 1892 года, для напечатанія въ видѣ втораго приложенія, вслѣдъ за означенными письмами.

Было сдѣлано сообщеніе:

1. *П. А. Некрасовъ.* Выводъ полныхъ условій существованія асимптотическихъ періодическихъ движеній въ задачѣ Гесса, основанный на принципѣ Б. К. Млодзѣевскаго.

ПРИЛОЖЕНІЯ КЪ ПРОТОКОЛУ ЗАСѢДАНІЯ 20 АПРѢЛЯ 1893 ГОДА.

I.

Извлеченіе изъ письма проф К. А. Поссе (отъ него лично и отъ имени проф. А. Н. Коркина и проф. Д. К. Бобылева), доложеннаго Московскому Математическому Обществу въ засѣданіи 21 апрѣля 1892 года.

....Сущность замѣчанія А. А. Маркова, касающагося статей В. Г. Имшенецкаго о раціональныхъ дробныхъ рѣшеніяхъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, помѣщенныхъ въ Запискахъ Имп. Академіи Наукъ за 1887 и 1888 года, сводится къ тому, что желающимъ изучить этотъ предметъ лучше знакомиться съ нимъ по мемуару Ліувилля въ 22 тетради Ж. Полит. Школы, чѣмъ по вышеупомянутымъ мемуарамъ В. Г. Имшенецкаго. Чтобы оправдать такое мнѣніе, необходимо войти въ нѣкоторыя подробности.

Въ первомъ изъ упомянутыхъ мемуаровъ В. Г. Имшенецкаго цитируется и мемуаръ Ліувилля, но сказанное на стр. 19 о затрудненіи, будто бы встрѣчающемся въ приложеніи способа Ліувилля и состоящемъ въ необходимости полнаго рѣшенія уравненія $P_0 = 0$, гдѣ P_0 коэффиціентъ при высшей

Digitized by Google

производной въ данномъ дифференціальномъ уравненіи, даетъ неточное представленіе о способѣ Ліувилля.

Вамъ, конечно, извѣстно, что Ліувилль самъ, на стр. 175 своего мемуара, особенно подчеркиваетъ то обстоятельство, что его метода не требуетъ такого рѣшенія уравненія $P_n=0$, а затѣмъ подробно излагаетъ, какъ примѣнять его способъ въ случаѣ уравненія 1-го порядка, не прибѣгая къ рѣшенію уравненій высшей степени. Допустимъ однако, что несмотря на отсутствіе упомянутаго затрудненія, способъ Ліувилля, въ примѣненіи къ уравненіямъ высшаго порядка оказывается столь сложнымъ, что желателенъ другой, болѣе удобный на практикѣ. (Не могу при этомъ не замѣтить, что, по моему мнѣнію, сложность способа Ліувилля относится болѣе къ изложенію его въ общемъ видѣ, т. е. къ разбору весьма большаго числа различныхъ случаевъ, чѣмъ къ самому процессу его примѣненія).

Способъ В. Г. Имшенецкаго формулируется самимъ авторомъ на стр. 2 и 3 второй его статьи слѣдующимъ образомъ:

«Пусть

$$P_0 y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \ldots + P_n y = V \qquad (1)$$

представляетъ данное дифференціальное уравненіе, съ раціональными цѣлыми коэффиціентами, не имѣющими общаго наибольшаго дѣлителя, и не допускающее раціональныхъ цѣлыхъ рѣшеній. Умножимъ его на *интегрирующій множитель* $\mu=P_0^{m-1}$, предполагая неопредѣленіе значеніе m такимъ, чтобы $m-1$ имѣло положительное значеніе, при которомъ P_0^{m-1} остается раціональнымъ. По умноженіи на μ, уравненіе (1) приводится къ виду:

$$\frac{d^n(S_0 y)}{dx^n} + \frac{d^{n-1}(S_1 y)}{dx^{n-1}} + \ldots + S_n y = V P_0^{m-1}, \qquad (2)$$

гдѣ для многочленовъ S_i мы нашли выраженіе:

Digitized by Google

$$S_i = \mu P_i - \binom{n-i+1}{1} P_{i-1} \frac{d\mu}{dx} + \binom{n-i+2}{2} P_{i-2} \frac{d^2\mu}{dx^2} + \ldots$$

$$+ (-1)^i \binom{n}{i} P_0 \frac{d^i\mu}{dx^i}$$

$$(i = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n)\ *).$$

«*Первое условіе*, указанное нами, возможности существованія раціональныхъ дробныхъ рѣшній уравненія (1) состоитъ въ томъ, *чтобы при опредѣленномъ значеніи m, выполняющемъ высказанныя выше условія, многочлены* S_i, *при* $i=0, 1, 2, \ldots n$, *имѣли общаго наибольшаго дѣлителя*».

Къ этому авторъ добавляетъ, что въ § 14 первой его статьи показано, что всегда не трудно или найти требуемое значеніе m, или убѣдиться въ невозможности такого значенія. Второе условіе возможности рѣшенія разсматриваемой задачи (т. е. разысканія раціональныхъ дробныхъ рѣшеній уравненія (1)) состоитъ въ томъ, что уравненіе, которому удовлетворяетъ функція $z = M.y$, гдѣ M есть общій наибольшій дѣлитель функцій S_i, должно допускать раціональныя цѣлыя рѣшенія.

Самый процессъ опредѣленія требуемаго значенія m, указанный въ § 14 первой статьи, состоитъ въ слѣдующемъ: замѣчая, что полиномы S_i при всякомъ m имѣютъ общій дѣлитель P_0^{m-n}, разсматриваютъ полиномы:

$$T_0 = \frac{S_0}{P_0^{m-n}},\ T_1 = \frac{S_1}{P_0^{m-n}}, \ldots,\ T_n = \frac{S_n}{P_0^{m-n}},$$

въ коэффиціенты которыхъ входитъ число m, и стараются

---

*) Символъ $\binom{n}{i}$ обозначаетъ $\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2\ldots i}$. —*Прим. ред.* Приведенное выраженіе S_i содержитъ опечатку, вкравшуюся во второй мемуаръ В. Г. Имшенецкаго; букву P въ этомъ выраженіи должно всюду замѣнить буквою Q. Указаніе на § 14 есть также опечатка во второмъ мемуарѣ В. Г. Имшенецкаго; вмѣсто § 14 должно читать § 15.

Digitized by Google

его опредѣлить такъ, чтобы полиномы T_i имѣли общаго дѣлителя.

Не останавливаясь на томъ вопросѣ, насколько такой процессъ опредѣленія числа m мотивированъ тѣмъ, что изложено въ статьѣ В. Г. Имшенецкаго, позволю себѣ только обратить ваше вниманіе на то обстоятельство, что во всемъ вышесказанномъ опускается тотъ случай, когда полиномы T_i имѣютъ общаго дѣлителя независимо отъ значенія m, т. е. при m неопредѣленномъ. Для большей ясности, позвольте васъ просить разсмотрѣть одинъ изъ безчисленнаго множества примѣровъ, въ которыхъ это обстоятельство встрѣчается. Возьмемъ уравненіе 1-го порядка:

$$x^2(x+1)^5 y' + x(x+1)^2(3x^3+19x^2+17x+5)y = \\ = 4(9+9x-x^2). \qquad (I)$$

Здѣсь мы имѣемъ:

$$T_0 = \frac{S_0}{P_0^{m-1}} = P_0 = x^2(x+1)^5, \quad T_1 = \frac{S_1}{P_0^{m-1}} = P_1 - m P_0' =$$

$$= x(x+1)^2[3x^3+19x^2+17x+5-m(x+1)^2(7x+2)],$$

или

$$T_1 = x(x+1)^2[(3-7m)x^3+(19-16m)x^2+(17-11m)x+5-2m].$$

T_0 и T_1 имѣютъ общаго дѣлителя $x(x+1)^2$ при произвольномъ m и ни при какомъ опредѣленномъ значеніи m, удовлетворяющемъ требуемымъ условіямъ, другаго общаго дѣлителя не имѣютъ, такъ какъ значеніе $m = \frac{5}{2}$, при которомъ является еще общій дѣлитель x, не удовлетворяетъ условію раціональности выраженія P_0^{m-1}. Слѣдовательно, въ данномъ примѣрѣ, число m указаннымъ путемъ не опредѣляется; между тѣмъ данное уравненіе имѣетъ раціональное рѣшеніе

$$y = \frac{3+4x^3}{x^5(x+1)^2},$$

которое весьма легко найти по способу Ліувилля.

Digitized by Google

Приводя этотъ примѣръ, я не хочу этимъ сказать, что способъ В. Г. Имшенецкаго не можетъ быть дополненъ или нѣсколько видоизмѣненъ такъ, чтобы онъ давалъ возможность найти всѣ раціональныя дробныя рѣшенія, если таковыя существуютъ, а только позволяю себѣ обратить ваше вниманіе на необходимость такихъ дополненій. Въ данномъ примѣрѣ (и другихъ, ему аналогичныхъ), я бы могъ указать на слѣдующее продолженіе разысканія раціональнаго рѣшенія: замѣтивъ, что полиномы T_0 и T_1 при всякомъ m имѣютъ общаго дѣлителя $x(x+1)^2$, положимъ $x(x+1)^2y=z$ и, подставивъ въ уравненіе (I), получимъ для опредѣленія z уравненіе:

$$x(x+1)^3z'+4(3x^2+3x+1)z=4(9+9x-x^2); \qquad (3)$$

это уравненіе не имѣетъ, какъ легко видѣть, цѣлаго раціональнаго рѣшенія, но можетъ имѣть дробное, которое и можно найти по способу В. Г. Имшенецкаго. Здѣсь

$$P_0=x(1+x)^3,\ P_1=4(3x^2+3x+1),$$

$$T_0=\frac{S_0}{P_0^{m-1}}=x(x+1)^3,$$

$$T_1=\frac{S_1}{P_0^{m-1}}=P_0-mP_0'=4(3x^2+3x+1)-m(x+1)^2(4x+1).$$

При $m=4$, T_0 и T_1 имѣютъ общаго дѣлителя x, а S_0 и S_1 слѣдовательно общаго дѣлителя $xP_0^3=x^4(x+1)^9$. Полагая $x^4(x+1)^9z=u$, получаемъ для u уравненіе:

$$(x+1)^3u'-(13x^2+18x+9)u=4(9+9x-x^2)x^3(x+1)^9,$$

допускающее цѣлое раціональное рѣшеніе $u=(3+4x^3)(x+1)^9$, изъ котораго и находимъ:

$$z=\frac{3+4x^3}{x^4}\ \text{и}\ y=\frac{3+4x^3}{x^5(x+1)^2}.$$

Нельзя однако не замѣтить, что результатъ этотъ гораздо

Digitized by Google

проще получается по способу Ліувилля, который прямо даетъ знаменателя искомаго рѣшенія въ видѣ $x^5(x+1)^2$.

Изъ того, что я имѣлъ честь вамъ изложить, мнѣ кажется, вы можете ясно видѣть, почему мы отдаемъ предпочтеніе способу Ліувилля, какъ не требующему никакихъ видоизмѣненій для примѣнимости его ко всевозможнымъ случаямъ и вполнѣ строго изложенному авторомъ его, передъ способомъ В. Г. Имшенецкаго въ томъ видѣ, по крайней мѣрѣ, въ какомъ онъ изложенъ въ упомянутыхъ выше двухъ статьяхъ. Болѣе подробный разборъ этихъ статей не входитъ въ цѣли моего письма; осмѣливаюсь завѣрить васъ, что никто изъ насъ не сталъ бы утруждать вниманіе ваше и Московскаго Математическаго Общества даже и тѣмъ, что заключается въ настоящемъ письмѣ, если бы къ этому насъ не привела необходимость отвѣтить на упрекъ въ голословности, обращенный къ А. А. Маркову, а косвенно и ко всѣмъ намъ, заявившимъ о нашемъ согласіи съ его замѣчаніями по существу.

Примите и проч. К. Поссе. 7 апрѣля 1892 года.

II.

О сообщеніи академика В. Г. Имшенецкаго, сдѣланномъ въ засѣданіи Московскаго Математическаго Общества 19 мая 1892 года.

Составлено по порученію Московскаго Математическаго Общества проф. *П. А. Некрасовымъ*).

Московское Математическое Общество въ засѣданіи 20 апрѣля 1893 года поручило мнѣ «возстановить, по возможности, сущность сообщенія, сдѣланнаго В. Г. Имшенецкимъ въ засѣданіи 19 мая 1892 года», для напечатанія при протоколѣ вслѣдъ за письмомъ профессора К. А. Поссе, вызвавшимъ это сообщеніе.

Исполняя порученіе Общества, я прежде всего принялъ мѣры къ тому, чтобы собрать всѣ документальные слѣды это-

Digitized by Google

сообщенія В. Г. Имшенецкаго, и по этому поводу обратился съ запросами къ Лидіи Васильевнѣ Имшенецкой, находившейся при В. Г. Имшенецкомъ во время пребыванія его въ Москвѣ, и къ профессору К. А. Андрееву, которому переданы были всѣ рукописи В. Г. Имшенецкаго послѣ его смерти.

Эти мои розыски отчасти увѣнчались успѣхомъ. Проф. К. А. Андреевъ, по тщательномъ осмотрѣ бумагъ В. Г. Имшенецкаго, отыскалъ и доставилъ мнѣ черновую тетрадку, писанную рукою В. Г. Имшенецкаго и содержащую между прочимъ вычисленія, относящіяся къ примѣру, приведенному въ напечатанномъ выше письмѣ проф. К. А. Поссе. Тетрадка эта, изъ которой все существенное извлечено и напечатано ниже (частію въ подстрочномъ примѣчаніи 3, частію въ текстѣ), имѣетъ несомнѣнную связь съ сообщеніемъ В. Г. Имшенецкаго. Хотя она не даетъ полнаго представленія объ этомъ сообщеніи, но она содержитъ главную сущность того, что входило въ сообщеніе, и можетъ служить опорою для болѣе полнаго возстановленія этой сущности по памяти.

Никакихъ другихъ документальныхъ слѣдовъ сообщенія не найдено въ бумагахъ В. Г. Имшенецкаго, а по разъясненію Лидіи Васильевны Имшенецкой другихъ слѣдовъ, надо полагать, и не существовало, такъ какъ В. Г. Имшенецкій не успѣлъ обработать сообщеніе письменно и, отправляясь 19 мая 1892 года въ засѣданіе Математическаго Общества, не взялъ съ собой никакой рукописи *). Такимъ образомъ сообщеніе В. Г. Имшенецкаго въ этомъ засѣданіи было исключительно устнымъ.

---

*) Судя по ходу обстоятельствъ, В. Г. Имшенецкій даже не могъ успѣть приготовить обработанной рукописи по предмету сообщенія, такъ какъ онъ узналъ о существованіи письма К. А. Поссе только по пріѣздѣ въ Москву въ концѣ апрѣля, а копію съ письма получилъ только въ первыхъ числахъ мая, при чемъ въ оставшійся небольшой промежутокъ времени до 19 мая онъ не только отвлекался дѣлами испытательной физико-математической коммиссіи, но съѣздилъ въ Петербургъ къ очередному засѣданію Академіи Наукъ и въ Псковскую губернію къ тяжело больной женѣ.

Digitized by Google

Собравъ всѣ данныя и припомнивъ всѣ обстоятельства, относящіяся къ сообщенію В. Г. Имшенецкаго въ засѣданіи 19 мая 1892 года, я возстановилъ изложенную ниже сущность этого сообщенія съ возможною точностью и всячески избѣгая вносить въ текстъ съ изложеніемъ сообщенія свое личное сужденіе.

Но никакая точность и обстоятельность въ исполненіи порученія Общества не могла освободить меня отъ сознанія всей важности пробѣла въ ходѣ дѣла именно вслѣдствіе отсутствія обработанной В. Г. Имшенецкимъ рукописи, относящейся къ его сообщенію и годной для печати. Извѣстно, что живыя устныя сообщенія не соотвѣтствуютъ требованіямъ печати и обыкновенно попадаютъ въ печать не иначе, какъ послѣ особой ихъ обработки для этой именно цѣли. Этой обработки не достаетъ сообщенію В. Г. Имшенецкаго, которое отъ этого теряетъ слишкомъ много.

Желая восполнить этотъ пробѣлъ, я написалъ особую статью: «*Способъ В. Г. Имшенецкаго для нахожденія алгебраическихъ раціональныхъ дробныхъ рѣшеній линейнаго дифференціальнаго уравненія*», которая напечатана выше. Статья эта, отчасти восполняя указанный пробѣлъ, содержитъ новое изложеніе всѣхъ основъ способа В. Г. Имшенецкаго, выставляющее на видъ особенныя преимущества этого всегда ведущаго къ цѣли способа и устраняющее, какъ мнѣ кажется, всѣ недостатки прежняго изложенія, которые могли подать поводъ къ возраженіямъ, указаннымъ въ приведенномъ выше письмѣ К. А. Поссе.

Употребляя съ своей стороны всѣ усилія къ тому, чтобы представить, по возможности, всестороннее и безпристрастное научное разъясненіе возникшаго спора, я, между прочимъ, руководился увѣренностію, что этимъ только способомъ лучше всего можетъ быть устраненъ изъ дѣла тотъ «нежелательный характеръ», о которомъ упоминается въ напечатанномъ выше письмѣ А. Н. Коркина, К. А. Поссе и Д. К. Бобылева отъ 30 марта 1893 года и которому Московское

Digitized by Google

Математическое Общество также не сочувствовало съ самаго начала.

Перехожу къ изложенію сущности содержанія сообщенія В. Г. Имшенецкаго въ засѣданіи Московскаго Математическаго Общества 19 мая 1892 года.

Въ своемъ сообщеніи В. Г. Имшенецкій напомнилъ, что способъ его для нахожденія алгебраическихъ раціональныхъ дробныхъ рѣшеній уравненія

$$P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_n y = V, \qquad (1)$$

гдѣ $P_0, P_1, \ldots, P_n$ и V суть цѣлые полиномы, не имѣющіе общаго дѣлителя, встрѣтилъ въ Московскомъ Математическомъ Обществѣ возраженія, изложенныя въ письмѣ К. А. Поссе, доложенномъ Обществу въ засѣданіи 21 апрѣля 1892 года. Главная часть этихъ возраженій состоитъ въ указаніи на недостаточность этого способа для примѣненія его ко всевозможнымъ случаямъ и на вытекающую отсюда необходимость дополненій этого способа.

В. Г. Имшенецкій категорически отвергъ эту недостаточность, утверждая, что способъ его истолкованъ возражающими неправильно и что при правильномъ пониманіи способъ этотъ не требуетъ никакихъ дополненій.

Тѣ преобразованія, которыя указываются въ письмѣ К. А. Поссе, какъ дополненіе или продолженіе способа В. Г. Имшенецкаго, не суть, по мнѣнію В. Г. Имшенецкаго, новыя дополненія, такъ какъ эти преобразованія прямо вытекаютъ изъ того, что содержится въ первомъ его мемуарѣ [2]).

---

[2]) Это заявленіе В. Г. Имшенецкаго должно понимать такъ. Преобразованіе $x(x+1)^2 y = z$ въ примѣрѣ К. А. Поссе соотвѣтствуетъ преобразованію $My = z$, указанному на стр. 8 перваго мемуара; необходимость же этого преобразованія вытекаетъ въ данномъ случаѣ изъ необходимости удовлетворить указанному въ первомъ мемуарѣ (стр. 24) требованію, *чтобы полиномы* Q_i *не имѣли общаго наибольшаго*

Digitized by Google

Дѣлая эти заявленія, В. Г. Имшенецкій въ то же время разъяснилъ, что способъ его не только *всегда* даетъ возможность рѣшить задачу о нахожденіи дробныхъ рѣшеній уравненія (1), но даже заключаетъ въ себѣ средства видоизмѣнять ходъ ея рѣшенія, такъ какъ способъ этотъ допускаетъ разнообразіе въ выборѣ интегрирующаго множителя μ. При этомъ В. Г. Имшенецкій обратилъ особенное вниманіе присутствующихъ въ засѣданіи на новую форму интегрирующаго множителя μ, предлагаемую имъ взамѣнъ прежней формы

$$\mu = P_0^{m-1}, \qquad (2)$$

разсмотрѣнной въ его мемуарахъ и, по его признанію, удобной въ томъ лишь случаѣ, когда уравненіе $P_0 = 0$ не имѣетъ кратныхъ корней. Эта новая форма интегрирующаго множителя μ такова:

$$\mu = X^{m-1}, \quad X = \frac{P_0}{D}, \qquad (3)$$

дѣлителя, каковое требованіе вообще надо имѣть въ виду при примѣненіи правилъ, изложенныхъ въ § 15 перваго мемуара.

Требованіе это, ускользнувшее изъ вниманія возражающихъ (что главнымъ образомъ и было непосредственнымъ поводомъ къ недоразумѣнію К. А. Поссе, А. Н. Коркина и Д. К. Бобылева), выражено слѣдующими словами: „Теперь предположимъ, что дифференціальное линейное уравненіе (1) допускаетъ раціональные интегралы, но коэффиціенты его P_i таковы, что получаемыя при помощи ихъ цѣлыя функціи $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ не имѣютъ общаго наибольшаго дѣлителя“ (стр. 24). Это ограниченіе В. Г. Имшенецкій имѣлъ право сдѣлать (не ограничивая общности своего метода) именно въ виду преобразованія $My - z$, посредствомъ котораго это требованіе всегда осуществляется.

Требованіе, чтобы полиномы $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ не имѣли общаго дѣлителя, весьма важное въ теоріи В. Г. Имшенецкаго, могло быть упущено изъ виду возражающими отчасти вслѣдствіе недостатковъ въ самомъ изложеніи мемуаровъ В. Г. Имшенецкаго. Значеніе этого требованія можно полнѣе усмотрѣть изъ напечатанной выше моей отдѣльной статьи о способѣ В. Г. Имшенецкаго [см. въ этой статьѣ подстрочное примѣчаніе, относящееся къ доказательству неравенства (28), а также доказательства неравенствъ (40) и (67)].

Digitized by Google

гдѣ D есть общій наибольшій дѣлитель полиномовъ P_0 и $\frac{dP_0}{dx}$. Всѣ вычисленія при этой перемѣнѣ формы множителя μ производятся въ прежнемъ порядкѣ, но выполняются вообще легче, при чемъ вычисленіе полинома X не требуетъ даже полнаго рѣшенія уравненія $P_0 = 0$ [3]).

---

[3]) Эта перемѣна формы множителя μ дѣйствительно весьма полезна въ теоретическомъ и практическомъ отношеніи. Въ напечатанной выше статьѣ моей о способѣ В. Г. Имшенецкаго въ основу всей теоріи положенъ этотъ именно новый множитель и къ нему присоединены вспомогательные множители, какъ средство для дальнѣйшаго упрощенія вычисленій.

Въ черновой тетрадкѣ В. Г. Имшенецкаго, полученной мною отъ К. А. Андреева, интегрирующій множитель этого новаго вида примѣненъ къ примѣру, взятому изъ письма К. А. Поссе. Приводимъ эти вычисленія В. Г. Имшенецкаго и сопровождающія ихъ замѣчанія, имѣя въ виду связь ихъ съ содержаніемъ сообщенія В. Г. Имшенецкаго.

„Дано:

$$x^2(x+1)^5\frac{dy}{dx} + x(x+1)^3(3x^3+19x^2+17x+5)y = 4(9+9x-x^2),$$

или

$$P_0\frac{dy}{dx} + P_1y = V,$$

гдѣ

$$P_0 = x^2(x+1)^5,\ P_1 = x(x+1)^3(3x^3+19x^2+17x+5)$$

и

$$V = 4(9+9x-x^2).$$

Означая произведеніе первыхъ степеней линейныхъ множителей P_0 черезъ X, т. е. полагая

$$X = x(x+1)$$

и умножая на X^m данное дифференціальное уравненіе, получимъ:

$$X^mP_0\frac{dy}{dx} + X^mP_1y = VX^m.$$

Далѣе это уравненіе можно написать слѣдующимъ образомъ

$$\frac{d(S_0y)}{dx} + S_1y = VX^m,$$

полагая

Digitized by Google

Въ связи съ этими указаніями В. Г. Имшенецкій далѣе замѣтилъ, что искомое дробное рѣшеніе уравненія (1) можетъ быть выражено такъ:

$$y = \frac{z}{X^\sigma}, \qquad (4)$$

гдѣ z есть цѣлый полиномъ, X опредѣляется при помощи втораго изъ равенствъ (3) и σ есть цѣлое положительное число. Затѣмъ, считая число σ найденнымъ, В. Г. Имшенецій сдѣлалъ

$$S_0 = X^m P_0,\ S_1 = X^m P_1 - \frac{d(X^m P_0)}{dx} = X^m\left(P_1 - \frac{dP_0}{dx}\right) - m\,P_0 X^{m-1}\frac{dX}{dx}.$$

Введя значенія X, P_0 и P_1, мы будемъ имѣть:

$$S_0 = x^{m+2}(x+1)^{m+5},\ S_1 = -x^{m+1}(x+1)^{m+2}\left\{(2m+4)x^3\right.$$
$$\left.+(5m-3)x^2+(4m-6)x+(m-3)\right\}.$$

Отсюда видно, что S_0 и S_1 при неопредѣленномъ значеніи m имѣютъ общаго наибольшаго дѣлителя $x^{m+1}(x+1)^{m+2}$; а дѣлая $m=3$, получимъ для S_0 и S_1 общаго наибольшаго дѣлителя

$$M = x^5(x+1)^5$$

и, полагая

$$y = \frac{z}{M},$$

мы приведемъ данное уравненіе къ виду:

$$(x+1)^3\frac{dz}{dx} - (7x^2+6x+3)z = 4(9+9x-x^2)x^2(x+1)^2.$$

Остается отыскать, если возможно, цѣлое рѣшеніе послѣдняго уравненія."

Выполнивъ процессъ нахожденія цѣлаго полинома z и сокративъ полученное дробное рѣшеніе, В. Г. Имшенецкій заключаетъ вычисленія слѣдующимъ замѣчаніемъ: „Итакъ окончательно: *правильно примѣнимый* мой способъ розысканія раціональныхъ дробныхъ рѣшеній для дифференціальнаго уравненія", приведеннаго К. А. Поссе, А. Н. Коркинымъ и Д. К. Бобылевымъ, „даетъ правильное рѣшеніе

$$y = \frac{4x^2+3}{x^5(x+1)^2}$$

противно тому, что они утверждаютъ въ письмѣ своемъ Московскому Математическому Обществу (въ апрѣлѣ 1892 г.)".

Digitized by Google

нѣкоторыя замѣчанія, относящіяся къ деталямъ вычисленія полинома z. Нахожу болѣе удобнымъ передать здѣсь содержаніе этихъ замѣчаній по доставленной мнѣ черновой тетрадкѣ В. Г. Имшенецкаго, изъ которой достаточно видна сущность ихъ, хотя они примѣняются здѣсь не къ общему уравненію (1) (какъ было во время сообщенія), а къ уравненію втораго порядка и притомъ однородному.

«Пусть предложенное диффенціальное уравненіе будетъ.

$$P_0 y'' + P_1 y' + P_2 y = 0. \tag{5}$$

Полагая $y = X^{-\sigma} z$, получимъ:

$$p_0 z'' + p_1 z' + p_2 z = 0, \tag{6}$$

гдѣ

$$p_0 = X^2 P_0, \quad p_1 = X^2 P_1 - 2\sigma X X' P_0,$$

$$p_2 = X^2 P_2 - \sigma X X' P_1 + [\sigma(\sigma+1)X'^2 - \sigma X X''] P_0.$$

Испытывая (на основаніи начала наибольшихъ показателей), можетъ ли послѣднее уравненіе допускать раціональное цѣлое рѣшеніе, сначала найдемъ, если оно возможно, показатель его степени. Положимъ, что онъ равенъ m. Присоединяя къ уравненію (6) m производныхъ отъ него уравненій и выражая, что всѣмъ имъ удовлетворяетъ полиномъ z степени m, мы должны принять, что производныя отъ z выше m-го порядка равны нулю. Такимъ образомъ будемъ имѣть рядъ $(m+1)$ однородныхъ уравненій» [4]).

---

[4]) Главною цѣлью изложенныхъ замѣчаній В. Г. Имшенецкаго, какъ я увѣренъ, было разъясненіе необходимыхъ и достаточныхъ общихъ условій существованія искомаго полинома z. Къ сожалѣнію, трудно съ бо́льшею подробностью возстановить эту часть сообщенія.

Digitized by Google

ОПЕЧАТКИ И ПОПРАВКИ.

Стран.	*Строка.*	*Напечатано.*	*Должно быть.*
344	5 св.	и сферѣ	и въ сферѣ
361	7 сн.	$(-1)^n$	$(-1)^k$
367	1 »	равенство	неравенство
369	10 св.	если можно даже	если можно, даже
—	11 »	дробныя	раціональныя
—	14 »	$y=y_1+z$.	$y=y_1+z$. Вмѣстѣ съ тѣмъ несуществованіе цѣлыхъ значеній m, при которыхъ полиномъ ζ_n дѣлится на $x+a$, есть признакъ того, что уравненіе (1) со второю частью имѣетъ *не болѣе одного* раціональнаго рѣшенія.
—	14 сн.	соотвѣтствующія	соотвѣтствующіе
370	9 »	слѣдующіе вытекающіе	слѣдующія вытекающія
379	2 »	Правило.	Правило II.

Digitized by Google

Къ статьѣ Л. К. Лахтина: „Алгебраическія Уравненія, разрѣшимыя въ гипергеометрическихъ функціяхъ“.

ОПЕЧАТКИ.

Мат. Сборн. т. XVI, вып. 4.

Стр.	*Строка.*	*Напечатано.*	*Должно быть.*
619	12 св.	$\Psi(y,z)+p_1\Psi'(y,z)$	$X(y,z)+p_1\Psi(y,z)$
628	2 св.	функцію	функціи
642	4 сн.	значеній	корней
765	примѣчаніе внизу стран.	§ 1	§ 5

Мат. Сборн. т. XVII, вып. 1.

64	12 св.	g	G
145	11 сн.	$n-2$	$n-1$
187	10 сн.	A	$\mathfrak{A}$
192	9 сн.	(228)	(128)

ПОПРАВКИ.

Мат. Сборн. т. XVI, вып. 4.

Стр.	*Строка.*	
726	6 сн.	Вмѣсто: «число треугольниковъ.... этихъ угловъ» должно быть: «число узловыхъ точекъ сѣти, соотвѣтствующихъ этимъ угламъ».

Мат. Сборн. т. XVII, вып. 1.

64	10 св.	Вмѣсто: «этой части плоскости» должно быть: «части плоскости, занятой сѣтью группы g».

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

АЛГЕБРАИЧЕСКІЕ ЧАСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

Н. В. Бугаева.

(Читано въ засѣданіяхъ Московскаго Математическаго Общества 17-го марта 1892 и Казанскаго физико-математическаго общества 2-го мая 1892-го года).

§ 1. **Уравненія, опредѣляющія алгебраическіе интегралы.** Положимъ, что неприводимое въ алгебраическомъ смыслѣ дифференціальное уравненіе

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \qquad (1)$$

не имѣетъ цѣлыхъ и дробныхъ частныхъ интеграловъ. Въ уравненіи (1) f есть цѣлая функція перемѣннаго x, его функціи y и ея производныхъ до порядка n.

Можно всегда опредѣлить алгебраическіе частные интегралы уравненія (1), удовлетворяющіе неприводимому алгебраическому уравненію:

$$y^\mu + P_1 y^{\mu-1} + P_2 y^{\mu-2} + \ldots + P_{\mu-1} y + P_\mu = 0 \qquad (2)$$

если таковые существуютъ и найти условія ихъ существованія. Въ уравненіи (2) P_1, P_2,... P_μ суть раціональныя функціи x.

Дѣйствительно, уравненіе (2) даетъ:

Digitized by Google

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dP_1}{dx}y^{\mu-1} + \frac{dP_2}{dx}y^{\mu-2} + \ldots + \frac{dP_\mu}{dx}}{\mu y^{\mu-1} + (\mu-1)P_1 y^{\mu-2} + \ldots + P_{\mu-1}} = \frac{\psi_1(x, y)}{\varphi_1(x, y)} \quad (3)$$

Опредѣлимъ также рядъ производныхъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\psi_2(x, y)}{\varphi_2(x, y)} \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{\psi_3(x, y)}{\varphi_3(x, y)} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d^ny}{dx^n} &= \frac{\psi_n(x, y)}{\varphi_n(x, y)} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

При послѣдовательныхъ вычисленіяхъ высшихъ производныхъ, начиная со второй, мы выражаемъ всѣ результаты при помощи только x и y, замѣняя послѣдовательно всѣ выраженія производной $\frac{dy}{dx}$ ея выраженіемъ (3).

Такъ, въ выраженіи второй производной

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\psi_1}{\varphi_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\psi_1}{\varphi_1}\right)\frac{dy}{dx}$$

мы замѣняемъ $\frac{dy}{dx}$ формулою (3).

Сдѣлавъ это, имѣемъ:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\psi_1}{\varphi_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\psi_1}{\varphi_1}\right)\frac{\psi_1}{\varphi_1} = \frac{\psi_2}{\psi_2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\psi_2}{\varphi_2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\psi_2}{\varphi_2}\right)\frac{\psi_1}{\varphi_1} = \frac{\psi_3}{\varphi_3}$$

Такимъ образомъ въ формулахъ (3) и (4) функціи ψ_1, $\psi_2 \ldots \psi_n$, φ_1, $\varphi_2, \ldots \varphi_n$ зависятъ только отъ x, y, функцій P_1, $P_2, \ldots P_n$ и ихъ производныхъ до порядка n. При вычисленіи $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\psi_1}{\varphi_1}\right)$ мы должны принять во вниманіе что $P_1, P_2 \ldots P_\mu$ суть функціи x.

Digitized by Google

Вставляя выраженія $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$,... $\frac{d^ny}{dx^n}$ въ уравненіе (1), получаемъ два уравненія:

$$f\left(x, y, \frac{\psi_1}{\varphi_1}, \frac{\psi_2}{\varphi_2}, \ldots \frac{\psi_n}{\varphi_n}\right) = 0 \qquad (5)$$

$$y^\mu + P_1 y^{\mu-1} + \ldots + P_n = 0 \qquad (2)$$

Приводя уравненіе (5) къ одному знаменателю, мы получимъ уравненіе (5), расположенное по степенямъ y въ видѣ:

$$Q_1 + Q_2 y + Q_3 y^2 + \ldots + Q_{m+1} y^m = 0 \qquad (6)$$

При помощи уравненія (2) мы можемъ исключить изъ уравненія (6) всѣ степени y выше $\mu - 1$.

Уравненіе (6) при помощи уравненія (2) приведется къ виду:

$$R_1 + R_2 y + R_3 y^2 + \ldots + R_\mu y^{\mu-1} = 0 \qquad (7)$$

гдѣ R_1, R_2,... R_μ суть цѣлыя функціи x, раціональныхъ функцій P_1, P_2,... P_μ и ихъ производныхъ до порядка n.

Такъ какъ R_1, R_2... R_μ суть раціональныя функціи x, а алгебраическій интегралъ есть корень неприводимаго уравненія (2) порядка μ, то y не можетъ одновременно удовлетворять уравненіямъ (2) и (7). Чтобы данное дифференціальное уравненіе (1) могло имѣть алгебраическій интегралъ, удовлетворяющій неприводимому уравненію (2), требуется, чтобы уравненіе (7) удовлетворялось тождественно.

Для этого необходимо, чтобы имѣли мѣсто уравненія:

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= 0 \\ R_2 &= 0 \\ &\ldots\ldots \\ R_\mu &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Такимъ образомъ, если дифференціальное уравненіе (1) имѣетъ частный интегралъ, удовлетворяющій неприводимому

Digitized by Google

уравненію (2) степени μ, должны имѣть мѣсто μ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій (8), содержащихъ μ функцій $P_1, P_2, \ldots P_\mu$ и ихъ производныя до порядка n.

Если эти уравненія имѣютъ раціональные частные интегралы, то и дифференціальное уравненіе (1) имѣетъ алгебраическіе интегралы порядка μ. Если же уравненія (8) не имѣетъ раціональныхъ частныхъ интеграловъ, данное дифференціальное уравненіе (1) не имѣетъ алгебраическихъ интеграловъ, удовлетворяющихъ уравненію (2).

Вопросъ о нахожденіи алгебраическихъ интеграловъ дифференціальнаго уравненія порядка n, удовлетворяющихъ уравненію (2) порядка μ, сводится такимъ образомъ къ опредѣленію раціональныхъ частныхъ интеграловъ μ совокупныхъ уравненій (8) порядка n относительно функцій $P_1, P_2, \ldots P_\mu$.

§ 2. **Задача обратная вычисленію алгебраическихъ интеграловъ** состоитъ въ томъ, что дается дифференціальное уравненіе n-го порядка:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^n y}{dx^n}, q_1, q_2, \ldots q_\mu\right) = 0 \qquad (9)$$

содержащее μ раціональныхъ функцій $q_1, q_2, \ldots q_\mu$ и требуется опредѣлить тѣ условія, которымъ онѣ должны удовлетворить для того, чтобы частный интегралъ удовлетворялъ неприводимому уравненію

$$y^\mu + P_1 y^{\mu-1} + P_2 y^{\mu-2} + \ldots P_\mu = 0 \qquad (2)$$

гдѣ функціи $P_1, P_2, \ldots P_\mu$ даны, а функціи $q_1, q_2, \ldots q_\mu$ неизвѣстны.

Эта задача рѣшается при помощи тѣхъ же самыхъ уравненій (8) и не представляетъ никакихъ теоретическихъ затрудненій. Разница заключается только въ томъ, что уравненія (8) будутъ обыкновенными совокупными алгебраическими уравненіями относительно $q_1, q_2, \ldots q_\mu$. Если означенныя уравненія (8) имѣютъ рѣшенія въ раціональныхъ функціяхъ, задача возможна, если нѣтъ задача невозможна.

Digitized by Google

§ 3. **Частная форма обратной задачи** заключается въ томъ, чтобы опредѣлить, при какихъ условіяхъ имѣетъ мѣсто равенство

$$\int f(x, y)\, dx = \psi(x, y) \tag{10}$$

гдѣ f и ψ раціональныя функціи x и y, а само y есть алгебраическая функція, удовлетворяющая неприводимому уравненію:

$$y^{\mu} + P_1 y^{\mu-1} + P_2 y^{\mu-2} + \ldots + P_{\mu} = 0 \tag{11}$$

Взявъ производныя уравненій (10) и (11), получимъ уравненія:

$$f(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} \tag{12}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dP_1}{dx} y^{\mu-1} + \frac{dP_2}{dx} y^{\mu-2} + \ldots}{\mu y^{\mu-1} + (\mu-1) P_1 y^{\mu-2} + \ldots} = \frac{\psi_1(x, y)}{\varphi_1(x, y)} \tag{3}$$

Уравненіе (12) послѣ замѣны $\frac{dy}{dx}$ выраженіемъ (3) даетъ

$$f(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\psi_1}{\varphi_1} \tag{13}$$

Уравненіе (13) при помощи уравненія (11) приводится къ виду

$$R_1 + R_2 y + R_3 y^2 + \ldots + R_{\mu} y^{\mu-1} = 0 \tag{14}$$

Уравненіе же (14) даетъ въ томъ случаѣ, когда $R_1, R_2, \ldots R_{\mu}$ раціональныя функціи μ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= 0 \\ R_2 &= 0 \\ &\ldots\ldots \\ R_{\mu} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Digitized by Google

которыя и будутъ условіями, при которыхъ имѣетъ мѣсто равенство (10).

Этотъ пріемъ остается безъ измѣненія, если $\psi(x, y)$ такая трансцендентная функція, частныя производныя которой $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ суть раціональныя функціи x и y.

Чтобы уяснить этотъ общій пріемъ возьмемъ

§ 4. **Примѣръ Рафи**, приведенный академикомъ *Имшинецкимъ* на 18 страницѣ его статьи *). Этотъ примѣръ состоитъ въ томъ, чтобы по данному алгебраическому уравненію

$$y^3 - 3y + 2x = 0 \tag{16}$$

требуется опредѣлить значеніе интеграла

$$\int y dx = \xi_0 + \xi_1 y + \xi_2 y^2 \tag{17}$$

такъ, чтобы ξ_0, ξ_1, ξ_2 были раціональными функціями x.

Взявъ производныя уравненій (16) и (17), имѣемъ:

$$y = \frac{d\xi_0}{dx} + y\frac{d\xi_1}{dx} + y^2\frac{d\xi_2}{dx} + (\xi_1 + 2\xi_2 y)\frac{dy}{dx} \tag{18}$$

$$(3y^2 - 3)\frac{dy}{dx} + 2 = 0 \tag{19}$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3 - 3y^2} \tag{20}$$

Вставляя выраженіе (20) въ уравненіе (18) и приводя къ одному знаменателю, мы при помощи уравненія (16) получимъ уравненіе:

*) *Имшинецкій.* Дополненіе теоріи и одно приложеніе общаго способа нахожденія раціональныхъ дробныхъ рѣшеній линейныхъ дифференціональныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами.

Читано въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія Императорской Академіи наукъ 29-го марта 1888 г.

Digitized by Google

$$6x-3\frac{d\xi_0}{dx}-6x\frac{d\xi_1}{dx}-2\xi_1+\left(6\frac{d\xi_1}{dx}-6-6x\frac{d\xi_2}{dx}-4\xi_2\right)y+$$

$$+\left(3\frac{d\xi_0}{dx}+6\frac{d\xi_2}{dx}\right)y^2=0 \qquad (21)$$

Уравненіе (21) даетъ слѣдующія три уравненія:

$$\frac{d\xi_0}{dx}+2\frac{d\xi_2}{dx}=0 \qquad (22$$

$$3\frac{d\xi_1}{dx}-3-3x\frac{d\xi_2}{dx}-2\xi_2=0 \qquad (23)$$

$$6x-3\frac{d\xi_0}{dx}-6x\frac{d\xi_1}{dx}-2\xi_1=0 \qquad (24)$$

Эти уравненія совершенно совпадаютъ съ тѣми, которыя получаются у академика Имшинецкаго на стр. 19 вышеупомянутаго мемуара. Дѣйствительно, уравненіе (22) тождественно съ его уравненіемъ 3), уравненіе (23) съ его уравненіемъ 4), а его уравненіе 5) хотя и отличается отъ моего уравненія (24), но оно приводится къ уравненію (24). Дѣйствительно, его уравненіе 5) имѣетъ видъ

$$3\frac{d\xi_0}{dx}-3x\frac{d\xi_1}{dx}+3x+9\frac{d\xi_2}{dx}-\xi_1=0$$

Если на основаніи уравненія (22) замѣнимъ въ этомъ уравненіи $\frac{d\xi_2}{dx}$ его выраженіемъ:

$$\frac{d\xi_2}{dx}=-\frac{1}{2}\frac{d\xi_0}{dx}$$

получимъ уравненіе

$$3\frac{d\xi_0}{dx}-3x\frac{d\xi_1}{dx}+3x-\frac{9}{2}\frac{d\xi_0}{dx}-\xi_1=0$$

или наше уравненіе (24)

Digitized by Google

$$-3\frac{d\xi_0}{dx}+6x-6x\frac{d\xi_1}{dx}-2\xi_1=0$$

Изъ уравненій (22), (23) и (24) получаемъ частные интегралы:

$$\xi_2=-\frac{3}{8}$$

$$\xi_1=\frac{3}{4}x$$

$$\xi_0=Const.$$

слѣдовательно

$$\int ydx=\frac{6xy-3y^2}{8}+Const.$$

Предложенный нами способъ не измѣняется и при рѣшеніи другихъ болѣе сложныхъ задачъ.

Такъ напримѣръ, если нужно отыскать, чтобы имѣло мѣсто уравненіе

$$\iint f(x,y)dx^2=p_1\chi_1(x,y)+p_2\chi_2(x,y)+ \\ +p_3\chi_3(x,y)+\ldots+p_\mu\chi_\mu(x,y) \qquad (25)$$

для случая, когда p_1, $p_2\ldots$ p_μ раціональныя функціи, а y удовлетворяетъ неприводимому уравненію:

$$y^\mu+P_1y^{\mu-1}+\ldots+P_\mu=0$$

нужно поступать подобнымъ же образомъ.

Въ этой задачѣ $f(x,y)$, $\chi_1(x,y),\ldots$ $\chi_\mu(x,y)$ суть раціональныя функціи x и y.

Для рѣшенія вопроса мы должны взять вторую производную уравненія (25).

Сдѣлавъ это, мы бы получили уравненіе:

$$f(x,y)=\frac{d^2}{dx^2}\left[p_1\chi_1+p_2\chi_2+\ldots+p_\mu\chi_\mu\right] \qquad (26)$$

Digitized by Google

Затѣмъ въ уравненіи (26) мы должны замѣнить $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ихъ выраженіями (3) и (4).

Полученное такимъ образомъ уравненіе слѣдуетъ привести къ виду:

$$R_1 + R_2 y + \ldots + R_\mu y^{\mu-1} = 0$$

Уравненія

$$R_1 = 0$$

$$R_2 = 0$$

$$\ldots\ldots$$

$$R_\mu = 0$$

будутъ рѣшать предложенный вопросъ, если существуютъ раціональныя функціи $p_1, p_2, \ldots p_\mu$, имъ удовлетворяющія.—

§ 5. Другой примѣръ. Приложимъ нашъ пріемъ къ выводу условій, которымъ должны удовлетворять искомыя раціональныя функціи $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_{n-1}$ для того, чтобы имѣло мѣсто равенство:

$$\int (q_0 + q_1 y + q_2 y^2 + q_{n-1} y^{n-1}) dx = \xi_0 + \xi_1 y + \ldots + \xi_{n-1} y^{n-1} \quad (27)$$

гдѣ

$$y^n + p_n = 0 \quad (28)$$

Здѣсь $q_0, q_1, \ldots q_{n-1}, p_n$ суть данныя, а $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_{n-1}$ неизвѣстныя раціональныя функціи.

Рѣшая по нашему пріему эту задачу, то есть, взявъ производныя уравненій (27) и (28), имѣемъ соотношенія:

$$q_0 + q_1 y + q_2 y^2 + \ldots + q_{n-1} y^{n-1} =$$

$$\frac{d\xi_0}{dx} + \frac{d\xi_1}{dx} y + \ldots + \frac{d\xi_{n-1}}{dx} y^{n-1} +$$

$$+ (\xi_1 + 2\xi_2 y + \ldots + (n-1)\xi_{n-1} y^{n-2}) \frac{dy}{dx} \quad (29)$$

Digitized by Google

$$ny^{n-1}\frac{dy}{dx}+\frac{dp_n}{dx}=0 \qquad (30)$$

Вставляя величину

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{ny^{n-1}}\frac{dp_n}{dx}$$

въ уравненіе (29), приводя къ одному знаменателю и принимая во вниманіе соотношенія:

$$y^n=-p_n$$
$$y^{n+1}=-p_ny$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{2n-2}=-p_ny^{n-2}$$

мы получимъ уравненіе степени $n-1$ относительно y въ слѣдующемъ видѣ:

$$n\frac{d\xi_1}{dx}p_n-nq_1p_n+\xi_1\frac{dp_n}{dx}+\left(n\frac{d\xi_2}{dx}p_n-nq_np_n+2\xi_2\frac{dp_n}{dx}\right)y+$$
$$+\left(n\frac{d\xi_3}{dx}p_n-nq_2p_n+3p_2\frac{dp_n}{dx}\right)y^2+\ldots+\left(nq_0-\frac{nd\xi_0}{dx}\right)y^{n-1}=0$$

откуда, полагая нулю всѣ коэффиціенты при различныхъ степеняхъ y, находимъ рядъ уравненій, разрѣшающій данный вопросъ:

$$np_n\left(\frac{d\xi_1}{dx}-q_1\right)+\xi_1\frac{dp_n}{dx}=0$$
$$np_n\left(\frac{d\xi_2}{dx}-q_n\right)+2\xi_2\frac{dp_n}{dx}=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{d\xi_0}{dx}-q_0=0$$

Этотъ вопросъ находится въ связи съ нѣкоторыми задачами *Остроградскаго*.

Мы не останавливаемся на всѣхъ выводахъ, которые вытекаютъ изъ разсмотрѣнія этихъ уравненій. Многіе изъ этихъ

Digitized by Google

выводовъ изложены въ вышеупомянутомъ сочиненіи академика Имшинецкаго. Мы только старались указать на то, что вопросы этого рода и другіе болѣе сложные входятъ въ общую теорію нахожденія частныхъ алгебраическихъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій.

§ 6. Нѣкоторые необходимые признаки существованія алгебраическаго корня.

Мы видѣли, что, если извѣстна степень μ неприводимаго алгебраическаго уравненія (2), которому удовлетворяютъ нѣкоторые частные интегралы уравненія (1), всегда можно опредѣлить раціональныя функціи $P_1, P_2, \ldots P_\mu$, служащія коефиціентами уравненія (2). Эти функціи будутъ интегралами совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій (8). Вопросъ такимъ образомъ сводится къ разысканію раціональныхъ частныхъ интеграловъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій, рѣшеніе которыхъ съ теоретической точки зрѣнія всегда возможно.

Должно однако сознаться, что практическіе пріемы вычисленія должны въ будущемъ подлежать значительному усовершенствованію.

Теперь наша задача заключается въ томъ, чтобы опредѣлить μ самую степень неприводимаго уравненія (2). Такъ какъ частные интегралы уравненія (1) будутъ корнями уравненія (2), то изъ разсмотрѣнія частныхъ интеграловъ уравненія (1), можно иногда сдѣлать заключеніе о порядкѣ μ уравненія (2).

Мы знаемъ, что по началу наибольшихъ показателей можно отыскать разложенія частныхъ интеграловъ уравненія (1) въ ряды по убывающимъ степенямъ перемѣннаго. Въ случаѣ существованія алгебраическихъ интеграловъ, ряды эти должны быть сходны съ рядами, удовлетворяющими уравненію (2). Поэтому выведемъ нѣкоторыя заключенія о видѣ и формѣ рядовъ, удовлетворяющихъ неприводимому уравненію (2):

$$y^\mu + P_1 y^{\mu-1} + P_2 y^{\mu-2} + \ldots + P_{\mu-1} y + P_\mu = 0 \qquad (2)$$

Digitized by Google

Означимъ порядки раціональныхъ функцій P_1, P_2,... P_μ черезъ ρ_1, ρ_2,... ρ_μ, такъ что

$$\delta(P_1)=\rho_1,\ \delta(P_2)=\rho_2,\ldots\ \delta(P_\mu)=\rho_\mu$$

Положимъ, что порядокъ старшаго члена въ разложеніи одного изъ корней уравненія (2) по убывающимъ степенямъ перемѣннаго будетъ λ. Означивъ величину старшаго члена въ разложеніи y черезъ $[y]$, имѣемъ:

$$[y] = \alpha x^\lambda$$

Порядки членовъ уравненія (2) будутъ выражаться числами:

$$\mu\lambda,\ (\mu-1)\lambda+\rho_1,\ (\mu-2)\lambda+\rho_2,\ \lambda+\rho_{\mu-1},\ \rho_\mu.$$

Возможныя величины λ могутъ быть опредѣляемы изъ уравненій

$$\mu\lambda = (\mu-1)\lambda+\rho_1$$
$$\mu\lambda = (\mu-2)\lambda+\rho_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\mu-k)\lambda+\rho_k = (\mu-l)\lambda+\rho_l$$
$$\mu\lambda = \rho_\mu$$

Эти возможныя величины будутъ заключаться въ рядѣ величинъ:

$$\lambda = \rho_1$$
$$\lambda = \frac{\rho_2}{2}$$
$$\ldots\ldots$$
$$\lambda = \frac{\rho_l-\rho_k}{l-k}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda = \frac{\rho_\mu}{\mu}$$

Изъ разсмотрѣнія этихъ величинъ видно, что для алгебраическаго уравненія порядка μ знаменатели возможныхъ величинъ λ не превосходятъ числа μ.

Digitized by Google

Отсюда вытекаетъ

1 Заключеніе: *Если въ разложеніи корня алгебраическаго уравненія по убывающимъ степенямъ перемѣннаго встрѣчаются въ старшемъ членѣ разложенія дробныя степени, и если въ знаменателѣ неприводимой дроби этой степени встрѣтится число* μ, *алгебраическое уравненіе, которому удовлетворяютъ означенные корни, не можетъ быть степени ниже* μ, *хотя оно можетъ быть и степени выше* μ.

2 Заключеніе: *Число различныхъ разложеній, удовлетворяющихъ неприводимому алгебраическому уравненію порядка* μ, *должно быть не менѣе* μ, *ибо неприводимое уравненіе не имѣетъ равныхъ корней.*

На этомъ основаніи, если дифференціальное уравненіе (1) имѣетъ алгебраическіе корни, непремѣнно въ рядѣ разложеній его частныхъ интеграловъ, мы должны получить нѣкоторые ряды, не содержащіе ирраціональныхъ степеней перемѣннаго. Кромѣ того въ числѣ этихъ рядовъ должно существовать нѣсколько рядовъ, удовлетворяющихъ тому или другому неприводимому уравненію.

Такимъ образомъ по числу разложеній мы можемъ съ нѣкоторымъ приближеніемъ судить о степени того алгебраическаго уравненія, которому удовлетворяютъ частные алгебраическіе интегралы дифференціальныхъ уравненій. Для того, чтобы ближе судить о видѣ и формѣ алгебраическаго уравненія (2), слѣдуетъ разсмотрѣть

§ 7. Зависимость между порядками корней и коэффиціентовъ алгебраическаго уравненія.

Положимъ, μ корней неприводимаго алгебраическаго уравненія

$$y^{\mu}+p_{\mu-1}y^{\mu-1}+p_{\mu-2}y^{\mu-2}+\ldots+p_2y^2+p_1y+p_0=0 \quad (31)$$

выражены ихъ разложеніями по убывающимъ степенямъ перемѣннаго x. Пусть эти μ корней будутъ $y_1, y_2, \ldots y_\mu$.

Означимъ порядки ихъ относительно перемѣннаго x черезъ $\delta y_1, \delta y_2, \ldots \delta y_\mu$. Очевидно, порядокъ каждаго изъ корней

Digitized by Google

равенъ степени старшаго члена разложенія, то есть справедливы соотношенія:

$$\delta y_1 = \delta[y_1]$$
$$\delta y_2 = \delta[y_2]$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\delta y_\mu = \delta[y_\mu]$$

Допустимъ, что корни эти расположены по старшинству ихъ порядковъ такъ, что

$$\delta y_1 \geqq \delta y_2 \geqq \delta y_3 \dots \delta y_{\mu-1} \geqq \delta y_\mu$$

причемъ порядки нѣкоторыхъ изъ корней могутъ быть равны.

Не трудно видѣть, что имѣетъ мѣсто слѣдующій рядъ соотношеній между порядками коэффиціентовъ уравненія и порядками корней на основаніи общей зависимости между коэффиціентами и корнями.

$$\delta(y_1 + y_2 + \dots + y_\mu) = \delta p_{\mu-1}$$
$$\delta(y_1 y_2 + y_1 y_3 + \dots + y_{\mu-1} y_\mu) = \delta p_{\mu-2}$$
$$\delta(y_1 y_2 \dots y_\mu) = \delta p_0$$

Будемъ называть тѣ уравненія, въ которыхъ порядки корней идутъ, постоянно убывая, уравненіями съ правильными корнями. Уравненія будутъ имѣть правильные корни даже и въ томъ случаѣ, когда порядки нѣсколькихъ корней равны, лишь бы коэффиціенты старшихъ членовъ удовлетворяли нѣкоторымъ условіямъ.

Такъ, если корни выражаются рядами:

$$y_1 = \alpha x^\lambda + \dots$$
$$y_2 = \beta x^\lambda + \dots$$
$$y_3 = \gamma x^\lambda + \dots$$
$$y_4 = \delta x^\mu + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Digitized by Google

мы будемъ называть корни съ одинакими показателями y_1, y_2, y_3, правильными, если не удовлетворяется ни одно изъ уравненій

$$\alpha+\beta=0,,\quad \alpha+\gamma=0,\ldots\quad \alpha+\beta+\gamma=0\ldots$$
$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=0 \text{ и т. д.}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

то есть, если сумма коеффиціентовъ при старшихъ степеняхъ, или ихъ симметрическая функція $\Sigma\alpha\beta$, $\Sigma\alpha\beta\gamma$ ни въ какой комбинаціи не равна нулю.

Въ случаѣ существованія только такихъ правильныхъ корней

$$\delta(y_1+y_2+\ldots y_\mu)=\delta[[y_1]+[y_2]+\ldots+[y_\mu]]=\delta[y_1]$$
$$\delta[y_1y_2+y_1y_3+\ldots]=\delta[y_1]+\delta[y_2]$$
$$\delta[y_1y_2y_3+y_1y_4y_4+\ldots]=\delta[y_1]+\delta[y_2]+\delta[y_3]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\delta(y_1y_2\ldots y_\mu)=\delta[y_1]+\delta[y_2]+\ldots+\delta[y_\mu]$$

Такимъ образомъ въ случаѣ только однихъ правильныхъ корней существуютъ слѣдующія соотношенія между порядками корней и коеффиціентовъ уравненія:

$$\left.\begin{aligned}
&\delta p_{\mu-1}=\delta[y_1]\\
&\delta p_{\mu-2}=\delta[y_1]+\delta[y_2]\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\delta p_0=\delta[y_1]+\delta[y_2]+\ldots+\delta[y_\mu]
\end{aligned}\right\}\quad(32)$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}
&\delta[y_1]=\delta p_{\mu-1}\\
&\delta[y_2]=\delta p_{\mu-2}-\delta p_{\mu-1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\delta[y_\mu]=\delta p_0-\delta p_1
\end{aligned}\right\}\quad(33)$$

Digitized by Google

Уравненія (32) и (33) показываютъ, что въ случаѣ однихъ только правильныхъ корней можно по порядку корней, то есть только по выраженію старшихъ членовъ разложенія дѣлать вѣрныя заключенія о порядкѣ коэффиціентовъ неприводимаго уравненія и наоборотъ.

Дѣло является совсѣмъ иначе, когда существуетъ неправильная система корней. Въ этомъ случаѣ иногда

$$\delta(y_1 + y_2 + \ldots + y_\mu) =|= \delta[y_1]$$

ибо тогда сумма старшихъ членовъ разложенія можетъ равняться нулю.

Такъ, если

$$[y_1] + [y_2] + [y_3] = 0$$

то

$$\delta(y_1 + y_2 + \ldots y_\mu) =|= \delta y_1$$

Обыкновенно тогда

$$\delta(y_1 + y_2 + \ldots + y_\mu) = \delta(p_{\mu-1}) < \delta[y_1]$$

Тоже замѣчаніе справедливо и для слѣдующихъ соотношеній. Въ этомъ случаѣ слѣдуетъ принимать вторые и слѣдующіе члены разложенія. Во всякомъ случаѣ по разложеніямъ корней уравненія, мы можемъ судить о порядкѣ коэффиціентовъ неприводимаго уравненія.

§ 8. **Опредѣленіе порядка неприводимаго алгебраическаго уравненія.** Вышеприведенныя соображенія имѣютъ особенное значеніе для опредѣленія алгебраическихъ интеграловъ, или того неприводимаго уравненія, корнями котораго они служатъ. При разрѣшеніи вопроса о нахожденіи алгебраическихъ корней даннаго дифференціальнаго уравненія

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \qquad (1)$$

слѣдуетъ найти всѣ разложенія функціи y по убывающимъ степенямъ перемѣннаго и отбросить тѣ изъ этихъ разложеній въ которыхъ перемѣнное x входитъ съ ирраціональными

Digitized by Google

или мнимыми показателями. За тѣмъ всѣ остальныя разложенія расположить по порядку старшихъ степеней перемѣннаго. Число этихъ разложеній можетъ указывать на высшій предѣлъ степени того неприводимаго уравненія, корни котораго могутъ быть интегралами даннаго дифференціальнаго уравненія. На эту степень могутъ указывать и дробныя степени этихъ разложеній. Положимъ, эти разложенія, расположенныя по порядку старшихъ степеней, будутъ:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 x^{\lambda_1} + \beta_1 x^{\mu_1} + \gamma_1 x^{\nu_1} + \ldots \\ y_2 &= \alpha_2 x^{\lambda_2} + \beta_2 x^{\mu_2} + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k &= \alpha_k x^{\lambda_k} + \beta_k x^{\mu_k} + \ldots \end{aligned} \qquad (34)$$

Въ нихъ

$$\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \lambda_3 \ldots \geqq \lambda_k.$$

Не трудно теперь выбрать какую-нибудь систему этихъ величинъ и по ней дѣлать заключенія о порядкѣ коеффиціентовъ предполагаемаго неприводимаго алгебраическаго уравненія.

При этомъ слѣдуетъ помнить, что порядки всѣхъ величинъ то есть $\delta\Sigma y_l$, $\delta\Sigma y_l y_m \ldots$ должны быть цѣлыми положительными или отрицательными числами:

Здѣсь для краткости мы обозначаемъ:

$$\begin{aligned} \delta(y_1 + y_2 + \ldots + y_k) &= \delta\Sigma y_l \\ \delta(y_1 y_2 + y_1 y_2 + \ldots) &= \delta\Sigma y_l y_m \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Всякій разъ, когда это обстоятельство не будетъ имѣть мѣста, то есть всякій разъ, когда порядки означенныхъ функцій корней не будутъ цѣлыми числами, нужно или отбросить то изъ разложеній, которое препятствуетъ этимъ требованіямъ, или выбрать иную комбинацію разложеній y.

Какъ скоро найдена комбинація, удовлетворяющая означеннымъ требованіямъ, и сдѣлано заключеніе о порядкѣ коеф-

Digitized by Google

фиціентовъ неприводимаго алгебраическаго уравненія, слѣдуетъ приступить къ тѣмъ самымъ вычисленіямъ, которыя указаны нами въ § 1 нашей статьи. Здѣсь можно сдѣлать нѣкоторыя дополнительныя замѣчанія о показателяхъ старшихъ степеней разложеній, могущихъ въ данной системѣ быть корнями неприводимаго алгебраическаго уравненія съ раціональными коеффиціентами относительно x. Такъ какъ

$$\delta(y_1+y_2+\ldots+y_k)=\text{цѣлому числу}$$

то всѣ показатели старшихъ и равныхъ разложеній должны быть цѣлыми числами. Если же величина λ_1, λ_2, λ_3 старшихъ разложеній будутъ равными и дробными числами, необходимо тогда, чтобы сумма ихъ коеффиціентовъ равнялась нулю, ибо только въ этомъ случаѣ ихъ сумма можетъ равняться раціональной функціи x. Значитъ, если старшая степень λ будетъ дробная и притомъ одна, это разложеніе отбрасывается изъ системы (34) или это указываетъ, что данное дифференціальное уравненіе не имѣетъ алгебраическихъ интеграловъ.

Точно также изъ уравненія

$$\delta(y_1y_2\ldots y_k)=\delta[y_1]+\delta[y_2]+\ldots+\delta[y_k]=\text{цѣлому числу}$$

слѣдуетъ, что сумма показателей всѣхъ старшихъ членовъ разложенія данной алгебраической системы равна цѣлому числу.

§ 9. **Примѣръ.** Найти интегралъ дифференціальнаго уравненія:

$$(y^3-3xy^2+3x^2y-x^3)\frac{d^2y}{dx^2}-2(y^2-2xy+x^2)\frac{dy}{dx}+2xy+1=0 \qquad (35)$$

Означимъ черезъ $[y]$ величину старшаго члена разложенія функціи y въ рядъ по убывающимъ степенямъ перемѣннаго:

$$[y]=\alpha x^\lambda$$

Система величинъ, выражающихъ степени x для различныхъ членовъ дифференціальнаго уравненія, будетъ выражаться формулами:

Digitized by Google

$4\lambda-2,\ 3\lambda-1,\ 2\lambda,\ \lambda+1,\ 3\lambda-1,\ 2\lambda,\ \lambda+1,\ \lambda+1,\ 0$ (*a*)

Различныя возможныя величины λ получатся изъ уравненій:

$$4\lambda - 2 = 3\lambda - 1$$

$$4\lambda - 2 = 2\lambda$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$4\lambda - 2 = 0$$

$$3\lambda - 1 = 2\lambda$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Эти величины будутъ

$$\lambda = 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 0,\ -1,\ \lambda$$

Для этихъ значеній λ будемъ имѣть слѣдующую таблицу величинъ (*a*):

λ	1*	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	−1*
1) $4\lambda-2$	2	0	$-\frac{2}{3}$	−2	−6
2) $3\lambda-1$	2	$\frac{1}{2}$	0	−1	−4
3) 2λ	2	1	$\frac{2}{3}$	0	−2
4) $\lambda+1$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	1	0
5) $3\lambda-1$	2	$\frac{1}{2}$	0	−1	−4
6) 2λ	2	1	$\frac{2}{3}$	0	−2
7) $\lambda+1$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	1	0
8) $\lambda+1$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	1	0
9) 0	0	0	0	0	0

Digitized by Google

Изъ приложенной таблицы видно, что началу наибольшихъ показателей удовлетворяютъ только двѣ величины:

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$$

ибо таблица показываетъ, что эти величины λ, уравнивая показателей чиселъ (a), дѣлаютъ ихъ въ тоже время и наибольшими показателями. Количества

$$\lambda_3 = \frac{1}{2},\ \lambda_4 = \frac{1}{3},\ \lambda_5 = 0$$

не удовлетворяютъ началу наибольшихъ показателей, ибо величина $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ получилась изъ уравненія $4\lambda - 2 = 0$.

Уравнивая коеффиціенты перваго и девятаго членовъ уравненія, величина $\lambda_3 = \frac{1}{2}$, какъ видно изъ таблицы, не дѣлаетъ ихъ наибольшими. Тоже замѣчаніе остается справедливымъ для величинъ $\lambda_4 = \frac{1}{3}$, $\lambda_5 = 0$.

Такимъ образомъ остаются возможными только двѣ величины:

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$$

Полагая $\lambda_1 = 1$, имѣемъ:

$$[y_1] = \alpha x$$

Для опредѣленія α имѣемъ уравненіе:

$$-2\alpha^3 + 4\alpha^2 - 2\alpha + 2\alpha = 0$$

откуда находимъ $\alpha = 2$, слѣдовательно

$$y_1 = 2x + \ldots . \qquad (36)$$

Полагая $\lambda_2 = -1$, имѣемъ:

$$[y_2] = \beta x^{-1}$$

Digitized by Google

Величина $\lambda_2 = -1$ уравниваетъ показателей 4-го, 7-го, 8-го и 9-го членовъ дифференціальнаго уравненія (35). Величину β получаемъ изъ уравненія:

$$-2\beta + 2\beta + 2\beta + 1 = 0$$

откуда $\beta = -\frac{1}{2}$

слѣдовательно

$$y_2 = -\frac{1}{2} x^{-1} + \ldots = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \ldots \qquad (37)$$

Два частныхъ интеграла

$$y_1 = 2x + \ldots$$

$$y_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \ldots$$

указываютъ, что возможенъ алгебраическій интегралъ, удовлетворяющій неприводимому уравненію второй степени:

$$y^2 + My + N = 0$$

Не трудно видѣть, что

$$\delta(M) = \delta(y_1 + y_2) = \delta[y_1] = 1$$

$$\delta(N) = \delta(y_1 y_2) = \delta[y_1] + \delta[y_2] = 0$$

Такимъ образомъ M есть раціональная функція перваго порядка, а N нулеваго порядка относительно x.

Чтобы вычислить второй членъ частнаго интеграла y_1, полагаемъ

$$y_1 = 2x + z$$

Вставляя въ уравненіе (35), получаемъ уравненіе:

$$(z^3 + 3xz^2 + 3x^2z + x^3)\frac{d^2z}{dx^2} - 2(z^2 + 2xz + x^2)\frac{dz}{dx} - \qquad (38)$$

$$-4z^2 - 6xz + 1 = 0$$

Digitized by Google

Полагая

$$[z] = \gamma x^{\mu}$$

находимъ величины показателей старшихъ членовъ для десяти членовъ нашего уравненія:

$$4\mu-2,\ 3\mu-1,\ 2\mu,\ \mu+1,\ 3\mu-1,\ 2\mu,\ \mu+1,\ 2\mu,\ \mu+1,\ 0 \quad (39)$$

Возможныя величины для μ будутъ:

$$\mu = 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 0,\ -1$$

Величину $\mu=1$ отбрасываемъ, ибо μ должна быть менѣе 1. Вставляя величину $\mu = \frac{1}{2}$ въ систему величинъ (39), получимъ соотвѣтствующія значенія ряда (39):

$$2,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 0$$

Изъ этого ряда величинъ видно, что $\mu = \frac{1}{2}$ не удовлетворяетъ началу наибольшихъ показателей.

Полагая $\mu = \frac{1}{3}$ и вставляя въ систему величинъ (39), имѣемъ:

$$-\frac{2}{3},\ 0,\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ 0,\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ 0$$

Равныя величины, изъ которыхъ получилась величина $\mu = \frac{1}{3}$, обращаетъ соотвѣтствующія величины ряда въ нуль, слѣдовательно $\frac{1}{3}$ не удовлетворяетъ началу наибольшихъ показателей.

Впрочемъ полагая $[z] = \gamma x^{\frac{4}{3}}$ и приравнивая коеффиціенты у членовъ 4-го, 7-го и 9-го, имѣющихъ наибольшій показатель $\frac{4}{3}$, будемъ имѣть уравненіе:

Digitized by Google

$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\gamma-\frac{2}{3}\gamma-6\gamma=0$$

изъ котораго видно, что $\gamma=0$.

Величина $\mu=0$ также не удовлетворяетъ началу наибольшихъ показателей, ибо даетъ систему (39) величинъ:

$$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0$$

изъ которой видно, что величина $\mu=0$ получилась изъ такихъ уравненій, которыя, уравнивая соотвѣтствующія величины, не дѣлаютъ ихъ наибольшими. Впрочемъ $\mu=0$, хотя уравниваетъ и дѣлаетъ наибольшими 4, 7 и 9 величину системы (39), но, полагая $[z]=\delta$ и сравнивая коэффиціенты у этихъ членовъ, мы найдемъ уравненіе:

$$-4\delta^2=0$$

изъ котораго видно, что $\delta=0$.

Наконецъ $\mu=-1$ даетъ для системы (39) значенія:

$$-6,\ -4,\ -2,\ 0,\ -4,\ -2,\ 0,\ -2,\ 0,\ 0$$

Не трудно видѣть, что $\mu=-1$, уравнивая члены системы (39), дѣлаетъ ихъ въ тоже время и наибольшими.

Такимъ образомъ $\mu=-1$ удовлетворяетъ началу наибольшихъ показателей, слѣдовательно, мы имѣемъ право положить

$$[z]=\frac{\gamma}{x}$$

Сравнивая коэффиціенты 4, 7, 9 и 10 членовъ съ равными показателями, находимъ для опредѣленія γ уравненіе

$$2\gamma+2\gamma-6\gamma+1=0$$

откуда $\gamma=\frac{1}{2}$

слѣдовательно

$$[z]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}$$

Digitized by Google

$$y_1 = 2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \ldots$$

Изъ двухъ разложеній

$$y_1 = 2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \ldots$$

$$y_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \ldots$$

получимъ

$$y_1 + y_2 = 2x + R\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$y_1 y_2 = -1 + R_1\left(\frac{1}{x}\right)$$

Изъ этихъ уравненій видно, что цѣлыя части величинъ $y_1 + y_2$, и $y_1 y_2$ суть:

$$E(y_1 + y_2) = 2x$$

$$E(y_1 y_2) = -1$$

слѣдовательно въ алгебраическомъ уравненіи

$$y^2 + My + N = 0 \qquad (40)$$

которому могутъ удовлетворять частные интегралы нашего уравненія

$$E(M) = -E(y_1 + y_2) = -2x$$

$$EN = E(y_1 y_2) = -1$$

Чтобы узнать, имѣетъ ли функція y, удовлетворяющая дифференціальному уравненію (35), полюсъ $x = a$, мы должны изслѣдовать порядокъ безконечности различныхъ членовъ дифференціальнаго уравненія. Положимъ, что полюсъ a будетъ у функціи y порядка λ. Въ этомъ случаѣ въ разложеніи y въ рядъ по возрастающимъ степенямъ $x - a$ долженъ быть мад-

Digitized by Google

шій членъ $\frac{A}{(x-a)^\lambda}$. Наибольшій порядокъ безконечности будетъ у члена $y^3 \frac{d^2y}{dx^2}$.

Этотъ порядокъ будетъ выражаться числомъ $5\lambda + 2$. Очевидно, этотъ порядокъ будетъ наибольшимъ и при существованіи полюса т. е. при положительномъ λ этотъ членъ не могъ бы сократиться, слѣдовательно у функціи y нѣтъ полюса, поэтому можно допустить, что M и N суть цѣлыя функціи, т. е. положить

$$M = -2x, \quad N = -1$$

и уравненіе, которому удовлетворяютъ алгебраическіе интегралы, будетъ:

$$y^2 - 2xy - 1 = 0$$

а самые интегралы

$$y_1 = x + \sqrt{1+x^2}$$

$$y_2 = x - \sqrt{1+x^2}$$

Можно было бы вести вычисленія по правиламъ § 1, но ограничиваемся болѣе быстрымъ ходомъ заключеній.

§ 10. **Опредѣленіе полюса.** Чтобы привести примѣръ на опредѣленіе полюса, возьмемъ уравненіе

$$(c-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad (41)$$

Здѣсь полюсами могутъ быть корни уравненія $c - x^2 = 0$.

Изслѣдуемъ величину $x = \sqrt{c}$.

Допуская, что полюсъ $x = \sqrt{c}$ будетъ порядка λ, то есть въ разложеніи y по возрастающимъ степенямъ $x - \sqrt{c}$ первый членъ имѣетъ видъ

$$\frac{A}{(x-\sqrt{c})^\lambda}$$

Digitized by Google

находимъ совокупность членовъ

$$\frac{(c-x^2)A\lambda(\lambda+1)}{(x-\sqrt{c})^{\lambda+2}}-\frac{A\lambda x}{(x-\sqrt{c})^{\lambda+1}}+\frac{A}{(x-\sqrt{c})^{\lambda}}+\ldots$$

Члены, содержащіе въ знаменателѣ старшую степень $(x-\sqrt{c})$, будутъ:

$$\frac{-(x+\sqrt{c})\lambda(\lambda+1)A}{(x-\sqrt{c})^{\lambda+1}}+\frac{A\lambda x}{(x-\sqrt{c})^{\lambda+1}}$$

Эти члены не сокращаются, ибо предположеніе

$$-A\lambda(\lambda+1)(x+\sqrt{c})+A\lambda x=0 \qquad (42)$$

ведетъ къ уравненію

$$(\lambda+1)(x+\sqrt{c})=x$$

которое приводитъ къ противорѣчію

Дѣйствительно, изъ сравненія коеффиціентовъ находимъ

$$\lambda+1=1$$

$$(\lambda+1)\sqrt{c}=0$$

откуда получаемъ для λ двѣ величины: $\lambda=0$, $\lambda=-1$.

Такимъ образомъ эти два члена не могутъ сократиться и должны сокращаться въ связи съ другими членами, а для этого выраженіе (42) должно дѣлиться на $x-\sqrt{c}$, то есть должно быть справедливо уравненіе:

$$\Big/^{x=\sqrt{c}}\ [(\lambda+1)(x+\sqrt{c})-x]=0$$

откуда получаемъ уравненія:

$$(2\lambda+1)\sqrt{c}=0;\ 2\lambda+1=0.$$

Послѣднее уравненіе даетъ для λ отрицательную величину

Digitized by Google

$$\lambda = -\frac{1}{2}.$$

указывающую, что $x = \sqrt{c}$ будетъ не полюсомъ, а только точкою развѣтвленія.

Вопросъ о нахожденіи полюсовъ и точекъ развѣтвленія по дифференціальному уравненію можетъ подлежать особому изслѣдованію, но общіе методы изслѣдованія не должны по существу отличаться отъ тѣхъ пріемовъ, которые мы здѣсь изложили на частномъ примѣрѣ, если только эти полюсы алгебраическаго характера.

§ 11. **Другіе пріемы для опредѣленія алгебраическихъ интеграловъ.**

Кромѣ общаго пріема, означеннаго въ § 1, можно для вычисленія алгебраическихъ интеграловъ примѣнять и другіе пріемы изслѣдованія.

Если мы убѣдились, что дифференціальное уравненіе

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \qquad (1)$$

можетъ имѣть алгебраическій интегралъ, удовлетворяющій неприводимому уравненію

$$y^\mu + P_1 y^{\mu-1} + P_2 y^{\mu-2} + \ldots + P_{\mu-1} y + P_\mu = 0 \qquad (2)$$

можно повести изслѣдованіе такимъ образомъ, чтобы отдѣльно вычислять коэффиціенты неприводимаго уравненія.

Зная, что μ корней $y_1, y_2, \ldots y_\mu$ удовлетворяютъ уравненію (1), мы можемъ получить для опредѣленія P_1 слѣдующія $\mu + 1$ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} f\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots \frac{d^n y_1}{dx^n}\right) &= 0 \\ f\left(x, y_2, \frac{dy_2}{dx}, \ldots \frac{d^n y_2}{dx^n}\right) &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ f\left(x, y_\mu, \frac{dy_\mu}{dx}, \ldots \frac{d^n y_\mu}{dx^\mu}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_\mu = -u$$

Digitized by Google

Исключивъ изъ этихъ уравненій μ функцій $y_1, y_2, \ldots y_\mu$, получимъ то дифференціальное уравненіе, которому удовлетворяетъ раціональная функція u. Если это уравненіе не имѣетъ раціональныхъ интеграловъ, то и дифференціальное уравненіе не имѣетъ алгебраическихъ интеграловъ. Если же оно имѣетъ раціональные частные интегралы, то и алгебраическіе интегралы даннаго уравненія возможны. Впрочемъ это только необходимый, но недостаточный признакъ. Дѣйствительно, въ числѣ частныхъ интеграловъ уравненія, зависящаго отъ u, будетъ также интегралъ $u = P_1$, если онъ существуетъ. Однако уравненіе, зависящее отъ u, можетъ имѣть раціональные частные интегралы, а данное дифференціальное уравненіе можетъ не имѣть алгебраическихъ интеграловъ. Для опредѣленія P_2 слѣдуетъ послѣднее изъ уравненій (43) замѣнить уравненіемъ:

$$y_1 y_2 + y_1 y_3 + \ldots + y_{\mu-1} y_\mu = v$$

и исключивъ $y_1, y_2, \ldots y_\mu$ найти дифференціальное уравненіе, зависящее отъ v. Если это уравненіе имѣетъ раціональные частные интегралы, то и заключеніе остается подобное предыдущему.

Не трудно видѣть, какія высшія производныя нужно брать отъ функцій $y_1, y_2, \ldots y_\mu$ для того, чтобы ихъ исключеніе было возможно.

Дѣйствительно, легко опредѣлить до какого порядка слѣдуетъ дифференцировать уравненія (43) для того, чтобы получить уравненіе, зависящее отъ u. Если къ уравненіямъ (43) присоединить n уравненій:

$$\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} + \ldots + \frac{dy_\mu}{dx} = -\frac{du}{dx} \\
&\frac{d^2y_1}{dx^2} + \frac{d^2y_2}{dx^2} + \ldots + \frac{d^2y_\mu}{dx^2} = -\frac{d^2u}{dx^2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{d^ny_1}{dx^n} + \frac{d^ny_2}{dx^n} + \ldots + \frac{d^ny_\mu}{dx^n} = -\frac{d^nu}{dx^n}
\end{aligned} \qquad (44)$$

Digitized by Google

получимъ $\mu + 1 + n$ уравненій, содержащихъ $(n + 1)\mu$ величинъ $y_1, y_2, \ldots y_\mu$ и n производныхъ этихъ величинъ. Положимъ, что мы произвели k дифференцированій надъ уравненіями:

$$f\left(x, y_1, \ldots \frac{d^n y_1}{dx^n}\right) = 0$$

$$f\left(x, y_2, \frac{dy_2}{dx}, \ldots \frac{d^n y_2}{dx^n}\right) = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f\left(x_1, y_\mu, \frac{dy_\mu}{dx^n} \ldots \frac{d^n y_\mu}{dx^n}\right) = 0$$

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} + \frac{d^n y_2}{dx^n} + \ldots + \frac{d^n y_\mu}{dx^n} = -\frac{d^n u}{dx^n}.$$

Въ этомъ случаѣ прибавится $(\mu + 1)k$ новыхъ уравненій и μk новыхъ производныхъ функцій $y_1, y_2, \ldots y_\mu$ до порядка $n + k$.

Такимъ образомъ мы получимъ всѣхъ уравненій (43) и (44) съ новополученными $\mu + 1 + n + (\mu + 1)k$, содержащихъ $(n + 1 + k)\mu$ величинъ $y_1, y_2, \ldots y_\mu$ и ихъ производныя до порядка $n + k$.

Чтобы возможно было исключеніе этихъ функцій нужно, чтобы число уравненій на единицу превосходило число величинъ, слѣдовательно должно удовлетворяться равенство:

$$\mu + 1 + n + (\mu + 1)k = (n + 1 + k)\mu + 1$$

откуда находимъ, что k удовлетворяетъ уравненію

$$k = n(\mu - 1) \qquad (45)$$

Исключивъ изъ этихъ уравненій величины $y_1, y_2, \ldots y_{\mu-1}, y_\mu$ съ ихъ производными, получимъ то дифференціальное уравненіе порядка $n + k = n\mu$, которому удовлетворяетъ функція u.

Нужно впрочемъ замѣтить, что u будетъ только однимъ изъ частныхъ интеграловъ этого уравненія, ибо уравненіе

Digitized by Google

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

можетъ имѣть въ числѣ своихъ частныхъ интеграловъ такія величины $y^{(\alpha)}$, $y^{(\beta)}, \ldots y^{(\lambda)}$, сумма которыхъ, составленная изъ μ величинъ, можетъ быть раціональною функціею x, но эти величины не будутъ корнями алгебраическаго уравненія (2). Можетъ случиться, что u будетъ раціональною функціею, а данное уравненіе не имѣетъ алгебраическихъ интеграловъ и такимъ образомъ нашъ признакъ будетъ необходимымъ, но недостаточнымъ.

Для выдѣленія корней алгебраическаго уравненія слѣдуетъ прибѣгнуть къ другому пріему.

§ 12. **Дополнительный пріемъ для выдѣленія алгебраическихъ интеграловъ.** Получивъ уравненіе, зависящее отъ u, порядка $n + k$

$$F\left(x, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots \frac{d^{n+k}u}{dx^{n+k}}\right) = 0$$

мы на томъ основаніи, что

$$n + k = n\mu = l$$

имѣемъ уравненіе:

$$F\left(x, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots \frac{d^l u}{dx^l}\right) = 0 \qquad (46)$$

Другое уравненіе, которому удовлетворяетъ функція

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_\mu = -P_1$$

получится какъ результатъ исключенія функцій $P_2, P_3, \ldots P_\mu$ изъ уравненій (8).

Положимъ, этотъ результатъ выразится дифференціальнымъ уравненіемъ:

$$\Psi\left(x, \frac{dP_1}{dx}, \ldots \frac{d^m P_1}{dx^m}\right) = 0 \qquad (37)$$

Digitized by Google

Такъ какъ раціональная функція P_1 есть частный интегралъ уравненій (46) и (47), то величина P_1 опредѣлится какъ общій интегралъ уравненій (46) и (47) или уравненій

$$F\left(x, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots \frac{d^lu}{dx^l}\right) = 0 \qquad (46)$$

$$\Psi\left(x, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots \frac{d^mu}{dx^m}\right) = 0 \qquad (47)$$

Такимъ образомъ вопросъ объ опредѣленіи P_1 приводится къ вопросу объ опредѣленіи общихъ интеграловъ двухъ дифференціальныхъ уравненій какой угодно степени и порядка.

§ 13. **Способъ симметрическихъ функцій.** Иногда, разыскивая алгебраическіе интегралы дифференціальнаго уравненія

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \qquad (1)$$

удовлетворяющіе неприводимому уравненію

$$y_\mu + P_1 y^{\mu-1} + \ldots + P_{\mu-1} y + P_\mu = 0 \qquad (2)$$

можно къ уравненіямъ (8)

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= 0 \\ R_2 &= 0 \\ &\ldots\ldots \\ R_\mu &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

присоединять уравненіе, получаемое изъ уравненія (1) помощію симметрическихъ функцій.

Означая черезъ $y_1, y_2, \ldots y_\mu$ его алгебраическіе интегралы, составляемъ уравненіе

$$\sum f\left(x, y_k, \frac{dy_k}{dx}, \ldots \frac{d^ny_k}{dx^n}\right) = 0 \qquad (48)$$

гдѣ знакъ Σ распространяется на всѣ корни y_k уравненія (2).

Очевидно уравненіе (48), будучи симметрическою функціею корней уравненія (2), даетъ функцію, зависящую отъ P_1,

Digitized by Google

$P_2, \ldots P_\mu$ коеффиціентовъ уравненія (2). Дѣйствительно, члены уравненія (48) будутъ вида

$$\sum \psi(x)\, y^{\lambda}{}_k \left(\frac{dy_k}{dx}\right)^{\lambda_1} \cdots \left(\frac{d^n y_k}{dx^n}\right)^{\lambda_n}$$

Такъ какъ $\frac{dy_k}{dx}$, $\frac{d^2 y_k}{dx^2}, \ldots \frac{d^n y_k}{dx^n}$ могутъ быть выражены дробною функціею y_k, то каждый изъ членовъ уравненія (48) выразится дробною симметрическою функціею корней уравненія (2). Эта же функція будетъ раціональною функціею коеффиціентовъ уравненія (2). Такимъ образомъ къ уравненіямъ (8) можно иногда присоединять новое дифференціальное соотношеніе:

$$\Phi(P_1, P_2 \ldots P_\mu) = 0 \qquad (49)$$

Соотношенія (8) съ соотношеніемъ (49) даютъ $\mu + 1$ дифференціальныхъ уравненій между μ функціями. Изъ этихъ уравненій можно получить условіе, которому должны удовлетворять коеффиціенты уравненія (1) для того, чтобы интегралъ могъ выражаться уравненіемъ (2) съ раціональными коеффиціентами.

Если условіе выполняется и существуютъ раціональныя функціи $P_1, P_2, \ldots P_\mu$, удовлетворяющія уравненіямъ (8) и (49), то и существуетъ алгебраическій интегралъ вида (8) для даннаго дифференціальнаго уравненія (1). При томъ самыя функціи $P_1, P_2, \ldots P_\mu$ должны быть раціональными корнями нѣкоторыхъ алгебраическихъ уравненій, если только мы послѣдовательно исключаемъ всѣ производныя изъ уравненій (8) и (49). Въ самомъ дѣлѣ, исключивъ всѣ функціи $P_2, P_3, \ldots P_\mu$ изъ $\mu + 1$ уравненій, мы получимъ для P_1 два дифференціальныхъ уравненія вида:

$$\left.\begin{aligned} f_1\left(x, P_1, \frac{dP_1}{dx}, \ldots \frac{d^\lambda P_1}{dx^\lambda}\right) &= 0 \\ f_2\left(x, P_1, \frac{dP_1}{dx}, \ldots \frac{d^\nu P_1}{dx^\nu}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

Digitized by Google

Изъ уравненій (50) всегда можно исключить всѣ производныя функціи P_1 и получить алгебраическое уравненіе вида

$$\varphi(x, P_1) = 0 \qquad (51)$$

Если оно имѣетъ раціональные корни, то и существуетъ раціональная функція P_1, удовлетворяющая уравненіямъ (8) и (49).

Тоже заключеніе имѣетъ мѣсто и для всѣхъ остальныхъ функцій $P_2, P_3 \ldots P_\mu$.

§ 15. **Линейное уравненіе 1-го порядка.** Найти при какихъ условіяхъ линейное уравненіе съ раціональными коеффиціентами

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \qquad (52)$$

имѣемъ алгебраическій интегралъ въ формѣ неприводимаго уравненія

$$y^2 + P_1 y + P_2 = 0 \qquad (53)$$

съ раціональными коеффиціентами P_1 и P_2.

Опредѣляемъ изъ уравненія (53)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y\frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dx}}{2y + P_1} \qquad (54)$$

и вставляемъ въ уравненіе (52). Уравненіе (52) послѣ замѣны $\frac{dy}{dx}$ его величиною (54), приведенія къ одному знаменателю и замѣны y^2 величиною

$$y^2 = -P_1 y - P_2$$

даетъ уравненіе

$$\left(\frac{dP_1}{dx} + 2PP_1 + 2Q\right) y + \frac{dP_2}{dx} + 2PP_2 + P_1 Q - PP_1 = 0 \qquad (55)$$

Уравненіе (55) дастъ два дифференціальныя уравненія

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dP_1}{dx} + 2PP_1 + 2Q = 0 \quad (a) \\ &\frac{dP_2}{dx} + 2PP_2 - PP_1 + P_1 Q = 0 \quad (b) \end{aligned}\right\} \quad (56)$$

Если къ этимъ уравненіямъ присоединить уравненіе

$$\sum \frac{dy}{dx} + P\Sigma y = 2Q$$

гдѣ

$$\sum \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} = -\frac{dP_1}{dx}$$

$$\Sigma y = y_1 + y_2 = -P_1$$

получимъ уравненіе

$$-\frac{dP_1}{dx} - PP_1 = 2Q$$

или уравненіе

$$\frac{dP_1}{dx} + PP_1 + 2Q = 0 \quad (57)$$

Изъ уравненій (56) и (57) послѣ вычитанія получаемъ уравненіе

$$PP_1 = 0 \quad (58)$$

Уравненіе (58) показываетъ, что рѣшеніе возможно въ двухъ случаяхъ:

1) *Первый случай* $P_1 = 0$

Въ этомъ случаѣ находимъ изъ уравненія (56)

$$Q = 0$$

Такимъ образомъ линейное уравненіе имѣетъ алгебраическій интегралъ вида

$$y^2 + P_2 = 0$$

если $Q = 0$

Digitized by Google

то есть для уравненія

$$\frac{dy}{dx} + Py = 0$$

можно отыскать алгебраическій интегралъ вида

$$y^2 + P_2 = 0$$

Уравненіе (56) даетъ при $P_1 = 0$, $Q = 0$ уравненіе

$$\frac{dP_2}{dx} + 2PP_2 = 0$$

изъ котораго найдемъ

$$P_2 = e^{-2\int P dx}$$

Чтобъ P_2 было раціональною функціею, необходимо, чтобы удовлетворялось условіе

$$e^{-2\int P dx} = \Phi(x)$$

гдѣ $\Phi(x)$ есть раціональная функція x.

Изъ послѣдняго уравненія находимъ, что

$$P = -\frac{1}{2}\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)}$$

Такимъ образомъ только уравненіе

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)}y = 0$$

имѣетъ алгебраическій интегралъ, удовлетворяющій неприводимому уравненію второй степени.

2) *Второй случай.* $P = 0$, даетъ уравненія

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = Q \\ &\frac{dP_1}{dx} + 2Q = 0 \\ &\frac{dP_2}{dx} + P_1 Q = 0 \end{aligned}\right\} \quad 59)$$

Digitized by Google

Изъ уравненія (59) видно, что

$$P_1 = -2\int Qdx$$

$$P_2 = 2\int[Qdx\int Qdx]$$

слѣдовательно y удовлетворяетъ уравненію

$$y^2 - 2\int Qdx.\ y + 2\int(Qdx\int Qdx) = 0 \qquad (60)$$

гдѣ

$\int Qdx$ и $\int(Qdx\int Qdx)$ должны быть раціональнымъ функціями.

Такъ какъ частные интегралы, удовлетворяющіе неприводимому уравненію (60), суть алгебраическія функціи, а Q есть раціональная функція, то изъ уравненія

$$\frac{dy}{dx} = Q$$

видно, что y тоже раціональная функція, слѣдовательно уравненіе

$$\frac{dy}{dx} = Q$$

не имѣетъ алгебраическихъ корней, удовлетворяющихъ неприводимому уравненію (53).

§ 15. **Условія интегрируемости уравненія:**

$$\frac{dy}{dx} + Py^2 + Qy + R = 0 \qquad (61)$$

въ формѣ неприводимаго уравненія

$$y^2 + P_1 y + P_2 = 0 \qquad (62)$$

Опредѣляя $\frac{dy}{dx}$ изъ уравненія (62), имѣемъ:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dP_1}{dx}y + \frac{dP_2}{dx}}{2y + P_1}$$

Замѣняя въ уравненіи (61) величину y^2, опредѣляемую изъ уравненія (62), получимъ уравненіе:

Digitized by Google

$$\frac{dy}{dx} + (Q - PP_1)y + R - PP_2 = 0 \qquad (63)$$

Изъ сопоставленія уравненія (63) съ уравненіемъ (52) видно, что для опредѣленія условій интегрируемости мы можемъ прямо переписать уравненія (56), въ которыхъ слѣдуетъ только замѣнить величины P и Q величинами:

P величиною $Q - PP_1$

Q величиною $PP_2 - R$

Сдѣлавъ это, имѣемъ для нашего случая уравненія

$$\frac{dP_1}{dx} + 2(Q - PP_1)P_1 + 2(PP_2 - R) = 0 \qquad (64)$$

$$\frac{dP_2}{dx} + 2(Q - PP_1)P_2 - (Q - PP_1)P_1 + (PP_2 - R)P_1 = 0 \qquad (65)$$

Сложивъ два уравненія

$$\frac{dy_1}{dx} + (Q - PP_1)y_1 + R - PP_2 = 0$$

$$\frac{dy_2}{dx} + (Q - PP_1)y_2 + R - PP_2 = 0$$

и принимая во вниманіе, что

$$y_1 + y_2 = -P_1$$

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} = -\frac{dP_1}{dx}$$

получаемъ уравненіе:

$$\frac{dP_1}{dx} + (Q - PP_1)P_1 + 2(PP_2 - R) = 0 \qquad (66)$$

Вычитая изъ уравненія (65) уравненіе (66), получаемъ

$$(Q - PP_1)P_1 = 0 \qquad (67)$$

Условіе (67) ведетъ къ двумъ случаямъ

а) Первый случай $P_1 = 0$ (68)

Условіе (68) обращаетъ уравненія (64) и (65) въ уравненія

Digitized by Google

$$PP_2 - R = 0 \tag{69}$$

$$\frac{dP_2}{dx} + 2QP_2 = 0 \tag{70}$$

Уравненія (69) и (70) даютъ

$$P_2 = e^{-2\int Q dx} = \frac{R}{P}$$

откуда получаемъ условіе интегрируемости

$$P\frac{dR}{dx} - R\frac{dP}{dx} + 2PQR = 0 \tag{71}$$

Въ случаѣ выполненія условія (71), интегралъ уравненія (61) опредѣлится изъ равенства

$$y^2 + \frac{R}{P} = 0 \tag{72}$$

или изъ уравненія

$$y^2 + e^{-2\int Q dx} = 0 \tag{72a}$$

b) 2-*й случай*: Условіе (67) выполняется и тогда когда

$$Q - PP_1 = 0 \tag{73}$$

Въ этомъ случаѣ уравненія (64) и (65) даютъ:

$$\frac{dP_1}{dx} + 2(PP_2 - R) = 0 \tag{74}$$

$$\frac{dP_2}{dx} + (PP_2 - R)P_1 = 0 \tag{75}$$

Изъ уравненій (74) и (75) получаемъ уравненіе

$$P_1\frac{dP_1}{dx} - 2\frac{dP_2}{dx} = 0$$

откуда

$$\frac{P_1^2}{2} - 2P_2 + C \tag{76}$$

Digitized by Google

Изъ уравненій (73) и (75) находимъ

$$P_1 = \frac{Q}{P},\ P_2 = \frac{P_1^2}{4} + C_1 = \frac{Q^2}{4P^2} + C_1 \qquad (77)$$

Такимъ образомъ уравненіе

$$\frac{dy}{dx} + Py^2 + Qy + R = 0$$

имѣетъ своимъ интеграломъ уравненіе

$$y^2 + \frac{Q}{P}y + \frac{Q^2}{4P^2} + C = 0 \qquad (78)$$

при условіи, которое получается изъ уравненія (74) если P_1 и P_2 замѣнимъ ихъ величинами:

$$P\frac{dQ}{dx} - Q\frac{dP}{dx} + 2\left(\frac{PQ^2}{4} - RP^2 + CP^2\right) = 0 \qquad (79)$$

Такъ какъ уравненіе (78) можетъ быть представлено въ видѣ

$$\left(y + \frac{Q}{2P}\right)^2 + C = 0 \qquad (80)$$

и такъ какъ уравненіе (80) не есть неприводимое, то второй случай не можетъ имѣть мѣста, то есть во второмъ случаѣ не существуетъ неприводимаго уравненія второй степени могущаго быть интеграломъ уравненія (61).

Примѣръ: Уравненіе

$$2(x-a)(x-b)\frac{dx}{dx} + 2(x-a)^2(x-b)^2y^2 +$$

$$+ (2x - a - b)y - 2(x-a)(x-b) = 0 \qquad (81)$$

послѣ раздѣленія на коеффиціентъ приводится къ виду

$$\frac{dy}{dx} + (x-a)(x-b)y^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}\right)y - 1 = 0$$

Digitized by Google

Здѣсь

$$P = (x - a)(x - b)$$

$$Q = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}\right)$$

$$R = -1$$

Условіе (71) выполняется, слѣдовательно интегралъ найдется изъ уравненія (72)

$$y^2 - \frac{1}{(x-a)(x-b)} = 0$$

Частнымъ интеграломъ уравненія (81) будетъ величина

$$y = \frac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$$

Digitized by Google

КЪ ТЕОРІИ ТРЕХЧЛЕННЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

П. А. Некрасова.

Сочиненіе мое «Изслѣдованіе уравненій вида: $u^m - pu^n - q = 0$» *) не содержитъ достаточныхъ указаній литературы, относящейся къ трехчленнымъ уравненіямъ. Недостатокъ этотъ, вытекшій главнымъ образомъ изъ незнакомства моего съ нѣкоторыми мало распространенными нѣмецкими сочиненіями, о существованіи которыхъ я узналъ лишь впослѣдствіи, и съ англійскими сочиненіями, здѣсь устраняется по возможности.

Привожу въ хронологическомъ порядкѣ подробный списокъ всей извѣстной мнѣ въ настоящее время литературы, соприкасающейся съ теоріей трехчленныхъ уравненій (пропуская отчасти то, что̀ приводится въ курсахъ анализа въ видѣ примѣровъ).

Lambert. Acta Helvetica, Vol. III, p. 154. 1757.

Lambert. Observations analytiques. Nouveaux mémoires de l'Académie de Berlin, p. 225. 1770.

Euler. Observationes circa radices aequationum. Novi Commentarii Academiae Petropolianae, t. XV, p. 51. 1770.

Euler. De serie Lambertiana plurimisque ejus insignibus proprietatibus. Acta Academiae Petropolianae, p. 29. 1779.

*) Матем. Сборникъ, т. XI, вып. 1. 1883.

Digitized by Google

Gauss. Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen. Abh. der Königl. Gesellschaft d. Wiss. zu Göttingen, Band IV. 1849.—Gauss Werke, Band III.

Westphal. Evolutio radicum aequationum algebraicarum e ternis terminis constantium in series infinitas. Gottingae. 1850.

Cauchy. Rapport sur nouvelles recherches relatives à la série de Lagrange et présentées à l'Académie par M. Felix Chio de Turin. Note troisième. Comptes rendus de l'Académie de Paris, t. XXXIV, 1-e sem., p. 345—349. 1852.

Russell. On the Theory of Definite Integrals. Philosophical Transactions, Vol. 145, p. 157—178. 1854.

Harley. On the Theory of the Transcendental Solution of Algebraic Equations. Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Manchester, Vol. II, Sessions 1861—62, p. 181—184, 199—201, 237—241. 1862.

Harley. On the Theory of the Transcendental Solution of Algebraic Equations. Quarterly Journal of Mathematics, Vol V, p. 337—360.

Cayley. Note on a Differential Equation. Proseedings of the Literary and Philosophical Society of Manchester, Vol. II, Sessions 1861—62, p. 193. 1862.

Cockle. Communication from Mr. Cockle. Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Manchester, Vol, II, Sessions 1861—62, p. 202—203. 1862.

Harley. 1) On a certain class of Linear Differential Equations. 2) Remarks. Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Manshester, Vol. III, Sessions 1862—1863, p. 11—14; 17—20. 1864.

Spottiswoode. Note on Differential Resolvents. Тамъ же, p. 14.

Cockle. 1) On certain Linear Differential Equations. 2) On the Theory of Equations. Тамъ же, p. 16—17; 171—174.

Russell. On the Solution of the Differential Resolvent. Тамъ же, p. 72—73.

Boole. On the Differential Equations which determine the form of the Roots of Algebraic Equations. Philosophical Transactions, Vol. 154, p. 733—755. 1864.

Digitized by Google

Boole. Treatise on Differential Equations. Supplementary Volume, p. 190—199 *). 1865.

Gebhardt. Die Auflösung dreigliedriger algebraischer Gleichungen durch Reihen, mit einer Tabelle von $log\ \Gamma(x)$. Programm des Nicolaigymnasiums zu Leipzig auf das schuljahr 1872—1873. Leipzig. 1873.

Mangoldt. Ueber Darstellung der Wurzeln einer dreigliedrigen algebraischen Gleichung durch unendliche Reihen. Inaugural-Dissertation. Berlin. 1878.

Rawson. On a new method of determining the Differential Resolvents of Algebraical Equations. Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. IX, p 202—215. 1878.

Harley. Addendum. Тамъ же, p. 216—221.

Harley. On certain Linear Differential Equations. Reports of the meeting of the British Association for the advancement of Science, 1878, p. 466—470. 1879.

Farkas. Auflösung der dreigliedrigen algebraischen Gleichungen. Archiv der Mathematik und Physik, Band LXIV, s. 24—29. 1879.

Некрасовъ. Изслѣдованіе уравненій вида: $u^m - pu^n - q = 0$. Математическій Сборникъ, томъ XI, вып. 1, стр. 1—174. 1883.

Schapira. Darstellung der Wurzeln einer allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades mit Hilfe von Cofunctionen aus Potenzreihen in elementarer Behandlungweise. Leipzig. 1883.

Besso. 1) Sopra una classe di equazioni trinomie. 2) Sull' equazione dell quinto grado. Atti della reale Accademia dei Lincei, Vol. XIX, 631—642; 232—244. 1884.

Nell. Die Auflösung dreigliedriger Gleichungen nach Gauss. Archiv der Mathematik und Physik, zweite Reihe, erste Teil, s. 311—333. 1884

Besso. Sulle equationi trinomie e, in particolare, su quelle del settimo grado. Atti della reale Accademia dei Lincei. Rendiconti, serie quarta, Vol. I, 237—243. 1885.

Heymann. 1) Ueber die Auflösnng gewisser algebraicher

---

*) Сюда вошли замѣчанія, сдѣланныя *Todhunter*'омъ.

Digitized by Google

Gleichungen mittels Integration von Differentialgleichungen. 2) Ueber die Auflösung der allgemeinen trinomichen Gleichung $t^n + at^{n-s} + b = 0$. Zeitschrift für Mathematique und Physik, Band XXXI, s. 102—120, 129—146; 223—240. 1886.

Heymann. Theorie der trinomischen Gleichungen. Mathematische Annalen, Band XXVIII, s. 61—80. 1886.

Nekrassoff. Ueber trinomische Gleichungen. Mathematische Annalen, Band XXIX, s. 413—430. 1887.

Некрасовъ. Выраженіе корней трехчленнаго уравненія посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ. Математическій Сборникъ, томъ XIII, стр. 739—748. 1888.

Лахтинъ. Выраженіе корней трехчленнаго алгебраическаго уравненія посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ. Математическій Сборникъ, томъ XV, стр. 61—82. 1890.

Heymann. Studien über die Transformation und Integration der Differential—und Differenzengleichungen. Drittes Kapitel s. 213—297, 373—403. Leipzig. 1891.

Лахтинъ. По поводу мемуара M. A. Pujet «Sur la fonction résolvante de l'équation $x^m + px + q = 0$», помѣщеннаго въ 91 томѣ Comptes Rendus. Математическій Сборникъ, томъ XVII, стр. 334—336. 1893.

Приведя этотъ списокъ *), считаю должнымъ пополнить введеніе къ моему «Изслѣдованію уравненій вида: $u^m - pu^n - q = 0$» слѣдующими замѣчаніями, разъясняющими значеніе трудовъ другихъ авторовъ и отношеніе ихъ къ этому «Изслѣдованію».

Одна изъ болѣе существенныхъ частей «Изслѣдованія» есть та, въ которой изучаются *законы распредѣленія* корней трехчленнаго уравненія въ связи съ выраженіями этихъ корней какъ посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ, такъ и по-

*) Въ этотъ списокъ не включены статьи, относящіяся къ вычисленію дѣйствительныхъ корней трехчленныхъ уравненій способами послѣдовательныхъ приближеній, а также статьи, относящіяся къ выраженію корней трехчленныхъ уравненій при посредствѣ символовъ, подобныхъ безконечнымъ непрерывнымъ дробямъ.

Digitized by Google

средствомъ безконечныхъ рядовъ. Эти законы, вполнѣ опредѣляющіе такъ называемое *аналитическое продолженіе* функціи, представляемой корнемъ трехчленнаго уравненія, при непрерывномъ переходѣ перемѣннаго изъ одной области въ другую (въ частности при всевозможныхъ обходахъ около особыхъ точекъ) и вообще характеризующіе многія основныя свойства корней трехчленнаго уравненія, вовсе не затронуты въ трудахъ другихъ авторовъ и составляютъ главную отличительную особенность моего «Изслѣдованія» сравнительно съ трудами другихъ авторовъ.

Но въ нѣкоторыхъ частяхъ мое «Изслѣдованіе» сходится съ трудами другихъ авторовъ, при чемъ въ двухъ пунктахъ я долженъ признать пріоритетъ за другими авторами.

Въ предшествующей моимъ трудамъ литературѣ установлены были всѣ главныя формы рядовъ, въ которые разлагаются корни трехчленнаго уравненія, и указаны условія сходимости этихъ рядовъ. Такимъ образомъ въ этомъ отношеніи мнѣ не принадлежитъ никакого пріоритета. Въ полномъ объемѣ вопросы эти впервые рѣшены въ трудѣ *Westphal*, увѣнчанномъ премiей отъ имени философскаго факультета въ Геттингенѣ. Потомъ эти результаты изложены были вновь въ трудахъ *Gebhardt*, *Mangoldt* и другихъ. Мое «Изслѣдованіе» дополняетъ эти результаты 1) указаніемъ (стр. 77—94) тѣхъ особенностей въ ходѣ убыванія коэффиціентовъ рядовъ, представляющихъ корни трехчленнаго уравненія, которыя имѣютъ значеніе при вычисленіи высшихъ предѣловъ дополнительныхъ членовъ этихъ рядовъ, и 2) указаніемъ (стр. 101—109) способовъ повышенія быстроты сходимости тѣхъ же рядовъ.

Въ вопросѣ о выраженіи корней общаго трехчленнаго уравненія посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ мое «Изслѣдованіе» встрѣчается съ предшествующими ему изслѣдованіями *Russell* и *Boole*. Но выраженія корней трехчленнаго уравненія посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ, равносильныя, въ сущности, интегральнымъ вычетамъ (Cauchy), способнымъ, какъ извѣстно, представлять корни любаго алгебраическаго уравненія, если они отдѣлены другъ отъ друга контурами, не

Digitized by Google

могли считаться *окончательными*, пока не были указаны эти контуры или законы распредѣленія корней для трехчленнаго уравненія. Поэтому вполнѣ законченное рѣшеніе вопроса о выраженіи корней трехчленнаго уравненія посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ дано впервые не въ трудахъ англійскихъ математиковъ, а въ моемъ «Изслѣдованіи», гдѣ *для всевозможныхъ случаевъ* опредѣленно указаны пути или предѣлы интегрированія въ этихъ опредѣленныхъ интегралахъ.

Впослѣдствіи вопросомъ о выраженіи корней трехчленнаго уравненія посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ занимался *Heymann*, труды котораго побудили меня еще разъ пересмотрѣть и улучшить рѣшеніе вопроса, изложенное вновь въ моей статьѣ: «Выраженіе корней трехчленнаго уравненія посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ». Тѣмъ же вопросомъ потомъ занимался Л. К. Лахтинъ, улучившій пріемы рѣшенія Буля *).

Обозрѣвая приложенія теоріи трехчленныхъ уравненій къ различнымъ вопросамъ анализа, я долженъ уступить англійскимъ математикамъ Гарлею, Булю и другимъ пріоритетъ въ разсмотрѣніи одного случая интегрируемости дифференціальнаго уравненія

$$(x^m-1)\frac{d^m y}{dx^m} + c_{m-1}x^{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \ldots + c_0 y = 0 \qquad (1)$$

посредствомъ корней трехчленнаго уравненія. Упомянутые англійскіе математики разъяснили, что дифференціальное уравненіе

---

*) Выводъ выраженій корней трехчленнаго уравненія посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ, употребляемый англійскими математиками и основанный на разсмотрѣніи резольвенты въ формѣ линейнаго дифференціальнаго уравненія (2) (см. ниже), мнѣ представляется длиннымъ и сложнымъ даже послѣ упрощеній, сдѣланныхъ Л. К. Лахтинымъ и Гейманомъ. Выводъ этотъ короче и проще всего дѣлается изъ разсмотрѣнія интегральныхъ вычетовъ.

Digitized by Google

$$\frac{d^m y}{dx^m} =$$

(2)

$$\left\{\prod_{\sigma=0}^{m-n-1}\left(\frac{d}{dlogx} - \frac{k-m\sigma}{m-n}\right)\cdot \prod_{\sigma=m-n}^{m-1}\left(\frac{d}{dlogx} - \frac{m(\sigma+1-m)-k}{n}\right)\right\} y$$

имѣетъ интегралы, представляемые такъ:

$$y = z^k,\ nz^m - mxz^n + m - n = 0.$$

Легко убѣдиться, что уравненіе (2) есть частный случай уравненія (1).

Въ трудахъ Harley, Cockle, Boole, Rawson и въ позднѣйшихъ трудахъ Besso, Heymann и Л. К. Лахтина дифференціальное уравненіе (2) разсматривается какъ *дифференціальная резольвента* трехчленнаго уравненія *). При цѣломъ k порядокъ этой резольвенты легко понижается на единицу.

Нужно сказать, что въ моемъ «Изслѣдованіи» случай, когда уравненіе (1) интегрируется при посредствѣ трехчленныхъ уравненій, представленъ въ несравненно болѣе общемъ видѣ (стр. 146—160). Этотъ случай есть тотъ, когда уравненіе (1) приводится къ виду:

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \left\{\prod_{\sigma=0}^{m-1}\left(\frac{d}{dlogx} + a_\sigma\right)\right\} y, \qquad (3)$$

гдѣ величины $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ опредѣляются такъ:

1) $a_\sigma = \lambda + m\mu_\sigma - \dfrac{k-m\sigma}{m-n}$ при $\sigma < m-n$,

2) $a_\sigma = \lambda + m\mu_\sigma - \dfrac{m(\sigma+1-m)-k}{n}$ при $\sigma \geqq m-n$,

при чемъ $\lambda, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{m-1}$ означаютъ *произвольныя* цѣлыя

*) Въ нѣкоторыхъ изъ этихъ трудовъ дифференціальная резольвента берется не подъ формой (2), а подъ иными, близкими къ ней формами, выводимыми изъ нея преобразованіемъ перемѣнныхъ.

Digitized by Google

числа. Уравненіе (3), обнимающее уравненіе (2), какъ частный случай, интегрируется при посредствѣ корней трехчленныхъ уравненій

$$nz^m - m\, e^{\frac{2r\pi i}{n}}\, xz^n + m - n = 0, \quad (r = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Дѣлая вышеизложенныя замѣчанія, я желалъ главнымъ образомъ засвидѣтельствовать свое признаніе за другими авторами тѣхъ заслугъ ихъ, которыя, принадлежа имъ по справедливости, были упущены мною въ «Изслѣдованіи уравненій вида: $u^m - pu^n - q = 0$».

26 сентября
1893 года.

Digitized by Google

КЪ ТЕОРІИ КРИВЫХЪ ДВОЙНОЙ КРИВИЗНЫ.

В. А. Анисимова.

§ 1. Предлагаемыя вниманію математиковъ замѣтки имѣютъ своею задачею развить нѣкоторыя геометрическія слѣдствія, вытекающія изъ общеизвѣстныхъ аналитическихъ формулъ, относящихся къ теоріи кривыхъ двойной кривизны. Получаемые такимъ образомъ выводы способствуютъ выясненію геометріи кривыхъ въ пространствѣ и приводятъ къ нѣкоторымъ довольно интереснымъ зависимостямъ между геометрическими элементами, свойственными кривой въ данной ея точкѣ.

§ 2. Относимъ кривую къ системѣ прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатъ въ пространствѣ; имѣемъ для точки $M(x,y,z)$ кривой уравненія

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(s), \\ y &= \psi(s), \\ z &= \theta(s), \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (1)$$

гдѣ параметръ s есть длина дуги нашей кривой, отсчитываемая отъ нѣкотораго опредѣленнаго начала на кривой до точки M.

Въ точкѣ M проводимъ касательную къ кривой, главную нормаль и *нормаль полярную* (такъ будемъ называть прямую,

Digitized by Google

проходящую черезъ M параллельно полярной оси). Называемъ вмѣстѣ съ Serret соотвѣтственно черезъ

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma$$

$$\xi,\ \eta,\ \zeta$$

$$\lambda,\ \mu,\ \nu$$

углы съ осями координатъ касательной, главной нормали и нормали полярной, черезъ

$$d\sigma,\ d\tau$$

углы соприкосновенности и кручения для M, а черезъ

$$R \text{ и } T$$

оба радіуса кривизны (радіусъ кривизны и радіусъ кручения) для той же точки M. Имѣемъ формулы *)

$$\left.\begin{aligned} dx &= \cos\alpha . ds, \\ dy &= \cos\beta . ds, \\ dz &= \cos\gamma . ds; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} d\cos\alpha &= \cos\xi . d\sigma, \\ d\cos\beta &= \cos\eta . d\sigma, \\ d\cos\gamma &= \cos\zeta . d\sigma, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} d\cos\lambda &= \cos\xi . d\tau, \\ d\cos\mu &= \cos\eta . d\tau, \\ d\cos\nu &= \cos\zeta . d\tau; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} d\cos\xi &= -\cos\alpha\, d\sigma - \cos\lambda\, d\tau, \\ d\cos\eta &= -\cos\beta\, d\sigma - \cos\mu\, d\tau, \\ d\cos\zeta &= -\cos\gamma\, d\sigma - \cos\nu\, d\tau. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (5)$$

*) *Serret.*—Cours de calcul différentiel et intégral, t. I, p. 408—409.

Digitized by Google

$$R=\frac{ds}{d\sigma},\quad T=\frac{ds}{d\tau}\ldots\ldots\quad(6)$$

Пользуясь этими формулами, легко докажемъ нижеслѣдующія теоремы.

I. Теорема. Двѣ смежныя касательныя къ кривой въ пространствѣ пересѣкаются.

Доказательство. Смежными называемъ касательныя въ безконечно близкихъ точкахъ кривой. Изъ опредѣленія касательной вытекаетъ непосредственно, что двѣ смежныя касательныя пересѣкаются. То же самое можно доказать и аналитически, если разсмотрѣть уравненія двухъ смежныхъ касательныхъ; придется воспользоваться формулами (2).

Геометрическое мѣсто касательныхъ къ кривой двойной кривизны есть *развертывающаяся линейчатая поверхность*.

II. Теорема. Двѣ смежныя главныя нормали къ кривой двойной кривизны вообще не пересѣкаются.

Доказательство. Разсматриваемъ главныя нормали въ двухъ смежныхъ точкахъ $M(x,y,z)$ и $M'(x+dx,y+dy,z+dz)$.

Имѣемъ уравненія

$$\frac{X-x}{\cos\xi}=\frac{Y-y}{\cos\eta}=\frac{Z-z}{\cos\zeta},$$

$$\frac{X-x-dx}{\cos\xi+d\cos\xi}=\frac{Y-y-dy}{\cos\eta+d\cos\eta}=\frac{Z-z-dz}{\cos\zeta+d\cos\zeta}.$$

Одинъ изъ косинусовъ $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$, напр. $\cos\xi$, обязательно отличенъ отъ нуля. Тогда, опредѣляя $Y-y$, $Z-z$ изъ первой системы уравненій и вставляя во вторую систему, найдемъ

$$N=\frac{(X-x)\cos\xi-dx\cos\xi}{\cos\xi+d\cos\xi}=\frac{(X-x)\cos\eta-dy\cos\xi}{\cos\eta+d\cos\eta}=$$

$$=\frac{(X-x)\cos\zeta-dz\cos\xi}{\cos\zeta+d\cos\zeta}.$$

Примѣняя затѣмъ формулы (2) и (5) и помня, что касательная, главная нормаль и нормаль полярная взаимно перпендикулярны, находимъ:

Digitized by Google

$$N = X - x,$$

и тогда, пользуясь формулами (2), (5) и (6), получимъ:

$$\cos\varkappa\cos\xi = X - x)\left\{\frac{\cos\alpha}{R} + \frac{\cos\lambda}{T}\right\},$$

$$\cos\beta\cos\xi = (X - x)\left\{\frac{\cos\beta}{R} + \frac{\cos\mu}{T}\right\},$$

$$\cos\gamma\cos\xi = (X - x)\left\{\frac{\cos\gamma}{R} + \frac{\cos\nu}{T}\right\}.$$

Отсюда

$$\frac{X - x}{T} = 0,$$

или, такъ какъ $X - x$ отлично отъ нуля,

$$\frac{1}{T} = 0.$$

Для кривыхъ двойной кривизны величина $\frac{1}{T}$ вообще неравна нулю, а потому двѣ смежныя главныя нормали не пересѣкутся *). Геометрическое мѣсто главныхъ нормалей къ подобной кривой представляетъ *неразвертывающуюся (косую) линейчатую поверхность*.

Для кривой плоской всѣ главныя нормали, находясь въ плоскости самой кривой пересѣкаются.

Ту же теорему весьма просто можно доказать и геометрически.

Беремъ четыре безконечно близкія точки M, M', M'', M''' кривой. Главная нормаль для точки M лежитъ въ плоскости

*) Исключеніе представятъ тѣ точки на кривой (ихъ конечное число) для которыхъ $\frac{1}{T} = 0$. Въ подобныхъ точкахъ соприкасающаяся плоскость имѣетъ съ кривою соприкосновеніе 3-го порядка и по Cayley носитъ названіе стаціонарной.

Digitized by Google

$MM'M''$ и перпендикулярна къ MM', а главная нормаль въ точкѣ M' находится въ плоскости $M'M''M'''$ и къ прямой $M'M''$ перпендикулярна.

При пересѣченіи главныхъ нормалей для точекъ M и M' обѣ плоскости $MM'M''$ и $M'M''M'''$ совпадали бы, что для кривой двойной кривизны вообще невозможно.

III Теорема. Двѣ смежныя полярныя нормали къ кривой двойной кривизны вообще не пересѣкаются.

Доказательство. Имѣемъ двѣ смежныя полярныя нормали

$$\frac{X-x}{\cos\lambda}=\frac{Y-y}{\cos\mu}=\frac{Z-z}{\cos\nu},$$

$$\frac{X-x+dx}{\cos\lambda+d\cos\lambda}=\frac{Y-y-dy}{\cos\mu+d\cos\mu}=\frac{Z-z-dz}{\cos\nu+d\cos\nu}.$$

Считая $\cos\lambda$ отличнымъ отъ нуля и пользуясь формулами (2), (4), (6), получимъ

$$-\cos\alpha\cos\lambda=(X-x)\frac{\cos\xi}{T},$$

$$-\cos\beta\cos\lambda=(X-x)\frac{\cos\eta}{T},$$

$$-\cos\gamma\cos\lambda=(X-x)\frac{\cos\zeta}{T},$$

и отсюда

$$\frac{1}{T}=0,$$

что вообще для кривой двойной кривизны невозможно. Геометрическое мѣсто полярныхъ нормалей къ подобной кривой представляетъ *неразвертывающуюся линейчатую поверхность*

Въ случаѣ кривой плоской полярныя нормали, будучи перпендикулярны къ плоскости кривой, параллельны между собою и потому пересѣкаются въ безконечно удаленной точкѣ.

Такимъ образомъ кривая двойной кривизны можетъ быть разсматриваема, какъ линія пересѣченія трехъ линейчатыхъ

Digitized by Google

взаимно ортогональныхъ поверхностей, изъ которыхъ одна развертывающаяся и двѣ косыя.

§ 3. Система трехъ взаимно-перпендикулярныхъ прямыхъ— касательной, главной нормали и нормали полярной — представляетъ при изученіи свойствъ кривой двойной кривизны выгодную систему осей координатъ. Отнесемъ, какъ это дѣлаетъ Hermite, къ подобной системѣ осей нашу кривую, помѣстивъ начало координатъ X, Y, Z въ точкѣ $M(x, y, z)$ кривой, и за перемѣнное независимое примемъ дугу s кривой, считая ея дугу отъ начала координатъ X, Y, Z. Наши уравненія (1) обратятся въ *)

$$X = As + A's^2 + A''s^3 + \ldots,$$

$$Y = Bs^2 + B's^3 + \ldots,$$

$$Z = Cs^3 + C's^4 + \ldots.$$

Имѣя при всякомъ s соотношеніе

$$\left(\frac{dX}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dY}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{ds}\right)^2 = 1,$$

легко найдемъ

$$A^2 = 1,\ 4AA' = 0,\ 4A'^2 + 6AA'' + 4B^2 = 0, \ldots$$

Пользуясь произволомъ въ выборѣ положительнаго направленія оси X, всегда можемъ достигнуть того, чтобы $A=1$; тогда будетъ $A'' = -\frac{2}{3}B^2$, и будемъ имѣть

$$X = s - \frac{2}{3}B^2s^3 + \ldots,$$

$$Y = Bs^2 + B's^3 + \ldots,$$

$$Z = Cs^3 + C's^4 + \ldots.$$

Съ другой стороны, при $s=0$ имѣемъ формулы **):

---

*) *Hermite.* Cours d'Analyse, p. 137. Paris, 1873.

**) *Hermite.* Loc. citat., p. 472.

Digitized by Google

$$\left(\frac{d^2X}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2Y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2Z}{ds^2}\right)^2=\frac{1}{R^2},$$

$$\left(\frac{d^3X}{ds^3}\right)^2+\left(\frac{d^3Y}{ds^3}\right)^2+\left(\frac{d^3Z}{ds^3}\right)^2=\frac{1}{R^2T^2}+\frac{1+\left(\frac{dR}{ds}\right)^2}{R^4},$$

гдѣ R и T радіусы кривизны и крученія въ точкѣ $M(x,y,z)$. Изъ этихъ формулъ получимъ

$$4B^2=\frac{1}{R^2},\quad (6C)^2=\frac{1}{R^2T^2};$$

выбирая соотвѣтственнымъ образомъ положительныя направленія осей Y и Z, достигнемъ того, чтобы

$$B=\frac{1}{2R}\text{ и }C=\frac{1}{6RT}.$$

Тогда для точекъ кривой будемъ имѣть уравненія

$$\left.\begin{aligned} X=\varphi(s)&=s-\frac{1}{6R^2}s^3+\ldots,\\ Y=\psi(s)&=\frac{1}{2R}s^2+B's^3+\ldots,\\ Z=\theta(s)&=\frac{1}{6RT}s^3+C's^4\ldots, \end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

§ 4. Изучаемъ проэкціи нашей кривой на плоскости координатъ XY, YZ, ZX.

Для проэкціи на плоскости XY имѣемъ уравненія

$$X=s-\frac{1}{6R^2}s^3+\ldots,$$

$$Y=\frac{1}{2R}s^2+B's^3+\ldots.$$

Точка $M(x,y,z)$ есть обыкновенная точка проэкціи, и ось X служитъ касательною къ проэкціи въ точкѣ M. Радіусъ

Digitized by Google

кривизны проэкціи въ точкѣ M назовемъ черезъ R_{xy}; будемъ имѣть

$$R_{xy}=R. \tag{8}$$

Ясно, что центръ кривизны кривой (двойной кривизны) въ точкѣ M совпадаетъ съ центромъ кривизны проэкціи на соприкасающуюся плоскость для той же точки M.

Проэктируемъ нашу кривую на плоскость YZ; для точекъ этой проэкціи будемъ имѣть уравненія

$$Y=\frac{1}{2R}s^2+B's^3+\ldots,$$

$$Z=\frac{1}{6RT}s^3+C's^4+\ldots.$$

Точка $M(x, y, z)$ для разсматриваемой проэкціи будетъ точкою возврата 1-го вида, и ось Y будетъ служить общею касательною къ обѣимъ вѣтвямъ проэкціи, имѣя съ ними соприкосновеніе порядка $\frac{1}{2}$. Радіусъ кривизны проэкціи въ точкѣ M будетъ безконечно малымъ, и съ точностью безконечно малыхъ перваго порядка будемъ имѣть

$$R_{yz}=\frac{2T}{R}s. \tag{9}$$

Разсматриваемъ наконецъ проэкціи нашей кривой двойной кривизны на плоскость ZX. Точки этой проэкціи будутъ опредѣляться уравненіями

$$X=s-\frac{1}{6R^2}s^3+\ldots,$$

$$Z=\frac{1}{6RT}s^3+C's^4+\ldots.$$

Точка $M(x, y, z)$ для этой новой проэкціи будетъ точкою перегиба и ось X будетъ касательною къ проэкціи въ этой точкѣ, причемъ касаніе будетъ 2-го порядка. Радіусъ кривизны проэкціи въ точкѣ M будетъ безконечно большимъ и,

Digitized by Google

ограничиваясь первымъ членомъ разложенія по восходящимъ s, найдемъ

$$R_{zx} = \frac{RT}{s}. \tag{10}$$

Сопоставимъ формулы (9) и (10); легко получимъ

$$R_{yz} . R_{zx} = 2T^2. \tag{11}$$

Плоскость YZ есть плоскость нормальная къ кривой, плоскость же ZX, проходящую черезъ касательную и полярную нормаль къ кривой, будемъ называть *плоскостью полярно-касательною*. Тогда формулою (11) выражается.

IV Теорема. Произведеніе радіусовъ кривизны проэкцій на плоскости нормальную и полярнокасательную въ данной точкѣ M кривой двойной кривизны равняется удвоенному квадрату радіуса кручения для той же точки.

§ 5. Ни главныя смежныя нормали, ни смежныя полярныя нормали къ кривой двойной кривизны, какъ это мы видѣли въ § 2, вообще не пересѣкаются.

Будемъ *нормалью* называть вообще всякую прямую, которая проходитъ черезъ данную точку $M(x, y, z)$ съ координатами

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \theta(t),$$

перпендикулярно къ касательной и лежитъ потому въ нормальной плоскости. Уравненія этой нормали будутъ

$$\frac{X-x}{\cos A} = \frac{Y-y}{\cos B} = \frac{Z-z}{\cos C}. \tag{12}$$

Косинусы $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ будутъ нѣкоторыми функціями параметра t и будутъ, согласно опредѣленію, удовлетворять условіямъ

$$\left.\begin{aligned} \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C &= 1, \\ \cos\alpha\cos A + \cos\beta\cos B + \cos\gamma\cos C &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Разсматриваемъ нормаль смежную

$$\frac{X-x-dx}{\cos A + d\cos A} = \frac{Y-y-dy}{\cos B + d\cos B} = \frac{Z-z-dz}{\cos C + d\cos C}.$$

Digitized by Google

При какихъ условіяхъ разсматриваемыя двѣ смежныя нормали пересѣкутся? Отыщемъ эти пересѣкающіяся нормали, буде онѣ существуютъ.

Пользуясь формулами (2), (12) и (13), получаемъ изъ послѣдняго уравненія, считая $\cos A$ отличнымъ отъ нуля,

$$\frac{(X-x)\cos A-dx\cos A}{\cos A+d\cos A}=\frac{(X-x)\cos B-dy\cos A}{\cos B+d\cos B}=$$

$$=\frac{(X-x)\cos C-dz\cos A}{\cos C+d\cos C}=X-x,$$

а тогда уже легко найдемъ

$$-\cos\alpha\,.\cos A\,.\,ds=(X-x)d\cos A,$$

$$-\cos\beta\,.\cos A\,.\,ds=(X-x)d\cos B,$$

$$-\cos\gamma\,.\cos A\,.\,ds=(X-x)d\cos C.$$

Получаемъ такимъ образомъ дифференціальныя уравненія

$$\frac{d\cos A}{\cos\alpha}=\frac{d\cos B}{\cos\beta}=\frac{d\cos C}{\cos\gamma}, \qquad (14)$$

которыя вмѣстѣ съ условіемъ

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1$$

опредѣляютъ намъ всѣ три косинуса $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ въ функціи перемѣннаго параметра t.

Уравненія (14) имѣютъ интересное геометрическое значеніе; выяснимъ его. Прибѣгаемъ, какъ это дѣлаетъ Serret *), къ построенію сферическихъ изображеній. Строимъ сферу радіуса единицы съ центромъ въ произвольной точкѣ, напр. въ началѣ координатъ O, и черезъ этотъ центръ проводимъ прямыя параллельно пересѣкающимся нормалямъ. Въ пересѣченіи этихъ нормалей со сферою получится кривая, такъ что точкѣ $M(x,y,z)$ данной кривой двойной кривизны будетъ соотвѣтствовать на сферѣ точка $M(x',y',z')$, гдѣ

*) *Serret.*—Loc. citat, p. p, 383—384, 403—404.

Digitized by Google

$$x' = cosA,\ y' = cosB,\ z' = cosC.$$

Самыя простыя вычисленія показываютъ, что косинусы угловъ наклоненія къ осямъ координатъ касательной къ разсматриваемой сферической кривой въ точкѣ $M'(x', y', z)$ пропорціональны величинамъ $dcosA$, $dcosB$, $dcosC$, а слѣдовательно, въ силу формулъ (14), и косинусамъ

$$cos\alpha,\ cos\beta,\ cos\gamma.$$

Отсюда становится очевидною

V Теорема. Касательныя въ соотвѣтственныхъ точкахъ къ данной кривой (двойной кривизны) и къ сферическоя кривой, соотвѣтствующей пересѣкающимся смежнымъ нормалямъ, параллельны между собою.

§ 6. При опредѣленіи $cosA$, $cosB$ и $cosC$, соотвѣтствующихъ пересѣкающимся смежнымъ нормалямъ, мы вмѣсто системы (14) и уравненія

$$cos^2A + cos^2B + cos^2C = 1$$

можемъ воспользоваться системою (13) вмѣстѣ съ уравненіемъ

$$\frac{dcosA}{cos\alpha} = \frac{dcosB}{cos\beta}. \qquad (15)$$

Въ самомъ дѣлѣ, ясно, что система (14) есть простое слѣдствіе системы уравненій (13) и уравненія (15). Пользуясь же уравненіями (13) и (15), мы можемъ, во первыхъ, исключить $cosC$, благодаря чему получимъ тогда

$$1 = cos^2A + cos^2B + \left(\frac{cos\alpha}{cos\gamma}cosA + \frac{cos\beta}{cos\gamma}cosB\right)^2.$$

Дифференцируя затѣмъ полученное уравненіе по параметру t и упрощая найденный черезъ это дифференцированіе результатъ, придемъ къ уравненію

$$\frac{dcosA}{dt} + cos\alpha\,cos\gamma\left[cosA\,\frac{d}{dt}\left(\frac{cos\alpha}{cos\gamma}\right) + cosB\,\frac{d}{dt}\left(\frac{cos\beta}{cos\gamma}\right)\right] = 0. \qquad (16)$$

Digitized by Google

Далѣе за неизвѣстную, подлежащую опредѣленію функцію можемъ принять

$$u = \frac{cosB}{cosA}. \tag{17}$$

Для этой функціи u безъ особыхъ затрудненій получимъ дифференціальное уравненіе

$$\frac{\frac{du}{dt}}{\frac{cos\beta}{cos\alpha} - u} + cos\alpha\, cos\gamma \left[\frac{d}{dt}\frac{cos\alpha}{cos\gamma} + u\frac{d}{dt}\frac{cos\beta}{cos\gamma}\right] = 0. \tag{18}$$

Найдя u при помощи уравненія (18), мы изъ уравненій (13) опредѣляемъ затѣмъ и $cosA$, $cosB$, $cosC$.

Уравненію (18), воспользовавшись формулами (3) въ § 2 нашей статьи, а также формулами (5) у Serret, loc. citat, p. 392, можемъ дать болѣе простой видъ

$$R cos\gamma \frac{du}{dt} \pm (cos\beta - u cos\alpha)(cos\mu - u cos\lambda)\frac{ds}{dt} = 0.$$

Уравненіе для опредѣленія u, беремъ ли его въ формѣ (18) или же въ формѣ (19), есть обыкновенное дифференціальное уравненіе перваго порядка, но не линейнаго вида и вообще не принадлежитъ къ тѣмъ классамъ дифференціальныхъ уравненій, общій интегралъ которыхъ намъ извѣстенъ. Въ виду этого можетъ оказаться полезнымъ при рѣшеніи интересующаго насъ вопроса избрать нѣсколько иной путь. Можемъ въ самомъ дѣлѣ, изъ уравненія (16) опредѣлить $cosB$ и черезъ дифференцированіе по параметру t вычислить затѣмъ $\frac{dcosB}{dt}$.

Тогда, само собою очевидно, получимъ при помощи уравненія (15) для $cosA$ линейное дифференціальное уравненіе 2-го порядка.

$$P_0\frac{d^2cosA}{dt^2} + P_1\frac{dcosA}{dt} + P_2 cosA = 0, \tag{20}$$

Digitized by Google

гдѣ P_0, P_1, P_2 суть цѣлые раціональные алгебраическіе многочлены относительно $cos\alpha$, $cos\beta$, $cos\gamma$ и производныхъ этихъ функцій по параметру t. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ уравненіе (20) можетъ оказаться болѣе удобнымъ для изслѣдованія, нежели уравненія (18) или (19).

Надѣясь впослѣдствіи вернуться къ болѣе подробному изученію уравненій (18) или (19) и (20) мы въ данномъ случаѣ приложимъ наши общія формулы къ обыкновенной винтовой линіи, начерченной на прямомъ кругломъ цилиндрѣ и выведемъ для нея уравненія (19) и (20). Имѣемъ для координатъ точки $M(x, y, z)$ винтовой линіи выраженія

$$x = a\,cos\varphi,$$

$$y = a\,sin\varphi,$$

$$y = a\varphi\,ctgi,$$

гдѣ a радіусъ основанія цилиндра.

Легко получимъ

$$cos\alpha = -sini\,sin\varphi,$$

$$cos\beta = sini.cos\varphi,$$

$$cos\gamma = cosi,$$

и тогда уравненіе (18) будетъ

$$\frac{du}{d\varphi} - sin^2i.(cos\varphi + u\,sin\varphi)^2 = 0.$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что уравненія (15) и (16) будутъ для винтовой линіи

$$cos\varphi\,\frac{dcosA}{d\varphi} + sin\varphi\,\frac{dcosB}{d\varphi} = 0,$$

$$\frac{dcosA}{d\varphi} + sin^2i\,sin\varphi\left[cos\varphi cosA + sin\varphi cosB\right] = 0.$$

Изъ этихъ уравненій уже безъ труда получимъ для уравненія (20) выраженіе

Digitized by Google

$$\sin\varphi\,\frac{d^2\cos A}{d\varphi^2}-2\cos\varphi\,\frac{d\cos A}{d\varphi}-\sin^2 i\,\sin\varphi\,\cos A=0.$$

Наконецъ черезъ подстановку

$$\sin\varphi=t$$

уравненіе (20) для винтовой линіи приведется къ виду

$$t(1-t^2)\,\frac{d^2\cos A}{dt^2}-(2-t^2)\,\frac{d\cos A}{dt}-\sin^2 i\,t\cos A=0.$$

обыкновеннаго уравненія для Гауссова гипергеометрическаго ряда.

Замѣтимъ въ заключеніе, что геометрическое мѣсто нормалей (12) съ условіями (14) составляетъ *поверхность пересѣкающихся нормалей*. Уравненіе этой поверхности получимъ, исключая изъ уравненій (12) перемѣнный параметръ t. Координаты точки пересѣченія двухъ смежныхъ нормалей, какъ не трудно убѣдиться, удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned} X-x&=-\cos\alpha\,.\,\frac{\cos A\,.\,ds}{d\cos A},\\ Y-y&=-\cos\beta\,.\,\frac{\cos B\,.\,ds}{d\cos B},\\ Z-z&=-\cos\gamma\,.\,\frac{\cos C\,.\,ds}{d\cos C}, \end{aligned}\right\}\qquad(21)$$

Исключая изъ этой системы (21) перемѣнный параметръ t, найдемъ уравненія ребра возврата разсматриваемой развертывающейся поверхности—поверхности пересѣкающихся нормалей.

Варшава.
Октябрь, 1892.

Digitized by Google

О КРИТИЧЕСКИХЪ ЦЕНТРАХЪ КРИВЫХЪ 3-го ПОРЯДКА.

Е. В. Борисова.

При изслѣдованіи кривыхъ 3 порядка по методу *Плюкера* (*Salmon* «Courbes planes»—n° 211; *Plücker* «System der Anal. Geom. §§ 2—5) важную роль играетъ опредѣленіе критическихъ центровъ кривыхъ, т. е. тѣхъ точекъ, въ коихъ кривыя могутъ имѣть *двойныя точки.*

Плюкеръ принимаетъ за исходный пунктъ уравненіе системы кривыхъ 3 порядка, имѣющихъ 3 вещественныя асимптоты, представляющееся въ видѣ

$$pqr + \mu s = 0,$$

гдѣ $p=0$, $q=0$, $r=0$ суть уравненія 3-хъ асимптотъ, а $s=0$ уравненіе прямой, соединяющей три точки пересѣченія кривой съ асимптотами, лежащія на конечномъ разстояніи (эта прямая называется «спутникомъ безконечнодалекой прямой»). Параметръ μ неопредѣленъ, и его различныя значенія соотвѣтствуютъ различнымъ кривымъ системы. Чтобы опредѣлить какую-нибудь кривую системы, надо либо задать величину параметра μ, либо дать еще одну точку, черезъ которую должна проходить кривая, и тогда опредѣлить μ:

$$\mu = -\frac{p_0 q_0 r_0}{s_0},$$

Digitized by Google

гдѣ p_0, q_0, r_0, s_0 значенія, соотвѣтствующія заданной точкѣ. Этотъ послѣдній пріемъ и употребленъ Плюкеромъ при его изслѣдованіи, причемъ самое изслѣдованіе ведется на координатахъ p, q, r.

Если вести изслѣдованіе иначе: задавать μ и разсматривать соотвѣтственныя кривыя, то тогда задачу о нахожденіи критическихъ центровъ можно поставить такъ: *Найти тѣ* μ, *при которыхъ соотвѣтствующія кривыя системы* (1) *имѣютъ двойную точку.*

Въ настоящей замѣткѣ я имѣю въ виду рѣшить вопросъ въ этомъ видѣ, причемъ методъ, употребленный мною, является какъ результатъ сопоставленія метода Плюкера съ методомъ Ньютона.—Я ограничусь разсмотрѣніемъ только того общаго случая, когда всѣ три асимптоты вещественны, и притомъ образуютъ при взаимномъ пересѣченіи треугольникъ (а не пересѣкаются всѣ три въ одной точкѣ). Это—самый интересный случай, и переходъ отъ него къ частнымъ случаямъ не представляетъ особыхъ затрудненій.

Напишемъ уравненія соотвѣтствующихъ прямыхъ въ видѣ

$$(p)\ldots\ x = 0$$

$$(q)\ldots\ x + ay + b = 0$$

$$(r)\ldots\ x - ay + b = 0$$

$$(s)\ldots\ x + cy + d = 0\ *)$$

При этомъ уравненіе (1) принимаетъ видъ

$$x(x+ay+b)(x-ay+b)+\mu(x+cy+d)=0 \qquad (1a)$$

и слѣдовательно приводится къ виду, данному *Ньютономъ*:

$$xy^2-\frac{c}{a^2}\mu y=\frac{1}{a^2}\left\{x^3+2bx^2+(b^2+\mu)x+d\mu\right\}$$

---

*) Слѣдовательно за ось y—овъ взята одна изъ асимптотъ, а за ось x—овъ медіана треугольника асимптотъ изъ противоположнаго угла.—Оси могутъ быть и косоугольными.

Digitized by Google

Откуда, рѣшая относительно y,

$$y = \frac{c\mu}{2a^2x} \pm \frac{1}{x}\sqrt{\varphi(x,\ \mu)}\ , \qquad (2)$$

означая для сокращенія

$$a^2\varphi(x,\ \mu) = x^4 + 2bx^3 + (b^2 + \mu)x^2 + d\mu x + \frac{c^2\mu^2}{4a^2} =$$

$$= x^2(x+b)^2 + x(x+d)\mu + \frac{c^2\mu^2}{4a^2}\ . \qquad (3)$$

Многочленъ $\varphi(x,\ \mu)$—4-й степени относительно x,—разлагается на 4 линейныхъ множителя и, какъ извѣстно, кривая будетъ имѣть двойную точку, если два корня этого многочлена станутъ равны между собою.—Ввести условіе для этого по общему пріему и отсюда опредѣлить значеніе μ было бы слишкомъ сложно, а потому я и употребляю другой пріемъ.

Предположимъ, что намъ извѣстно значеніе μ, соотвѣтствующее двойной точкѣ; тогда уравненіе

$$\varphi(x,\ \mu) = 0 \qquad (4)$$

опредѣляетъ значенія x, при которыхъ подкоренной многочленъ въ рав. (2) обращается въ нуль, слѣдовательно одно изъ нихъ даетъ *абсциссу двойной точки* (при сдѣланномъ предположеніи относительно μ), а затѣмъ изъ уравненія (2) получимъ соотвѣтствующую ей ординату.

Теперь я говорю, что *значеніе* μ, соотвѣтствующее двойной точкѣ, *представляетъ одно изъ значеній maxima или minima* μ, опредѣляемаго изъ уравненія (4), какъ функція отъ x.

Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе (4) можетъ быть рѣшено относительно μ и даетъ:

$$\mu = -\frac{2ax}{c^2}\left\{a(x+d) \pm \sqrt{a^2(x+d)^2 - c^2(x+b)^2}\right\}, \qquad (5)$$

Digitized by Google

а отсюда, означая эти корни черезъ μ_1 и μ_2:

$$\varphi(x, \mu) = \frac{c^2}{4a^4}(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2).$$

При нѣкоторомъ заданномъ значеніи x, μ_1 и μ_2 будутъ величины извѣстныя, и для μ, заключающагося между μ_1 и μ_2, $\varphi(x, \mu)$ будетъ < 0, а для μ — внѣ этихъ предѣловъ, $\varphi(x, \mu) > 0$. Слѣдовательно, такъ какъ графически $\mu - \mu_1$ и $\mu - \mu_2$ представляютъ уравненія двухъ вѣтвей кривой (4), то на части плоскости, заключенной между ними, т. е. для значеній x и μ, соотвѣтствующихъ точкамъ этой части, величина φ будетъ отрицательна, а внѣ этого промежутка — положительна.

Проводя линію NN_1 параллельно оси x — овъ и пересѣкающую, напр., вѣтвь $\mu = \mu_1$ въ точкахъ N и N_1, мы будемъ имѣть, при значеніи $\mu = QN$ (черт. 2), что для значеній x въ промежуткѣ отъ Q до Q_1 кривая y по (2) уравненію будетъ мнимая, потому что величина подкореннаго многочлена φ въ этомъ промежуткѣ будетъ < 0. Двойную точку получимъ только тогда, если Q и Q_1 сблизятся до совпаденія, а это будетъ при положеніи P_1, соотвѣтствующемъ касательной въ точкѣ M_1, параллельно оси x—овъ. Значеніе $\mu = M_1P_1$ будетъ *maximum* μ, а соотвѣтственная точка на кривой y будетъ обыкновенная *узловая точка*. То же будетъ и для нижней вѣтви въ точкѣ M, которой соотвѣтствуетъ *minimum* μ, но для точки M_2 на нижней вѣтви, гдѣ будетъ *maximum* μ, будемъ имѣть *уединенную двойную точку*.

Такимъ образомъ вопросъ объ опредѣленіи критическихъ центровъ сводится къ вопросу о нахожденіи *maxima* и *minima* функціи μ.—Составляя производную отъ μ по формулѣ (5), получаемъ

$$-\frac{c^2}{2a} \cdot \frac{d\mu}{dx} = (2x+d)a \pm \frac{a^2(x+d)(2x+d) - c^2(x+b)(2x+b)}{\sqrt{a^2(x+d)^2 - c^2(x+b)^2}}. \quad (6)$$

Отсюда уравненіе для опредѣленія *maxima* и *minima* будетъ:

Digitized by Google

$$\left[a^2(x+d)(2x+d)-c^2(x+b)(2x+b)\right]^2$$

$$-a^2(2x+d)^2\left\{a^2(x+d)^2-c^2(x+b)^2\right\}=0,$$

что, послѣ приведенія и сокращенія на общаго множителя $c^2(x+b)$ даетъ *)

$$c^2(x+b)(2x+b)^2-2a^2(x+d)(2x+d)(2x+b)+$$
$$+a^2(x+b)(2x+d)^2=0, \tag{7}$$

или, окончательно:

$$4(c^2-a^2)x^3+8(bc^2-da^2)x^2+(5b^2c^2-2bda^2-5d^2a^2)x+$$
$$+b(b^2c^2-d^2a^2)=0. \tag{8}$$

Такимъ образомъ рѣшеніе предлагаемой задачи сводится на рѣшеніе этого уравненія 3-й степени, и три его корня опредѣлятъ три критическихъ центра.

Обращая вниманіе на значеніе входящихъ въ (8) уравненіе буквъ, видимъ, на основаніи первоначальныхъ условій, что (фиг. 3)

$-d$ есть отрѣзокъ BO спутника AE на оси x.
$-\frac{d}{c}$ » » OE » » » y.
$-b$ » » DO асимптотъ на оси x.
$\pm\frac{b}{a}$ суть отрѣзки $Od=O\delta$ » » » y.

При этомъ принимаемъ a и b положительными, тогда какъ c и d могутъ быть какими угодно, въ зависимости отъ положенія спутника относительно асимптотъ. При этомъ можемъ считать $c>0$, потому что случай $c<0$ можетъ быть полученъ, перевертывая чертежъ, и ничего новаго не представ-

*) Сократить на $(x+b)$ возможно потому, что $x=-b$ не представляетъ значенія, дающаго двойную точку (случай $\mu=0$ исключается).

Digitized by Google

ляетъ. Слѣдовательно только одно d можетъ быть и < 0 и > 0.

Различныя положенія спутника относительно асимптотъ влекутъ за собою и различное расположеніе критическихъ центровъ. Спутникъ можетъ пересѣкать двѣ стороны треугольника асимптотъ и продолженіе третьей, или пересѣкать продолженія всѣхъ трехъ сторонъ, причемъ, въ частности, онъ можетъ проходить черезъ одну изъ вершинъ треугольника или быть параллеленъ одной изъ сторонъ треугольника.

Я не стану останавливаться здѣсь на разборѣ всѣхъ этихъ случаевъ, потому что разборъ этотъ не представляетъ ничего существенно различнаго сравнительно съ разборомъ Плюкера, и для иллюстраціи метода остановлюсь только на двухъ частныхъ случаяхъ и затѣмъ приведу фигуры кривыхъ μ для главныхъ случаевъ, дающихъ достаточно ясное представленіе о взаимномъ расположеніи центровъ.

I-й частн. случай. $d=b$; спутникъ проходитъ черезъ одну изъ вершинъ Δ-ка асимптотъ. Тогда

$$\mu = -\frac{2a}{c^2}\left\{a \pm \sqrt{a^2 - c^2}\right\} x(x+b), \qquad (9)$$

а уравн. (7), послѣ сокращенія на $c^2 - a^2$ обратится въ

$$(x+b)(2x+b)^2 = 0 \qquad (10)$$

Въ этомъ случаѣ уравненіе (9) представляетъ при $a > c$ двѣ параболы (фиг. 4), вершины которыхъ соотвѣтствуютъ значенію $x = -\frac{b}{2}$, проходящія черезъ начало координатъ и черезъ точку D на оси x въ разстояніи $-b$ отъ O, т. е. черезъ ту вершину Δ-ка асимптотъ, черезъ которую проходитъ и спутникъ (если предположить, что чертежъ кривой μ дѣлается на тѣхъ же осяхъ, что и кривой y). При $a=c$, обѣ параболы совпадаютъ въ одну, а при $a<c$, онѣ мнимыя.

Значитъ, два критическихъ центра соотвѣтствуютъ одному и тому же значенію $x = -\frac{b}{2}$; изъ нихъ одинъ лежитъ внутри

Digitized by Google

Δ-ка асимптотъ и представляетъ уединенную двойную точку при значеніи μ, соотвѣтствующемъ нижней параболѣ, а другой—внѣ треугольника и представляетъ узловую точку, соотвѣтственно значенію μ для верхней параболы. Такъ какъ корень $x = -b$ не представляетъ въ точкѣ D ни *max.* ни *min.*, то третій критическій центръ въ этомъ случаѣ не существуетъ. Значенія μ соотвѣтственныя $x = -\frac{b}{2}$, т. е. *maxima* μ, суть

$$\mu = \frac{ab^2}{2c^2}\left\{a \pm \sqrt{a^2 - c^2}\right\},$$

а соотвѣтственныя значенія y:

$$y = -\frac{b}{2ac}\left\{a \pm \sqrt{a^2 - c^2}\right\}.$$

Обозначая ихъ черезъ y_1 и y_2 и перемножая, получимъ

$$y_1 y_2 = \frac{b^2}{4a^2} = LK^2 \text{ (фиг. 5)}$$

отсюда и видно, что $(y_1) < (LK)$, а $(y_2) > (LK)$.

При $c = 0$, т. е. когда спутникъ AE становится параллеленъ оси y, получимъ $y_1 = 0$, $y_2 = -\infty$; т. е. одинъ центръ совпадаетъ съ K, а другой удаляется въ безконечность.

Кривыя 3 порядка, имѣющія своими двойными точками O_1 и O_2, означены на фиг. 5 цифрами 1 и 2.

Въ точкѣ D всѣ кривыя системы касаются къ спутнику AE, потому что въ этой точкѣ двѣ точки кривой, лежащія на спутникѣ, совпали въ одну.

Если при $d = b$ еще и $a = c$, то кривая 3-го порядка состоитъ изъ прямой линіи и гиперболы.— Въ этомъ случаѣ двѣ вышеполученныя параболы, представляющія графически функцію μ, совпадаютъ въ одну, а оба критическихъ центра совпадаютъ въ точкѣ L.

II частн. случай: $a = c$. Спутникъ безконечно далекой прямай параленъ одной изъ асимптотъ.—Можемъ принять, что

Digitized by Google

спутникъ параллеленъ той асимптотѣ, которая взята за ось y—овъ. Значитъ въ общихъ результатахъ надо положить $c=0$. Тогда

$$xy=\pm\sqrt{\varphi(x,\mu)} \tag{11}$$

и

$$a^2\varphi(x,\mu)=x^2(x+b)^2+x(x+d)\mu. \tag{11}$$

Слѣдовательно уравненіе для опредѣленія корней μ будетъ *):

$$x\{x(x+b)^2+(x+d)\mu\}=0; \tag{13}$$

откуда

$$\mu=-\frac{x(x+b)^2}{x+d}, \tag{14}$$

а уравненіе для отысканія корней x (послѣ сокращенія на $(2x+d)$):

$$(x+b)(2x+d)-2(x+d)(2x+b)=0, \tag{15}$$

или

$$2x^2+3dx+db=0; \tag{16}$$

отсюда

$$x=\frac{-3d\pm\sqrt{d(9d-8b)}}{4} \tag{17}$$

При $d=b$, т. е. если спутникъ проходитъ черезъ вершину D треугольника асимптотъ, кривая μ представляется параболою

$$\mu=-x(x+b) \tag{18}$$

и прямыми $x=0$, $x=-b$ (фиг. 6).

При этомъ корни (17) обращаются въ

---

*) Здѣсь $\varphi=x\{(x+b)^2x+(x+d)\mu\}$ и потому при переходѣ изъ плоскости положит. x въ плоскость отрицат. x, φ мѣняетъ знакъ, если многочленъ въ скобкахъ сохраняетъ его. Отъ этого зависитъ разстановка знаковъ на слѣдующихъ за этимъ чертежахъ кривыхъ μ. Въ этомъ случаѣ кривая μ остается кривою 4 степ., но состоитъ изъ кривой 3 порядка и прямой линіи, изображаемой осью y-овъ.

Digitized by Google

$$x_1 = -b,\ x_2 = -\frac{b}{2},$$

но при $x_1 = -b$ не имѣемъ ни *max.* ни *min.* и потому получается только одинъ критическій центръ, соотвѣтствующій $x_2 = -\frac{b}{2}$ (фиг. 7); для него

$$\mu = +\frac{b^2}{4};\ y = 0.$$

При $d > b$, оба корня (17) вещественны, и одинъ $< -d$, а другой $> -b$, и кривая μ имѣетъ видъ, изображенный на фиг. 8. Это ничто иное, какъ кривая 3 порядка, называемая Ньютономъ *трезубцемъ* (*Trident-curve*).—Соотвѣтственное μ будетъ

$$\mu = -\frac{(3d \pm \sqrt{d(9d-8b)})((4b-3d) \pm \sqrt{d(9d-8b)})}{16(d \pm \sqrt{d(9d-8b)})}$$

а обоимъ корнямъ x соотвѣтствуетъ $y = 0$ (фиг. 9).

При $d < b$, корни (17) остаются вещественными, пока $9d > 8d$ т. е. пока $d > \frac{8}{9}b$. При этомъ кривая μ имѣетъ видъ, изображенный на фиг. 10, а система кривыхъ 3 порядка, соотвѣтствующая этому случаю изображена на фиг. 11.

Оба корня x въ этомъ случаѣ численно меньше b, и притомъ одинъ соотвѣтствуетъ *max.* μ, т. е. *уединенной* двойной точкѣ, а второй *min.* μ, т. е. *узловой* двойной точкѣ

При $d = \frac{8}{9}b$ оба корня равны между собою $x_1 = x_2 = -\frac{3}{4}d = -\frac{2}{3}b$ соотвѣтствуютъ $\mu = +\frac{b^2}{3}$, а $y = 0$. На кривой μ имѣемъ точку перегиба (фиг. 12), а соотвѣтственная кривая 3 порядка (при $\mu = +\frac{b^2}{3}$) имѣетъ въ точкѣ совпаденія двухъ критическихъ центровъ точку возврата (фиг. 13).

Наконецъ, при $d < \frac{8}{9}b$ и до $d = 0$, оба корня x_1 и x_2 мнимые и потому оба критическіе центра мнимые.

Digitized by Google

При $d=0$ снова является совпаденіе критическихъ центровъ (въ началѣ координатъ), но при этомъ кривая 3 порядка не собственная, ибо состоитъ изъ прямой и гиперболы. При $d<0$ и до $d=-\infty$ корни x_1 и x_2 снова вещественны и различны: одинъ положителенъ, другой—отрицателенъ; при этомъ отрицательный корень соотвѣтствуетъ *уединенной* точкѣ внутри Δ-ка асимптотъ, а положительный корень *двойной узловой* точкѣ внѣ его. Для обоихъ $y=0$ (фиг. 16 и 17).

Переходя къ общему случаю, когда функція μ имѣетъ видъ

$$\mu=-\frac{2ax}{c^2}\left\{a(x+d)\pm\sqrt{a^2(x+d)^2-c^2(x+b)^2}\right\}$$

мы замѣчаемъ, что здѣсь многочленъ подъ корнемъ разлагается на два линейныхъ множителя:

$$a^2(x+d)^2-c^2(x+b)^2=$$

$$=[(a-c)x+(ad-bc)][(a+c)x+(ad+bc)] \qquad (19)$$

и поэтому корни этого многочлена будутъ:

$$x_1=\frac{bc-ad}{a-c},\quad x_2=-\frac{ad+bc}{a+c}. \qquad (20)$$

При этомъ замѣчаемъ, что x_1 и x_2 суть ничто иное, какъ абсциссы точекъ пересѣченія спутника безконечно далекой прямой $x+cy+d=0$ съ асимптотами $x+ay+b=0$; $x-ay+b=0$, причемъ первый корень соотвѣтствуетъ первой (нижней) асимптотѣ, а второй—верхней.

Можемъ ограничиться случаемъ $a>c$, потому что обратный случай отличается только расположеніемъ осей.

При такомъ предположеніи, точки пересѣченія спутника съ асимптотами или обѣ будутъ находится въ плоскости между точками D и O, или же обѣ влѣво отъ точки D.

Изъ выраженія функціи μ видимъ, что она на плоскости между двумя параллелями AB и CE къ оси y (фиг. 18 и 19), проходящими черезъ точки встрѣчи спутника съ асимптотами, будетъ мнимою, и принимая за исходный пунктъ

Digitized by Google

случай $d = b$, когда функція μ графически представлялась двумя параболами, проходящими черезъ точки D и O, не трудно видѣть, что при небольшомъ измѣненіи d, такъ чтобы оно стало одинъ разъ $< b$, а другой разъ $> b$, фигура кривой, состоящей изъ двухъ параболъ, измѣнится въ фигуры кривыхъ, изображенныхъ на 18 и 19 черт., которыя, такимъ образомъ, представляютъ видъ кривой μ для 1-го и 2-го общихъ случаевъ, при измѣненіи d, начиная съ $d=b$.

Дальнѣйшее разсмотрѣніе этихъ кривыхъ приводитъ насъ къ заключенію, что кривая μ, въ 1-мъ общемъ случаѣ, при послѣдовательномъ уменьшеніи d, можетъ получить такой видъ, что *maximum* и *maximum* на нижней ея вѣтви совпадутъ въ одну точку перегиба съ касательною въ ней параллельною оси x, а этому случаю соотвѣтствуетъ въ кривыхъ 3 порядка совпаденіе двухъ критическихъ центровъ въ одинъ, опредѣляющее точку возврата на соотвѣтственной кривой 3 порядка. Кромѣ того, такъ какъ произведеніе двухъ корней μ_1 и μ_2 будетъ

$$\mu_1 \mu_2 = \frac{4a^2x^2(x+b)^2}{c^2} \qquad (21)$$

и соотвѣтственное произведеніе корней y:

$$y_1 y_2 = \frac{c^2}{4a^4x^2}\mu_1\mu_2 = \frac{(x+b)^2}{a^2} \qquad (22)$$

и въ то же время $\pm \frac{(x+b)^2}{a}$ суть ординаты точекъ на асимптотахъ, соотвѣтствующихъ тому же x, то нетрудно заключить отсюда, принимая во вниманіе фигуру кривой μ, что одинъ критическій центръ лежитъ въ этомъ случаѣ внѣ Δ-ка асимптотъ, а два другіе—внутри этого Δ-ка, и эти два послѣдніе, при своемъ совпаденіи, даютъ точку возврата внутри Δ-ка.

Отсюда видимъ также, что для того, чтобы два критическихъ центра совпадали, необходимо, чтобы кромѣ

$$\frac{d\mu}{dx} = 0 \text{ еще и } \frac{d^2\mu}{dx^2} = 0, \text{ т. е.}$$

Digitized by Google

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0;$$

а это даетъ намъ уравненія

$$\left.\begin{aligned} 2x(x+b)(2x+b)+(2x+d)\mu=0 \\ (2x+b)^2+2x(x+b)+\mu=0 \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

которыя вмѣстѣ съ уравненіями

$$xy=\frac{c\mu}{2a^2} \text{ и } \varphi(x,\mu)=0$$

опредѣляютъ положеніе точки возврата. Изъ нихъ легко исключить μ, c, d, и тогда получимъ

$$a^2y^2+3x^2+2bx=0. \quad (24)$$

Это есть геометрическое мѣсто точекъ возврата; оно представляетъ эллипсъ, вписанный въ Δ-къ асимптотъ, касающійся сторонъ Δ-ка въ ихъ срединахъ, и имѣющей центръ свой въ центрѣ тяжести Δ-ка. Какъ замѣчаетъ Плюкеръ, это есть эллипсъ наибольшей площади изъ всѣхъ эллипсовъ, могущихъ быть вписанными въ Δ-къ. Изъ полученныхъ уравненій мы могли бы также исключить y, x, μ и получить условіе, связывающее c и d съ a и b, т. е. обусловливающее положеніе спутника, при которомъ имѣемъ совпаденіе двухъ критическихъ центровъ.

Фигура (19) кривой μ, соотвѣтствующая 2-му общему случаю, показываетъ, что здѣсь ничего подобнаго случиться не можетъ.

Формула (22) по соображенію съ фиг. 19 показываетъ, что въ этомъ общемъ случаѣ одинъ центръ лежитъ внутри Δ-ка асимптотъ, а два другихъ внѣ его, и изъ нихъ одинъ въ углѣ противоположномъ углу при вершинѣ D въ треугольникѣ, а другой противоположно относительно стороны Δ-ка.

Фигуры кривыхъ 3-го порядка, соотвѣтствующія тремъ разсмотрѣннымъ случаямъ, изображены на черт. 20, 21, 22.

Сравнивая фигуры кривыхъ общаго случая съ фигурами соотвѣтственныхъ кривыхъ 2-го частнаго случая $c=0$, видимъ, что

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

послѣднія отличаются только своею правильностью: для нихъ ось x-овъ есть діаметръ, дѣлящій пополамъ всѣ хорды параллельныя оси y; точно также и кривыя μ, соотвѣтствующія другъ другу въ общемъ и упомянутомъ частномъ случаѣ, отличаются только тѣмъ, что у кривой частнаго случая верхняя вѣтвь удаляется вершиною въ безконечность, обращаясь въ прямую, представляемую осью y-овъ, или въ систему двухъ параллельныхъ прямыхъ, соотвѣтственно удаленію въ ∞ одного критическаго центра.

Кривыя μ, разъ онѣ достаточно точно построены, а не изображены схематически, позволяютъ составить понятіе нетолько о положеніи критическихъ центровъ, но и о всякой изъ кривыхъ системы, соотвѣтствующей заданному напередъ μ. Для этого, откладывая на оси μ величину заданнаго μ, проводимъ черезъ полученную точку параллель къ оси x, и по ходу этой параллели, т. е. смотря по тому, пересѣкаетъ ли она верхнюю или нижнюю вѣтвь кривой μ, или обѣ вмѣстѣ, причемъ она переходитъ изъ области положительной φ въ область отрицательной φ и обратно, заключаемъ, между какими абсциссами x кривая 3-го порядка будетъ мнимою, гдѣ будетъ заключаться овалъ кривой, или овала совсѣмъ не будетъ и т. д., и нанося соотвѣтственныя абсциссы на координатныя оси той плоскости, въ коей строится кривая 3 порядка, видимъ до нѣкоторой степени ея общее расположеніе; но разумѣется расположеніе различныхъ вѣтвей кривой еще яснѣе представится когда уже начерчены тѣ кривыя 3-го порядка, которыя обладаютъ двойными точками.

Изложенный въ настоящей замѣткѣ пріемъ изслѣдованія кривыхъ 3-го порядка приложимъ и ко всѣмъ другимъ классамъ этихъ кривыхъ; такъ, напр., случай двухъ мнимыхъ асимптотъ получается почти непосредственно, замѣняя коэффиціентъ a въ первоначальныхъ формулахъ черезъ $a\sqrt{-1}$, и изслѣдуя соотвѣтственныя измѣненія въ кривыхъ μ.

Digitized by Google

О ЖИЗНИ И НАУЧНЫХЪ ТРУДАХЪ НИКОЛАЯ ИВАНОВИЧА ЛОБАЧЕВСКАГО.

(по поводу столѣтней годовщины дня его рожденія).

Л. К. Лахтина.

22 октября 1893 года исполнилось 100 лѣтъ со дня рожденія Николая Ивановича Лобачевскаго.

Свѣдѣнія о первыхъ годахъ его жизни очень смутны *).

Онъ родился въ Нижегородской губерніи; но гдѣ именно—точныхъ указаній нѣтъ. По словамъ проф. Попова, родина Николая Ивановича Лобачевскаго самый Нижній-Новгородъ; Янишевскій же указываетъ на Макарьевскій уѣздъ. Объ отцѣ

*) Мнѣ извѣстны только слѣдующіе источники для біографіи Н. И. Лобачевскаго.

1) Предисловіе къ „полному собранію сочиненій по геометріи Н. И. Лобачевскаго." Казань 1883 года.

2) Janichefsky. «Notice sur la vie et les travaux de Nicolas Ivanovitch Lobatchefsky». Discours prononcé dans la séance solennelle de l'université Impériale de Kazan le $^{5}/_{17}$ novembre 1868. Traduit du russe par A. Potocki. Bullettino di bibliografia et di storia da Boncompagni. Tomo II. Roma 1869.

3) А. Ѳ. Поповъ. «Воспоминаніе о службѣ и трудахъ профессора Казанскаго Университета Лобачевскаго». Извѣстія Физико-Математическаго общества при Казанскомъ Университетѣ. Вторая серія, томъ III, № 2. Казань 1893 г.

4) Буличъ. Рѣчь передъ гробомъ Николая Ивановича Лобачевскаго. Тамъ же.

Digitized by Google

Николая Ивановича Лобачевскаго извѣстно тоже очень мало. Яишевскій говоритъ, что онъ былъ мелкій чиновникъ, жившій очень бѣдно на свое небольшое жалованье. Онъ имѣлъ трехъ сыновей. Николай Ивановичъ былъ средній.

На 5-мъ году своей жизни онъ лишился отца. Нѣсколько лѣтъ спустя мать его съ своими дѣтьми переѣхала въ Казань, гдѣ и опредѣлила ихъ затѣмъ въ гимназію. Въ 1802 году Николай Ивановичъ Лобачевскій числится уже казенно-коштнымъ ученикомъ. По отзывамъ гимназическаго инспектора, Николай Ивановичъ Лобачевскій отличался прилежаніемъ и безупречнымъ поведеніемъ. Въ концѣ своихъ ученическихъ лѣтъ онъ съ особеннымъ усердіемъ занимался математикой и латинскимъ языкомъ.

14 февраля 1805 года былъ основанъ Казанскій университетъ. На каѳедры были приглашены учителя гимназіи; управленіе университетскими дѣлами было поручено совѣту учителей подъ предсѣдательствомъ директора гимназіи Яковкина. Ученикамъ, окончившимъ курсъ въ гимназіи, было предложено вступить въ число студентовъ университета съ тѣмъ, чтобы каждый казенно-коштный студентъ по окончаніи курса 6 лѣтъ служилъ при университетѣ, помогая профессорамъ. Мать Николая Ивановича Лобачевскаго съ благодарностью приняла предложеніе помѣстить своихъ сыновей на такихъ условіяхъ въ университетъ, и въ 1807 году Николай Ивановичъ Лобачевскій четырнадцати лѣтъ былъ принятъ въ число студентовъ.

Программа университетскаго преподаванія въ то время была очень ограничена; въ значительной степени она заключала въ себѣ повтореніе гимназическаго курса. Такъ адъюнктъ Карташевскій излагалъ для студентовъ, *выбравшихъ спеціальностью чистую математику*, алгебру и планиметрію.

Раздѣленія на факультеты въ то время еще не было.

Въ годъ поступленія Николая Ивановича Лобачевскаго въ университетъ прибыли первые иностранные профессора, приглашенные попечителемъ Румовскимъ. Въ числѣ нихъ былъ профессоръ чистой математики Бартельсъ, имѣвшій большое вліяніе на научную подготовку Лобачевскаго.

Digitized by Google

Въ 1810 году пріѣхалъ Литтровъ—профессоръ астрономіи и Броннеръ—профессоръ физики. Профессора иностранцы были плохо понимаемы русскими студентами. Многіе изъ нихъ преслѣдовали корыстныя цѣли, содержа пансіоны для подготовленія къ вступительнымъ экзаменамъ въ университетъ. Занятія шли очень плохо. Не смотря на то, способности Лобачевскаго и его постоянная жажда знанія привлекли къ нему вниманіе и симпатію профессоровъ-математиковъ. Кромѣ установленныхъ лекцій они стали съ нимъ заниматься приватно: подъ руководствомъ Бартельса онъ изучилъ Disquisitiones arithmeticae Гаусса, подъ руководствомъ Литтрова Mécanique céleste Лапласа. Броннеръ — человѣкъ вполнѣ безкорыстный и преданный дѣлу преподаванія—старался развить въ Лобачевскомъ педагогическія способности. Въ своихъ отзывахъ передъ попечителемъ эти профессора постоянно хвалятъ способности и успѣхи Лобачевскаго.

Характеръ Николая Ивановича Лобачевскаго былъ прямой и честный; въ юности же, кромѣ того, онъ былъ человѣкъ довольно пылкій, что чуть не погубило его во время студенчества.

По распоряженію директора Яковкина только что кончившій курсъ кандидатъ Кондыревъ былъ назначенъ субъинспекторомъ студентовъ. Высокомѣріе его обращенія и ябеды возбудили ненависть студентовъ; они стали его преслѣдовать насмѣшками. Лобачевскій возмущался особенно сильно, и Кондыревъ своими постоянными жалобами вооружилъ противъ него Яковкина. Директоръ, безусловно вѣрившій Кондыреву, считалъ Лобачевскаго студентомъ плохаго поведенія.

По постановленію совѣта, 7 іюля 1811 года Лобачевскій, только что окончившій курсъ, былъ признанъ заслуживающимъ степени кандидата по своимъ успѣхамъ, но за дурное поведеніе былъ лишенъ степени. Къ такому мнѣнію совѣта присоединился и попечитель.

Три дня спустя послѣ предшествующаго засѣданія—10 іюля 1811 года происходило новое засѣданіе совѣта по поводу лицъ, представленныхъ къ степени магистра. Профессора

Digitized by Google

Бартельсъ, Броннеръ, Литтровъ и Германъ воспользовались случаемъ, чтобы спасти Лобачевскаго: они предложили дать Лобачевскому степень магистра, и Яковкину, желавшему провести своихъ любимцевъ, пришлось согласиться, такъ какъ по познаніямъ Лобачевскій былъ безъ сомнѣнія выше своихъ сверстниковъ. Лобачевскій былъ удостоенъ степени магистра и утвержденъ попечителемъ.

Необходимо замѣтить, что въ то время степень магистра имѣла иное значеніе, чѣмъ теперь. Магистры оставались подъ наблюденіемъ инспектора студентовъ и профессоровъ, руководившихъ ихъ научными занятіями. Они должны были помогать профессорамъ въ качествѣ репетиторовъ, а иногда замѣщали отсутствующаго профессора. На нихъ возлагались сверхъ того нѣкоторыя работы по редактированію «Казанскихъ Извѣстій» и иныя порученія. Степень магистра иногда давалась даже безъ всякаго экзамена по одной рекомендаціи профессоровъ.

Въ качествѣ преподавателя Николай Ивановичъ Лобачевскій впервые выступилъ въ 1812 году. Въ то время при Казанскомъ университетѣ существовала коммиссія, производившая испытанія лицъ, ищущихъ чина VIII класса. При этой коммиссіи читались безплатные курсы лекцій для готовящихся къ экзамену. Лобачевскому было поручено чтеніе лекцій по ариѳметикѣ и геометріи. Его преподаваніе, полное, простое и ясное, сразу привлекло вниманіе членовъ университетскаго совѣта и вызвало уваженіе и любовь слушателей. Въ числѣ его учениковъ былъ Мусинъ-Пушкинъ, назначенный впослѣдствіи попечителемъ Казанскаго округа.

За свои преподавательскія способности Николай Ивановичъ Лобачевскій въ слѣдующемъ году былъ назначенъ адъюнктомъ, а въ 1816 году министерскимъ распоряженіемъ онъ былъ утвержденъ въ должности экстраординарнаго профессора. Дѣятельность Николая Ивановича Лобачевскаго въ это время ограничивалась главнымъ образомъ его научными и педагогическими занятіями: въ дѣлахъ совѣта онъ принималъ мало участія. Ему внушали отвращеніе безпрерывныя интриги,

Digitized by Google

ссоры между профессорами и безпорядки въ университетскихъ дѣлахъ, которые достигли такихъ огромныхъ размѣровъ, что министерство одно время намѣревалось даже закрыть университетъ. Въ 1819 году министерство командировало для ревизіи университета Магницкаго, котораго затѣмъ назначило попечителемъ Казанскаго округа.

Эпоха ревизіи и попечительства Магницкаго была грустною эпохою въ исторіи Казанскаго университета. Магницкій полагалъ, что единственная причина университетскихъ безпорядковъ—упадокъ религіи и нравственности. По его распоряженію былъ назначенъ особый директоръ, на обязанности котораго лежало слѣдить за нравственностью профессоровъ и студентовъ. «Грѣшниковъ» заключали въ особую комнату, стѣны которой были покрыты картинами страшнаго суда, и къ нимъ присылали священника для наставленія въ вѣрѣ. Среди профессоровъ и студентовъ развилось лицемѣріе и угодничество. Магницкій по своему усмотрѣнію назначалъ, увольнялъ профессоровъ и перемѣщалъ съ одной каѳедры на другую, нисколько не стѣсняясь ихъ спеціальностью *).

Понятно, что при такихъ условіяхъ наука упала. Но, повидимому, чѣмъ тяжелѣе становилось университетская жизнь, тѣмъ глубже уходилъ Лобачевскій въ свои научныя занятія, ища въ нихъ отдыха и успокоенія.

Къ этой эпохѣ относятся его первые выдающіеся труды. Въ своей дѣятельности ученаго и преподавателя Лобачевскій выше всего цѣнилъ ясность пониманія, точность опредѣленій и критическое отношеніе къ доказательствамъ. Эта именно особенность Лобачевскаго способствовала выработкѣ талантливаго преподавателя; она же привела его къ его изслѣдованіямъ основъ геометріи.

Первая напечатанная работа Лобачевскаго былъ курсъ начальной алгебры, представленный имъ въ Факультетъ въ

*) Янишевскій приводитъ примѣръ, когда адъюнктъ былъ назначенъ на каѳедру химіи и на ту изъ каѳедръ медицинскаго факультета, которая окажется вакантною къ его пріѣзду. Ему была поручена каѳедра хирургіи.

Digitized by Google

1825 году. Всѣ же самыя выдающіяся работы Лобачевскаго касаются уясненія основъ геометріи. Первая изъ этихъ работъ «Exposition succincte des principes de géometrie» было имъ прочитано въ Факультетѣ въ 1826 году. Въ извлеченіи оно было напечатано по русски въ Казанскомъ Вѣстникѣ подъ заглавіемъ «О началахъ геометріи». Въ началѣ этой работы Лобачевскій говоритъ о цѣли своихъ изслѣдованій такъ: «кто не согласится, что никакая математическая наука не должна бы начинаться съ такихъ темныхъ понятій, съ какихъ, повторяя Евклида, начинаемъ мы геометрію, и что нигдѣ въ математикѣ нельзя терпѣть такого недостатка строгости, какой принуждены мы допустить въ теоріи параллельныхъ линій». Въ особенности вниманіе Лобачевскаго привлекала XI аксіома Евклида. Изъ безплодности всѣхъ попытокъ доказать эту аксіому было ясно, что она не есть слѣдствіе остальныхъ аксіомъ, что она отъ нихъ независима и доказана быть не можетъ. Лобачевскій задался мыслію построить геометрическую систему безъ XI аксіомы. Такая геометрическая система была имъ названа «воображаемой» геометріей, а затѣмъ «пангеометріей». Позднѣе подъ вліяніемъ иностранныхъ математиковъ она получила названіе неевклидовой геометріи.

Первое сочиненіе Лобачевскаго «О началахъ геометріи» написано имъ нѣсколько кратко, хотя и вполнѣ ясно. Но новизна идеи вызвала противъ него критику полемическаго характера даже со стороны такого выдающагося математика, какъ Остроградскій.

Слѣды этой полемики видны въ работѣ Лобачевскаго: «Воображаемая геометрія» *), которая была его вторымъ

*) Въ примѣчаніи къ этой статьѣ Лобачевскій пишетъ: «...Въ № 41 Журнала Сына Отечества 1834 года, напечатана критика, весьма оскорбительная для меня, и надѣюсь, совершенно несправедливая. Рецензентъ основалъ свой отзывъ на томъ только, что онъ моей Теоріи не понялъ и почитаетъ ее ошибочной, потому что въ примѣрахъ встрѣчаетъ одинъ нелѣпой интегралъ. Впрочемъ такого интеграла не нахожу

Digitized by Google

трудомъ. Ниже мы разсмотримъ главнѣйшіе результаты всѣхъ геометрическихъ изслѣдованій Лобачевскаго; теперь же перечислимъ только ихъ заглавія: «Воображаемая геометрія» появилась въ 1835 году; за нею слѣдовали сочиненія: «Новыя начала геометріи съ полной теоріей параллельныхъ» 1835—1838 года, «Примѣненіе воображаемой геометріи къ нѣкоторымъ интеграламъ» 1836 года, «Géometrie imaginaire»—1837 года, «Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien» 1840 года, «Пангеометрія»—1855 года, «Pangéometrie ou précis de Géometrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles» — 1856 года.

Отдавшись научнымъ занятіямъ, Лобачевскій не опускалъ изъ виду и своихъ обязанностей университетскаго преподавателя.

Въ 1820 году послѣ выхода въ отставку Бартельса и Броннера Лобачевскому были поручены каѳедры чистой математики, физики и астрономіи. Ему приходилось не только читать лекціи по столькимъ предметамъ, но и ежемѣсячно репетировать студентовъ и представлять отзывы о ихъ занятіяхъ, какъ того требовалъ Магницкій. Только въ слѣдующемъ году Лобачевскому удалось отказаться отъ лекцій по экспериментельной физикѣ, но математическую физику и астрономію онъ читалъ до 1826 года, когда наконецъ на эти каѳедры были назначены новые профессора. Въ 1820 году послѣ отъѣзда профессора Бартельса Лобачевскій былъ назначенъ деканомъ и затѣмъ вскорѣ утвержденъ ординарнымъ профессоромъ. Такимъ образомъ въ теченіи нѣсколькихъ лѣтъ Лобачевскій несъ на себѣ обязанности преподавателя всѣхъ основныхъ предметовъ и декана своего факультета, и не смотря на разнообразіе читаемыхъ имъ курсовъ, въ каждомъ изъ нихъ онъ умѣлъ быть оригинальнымъ.

Слѣдами его научно-педагогической дѣятельности, кромѣ переименованныхъ выше, остались слѣдующія его сочиненія:

я въ моемъ сочиненіи. Въ Ноябрѣ мѣсяцѣ прошедшаго года послалъ я къ издателю отвѣтъ, который однакожъ, не знаю почему, до сихъ поръ, въ продолженіи пяти мѣсяцовъ, еще не напечатанъ».

Digitized by Google

1) О ревонансѣ, или взаимномъ колебаніи воздушныхъ столбовъ,

2) Рѣчь о важнѣйшихъ предметахъ воспитанія,

3) Пониженіе степени въ двучленномъ уравненіи, когда показатель безъ единицы дѣлится на 8,

4) Объ исчезаніи тригонометрическихъ строкъ,

5) Условныя уравненія для движенія и положенія главныхъ осей обращенія въ твердой системѣ,

6) Способъ увѣряться въ исчезаніи безконечныхъ строкъ и приближаться къ значеніямъ функцій отъ весьма большихъ чиселъ,

7) Sur la probabilité des résultats moyens, tirés des observations répétées,

8) Ueber die Convergenz der unendlichen Reihen,

9) Полное солнечное затмѣніе въ Пензѣ 26 Іюня 1842 года,

10) О значеніи нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ.

Нельзя не удивляться, какъ у одного человѣка могло достать силъ для такой напряженной работы.

Энергія Лобачевскаго была точно неистощима: помимо трудовъ профессора онъ не отклонялъ отъ себя и административной работы, когда представлялась надобность. Въ бытность свою деканомъ Лобачевскій, по порученію совѣта, привелъ въ порядокъ университетскую библіотеку, гдѣ не было почти никакихъ каталоговъ и книги расхищались безпрепятственно. Установивъ образцовый порядокъ, Лобачевскій несъ обязанности библіотекаря до 1835 года.

Послѣ отставки Магницкаго въ 1826 году былъ назначенъ ему преемникомъ Мусинъ-Пушкинъ, бывшій ученикъ Лобачевскаго, хорошо знавшій энергію и преданность дѣлу своего учителя. По его настоянію, въ 1827 году Лобачевскій былъ выбранъ ректоромъ и оставался въ этой должности безсмѣнно 19 лѣтъ. Это была свѣтлая эпоха въ жизни казанскаго университета. Первою заботою Лобачевскаго, какъ ректора, было приведеніе въ порядокъ преподаванія; необходимо было устранить ссоры и интриги, мѣшавшія правильному теченію занятій. Послѣ большихъ усилій Лобачевскому удалось этого

Digitized by Google

достигнуть. Недостатокъ профессоровъ сильно чувствовался. Многія каѳедры были вакантны. При содѣйствіи Лобачевскаго нѣсколько молодыхъ людей были отправлены за границу для подготовки къ профессорскому званію. Дальнѣйшею заботою Лобачевскаго было приведеніе въ порядокъ кабинетовъ и музеевъ. При его вступленіи въ должность ректора эти институты не только были бѣдно обставлены, но часто не было извѣстно, въ чьемъ завѣдованіи они находятся. Лобачевскій исходатайствовалъ значительныя денежныя суммы на ихъ пополненіе и самъ принималъ дѣятельное участіе въ разстановкѣ коллекцій. Подъ непосредственнымъ наблюденіемъ Лобачевскаго были выстроены многія новыя университетскія зданія и между прочимъ астрономическая обсерваторія, для которой онъ выписалъ лучшіе въ то время инструменты.

По словамъ профессора Попова, одинъ изъ сослуживцевъ Лобачевскаго такъ охарактеризовалъ его дѣятельность: «для него не существовало ничего второстепеннаго ни въ службѣ, ни въ наукѣ. За что ни брался онъ, все становилось въ его глазахъ предметомъ первой важности, все дѣлалъ онъ съ глубокимъ убѣжденіемъ въ пользѣ своего дѣла».

Во время холерной эпидеміи въ 30-мъ году Лобачевскій принялъ самыя энергичныя мѣры для огражденія студентовъ и университетскихъ служащихъ и этимъ сильно уменьшилъ число смертныхъ случаевъ.

Благодаря такой же распорядительности были спасены библіотека и астрономическіе инструменты во время страшнаго пожара, уничтожившаго въ 1842 году половину города. Оба раза Лобачевскій былъ награжденъ Государемъ. Но это не спасло Лобачевскаго отъ огорченій въ концѣ жизни. Въ 1846 году, не смотря на энергичное ходатайство совѣта, онъ былъ министерствомъ отставленъ отъ должности ректора и профессора и назначенъ противъ своего желанія помощникомъ попечителя. Силы его были еще очень крѣпки, и онъ долго частнымъ образомъ читалъ лекціи передъ аудиторіей изъ профессоровъ математическаго факультета и учителей гимназіи. На этихъ лекціяхъ онъ увлекательно излагалъ свои

Digitized by Google

собственныя изслѣдованія о началахъ геометріи. До прибытія новаго попечителя Лобачевскій около года управлялъ округомъ въ качествѣ его помощника. При этомъ ему пришлось вступить въ тягостную борьбу съ совѣтомъ университета, и онъ радъ былъ по возможности скорѣе сложить съ себя непріятныя для него обязанности.

Какъ и всегда бываетъ съ натурами энергичными, Лобачевскій послѣ удаленія отъ своей кипучей дѣятельности, сталъ быстро старѣть. Къ этому же присоединилось горе отъ потери любимаго и почти взрослаго сына. Лобачевскій лишился зрѣнія и сдѣлался дряхлымъ. Но и въ послѣдніе года своей жизни онъ продолжалъ думать о наукѣ. Его ученики подъ диктовку слѣпаго учителя писали сочиненіе Pangéometrie, которое онъ хотѣлъ поднести университету въ память 50-лѣтія его основанія 14 февраля 1855 года. Почти черезъ годъ, 12 февраля 1856 года, Лобачевскаго не стало.

Переходя къ разсмотрѣнію важнѣйшихъ научныхъ результатовъ, найденныхъ Лобачевскимъ, коснемся вопроса о пріоритетѣ. Извѣстно, что изслѣдованія Ивана Болея въ многомъ сходятся съ работами Лобачевскаго; Гауссъ въ письмѣ къ Шумахеру отъ 28 ноября 1846 года говоритъ, что онъ уже 54 года, какъ раздѣляетъ тѣ-же взгляды на геометрію и что онъ поэтому не нашелъ въ сочиненіи Лобачевскаго чего либо для себя существенно новаго. На этомъ основаніи были дѣлаемы предположенія, будто Гауссъ оказалъ свое вліяніе на научные труды Болея и Лобачевскаго и что ему должна принадлежать честь основателя неевклидовой геометріи.

Постараемся разсмотрѣть, въ какой мѣрѣ это предположеніе заслуживаетъ довѣрія. На работы Болея Гауссъ могъ оказать вліяніе: извѣстно, что Вольфгангъ Болей (отецъ Ивана Болея), будучи въ Геттингенѣ, познакомился съ Гауссомъ и пріобрѣлъ его дружбу. Дружба Болея съ Гауссомъ продолжалась до смерти послѣдняго и поддерживалась ихъ взаимною перепиской. О Болеѣ Гауссъ говоритъ, что это *единственный* человѣкъ, который съумѣлъ вникнуть въ его метафи-

Digitized by Google

зическіе взгляды на математику. *). Послѣ смерти Гаусса Болей отослалъ его письма къ біографу Гаусса Вальтерсгаузену. Работа Ивана Болея, касающаяся новой теоріи параллельныхъ, была имъ напечатана въ видѣ приложенія (appendix) къ работѣ его отца **) въ 1832 году. Первая работа Лобачевскаго о неевклидовой геометріи была, какъ мы видѣли, прочитана имъ въ факультетѣ въ 1826 году и опубликована въ Казанскомъ Вѣстникѣ въ 1829 и 1830 годахъ. Эта работа написана по французски (Sur les principes de la géometrie) хотя и была напечатана въ извлеченіи по русски. Она могла быть доступна и Гауссу и Болею ***), хотя ничего нѣтъ невозможнаго въ томъ, что она осталась имъ неизвѣстною.

Во всякомъ случаѣ безспорно то, что изслѣдованія Лобачевскаго даже по времени опубликованія на 3 года старше работы Болея. Остается разсмотрѣть, на чемъ основано предположеніе о существованіи связи между Лобачевскимъ и Гауссомъ.

Такое предположеніе опирали единственно на переписку Гаусса съ Шумахеромъ ****); другихъ данныхъ въ пользу этой догадки, на сколько намъ извѣстно, не существуетъ.

---

*) См. Sartorius von Waltershausen. Gauss zum Gedächtniss. Стр. 17.

**) Заглавіе работы Вольфганга Болея таково: „Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi. Cum Appendice triplici. Auctore Professore Matheseos et Physices Chemiaeque publico ordinario. Tomus primus. Maros—Vásárhelyini, 1832. Typis Collegii Reformatorum, per Josephum et Simeonem Kali de Felsö Vist.“—Приложенная къ ней работа Ивана Болея озаглавлена такъ: „Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta, ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica. Auctore Joanne Bolyai de eadem, Geometrarum in Exercitu Caesareo Regio Austriaco Castrensium Capitaneo“.

***) Еслибы существовала связь между Лобачевскимъ и Гауссомъ, то онъ могъ бы переслать Гауссу понятный ему французскій текстъ.

****) Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher. Altona 1860—1863. Письма, касающіеся XI аксіомы и несвклидовой геометріи въ русскомъ

Digitized by Google

Въ этой перепискѣ обмѣнъ мыслей по поводу XI аксіомы Евклида начался съ 1831 года, то есть пустя два года послѣ появленія сочиненія Лобачевскаго «О началахъ геометріи».

Шумахеръ приводитъ свои попытки доказать XI аксіому. Гауссъ разбиваетъ его доказательства. Въ первомъ письмѣ, затрогивающемъ вопросъ объ XI аксіомѣ, Гауссъ говоритъ, что онъ уже сорокъ лѣтъ тому назадъ получилъ нѣкоторые результаты, касающіеся этого вопроса, и долженъ былъ теперь возобновить ихъ въ памяти три или четыре раза, чтобы ихъ записать, такъ какъ они имъ ранѣе записаны не были и онъ боится, что эти результаты погибнутъ вмѣстѣ съ нимъ *). Этого конечно не могло бы случиться, еслибы Гауссъ незадолго передъ тѣмъ переписывался съ Лобачевскимъ о томъ же вопросѣ. Въ первомъ письмѣ Гауссъ совсѣмъ о Лобачевскомъ не упоминаетъ, не смотря на то, что указанія на работу Лобачевскаго было бы достаточно, чтобы разсѣять сомнѣнія Шумахера, какъ это и случилось впослѣдствіи.

Надо думать, что въ то время Гауссъ о первой работѣ Лобачевскаго или совсѣмъ не зналъ или забылъ про нее. А это опять указываетъ на то, что никакой переписки по поводу этой работы не было. Къ тому же въ первомъ письмѣ Гауссъ ничего не говоритъ о возможности геометрической системы безъ XI аксіомы, чѣмъ прямо была бы обнаружена безплодность самыхъ стремленій Шумахера доказать XI аксіому.

О неевклидовой геометріи Гауссъ пишетъ только спустя два мѣсяца по поводу новой попытки Шумахера доказать XI аксіому. Надо думать, что Гауссъ въ это время возобновилъ въ памяти давно забытые имъ результаты, а можетъ быть ознакомился съ работою Болея, такъ какъ приводимая имъ формула длины полуокружности для неевклидовой геометріи—

переводѣ напечатаны въ Математическомъ Сборникѣ томъ III и въ недавно изданномъ въ Казани Сборникѣ „Объ основаніяхъ геометріи“. Казань 1893.

*) Они такъ и остались неопубликованными.

Digitized by Google

совершенно такого же вида, какъ у Болея, и разнится отъ формулы Лобачевскаго тѣмъ, что Лобачевскій такъ называемую кривизну принимаетъ равною —1. Во всякомъ случаѣ о Лобачевскомъ Гауссъ въ этомъ письмѣ также не упоминаетъ, какъ и въ первомъ. Послѣ отвѣта Шумахера на это письмо, гдѣ видно, что онъ не вполнѣ понялъ Гаусса, переписка объ XI аксіомѣ у нихъ прекратилась и не возобновлялась въ теченіи 15 лѣтъ. Въ 1846 году Гауссъ впервые вспоминаетъ о неевклидовой геометріи и начинаетъ письмо къ Шумахеру такъ: «Въ послѣднее время я имѣлъ случай перечитать небольшое сочиненіе Лобачевскаго подъ заглавіемъ Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien». Далѣе онъ, говоритъ что изложеніе неевклидовой геометріи у Лобачевскаго совсѣмъ иное отъ того, которое онъ предполагалъ сдѣлать, и что авторъ трактуетъ о предметѣ, какъ знатокъ, въ истинно-геометрическомъ духѣ. Сочиненіе, о которомъ говоритъ Гауссъ, появилось въ 1840 году и въ то время уже существовало 5 работъ Лобачевскаго по неевклидовой геометріи, изъ которыхъ двѣ написаны по французски. По видимому «Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien» было первое сочиненіе Лобачевскаго, привлекшее вниманіе Гаусса.

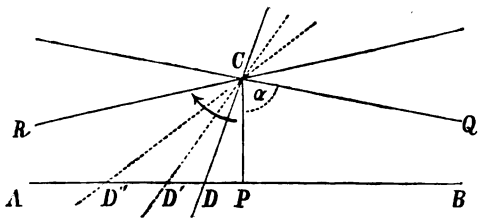
Есть ли основаніе думать, что эти пять работъ Лобачевскаго написаны подъ вліяніемъ Гаусса? Конечно, надо отвѣтить на этотъ вопросъ отрицательно. Безъ сомнѣнія Лобачевскій первый изложилъ въ полной и ясной формѣ начала неевклидовой геометріи и долженъ быть признанъ главою новой школы геометровъ.

Во всѣхъ своихъ научныхъ изслѣдованіяхъ Лобачевскій отводилъ особое значеніе точности опредѣленій и критикѣ основъ науки.

Отсюда понятно, почему привлекали его вниманіе въ такой мѣрѣ геометрическія аксіомы и система изложенія геометріи. Безъ сомнѣнія наиболѣе интересны и важны тѣ работы Лобачевскаго, которыя касаются теоріи параллельныхъ. Въ этой теоріи Лобачевскій исходитъ изъ слѣдующихъ соображеній.

Digitized by Google

Укрѣпимъ прямую CD неподвижно въ точкѣ C и будемъ ее поворачивать по направленію стрѣлки, слѣдя за точкой пересѣченія D вращающейся прямой съ постоянною прямой AB. Точка D движется влѣво (D', D''...), удаляясь въ безконечность. Пусть предѣльное положеніе прямой CD, когда точка D удалилась въ безконечность,—есть CR. Прямую CR Лобачевскій называетъ параллельною. Повернемъ чертежъ около прямой CP перпендикулярной къ AB. Прямая AB придетъ въ совмѣщеніе сама съ собою, а CR займетъ положеніе CQ—это будетъ тоже параллельная по отношенію къ AB: если бы мы стали поворачивать прямую CD въ направленіи, обратномъ стрѣлкѣ, слѣдя за движеніемъ точки D, то прямая CD заняла бы положеніе CQ въ тотъ моментъ, когда точка D ушла бы въ безконечность вправо.



Черт. 1.

Такимъ образомъ черезъ точку C проходятъ двѣ параллельныя по отношенію къ AB—CR и CQ. Одна изъ нихъ параллельная влѣво относительно перпендикуляра CP, другая — вправо. Уголъ $PCQ = PCR = \alpha$ Лобачевскій назвалъ *угломъ параллельности*. Этотъ уголъ можетъ быть функціей только длины p перпендикуляра CP. Лобачевскій полагаетъ $\alpha = \Pi(p)$. Если этотъ уголъ есть дѣйствительно функція p, то она приближается къ $\frac{\pi}{2}$ при уменьшеніи p и обращается въ $\frac{\pi}{2}$ при $p = 0$:

$$\Pi(0) = \frac{\pi}{2}.$$

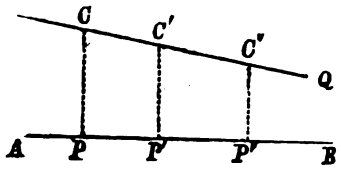
При возрастаніи уголъ α уменьшается и обращается въ 0 при $p = \infty$.

Если же уголъ α постояненъ относительно p, то

Digitized by Google

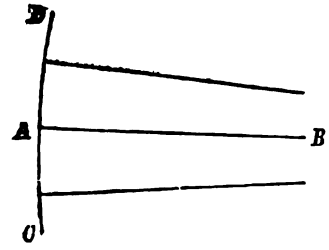
$$\Pi(p) = \Pi(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Въ этомъ случаѣ уголъ RCQ равенъ π; прямая CQ составляетъ продолженіе CR; черезъ точку C проходитъ только одна параллельная къ прямой AB, и XI аксіома должна быть справедлива. Такимъ образомъ вопросъ объ XI аксіомѣ приводится къ вопросу о томъ, есть ли $\Pi(p)$ постоянная величина или функція p? Лобачевскій развиваетъ логическія послѣдствія этого послѣдняго предположенія. Онъ находитъ, что если прямая CQ параллельна прямой AB вправо и точка C' лежитъ на CQ, то прямая, проходящая черезъ C' и параллельная прямой AB вправо, совпадаетъ съ CQ. Такимъ образомъ прямая параллельная другой прямой въ одной изъ своихъ точекъ, параллельна ей на всемъ протяженіи. Длины перпендикуляровъ CP, $C'P'$, $C''P''$ идутъ уменьшаясь по мѣрѣ удаленія въ сторону параллельности; по мѣрѣ удаленія въ противоположную сторону онѣ безпредѣльно возрастаютъ.



Черт. 2.

Параллельность есть свойство взаимное для двухъ прямыхъ: если прямая CQ параллельна AB, то и AB параллельна CQ. Двѣ прямыя, параллельныя третьей въ одну и ту сторону, — параллельны между собою.



Черт. 3.

Проведя систему прямыхъ, параллельныхъ между собою, Лобачевскій строитъ элементарнымъ способомъ ихъ ортогональную траэкторію. Эту ортогональную траэкторію онъ называетъ *предѣльною окружностью*.

Одну изъ параллельныхъ прямыхъ AB (безразлично—какую именно), онъ принимаетъ за ось предѣльной окружности. На всемъ своемъ протяженіи предѣльная окружность имѣетъ одинаковый видъ, всякая дуга ея безъ измѣненія кривизны мо-

Digitized by Google

жетъ быть наложена на кривую во всякомъ ея мѣстѣ. Если провести окружность черезъ точку A съ центромъ на прямой AB и затѣмъ увеличивать ея радіусъ, удаляя центръ по прямой AB въ безконечность, то предѣломъ такой окружности и будетъ предѣльная окружность CD.

Такимъ образомъ въ «воображаемой» геометріи Лобачевскаго предѣломъ окружности при безконечномъ возрастаніи ея радіуса является кривая, а не прямая линія, какъ въ геометріи Евклида. Если мы станемъ вращать предѣльную окружность около оси AB, то она опишетъ поверхность, которую Лобачевскій называетъ *предѣльною сферою*. Эта поверхность ортогональна къ семейству прямыхъ въ пространствѣ, параллельныхъ AB. Линія AB (или какая угодно другая изъ семейства параллельныхъ) можетъ быть принята за ось предѣльной сферы. Всякое сѣченіе предѣльной сферы плоскостью, проходящей черезъ одну изъ осей, есть предѣльная окружность. Сѣченіе всякою другою плоскостью есть окружность съ конечнымъ радіусомъ. Геометрія на предѣльной сферѣ есть геометрія Евклида. Пользуясь этимъ, Лобачевскій выводитъ формулы своей «воображаемой» геометріи и находитъ выраженіе для угла параллельности α (черт. 1). Оказывается, что уголъ $\alpha = \Pi(p)$ опредѣляется формулой:

$$tg\,\frac{1}{2}\Pi(p) = e^{-p}\,.^{*}) \qquad (1)$$

Получивъ это выраженіе, уже сравнительно не трудно найти формулы, связывающія стороны и углы всякаго треугольника. Оказывается, что эти формулы разнятся отъ фор-

*) У Бельтрами и новѣйшихъ геометровъ

$$tg\,\frac{1}{2}\Pi(p) = e^{-\frac{p}{k}},$$

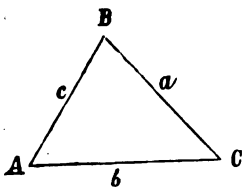
при чемъ $-k^2$ есть кривизна пространства. Иначе:

$$cos.\,\Pi(p) = tg.hyp\left(\frac{p}{k}\right).$$

Лобачевскій выбираетъ единицу длины такъ, чтобы k равнялось 1.

Digitized by Google

мулъ сферической тригонометріи только тѣмъ, что въ сферической тригонометріи стороны a, b, c треугольника слѣдуетъ замѣнить чрезъ ai, bi, ci, гдѣ $i = \sqrt{-1}$. Можно сказать, что «воображаемая» геометрія Лобачевскаго есть геометрія на сферѣ радіуса i *).



Черт. 4.

Имѣя формулы, связывающія углы и стороны прямолинейнаго треугольника, можно выразить элементъ дуги кривой

*) Формулы Бельтрами и новѣйшихъ геометровъ соотвѣтствуютъ геометріи на сферѣ радіуса $\frac{i}{k}$. Замѣнивъ въ формулахъ сферической тригонометріи стороны треугольника a, b, c черезъ $a\frac{i}{k}$, $b\frac{i}{k}$, $c\frac{i}{k}$, мы вмѣсто тригонометрическихъ функцій вводимъ гиперболическія.

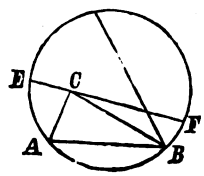
При $k = \infty$ формулы эти обратятся въ обычныя формулы Евклидовой геометріи.

Кривизна сферы радіуса $R = \frac{i}{k}$ есть, понятно:

$$\frac{1}{R^2} = -k^2.$$

Отсюда понятно, почему формулы „воображаемой“ геометріи тождественны съ формулами геометріи на псевдосферѣ, т. е. на поверхности съ постоянной отрицательной кривизной $-k^2$.

Бельтрами показалъ, что можно установить такое однозначное соотвѣтствіе между точками псевдосферы и точками плоскости, при которомъ геодезическія линіи псевдосферы отобразятся прямыми линіями, а безконечно удаленныя точки псевдосферы—точками нѣкоторой окружности конечнаго радіуса. Вся поверхность псевдосферы отобразится площадью, лежащею внутри окружности, а геодезическія линіи, безконечно продолженныя въ обѣ стороны, отобразятся хордами этой окружности.



Черт. 5.

Будемъ называть отображенія точекъ тѣми же буквами, какъ и отображаемыя. Въ такомъ случаѣ можно сказать, что геодезическія, проходящія черезъ точку C и параллельныя геодезической AB суть тѣ, которыя отображаются прямыми CA и CB: эти геодезическія пересѣкаютъ геодезическую AB въ безконечно удаленныхъ точкахъ A и B. Всѣ

Digitized by Google

ds. Въ геометріи Лобачевскаго въ Декартовыхъ координатахъ онъ выражается такъ:

$$ds=\sqrt{dy^2+\frac{dx^2}{sin^2\Pi(y)}}, \tag{2}$$

а въ полярныхъ слѣдующимъ образомъ:

$$ds=\sqrt{dr^2+d\varphi^2 ctg^2\Pi(r)}. \tag{3}$$

Если принять одну изъ осей предѣльной окружности за ось абсциссъ и помѣстить начало координатъ на кривой, то уравненіе предѣльной окружности будетъ таково:

$$sin\,\Pi(y)=e^{-x}. \tag{4}$$

Внося это выраженіе въ формулу (2) и интегрируя, найдемъ:

$$s=ctg\Pi(y). \tag{5}$$

Таково выраженіе длины дуги предѣльной окружности.

Положивъ въ формулѣ (3)

$$r=R=Const.,$$

и интегрируя отъ $\varphi=0$ до $\varphi=2\pi$, находимъ:

$$s=2\pi ctg\Pi(R). \tag{6}$$

Такова формула длины дуги полной окружности.

За элементъ площади кривой Лобачевскій принимаетъ безконечно узкую площадь ограниченную 1) кривой, 2) осью x 3) двумя предѣльными окружностями, имѣющими ось x своею

геодезическія, параллельныя AB вправо, отобразятся прямолинейными лучами, выходящими изъ B,

Хорда EF пересѣкаетъ хорду AB внѣ окружности; геодезическая EF пересѣкаетъ геодезическую AB въ мнимой точкѣ; иначе говоря, совсѣмъ ее не пересѣкаетъ, Геодезическія AB и EF не параллельны и не пересѣкаются.

Digitized by Google

осью и пересѣкающими ось x въ точкахъ отстоящихъ одна отъ другой на dx. Элементъ площади оказывается таковъ:

$$dS = \frac{e dx \cdot ctg \Pi(y)}{e - 1}.$$

Пользуясь этою формулою, Лобачевскій находитъ величину площади треугольника: она выражается избыткомъ π надъ суммою его угловъ:

$$\pi - (A + B + C), \qquad (8)$$

гдѣ A, B и C суть углы треугольника. Отсюда вытекаетъ, между прочимъ, такое интересное заключеніе: три параллельныя между собою прямыя образуютъ треугольникъ, у котораго всѣ внутренніе углы равны нулю; площадь такого треугольника конечна и равна π. Это—самая большая площадь, которую можетъ имѣть треугольникъ. Изъ формулы площади треугольника слѣдуетъ, что эта площадь вполнѣ опредѣлена его углами; чѣмъ сумма угловъ меньше, тѣмъ площадь треугольника больше. Поэтому понятно, что въ «воображаемой» геометріи подобныхъ треугольниковъ существовать не можетъ.

Внеся въ формулахъ «воображаемой» геометріи вмѣсто функціи Π ея выраженіе изъ уравненія (1), разложивъ показательныя функціи въ степенные ряды и ограничиваясь первыми приближеніями, мы получимъ формулы, годныя для фигуръ малыхъ размѣровъ. Оказывается, что въ такомъ случаѣ мы получимъ формулы геометріи Евклида. Геометрія Евклида есть лишь первое приближеніе къ «воображаемой» геометріи Лобачевскаго.

Въ дѣйствительности ли наше пространство есть Евклидово пространство или наши несовершенныя чувства только не въ состояніи открыть погрѣшностей перваго приближенія—вѣроятно останется навсегда открытымъ.

Положивъ основанія «воображаемой» геометріи, Лобачевскій уже безъ большаго труда обычными путями развиваетъ ихъ дальнѣйшія слѣдствія. Въ особенности много онъ останавливается на приложеніяхъ воображаемой геометріи къ

Digitized by Google

вычисленію опредѣленныхъ интегралов *). Эти приложенія основаны на преобразованіяхъ интегралов, распространенныхъ на площади и объемы. Здѣсь видную роль играетъ функція, выражаемая интеграломъ:

$$L(x) = -\int_0^x dx . \log \cos x, \qquad 0 < x \leqq \frac{\pi}{2}. \tag{9}$$

Она можетъ быть разложена въ слѣдующій рядъ:

$$L(x) = x \log 2 - \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{(-1)^i}{i} \cos 2ix. \tag{10}$$

Таковы въ самыхъ краткихъ чертахъ главнѣйшіе результаты, найденные Н. И. Лобачевскимъ въ воображаемой геометріи. Сама по себѣ идея построенія геометрической системы безъ XI аксіомы кажетъ весьма простою, однако со времени Евклида прошло 2000 лѣтъ до ея осуществленія.

Лобачевскому принадлежитъ честь не только постановки, но также стройнаго и полнаго рѣшенія задачи.

Дальнѣйшее развитіе идей Лобачевскаго вызвало въ послѣднее время обширную литературу, надъ которою потрудились такіе выдающіеся математики, какъ Бельтрами, Батталини, Риманъ, Гельмгольцъ, Ли, Кели, Клейнъ, Пуанкаре и многіе другіе **).

---

*) Этому вопросу онъ посвящаетъ отдѣльную работу „Примѣненіе воображаемой геометріи къ нѣкоторымъ интеграламъ“.

**) Литература неевклидовой геометріи приведена въ собраніи геометрическихъ сочиненій Лобачевскаго. Систематическое изложеніе основъ неевклидовой геометріи можно найти въ сочиненіи Киллинга (Killing) „Einführung in die Grundlagen der Geometrie“, недавно вышедшемъ въ память столѣтней годовщины дня рожденія Н И. Лобачевскаго.

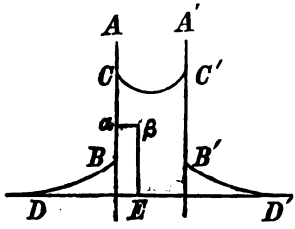
Digitized by Google

КЪ ВОПРОСУ О ПРИТЯЖЕНІИ ПЛАСТИНОКЪ ПОДЪ ДѢЙСТВІЕМЪ КАПИЛЛЯРНЫХЪ СИЛЪ.

П. В. Преображенскаго.

Настоящая замѣтка имѣетъ цѣлію устранить одну неточность, которую можно встрѣтить въ курсахъ теоріи капиллярности.

Пусть мы имѣемъ двѣ вертикальныя параллельныя пластинки, опущенныя въ жидкость. Возлѣ нихъ и между ними образуются цилиндрическія поверхности DB, $D'B'$ и CC'.



D и D' лежатъ на поверхности уровня жидкости въ сосудѣ. Давленія въ этихъ точкахъ, равно какъ и въ какой-нибудь точкѣ E, лежащей между пластинками въ той же плоскости уровня, равно атмосферному и, будучи выражено столбомъ

Digitized by Google

взятой нами жидкости, равно положимъ H. Въ какой-нибудь точкѣ a стѣнки пластинки на промежуткѣ BC, давленіе извнѣ измѣряется столбомъ H, а изнутри столбомъ $H-\beta E$, гдѣ β лежитъ на высотѣ α. Ниже линіи B и выше линіи C давленія на пластинку съ обѣихъ сторонъ одинаковы.

Обозначивъ ширину пластинки черезъ l, высоту B надъ уровнемъ черезъ z_0 и высоту C черезъ z_1, массовую плотность жидкости черезъ ρ, будемъ имѣть для давленія на стѣнку $BC.l$ слѣдующее выраженіе

$$g\rho\int_{z_0}^{z_1} z\,l\,dz = g\rho\,l\,\frac{z_1^2 - z_0^2}{2}.$$

Кромѣ того пластинка A подвергается дѣйствію поверхностнаго натяженія по линіямъ, проходящимъ въ B и C. Если коэффиціентъ натяженія есть $g\rho a^2$, и углы соприкосновенія обозначимъ черезъ i и i_1, то для горизонтальныхъ слагающихъ получимъ величины: $g\rho \sin i$ (дѣйствующая влѣво) и $g\rho \sin i_1$ (дѣйствующая вправо).

Въ окончательномъ результатѣ пластинка A подвергается слѣдующей силѣ P, дѣйствующей горизонтально вправо:

$$P = g\rho l\,\frac{z_1^2 - z_0^2}{2} + g\rho a^2 l(\sin i_1 - \sin i).$$

Принявъ соотвѣтственныя обозначенія для второй пластинки, будемъ имѣть, что она подвержена слѣдующей силѣ P', дѣйствующей влѣво:

$$P' = g\rho l\,\frac{z'^2_1 - z'^2_0}{2} + g\rho a^2 l(\sin i'_1 - \sin i')$$

Получивъ эти выраженія для силъ P и P', Mathieu *) при

*) Théorie de la Capillarité par M. Emile Mathieu. 1883. p. 104—105.

Digitized by Google

помощи дифференціальнаго уравненія свободной поверхности жидкости

$$\frac{1}{\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = const - \frac{z^2}{2a^2}$$

выводитъ слѣдующее заключеніе:

Если $i_1 = i$ и $i'_1 = i'$, то $P' = P$.

Это заключеніе слишкомъ узко. Можно показать, что не только при указанномъ соотношеніи между углами соприкосновенія, но и *при какихъ угодно углахъ соприкосновенія* силы, дѣйствующія на обѣ пластинки въ горизонтальномъ направленіи, равны между собою.

Замѣчая, что абсолютныя величины $\frac{\partial z}{\partial x}$ въ точкахъ B, C, B' и C' равны котангенсамъ угловъ соприкосновенія, изъ дифференціальнаго уравненія поверхности жидкости получимъ:

$$\sin i = C_0 - \frac{z_0^2}{2a^2}, \quad \sin i' = C_0 - \frac{z'^2_0}{2a^2},$$

$$\sin i_1 = C_1 - \frac{z_1^2}{2a^2}, \quad \sin i'_1 = C_1 - \frac{z'^2_1}{2a^2},$$

гдѣ C_0 и C_1 нѣкоторыя постоянныя.

Подставляя эти выраженія въ выраженія силъ P и P', увидимъ, что *сила P всегда равна силѣ P'*.

Это можно вывести также и изъ принципа невозможности perpetuum mobile. Въ самомъ дѣлѣ, представимъ себѣ, что обѣ пластинки неизмѣнно связаны между собою и пущены на поверхность жидкости. Если бы одна пластинка подвергалась большему дѣйствію, чѣмъ другая, то послѣдовало бы вѣчное движеніе.

Digitized by Google

Такимъ образомъ мы видимъ, что свойства поверхностей пластинокъ можно мѣнять какъ угодно, а вмѣстѣ съ тѣмъ мѣнять и углы соприкосновенія. Оказывается, что насколько натяженіе, производимое поверхностью жидкости на пластинку, увеличивается вслѣдствіе того, что уголъ соприкосновенія приближается къ прямому, на столько же направленное въ ту же сторону давленіе уменьшается вслѣдствіе уменьшенія площади, на которую производится это давленіе.

12 мая 1894 г.

Digitized by Google

КЪ ЗАДАЧѢ ОБЪ ИРРЕГУЛЯРНЫХЪ ИНТЕГРАЛАХЪ ЛИНЕЙНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

П. А. Некрасова.

Въ статьѣ: «Способъ В. Г. Имшенецкаго для нахожденія алгебраическихъ раціональныхъ дробныхъ рѣшеній линейнаго дифференціальнаго уравненія» (Мат. Сборн., т. XVII, стр. 341—382) сдѣланъ намекъ на достигнутое мною упрощеніе, относящееся къ такъ называемымъ иррегулярнымъ интеграламъ. Къ сожалѣнію, мои надежды достигнуть въ этомъ вопросѣ важныхъ упрощеній не оправдались вслѣдствіе препятствій, находящихся въ связи съ расходимостью нѣкоторыхъ рядовъ.

Вмѣстѣ съ тѣмъ я усумнился въ правильности выводовъ Пуанкаре, содержащихся въ § 3 его мемуара: «Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires», напечатаннаго въ Acta Mathematica (8 : 4, p. 295—344).

Въ § 3 этого мемуара трактуется уравненіе, приводимое при посредствѣ преобразованія Лапласа къ виду:

$$Q_m \frac{d^m v}{dz^m} + Q_{m-1} \frac{d^{m-1} v}{dz^{m-1}} + \ldots + Q_0 z = 0, \qquad (1)$$

гдѣ Q суть цѣлые полиномы и притомъ

$$Q_m = (z-a_1)\,(z-a_2)\ldots(z-a_n). \qquad (2)$$

Уравненіе (1) въ области $z = a_i$ имѣетъ интегралъ v_i вида:

Digitized by Google

$$v_i = (z-a_i)^{\beta_i} + C_1(z-a_i)^{\beta_i+1} + C_2(z-a_i)^{\beta_i+2} + \ldots \qquad (3)$$

Опредѣливъ такимъ образомъ v_i и разумѣя подъ x количество, коего дѣйствительная часть есть весьма большая *положительная* величина, Пуанкаре разсматриваетъ интегралъ

$$J = \int v_i e^{zx} dz, \qquad (4)$$

отнесенный къ контуру k_i, простирающемуся въ безконечность по прямой, проводимой въ направленіи дѣйствительныхъ и притомъ *отрицательныхъ* величинъ.

Возникаетъ сомнѣніе въ *годности* интеграла (4), такъ какъ въ области точки $z=\infty$ уравненіе (1) при разсматриваемыхъ у Пуанкаре обстоятельствахъ большею частію имѣетъ иррегулярные интегралы, при чемъ, какъ кажется, можетъ случиться, что функція $v_i e^{zx}$ для безконечно удаленныхъ точекъ контура k_i обращается въ нуль порядка ниже 1 и даже обращается въ ∞. Сомнѣніе это не однородно съ тѣмъ, которое возбуждалъ Thomé (Crelle's Journ., B. 101) и на которое отвѣчалъ Пуанкаре (Acta Mathem., 10 : 3).

Можетъ быть, возбуждаемое мною сомнѣніе устраняется либо на счетъ иного выбора формы контура k_i, либо посредствомъ какихъ нибудь требующихъ выясненія свойствъ функціи $v_i e^{zx}$. Но этотъ вопросъ представляетъ пока свои неясности и трудности въ виду крайней сложности характера особой точки $z=\infty$ функціи $v_i e^{zx}$, которая можетъ притомъ слагаться изъ *нѣсколькихъ* иррегулярныхъ интеграловъ съ *различными* корнями опредѣляющаго уравненія.

Digitized by Google

ЛИНЕЙНЫЯ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ УРАВНЕНІЯ ВТОРАГО ПОРЯДКА СЪ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ИНТЕГРАЛАМИ.

В. П. Ермакова.

Предисловіе.

Вопросъ о линейныхъ однородныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ, общіе интегралы которыхъ выражаются алгебраическими функціями, сравнительно недавній, но уже имѣетъ обширную литературу. Просматривая относящіяся сюда изслѣдованія, невольно приходишь къ тому убѣжденію, что вопросъ слишкомъ сложенъ и находится въ связи со многими другими вопросами.

Каждый новый вопросъ на первыхъ порахъ кажется слишкомъ труднымъ. Для рѣшенія этого вопроса изслѣдователь стремится выдвинуть весь запасъ своихъ знаній. Такъ въ трактатахъ, посвященныхъ нашему вопросу, встрѣчаются теоремы изъ теорій функцій алгебраическихъ уравненій, дифференціальныхъ уравненій, безконечныхъ рядовъ, инваріантовъ, Римановыхъ поверхностей, подстановокъ, правильныхъ многогранниковъ. Но при внимательномъ изученіи многіе повидимому сложные вопросы допускаютъ простое рѣшеніе.

Простѣйшее рѣшеніе вопроса принадлежитъ С. Е. Савичу *), который въ основу своихъ изслѣдованій положилъ

*) *С. Е. Савичъ.* О линейныхъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ съ правильными интегралами. СПБ. 1892.

Digitized by Google

теорію конечныхъ группъ линейныхъ подстановокъ. Но при рѣшеніи вопроса можно обойтись и безъ теоріи подстановокъ.

Я задался цѣлію — найти возможно простое рѣшеніе вопроса. Предоставляю читателю судить, насколько удалось мнѣ достичь этой цѣли.

Я ограничиваюсь рѣшеніемъ вопроса въ его чистомъ видѣ и отбрасываю всѣ находящіеся съ нимъ въ связи побочные вопросы.

Далѣе я стараюсь обратить вниманіе на выясненіе каждой мелочи, такъ что, полагаю, читателю ничего не покажется недоказаннымъ и неяснымъ.

Въ трехъ мѣстахъ я оставляю нѣчто недоказаннымъ, но лишь по той причинѣ, что само доказательство весьма просто. Помѣщеніе подобныхъ доказательствъ нарушаетъ плавность изложенія, такъ какъ отвлекаетъ вниманіе читателя отъ главнаго предмета.

Все свое изслѣдованіе я дѣлю по возможности на отдѣльные законченные параграфы, снабженные заглавіями.

Вопросъ оказывается далеко несложнымъ. Вотъ перечень тѣхъ спеціальныхъ свѣдѣній, съ которыми читатель можетъ приступить къ моему изслѣдованію.

1. Если цѣлая раціональная функція, $\phi(x, z)$, двухъ (или болѣе) перемѣнныхъ не разлагается на раціональные множители, то приравнявъ эту функцію нулю,

$$\phi(x, z)=0,$$

получимъ уравненіе, которое будемъ называть *неприводимымъ* алгебраическимъ уравненіемъ.

Такъ какъ подобное опредѣленіе неприводимости немного разнится отъ общеупотребительнаго, то пояснимъ примѣрами.

Уравненіе

$$x^2 - z^2 - 1 = 0$$

неприводимо, такъ какъ первая часть не разлагается на множители.

Digitized by Google

Уравненіе

$$2x^2 + z^2 - 2z + 1 = 0$$

приводимо, потому что первая часть разлагается на два множителя:

$$(z - 1 + x\sqrt{-2})(z - 1 - x\sqrt{-2})$$

2. Пусть двѣ перемѣнныя x и z находятся въ алгебраической зависимости

$$\varphi(x, z) = 0;$$

пусть x—независимое перемѣнное. На плоскости перемѣннаго x есть такъ называемыя *критическія точки*. Если независимое перемѣнное опишетъ замкнутую кривую около критической точки, то корни алгебраическаго уравненій переходятъ одинъ въ другой.

3. Если нѣкоторая функція корней алгебраическаго уравненія, $\varphi(z_1, z_2, \ldots)$, не измѣняется, когда независимое перемѣнное описываетъ произвольную замкнутую кривую, то эта функція выражается раціонально чрезъ независимое перемѣнное:

$$\varphi(z_1, z_2, \ldots) = R(x).$$

4. Если нѣкоторая функція корней алгебраическаго уравненія, $\varphi(z_1, z_2, \ldots)$, умножается на постоянные множители, когда независимое перемѣнное описываетъ замкнутыя кривыя около каждой критической точки, то эта функція корней выражается радикальною функціей независимаго перемѣннаго:

$$\varphi(z_1, z_2, \ldots) = \sqrt[n]{R(x)},$$

а постоянные множители будутъ корнями двучленнаго уравненія:

$$\lambda^n = 1.$$

5. Положимъ, что въ неприводимомъ алгебраическомъ уравненіи,

Digitized by Google

$$\varphi(z) = 0,$$

одинъ корень выражается раціонально чрезъ другой:

$$z' = f(z).$$

Въ такомъ случаѣ, если въ уравненіе вмѣсто z подставимъ $f(z)$, то получимъ новое уравненіе,

$$\varphi f(z) = 0,$$

которому удовлетворятъ всѣ корни прежняго уравненія.

Въ частномъ случаѣ, если

$$z' = \frac{az + b}{cz + \partial},$$

то уравненіе:

$$\varphi\left(\frac{az + b}{cz + \partial}\right) = 0.$$

тожественно съ прежнимъ уравненіемъ.

6. Если одинъ корень неприводимаго алгебраическаго уравненія есть интегралъ какого-нибудь дифференціальнаго уравненія, выраженнаго въ раціональной формѣ, то и всякій другой корень перваго уравненія будетъ также интеграломъ втораго уравненія.

7. Пусть $F(y, z)$ и $\Phi(y, z)$ будутъ двѣ функціи двухъ перемѣнныхъ. Выраженіе:

$$\Psi(y, z) = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

называется Якобіевымъ опредѣлителемъ, или Якобіаномъ.

Якобіевъ опредѣлитель есть *ковариантъ* тѣхъ функцій, изъ которыхъ онъ составленъ.

Свойства коварианта выражаются въ слѣдующемъ.

Преобразуемъ линейно перемѣнныя:

$$y' = \alpha y + \beta z,$$

$$z' = \gamma y + \delta z.$$

Digitized by Google

Пусть функціи F и Φ преобразуются въ F_1 и Φ_1. Составимъ Якобіанъ преобразованныхъ формъ:

$$\Psi_1 = \frac{\partial F_1}{\partial y'}\frac{\partial \Phi_1}{\partial z'} - \frac{\partial F_1}{\partial z'}\frac{\partial \Phi_1}{\partial y'}.$$

Между прежнимъ и новымъ Якобіаномъ существуетъ зависимость:

$$\Psi = D\Psi_1,$$

гдѣ D есть опредѣлитель преобразованія,

$$D = \alpha\delta - \beta\gamma.$$

8. Пусть $F(y, z)$ есть произвольная функція двухъ перемѣнныхъ. Выраженіе:

$$H(y, z) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}\right)^2$$

называется Гессіевымъ опредѣлителемъ, или Гессіаномъ.

Гессіевъ опредѣлитель есть коваріантъ данной функціи.

Свойства коваріанта выражаются въ слѣдующемъ.

Пусть функція $F(y, z)$ линейнымъ преобразованіемъ переходитъ въ $F_1(y', z')$. Пусть $H_1(y', z')$ будетъ Гессіанъ преобразованной функціи. Между прежнимъ и новымъ Гессіаномъ существуетъ зависимость:

$$H = D^2 H_1,$$

гдѣ D есть опредѣлитель преобразованія.

Для полной опредѣленности необходимо замѣтить, что нашъ вопросъ состоитъ изъ двухъ существенно различныхъ частей.

Въ первой части рѣшается прямая задача: составить общія формы всѣхъ тѣхъ линейныхъ однородныхъ дифференціальныхъ уравненій втораго порядка, общіе интегралы которыхъ выражаются алгебраическими функціями.

Число такихъ общихъ формъ равно пяти.

Во второй части рѣшается обратная задача: дано линейное однородное дифференціальное уравненіе; требуется узнать,

Digitized by Google

заключается ли оно въ одной изъ найденныхъ общихъ формъ, т. е. будетъ ли его общій интегралъ алгебраическою функціей.

Рѣшеніе этой послѣдней задачи до сихъ поръ не приведено къ *конечному числу дѣйствій*. Хотя Клейнъ и привелъ рѣшеніе задачи къ нахожденію раціональнаго интеграла нѣкотораго нелинейнаго дифференціальнаго уравненія третьяго порядка, но степени числителя и знаменателя искомой раціональной функціи ничѣмъ не опредѣляются. Если и удастся свести задачу къ конечному числу дѣйствій, то во всякомъ случаѣ рѣшеніе выйдетъ чрезвычайно сложнымъ. Въ частныхъ случаяхъ задача можетъ имѣть простое рѣшеніе, напр. для дифференціальнаго уравненія гипергеометрическаго ряда.

Я опускаю вторую задачу и займусь изложеніемъ только первой задачи, т. е. рѣшеніемъ прямого вопроса.

Постановка вопроса.

Въ линейномъ однородномъ дифференціальномъ уравненіи втораго порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0 \qquad (1)$$

требуется опредѣлить коэффиціенты p и q, какъ раціональныя функціи перемѣннаго, такимъ образомъ, чтобы общій интегралъ уравненія былъ алгебраическою функціею.

Пусть

$$f(x, y) = 0 \qquad (2)$$

будетъ то неприводимое алгебраическое уравненіе, одинъ корень котораго есть интегралъ дифференціальнаго уравненія (1).

Если хотя одинъ корень неприводимаго алгебраическаго уравненія (2) удовлетворяетъ дифференціальному уравненію (1), то и всѣ корни того же уравненія (2) будутъ также интегралами линейнаго дифференціальнаго уравненія (1).

Положимъ, что уравненіе (2) не есть двучленное. Въ такомъ случаѣ найдутся такіе два корня y_1 и y_2, отношеніе

Digitized by Google

между которыми не равно постоянному числу; эти корни будутъ частными интегралами дифференціальнаго уравненія (1). Общій интегралъ того же уравненія будетъ

$$ay_1 + by_2,$$

гдѣ a и b нѣкоторыя постоянныя величины. Въ такой формѣ долженъ выражаться также и каждый корень алгебраическаго уравненія (2).

Такимъ образомъ наша задача можетъ быть приведена къ другой слѣдующей задачѣ.

Требуется составить алгебраическое уравненіе (2) *такъ, чтобы между каждыми его тремя корнями существовала линейная зависимость:*

$$Ay_1 + By_2 + Cy_3 = 0,$$

коэффиціенты которой A, B *и* C *не должны зависить отъ* x.

Примитивныя формы.

Пусть мы имѣемъ неприводимое алгебраическое уравненіе:

$$f(x, y) = 0, \tag{2}$$

обладающее тѣмъ свойствомъ, что каждый его корень выражается линейно чрезъ два корня,

$$y_3 = Ay_1 + By_2,$$

причемъ A и B не зависятъ отъ x.

Возьмемъ линейную функцію двухъ корней:

$$ay_1 + by_2, \tag{3}$$

гдѣ a и b не зависятъ отъ x. Подставивъ вмѣсто корней ихъ выраженія чрезъ x, получимъ нѣкоторую алгебраическую функцію, которая вообще будетъ имѣть s значеній. Одно изъ другихъ значеній выраженія (3) будетъ

$$ay_3 + by_4.$$

Но какъ каждый корень выражается линейно чрезъ два, то

Digitized by Google

$$ay_3 + by_4 = a'y_1 + b'y_2,$$

гдѣ a' и b' также не зависятъ отъ x. Итакъ всѣ значенія выраженія (3) имѣютъ ту же форму, но съ другими коэффиціентами.

Возьмемъ всѣ s значеній выраженія (3):

$$ay_1 + by_2,$$
$$a'y_1 + b'y_2,$$
$$a''y_1 + b''y_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

и перемножимъ ихъ. Такимъ образомъ получимъ двоичную форму *) s—той степени $\Phi(y_1, y_2)$, которая не мѣняетъ своей величины, когда x опишетъ произвольную замкнутую кривую.

При частныхъ значеніяхъ a и b можетъ случиться, что выраженіе (3) будетъ имѣть менѣе s значеній. Тогда число различныхъ значеній выраженія (3) будетъ дѣлителемъ s. Функція $\Phi(y_1, y_2)$ превратится въ полную степень нѣкоторой другой функціи

$$\Phi = F^\mu.$$

То же обстоятельство будетъ имѣть мѣсто и въ томъ случаѣ, когда отношеніе между нѣкоторыми двумя значеніями выраженія (3) обращается въ постоянную величину.

Итакъ положимъ, что функція $\Phi(y_1, y_2)$ обращается въ полную степень нѣкоторой другой функціи. Если x опишетъ замкнутую кривую около критическихъ точекъ, то функція $F(y_1, y_2)$ умножится на нѣкоторый множитель ρ. Но такъ какъ F^μ не мѣняетъ своей величины, то множитель ρ долженъ удовлетворять уравненію:

$$\rho^\mu = 1.$$

Отсюда слѣдуетъ, что ρ не зависитъ отъ x.

---

*) Формою называется цѣлая раціональная однородная функція перемѣнныхъ. По числу перемѣнныхъ форма бываетъ двоичная, троич. ная и т. д.

Digitized by Google

Мы назовемъ *примитивною формою* такую однородную функцію двухъ корней, которая умножается на постоянный множитель, если x опишетъ замкнутую кривую около критическихъ точекъ. Покажемъ далѣе, что наша задача приводится къ нахожденію примитивной формы наименьшей степени.

Примитивныя формы первой степени.

Положимъ, что существуетъ примитивная форма первой степени. Такая форма, какъ линейная, есть частный интегралъ линейнаго дифференціальнаго уравненія (1). Означимъ этотъ интегралъ чрезъ y_1. Если x описываетъ замкнутую кривую, то по нашему предположенію y_1 умножается на постоянный множитель. Но это возможно только въ томъ случаѣ, когда y_1 выражается радикальной функціей,

$$y_1 = \sqrt[m]{M}.$$

гдѣ M есть нѣкоторая раціональная функція перемѣннаго x.

Если полный интегралъ дифференціальнаго уравненія (1) долженъ быть алгебраическою функціей, то безъ особыхъ разсужденій ясно, что это обстоятельство можетъ имѣть мѣсто только въ томъ случаѣ, когда и другой частный интегралъ также выражается радикальною функціей.

Итакъ

$$y_1 = \sqrt[m]{M}, \quad y_2 = \sqrt[n]{N}.$$

Подставивъ эти выраженія въ дифференціальное уравненіе (1), получимъ:

$$mM\frac{d^2M}{dx^2} - (m-1)\left(\frac{dM}{dx}\right)^2 + mM\frac{dM}{dx}p + m^2M^2q = 0,$$

$$nN\frac{d^2N}{dx^2} - (n-1)\left(\frac{dN}{dx}\right)^2 + nN\frac{dN}{dx}p + n^2N^2q = 0.$$

Отсюда опредѣляются коэффиціенты p и q.

Digitized by Google

Примитивная форма второй степени.

Положимъ, что наименьшая степень примитивной формы равна двумъ. Такая форма распадается на произведеніе двухъ множителей, которые мы можемъ принять за корни искомаго алгебраическаго уравненія (2),

$$F(y_1, y_2) = y_1 y_2.$$

Если x опишетъ замкнутую кривую, то y_1 и y_2 перейдутъ въ два другіе корня y_3 и y_4. По условію отношеніе $y_3 y_4 : y_1 y_2$ должно быть постоянно. Кромѣ того мы знаемъ, что y_3 и y_4 выражаются линейно чрезъ y_1 и y_2. Оба эти условія могутъ выполняться лишь въ томъ случаѣ, когда y_3 и y_4 отличаются отъ y_1 и y_2 постоянными множителями. Отсюда слѣдуетъ, что корни искомаго алгебраическаго уравненія должны быть:

$$y_1,\ \rho y_1,\ \rho^2 y_1 \cdots$$

$$y_1,\ \rho y_2,\ \rho^2 y_2, \cdots,$$

гдѣ ρ есть корень нѣкотораго двучленнаго уравненія,

$$\rho^n = 1.$$

Само алгебраическое уравненіе въ этомъ случаѣ должно быть трехчленнымъ:

$$y^{2n} - 2My^n + N = 0, \qquad (4)$$

гдѣ M и N—нѣкоторыя раціональныя функціи.

Подставивъ въ дифференціальное уравненіе (1)

$$y = \sqrt[n]{M \pm \sqrt{M^2 - N}},$$

получимъ два уравненія для опредѣленія раціональныхъ коэффиціентовъ p и q. Не станемъ приводить этихъ уравненій, такъ какъ онѣ сложны и не имѣютъ никакого значенія для дальнѣйшаго изслѣдованія.

Повидимому, особнякомъ стоитъ алгебраическое уравненіе третьей степени,

Digitized by Google

$$y^3 + ry + t = 0,$$

въ которомъ нѣтъ втораго члена. Такъ какъ между тремя корнями существуетъ линейная зависимость,

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0,$$

то эти корни могутъ удовлетворять нѣкоторому линейному дифференціальному уравненію втораго порядка. Но кубическое уравненіе легко приводится къ формѣ (4). Пусть α — мнимый кубическій корень изъ единицы; $\alpha^3 = 1$; положимъ

$$z_1 = y_1 + \alpha y_2 + \alpha^2 y_3,$$

$$z_2 = y_1 + \alpha^2 y_2 + \alpha y_3.$$

Составленныя такимъ образомъ выраженія суть корни трехчленнаго уравненія:

$$z^6 + 27tz^3 - 27r^3 = 0,$$

которое заключается въ формѣ (4).

Разсмотримъ теперь тѣ случаи, когда степень всякой примитивной формы больше двухъ.

Приведеніе задачи къ новой задачѣ.

Пусть y_1 и y_2 будутъ два корня искомаго уравненія (2); положимъ

$$z = \frac{y_1}{y_2}.$$

Подставивъ вмѣсто корней ихъ выраженія чрезъ x, получимъ нѣкоторую алгебраическую функцію, которая будетъ имѣть m значеній ($m \leqq s$). Пусть z есть корень неприводимаго ур-я.

$$\varphi(x, z) = 0. \qquad (5)$$

Когда x опишетъ замкнутую кривую, то $\frac{y_1}{y_1}$ перейдетъ въ

$$\frac{ay_1 + by_2}{cy_1 + dy_2} = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Digitized by Google

Послѣднее выраженіе должно быть также корнемъ неприводимаго уравненія (5). Такимъ образомъ наша задача приводится къ слѣдующей.

Составить неприводимое алгебраическое уравненіе такимъ образомъ, чтобы между каждыми его двумя корнями существовала зависимость вида:

$$z' = \frac{az + b}{cz + d},$$

причемъ a, b, c *и* d *не должны зависить отъ* x.

Изслѣдованіе новой задачи.

Пусть корни искомаго неприводимаго алгебраическаго уравненія (5) будутъ: z, z_1, z_2, $\ldots z_{m-1}$. Произведеніе этихъ корней должно выразиться раціонально чрезъ x,

$$z\, z_1\, z_2 \ldots z_{m-1} = R(x).$$

Но по условію каждый корень выражается чрезъ первый слѣдующимъ образомъ:

$$z_i = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}.$$

Подставивъ эти выраженія, получимъ:

$$\frac{z(a_1 z + b_1)(a_2 z + b_2) \ldots}{(c_1 z + d_1)(c_2 z + d_2) \ldots} = R(x),$$

или

$$\frac{\theta(z)}{\psi(z)} = R(x). \qquad (6)$$

Это уравненіе должно быть тожественно съ искомымъ уравненіемъ (5). Степень функціи $\psi(z)$ меньше m, а потому степень $\theta(z)$ должна быть равна m *).

*) Степень функціи $\theta(z)$ можетъ быть меньше m, если нѣкоторые коэффиціенты a_1, a_2, . . обращаются въ нули. Но этотъ случай невозможенъ, такъ какъ тогда степень уравненія (6) была бы меньше степени искомаго неприводимаго уравненія (5).

Digitized by Google

Прибавимъ къ обѣимъ частямъ уравненія (6) нѣкоторое постоянное h,

$$\frac{\theta(z) + h\psi(z)}{\psi(z)} = R(x) + h.$$

Мы можемъ всегда опредѣлить h такъ, чтобы функція

$$\theta(z) + h\psi(z) = \varphi(z)$$

имѣла кратные множители. Не стану останавливаться на доказательствѣ, что такое опредѣленіе всегда возможно.

Докажемъ, что и всѣ остальные множители функціи $\varphi(z)$ будутъ кратными въ той же степени, т. е. $\varphi(z)$ будетъ полною степенью нѣкоторой другой функціи.

Положимъ, что $\varphi(z)$ содержитъ кратный множитель $(z-z_0)^n$ Введемъ новое перемѣнное:

$$z - z_0 = u.$$

Прибавимъ къ обѣимъ частямъ уравненія (6) найденное значеніе h,

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = P(x) + h,$$

и замѣнимъ z новымъ перемѣннымъ:

$$\frac{\varphi(u + z_0)}{\psi(u + z_0)} = R(x) + h. \qquad (7)$$

Въ лѣвой части числитель m—той степени и дѣлится на нѣкоторую степень u, а степень знаменателя меньше m. По этому произведеніе корней послѣдняго уравненія равно $R(x) + h$ умноженному на нѣкоторый постоянный множитель:

$$u\,u_1\,u_2 \ldots u_{m-1} = A(Rx + h).$$

Но всѣ корни выражаются чрезъ первый корень по слѣдующей формулѣ:

$$u_i = \frac{a_i(u + z_0) + b_i}{c_i(u + z_0) + \partial_i} - z_0 = \frac{\alpha_i u + \beta_i}{\gamma_i u + \delta_i}.$$

Подставивъ эти выраженія, получимъ:

Digitized by Google

$$\frac{u(\alpha_1 u + \beta_1)(\alpha_2 u + \beta_2)\dots}{(\gamma_1 u + \delta_1)(\gamma_2 u + \delta_2)\dots} = A(Rx + h). \qquad (8)$$

Это уравненіе должно отличаться отъ уравненія (7) только постояннымъ множителемъ A. Поэтому вопервыхъ u въ числителѣ должно быть кратнымъ множителемъ, т. е. нѣкоторые изъ коэффиціентовъ $\beta_1, \beta_2, \dots$ обращаются въ нули; во вторыхъ $\alpha_i u + \beta_i$ должно быть множителемъ функціи $\varphi(u + z_0)$. Уравненіе (8) не должно мѣняться, когда мы вмѣсто u подставимъ $\frac{\alpha_i u + \beta_i}{\gamma_i u + \delta_i}$. Но это возможно лишь въ томъ случаѣ, когда въ числителѣ первой части множитель $\alpha_i u + \beta_i$ входитъ въ такой же степени какъ и u, а это и требовалось доказать. Итакъ

$$\theta(z) + h\psi(z) = \mathfrak{F}^n(z).$$

Если h допускаетъ нѣсколько значеній, удовлетворяющихъ указанному условію, то мы подбираемъ такое значеніе, *чтобы степень* $\mathfrak{F}(z)$ *была наименьшею.*

Далѣе опредѣляемъ h', отлично отъ h, такимъ образомъ, чтобы функція $\theta(z) + h'\psi(z)$ опять имѣла кратные корни. На доказательствѣ возможности такого опредѣленія я опять останавливаться не буду; но уже изъ предыдущаго слѣдуетъ, что такъ опредѣленная функція будетъ полною степенью другой функціи,

$$\theta(z) + h'\psi(z) = \mathfrak{G}^{n'}(z).$$

Если для h' можно получить нѣсколько значеній, удовлетворяющихъ сказанному условію, то выбираемъ такое значеніе, чтобы степень функціи $\mathfrak{G}(z)$ была наименьшею.

Уравненіе (6) можетъ быть приведено въ слѣдующій видъ:

$$\frac{\mathfrak{G}^{n'}(z)}{\mathfrak{F}^n(z)} = \frac{R(x) + h'}{R(x) + h}.$$

Вторая часть есть раціональная функція, а потому можетъ быть обозначена просто чрезъ $R(x)$,

Digitized by Google

$$\frac{\mathfrak{G}^{n'}(z)}{\mathfrak{F}^{n}(z)} = R(x). \tag{9}$$

Такой видъ должно имѣть искомое алгебраическое уравненіе (5).

Опредѣлимъ теперь h'', отлично отъ h и h', такимъ образомъ, чтобы функція $\theta(z) + h''\psi(z)$ опять превращалась въ полную степень. На доказательствѣ возможности такого опредѣленія я опять останавливаться не буду.

Исключивъ $\theta(z)$ и $\psi(z)$ изъ уравненій:

$$\theta(z) + h\psi(z) = \mathfrak{F}^{n}(z),$$

$$\theta(z) + h'\psi(z) = \mathfrak{G}^{n'}(z),$$

$$\theta(z) = h''\psi(z) = \mathfrak{H}^{n''}(z),$$

получимъ:

$$(h' - h'')\mathfrak{F}^{n}(z) + (h'' - h)\mathfrak{G}^{n'}(z) + (h - h')\mathfrak{H}^{n''}(z) = 0.$$

Мы можемъ функціи $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$ умножить на постоянные множители, отчего свойства этихъ функцій не нарушатся. Введеніемъ такихъ множителей можно достигнуть того, чтобы послѣднее уравненіе превратилось въ слѣдующее:

$$\mathfrak{F}^{n}(z) - \mathfrak{G}^{n'}(z) = \mathfrak{H}^{n''}(z). \tag{10}$$

Означимъ степени функцій $\mathfrak{F}(z)$, $\mathfrak{G}(z)$, $\mathfrak{H}(z)$ соотвѣтственно чрезъ k, k', k''. Изъ способа образованія этихъ функцій слѣдуетъ:

$$kn = k'n' = k''n''. \tag{11}$$

Далѣе мы подбирали функціи такимъ образомъ, чтобы $k \leqq k' \leqq k''$.

Дальнѣйшее изслѣдованіе новой задачи становится затруднительнымъ, а потому переведемъ найденные результаты на прежнюю задачу и продолжимъ изслѣдованіе.

Три примитивныя формы.

Припомнимъ, что корень уравненія (9) равенъ отношенію корней уравненія (2)

Digitized by Google

$$z = \frac{y_1}{y_2}.$$

Если мы умножимъ функціи $\mathfrak{F}(z)$, $\mathfrak{G}(z)$, $\mathfrak{H}(z)$ соотвѣтственно на y_2^k, $y_2^{k'}$, $y_2^{k''}$, то произведенія превращаются въ три однородныя функціи двухъ корней уравненія (2). Введемъ обозначенія:

$$F(y_1, y_2) = y_2^k \mathfrak{F}\left(\frac{y_1}{y_2}\right),$$

$$G(y_1, y_2) = y_2^{k'} \mathfrak{G}\left(\frac{y_1}{y_2}\right),$$

$$H(y_1, y_2) = y_2^{k''} \mathfrak{H}\left(\frac{y_1}{y_2}\right),$$

Если вмѣсто z подставимъ отношеніе корней, то уравненіе (9) превратится въ слѣдующее:

$$\frac{G^{n'}(y_1, y_2)}{F^n(y_1, y_2)} = R(x). \qquad (12)$$

Лѣвая часть этого уравненія есть функція двухъ корней уравненія (2); она не должна мѣнять своей величины, такъ какъ выражается раціонально чрезъ x. Но изъ прежнихъ разсужденій слѣдуетъ, что однородныя функціи $F(y_1, y_2)$ и $G(y_1, y_2)$ могутъ измѣняться только въ однородныя функціи той же степени. Положимъ, что F и G превращаются въ F_1 и G_1, если x описываетъ нѣкоторую замкнутую кривую; имѣемъ тожество:

$$\frac{G^{n'}(y_1, y_2)}{F^n(y_1, y_2)} = \frac{G_1^{n'}(y_1, y_2)}{F_1^n(y_1, y_2)}.$$

Такъ какъ функціи F и G не имѣютъ общихъ множителей, то послѣднее тожество возможно только въ томъ случаѣ, когда функціи F_1 и G_1 отличаются отъ F и G постоянными множителями ρ и σ, удовлетворяющими уравненію:

$$\rho^n = \sigma^{n'}.$$

Digitized by Google

Отсюда слѣдуетъ, что функціи $F(y_1, y_2)$ и $G(y_1, y_2)$ должны быть примитивными.

Уравненіе (10) можетъ быть выражено въ новыхъ функціяхъ:

$$F^n - G^{n'} = H^{n''}. \tag{13}$$

Отсюда слѣдуетъ, что $H(y_1, y_2)$ есть также примитивная форма.

Далѣе изъ сдѣланныхъ раньше предположеній относительно степеней явствуетъ, что $F(y_1, y_2)$ есть примитивная форма наименьшей степени.

Двѣ зависимости между примитивными формами.

Введемъ слѣдующія обозначенія:

$$(F, G) = \frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial G}{\partial y_2} - \frac{\partial F}{\partial y_2}\frac{\partial G}{\partial y_1},$$

$$(H, F) = \frac{\partial H}{\partial y_1}\frac{\partial F}{\partial y_2} - \frac{\partial H}{\partial y_2}\frac{\partial F}{\partial y_1},$$

$$(H, G) = \frac{\partial H}{\partial y_1}\frac{\partial G}{\partial y_2} - \frac{\partial H}{\partial y_2}\frac{\partial G}{\partial y_1},$$

Это — три Якобіевы опредѣлители. Извѣстно, что Якобіевъ опредѣлитель есть коваріантъ тѣхъ функцій, изъ которыхъ онъ составленъ. Отсюда слѣдуетъ, что три Якобіевы опредѣлители умножаются на множители независимые отъ x, если x описываетъ замкнутую кривую около критическихъ точекъ. Функціи, обладающія такимъ свойствомъ, суть или примитивныя, или распадаются на произведеніе примитивныхъ формъ.

Продифференцировавъ уравненіе (13) по y_1, и y_2, получимъ:

$$nF^{n-1}\frac{\partial F}{\partial y_1} - n'G^{n'-1}\frac{\partial G}{\partial y_1} = n''H^{n''-1}\frac{\partial H}{\partial y_1},$$

$$nF^{n-1}\frac{\partial F}{\partial y_2} - n'G^{n'-1}\frac{\partial G}{\partial y_2} = n''H^{n''-1}\frac{\partial H}{\partial y_2}$$

Digitized by Google

Отсюда находимъ:

$$\frac{(H, G)}{nF^{n-1}} = \frac{(H, F)}{n'G^{n-1}} = \frac{(F, G)}{n''H^{n''-1}}. \qquad (14)$$

Эти равенства должны быть простыми тожествами. Но функціи, стоящія въ знаменателяхъ, не имѣютъ общихъ дѣлителей; поэтому каждое изъ отношеній должно быть равно или постоянному числу, или цѣлой функціи. Означимъ эту функцію чрезъ $\Omega(y_1, y_2)$; ея степень вычислимъ по послѣднему отношенію:

$$\Omega(y_1, y_2) = \frac{\frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial G}{\partial y_2} - \frac{\partial F}{\partial y_2}\frac{\partial G}{\partial y_1}}{n''H^{n''-1}}.$$

Степень числителя во второй части равна $k+k'-2$, степень знаменателя $k''(n''-1)$; поэтому степень функціи въ первой части равна

$$k+k'-2-k''(n''-1). \qquad (15)$$

Это число не должно быть отрицательнымъ. Далѣе если x описываетъ замкнутую кривую около критическихъ точекъ, то $\Omega(y_1, y_2)$ умножается на постоянный множитель; поэтому эта функція будетъ либо примитивною, либо распадается на произведеніе примитивныхъ формъ. Но по нашему предположенію $F(y_1, y_2)$ есть примитивная форма наименьшей степени. Слѣдовательно степень функціи $\Omega(y_1, y_2)$ не должна быть менѣе степени функціи $F(y_1, y_2)$.

Отсюда слѣдуетъ, что число (15) должно быть или нулемъ, или числомъ положительнымъ, превосходящимъ k.

Показатель n'' есть число цѣлое, превосходящее единицу. Этотъ показатель не можетъ быть болѣе 2, ибо въ такомъ случаѣ число (15) было бы отрицательнымъ. Остается единственное возможное предположеніе:

$$n'' = 2.$$

Въ такомъ случаѣ число (15) равно

Digitized by Google

$$k+k'-2-k''.$$

Еслибъ это число было положительнымъ, оно не превосходило бы $k-2$, что невозможно. Единственное возможное предположеніе состоитъ въ томъ, что число (15) обращается въ нуль, откуда

$$k''=k+k'-2.$$

Отсюда слѣдуетъ, что каждое изъ отношеній (14) обращается въ постоянную величину.

Подставивъ вмѣсто n'' и k'' найденныя значенія, изъ равенствъ (11) получимъ:

$$k'n'=k''n''=2(k+k'-2),$$

откуда

$$k'(n'-2)=2(k-2).$$

Показатель n' есть цѣлое положительное число, превосходящее единицу. Этотъ показатель можетъ равняться двумъ олько въ томъ случаѣ, когда $k=2$; значитъ примитивная форма $F(y_1, y_2)$ второй степени. Но этотъ случай уже былъ разсмотрѣнъ.

Припомнимъ, что $k'\geqq k$. Въ такомъ случаѣ послѣднее равенство не имѣетъ мѣста, если n' превосходитъ три. Остается единственное возможное предположеніе:

$$n'=3,$$

слѣдовательно

$$k'=2k-4.$$

Подставивъ найденное выраженіи k' въ выраженіи для k'', получимъ

$$k''=3k-6.$$

Подставивъ вмѣсто n' и k' найденныя ихъ значенія въ равенства (11), получимъ

$$kn=6k-12,$$

откуда

Digitized by Google

$$k = \frac{12}{6-n}. \tag{16}$$

Числа k и n должны быть цѣлыя положительныя; кромѣ того n не должно быть менѣе трехъ. При соблюденіи этихъ условій послѣднее неопредѣленное уравненіе имѣетъ три рѣшенія:

$n =$	3	4	5
$k =$	4	6	12

Подставивъ въ уравненіе (13) найденныя значенія показателей, получимъ:

$$F^n - G^3 = H^2. \tag{17}$$

Было показано, что каждое изъ отношеній (14) обращается въ постоянную величину; поэтому

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial G}{\partial y_2} - \frac{\partial F}{\partial y_2}\frac{\partial G}{\partial y_1} = CH, \tag{18}$$

гдѣ C есть нѣкоторый постоянный множитель.

Между тремя примитивными формами F, G и H мы нашли двѣ зависимости, выраженныя уравненіями (17) и (18); степени этихъ формъ соотвѣтственно равны k, $2k-4$, $2k-6$. Покажемъ, что между тѣми же функціями существуетъ еще третья зависимость.

Третья зависимость между примитивными формами.

Изъ примитивной формы $F(y_1, y_2)$ составимъ Гессіевъ опредѣлитель и означимъ его чрезъ G',

$$G'(y_1, y_2) = \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_1\, \partial y^2}\right)^2.$$

Этотъ опредѣлитель есть коваріантъ F; поэтому, подобно формѣ F, форма G' также умножается на постоянный множитель, если x описываетъ замкнутую кривую. Докажемъ, что форма G' отличается только постояннымъ множителемъ отъ формы G.

Проведемъ x по замкнутой кривой и положимъ, что формы F, G и H умножатся соотвѣтственно на постоянные мно-

Digitized by Google

жители ρ, σ и τ. Такъ какъ уравйеніе (17) должно оставаться неизмѣннымъ, то

$$\rho^n = \sigma^3 = \tau^2.$$

Пусть y_1 измѣняется въ $ay_1 + by_2$, а y_3 въ $cy_1 + dy_2$; положимъ $D = ad - bc$. Якобіевъ опредѣлитель, составленный изъ функцій F и G помножается на $D\rho\sigma$. Но такъ какъ уравненіе (18) должно оставаться неизмѣннымъ, то

$$D\rho\sigma = \tau.$$

Изъ этого уравненія и предыдущихъ, находимъ

$$\sigma = D^2\rho^2.$$

На такой множитель умножается форма G. Но точно на такой же множитель умножается и Гессіевъ опредѣлитель, составленный изъ функціи F, если x описываетъ ту же замкнутую кривую.

Итакъ функціи G' и G умножаются на одинаковые множители, если x описываетъ замкнутую кривую. Но въ такомъ случаѣ отношеніе

$$\frac{G'(y_1, y_2)}{G(y_1, y_2)}$$

не мѣняетъ своей величины. Если это отношеніе не обращается въ постоянную величину, то оно можетъ быть выражено раціонально чрезъ x,

$$\frac{G'(y_1, y_2)}{G(y_1, y_2)} = R(x).$$

Такъ какъ G и G' одинаковыхъ степеней, то первая часть послѣдняго уравненія можетъ быть выражена въ функціи одного перемѣннаго $z = \frac{y_1}{y_2}$,

$$\frac{\mathfrak{G}'(z)}{\mathfrak{G}(z)} = R(x).$$

Digitized by Google

Такимъ образомъ мы пришли къ тому невозможному заключенію, что корень неприводимаго уравненія (9) удовлетворяетъ уравненію низшей степени.

Отсюда слѣдуетъ, что отношеніе $G' : G$ должно равняться постоянному числу C',

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_1\, \partial y_2}\right)^2 = C'G. \qquad (19)$$

Такова третья зависимость между примитивными формами F, G и H.

Покажемъ, что между постоянными C и C', входящими въ уравненія (18) и (19), существуетъ зависимость.

Зависимость между постоянными.

По свойству однородныхъ функцій имѣемъ:

$$(k-1)\frac{\partial F}{\partial y_1} = y_1 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} + y_2 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1\, \partial y_2},$$

$$(k-1)\frac{\partial F}{\partial y_2} = y_1 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1\, \partial y_2} + y_2 \frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2}.$$

Умножимъ первое уравненіе на $\frac{\partial^2 F}{\partial y_1\, \partial y_2}$, второе на $\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}$ и вычтемъ первое изъ второго. Принявъ во вниманіе уравненіе (19), получимъ:

$$\frac{\partial F}{\partial y_2}\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} - \frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial^2 F}{\partial y_1\, \partial y_2} = \frac{C'Gy_2}{k-1}.$$

Изъ этого уравненія и уравненія

$$y_1 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} + y_2 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1\, \partial y_2} = (k-1)\frac{\partial F}{\partial y_1}$$

опредѣлимъ вторыя производныя:

$$kF\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} = (k-1)\left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)^2 + \frac{C'Gy_2^2}{k-1},$$

Digitized by Google

$$kF\frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_2} = (k-1)\frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial F}{\partial y_2} - \frac{C'Gy_1y_2}{k-1}.$$

Подобнымъ образомъ найдемъ:

$$kF\frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2} = (k-1)\left(\frac{\partial F}{\partial y_2}\right)^2 + \frac{C'Gy_1^2}{k-1}.$$

Умножимъ три послѣднія уравненія соотвѣтственно на

$$\left(\frac{\partial G}{\partial y_2}\right)^2, \quad -2\frac{\partial G}{\partial y_1}\frac{\partial G}{\partial y_2}, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial y_1}\right)^2$$

и сложимъ. Принявъ во вниманіе уравненіе (18), получимъ:

$$kF\left\{\left(\frac{\partial G}{\partial y_2}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} - 2\frac{\partial G}{\partial y_1}\frac{\partial G}{\partial y_2}\frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_2} + \left(\frac{\partial G}{\partial y_1}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2}\right\} =$$

$$= (k-1)C^2H^2 + \frac{(2k-4)^2}{k-1}C'G^3.$$

Это равенство досжно быть простымъ тожествомъ; но первая часть дѣлится на F, слѣдовательно и вторая часть должна дѣлиться на F. Это отстоятельство возможно лишь въ томъ случаѣ, когда изъ второй части могутъ быть исключены обѣ функціи G и H при помощи уравненія (17), для чего необходимо, чтобы

$$(k-1)C^2 = \frac{(2k-4)^2}{k-1}C',$$

откуда

$$C' = \left(\frac{k-1}{2k-4}\right)^2 C^2.$$

Подставивъ вмѣсто k его выраженіе (16) чрезъ n, получимъ

$$C' = \left(\frac{6+n}{4n}\right)^2 C^2.$$

Такимъ образомъ три искомыя зависимости между тремя примитивными функціями будутъ:

Digitized by Google

$$F''' - G^3 = H^2, \tag{17}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial G}{\partial y_2} - \frac{\partial F}{\partial y_2}\frac{\partial G}{\partial y_1} = CH, \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_2}\right)^2 = \left(\frac{6+n}{4n}\right)^2 C^2 G. \tag{21}$$

Постоянное C, входящее въ эти уравненія, можетъ принимать произвольныя значенія. Въ самомъ дѣлѣ мы можемъ умножать y_1 и y_2 на одинъ и тотъ же постоянный множитель h, отчего уравненіе (17) не измѣнится, а въ уравненіяхъ (18) и (21) постоянное C умножится на h^2.

Преобразованіе къ новымъ перемѣннымъ.

Было показано, что кромѣ двухъ случаевъ, когда степень примитивной формы равна единицѣ и двумъ, существуютъ еще три случая, когда линейное дифференціальное уравненіе втораго порядка можетъ имѣть алгебраическіе интегралы. Въ первыхъ двухъ случаяхъ мы показали, какъ составляется дифференціальное уравненіе. Остается сдѣлать то же и для остальныхъ трехъ случаевъ. Однако въ общемъ видѣ рѣшеніе слишкомъ сложно. Но дифференціальное уравненіе (1), не измѣняя его свойствъ, можетъ быть преобразовано къ новымъ перемѣннымъ. Этимъ преобразованіемъ можно воспользоваться, чтобы по возможности упростить результаты.

Свойства искомаго дифференціальнаго уравненія (1) состоятъ въ томъ, что его общій интегралъ долженъ быть алгебраическою функціею, а его коэффиціенты должны выражаться раціонально чрезъ независимое перемѣнное.

Какія же преобразованія возможны?

Вопервыхъ вмѣсто независимаго перемѣннаго x можно подставить произвольную раціональную функцію другого перемѣннаго.

Во вторыхъ перемѣнное y можно замѣнить новымъ перемѣннымъ y' по формулѣ:

Digitized by Google

$$y=r^{\alpha}y',$$

въ которой r есть произвольная раціональная функція, независимаго перемѣннаго, а показатель α — положительное или отрицательное число соизмѣримое съ единицею.

Дѣйствительно алгебраическій характеръ интеграловъ отъ такого преобразованія не нарушится. Сверхъ того коэффиціенты преобразованнаго уравненія:

$$\frac{\partial^2 y'}{\partial x^2}+\left(p+\frac{2\alpha}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\right)\frac{\partial y'}{\partial x}+\left\{q+\frac{\alpha p}{r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\alpha}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\right.$$

$$\left.\frac{\alpha(\alpha-1)}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\right\}y=0$$

также будутъ раціональными.

Дифференціальное уравненіе.

Пользуясь указаннымъ преобразованіемъ, мы можемъ достигнуть того, чтобы одна изъ примитивныхъ формъ, F, G или H, обратилась въ постоянную величину. Положимъ

$$F(y_1, y_2)=1. \qquad (22)$$

Раціональную функцію во второй части уравненія (12) примемъ за независимое перемѣнное t,

$$\frac{G^3(y_1, y_2)}{F^m(y_1, y_2)}=t.$$

Но такъ какъ форма F обращается въ единицу, то

$$G(y_1, y_2)=t^{1/3}. \qquad (23)$$

Изъ уравненія (17) находимъ значеніе третьей примитивной формы,

$$H(y_1, y_2)=\sqrt{1-t}. \qquad (24)$$

Продифференцировавъ уравненія (22) и (23), получимъ:

Digitized by Google

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial t}=0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial t}+\frac{\partial G}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial t}=\frac{1}{3}\,t^{-\frac{2}{3}}$$

Опредѣлимъ отсюда производныя $\frac{\partial y_1}{\partial t}$ и $\frac{\partial y_2}{\partial t}$. Принявъ во вниманіе уравненія (18) и (24), получимъ:

$$(1-t)^{\frac{1}{2}}t^{\frac{2}{3}}\frac{\partial y_1}{\partial t}=-\frac{6+n}{12n}C^{-1}\frac{\partial F}{\partial y_2},$$

$$(1-t)^{\frac{1}{2}}t^{\frac{2}{3}}\frac{\partial y_2}{\partial t}=\frac{6+n}{12n}C^{-1}\frac{\partial F}{\partial y_1}.$$

Дифференцируя послѣднее уравненіе и умножая обѣ части на $(1-t)^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{3}}$, получимъ:

$$(1-t)t\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}+\frac{1}{6}(4-7t)\frac{\partial y_2}{\partial t}=$$

$$=\frac{6+n}{12n}C^{-1}(1+t)^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}\frac{\partial y_1}{\partial t}+\frac{\partial^2 F}{\partial y_1\,\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial t}\right).$$

Подставивъ сюда вмѣсто $\frac{\partial y_1}{\partial t}$ и $\frac{\partial y_2}{\partial t}$ найденныя выше выраженія, получимъ:

$$(1-t)t\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}+\frac{1}{6}(4-7t)\frac{\partial y_2}{\partial t}=$$

$$=\left(\frac{6+n}{12n}\right)^2 C^{-2}t^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial^2 F}{\partial y_1\,\partial y_2}-\frac{\partial F}{\partial y_2}\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}\right).$$

Но изъ уравненій (20), (16) и (23)

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial^2 F}{\partial y_1\,\partial y_2}-\frac{\partial F}{\partial y_2}\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}=-\frac{6-n}{6+n}C^2t^{\frac{1}{3}}y_2.$$

Подставивъ найденное выраженіе и опустивъ значекъ при y_2, получимъ искомое дифференціальное уравненіе:

Digitized by Google

$$(1-t)t\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{1}{6}(4-7t)\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{36-n^2}{144n^2}y=0. \qquad (25)$$

Общій интегралъ этого уравненія долженъ выражаться алгебраическою функціей, если $n=3$, 4 или 5. Остается на самомъ дѣлѣ найти интегралы.

Интегралы линейнаго уравненія (25) опредѣляются изъ уравненій (22) и (23). Но функціи F и G, входящія въ эти уравненія, должны удовлетворять уравненіямъ (17), (18) и (21).

Уравненія (17), (18) и (21) не имѣютъ опредѣленнаго рѣшенія, точно также какъ и линейное дифференціальное уравненіе не имѣетъ опредѣленной системы частныхъ интеграловъ.

Если извѣстна одна система частныхъ интеграловъ линейнаго дифференціальнаго уравненія, то всякая другая система интеграловъ того же уравненія получается линейнымъ преобразованіемъ первой системы.

Тѣмъ же свойствомъ должны обладать и уравненія (17), (18) и (21). Изъ одного рѣшенія этихъ уравненій получается всякое другое, если вмѣсто y_1 и y_2 подставимъ ихъ линейныя выраженія: ay_1+by_2 и cy_1+dy_2. Впрочемъ рѣчь идетъ лишь о такихъ рѣшеніяхъ, когда F, G и H выражаются цѣлыми однородными функціями. Искомыя рѣшенія могутъ быть найдены при помощи неопредѣленныхъ коэффиціентовъ. Для облегченія рѣшенія замѣтимъ, что y_1 и y_2 могутъ входить симметрично. Кромѣ того, пользуясь линейнымъ преобразованіемъ, можно нѣкоторые коэффиціенты заранѣе полагать равными нулю.

Приведемъ рѣшенія уравненій (17), (18) и (21) въ отдѣльныхъ случаяхъ, когда $n=3$, 4 и 5.

Интегралы для перваго случая.

Разсмотримъ случай, когда $n=3$; положимъ $C=8\sqrt{2}$. Наша задача приводится къ рѣшенію уравненій:

$$F^3+G^3=H^2,$$

Digitized by Google

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial G}{\partial y_2} - \frac{\partial F}{\partial y_2}\frac{\partial G}{\partial y_1} = 8\sqrt{2}H,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_2}\right)^2 = 72G.$$

Вотъ рѣшеніе этихъ уравненій:

$$F = y_1^4 + 2\sqrt{2}\, y_1 y_2^3,$$

$$G = 2\sqrt{2}\, y_1^3 y_2 - y_2^4,$$

$$H = y_1^6 - 5\sqrt{2}\, y_1^3 y_2^3 - y_2^6.$$

Интегралы для второго случая.

Для случая $n=4$ положимъ $C=8\sqrt{\frac{2}{3}}$. Задача приводится къ рѣшенію уравненій:

$$F^4 - G^3 = H^2,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial G}{\partial y_2} - \frac{\partial F}{\partial y_2}\frac{\partial G}{\partial y_1} = 8\sqrt{\frac{2}{3}}H,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_2}\right)^2 = \frac{100}{3}G.$$

Рѣшеніе:

$$F = y_1 y_2 (y_1^4 + y_2^4)\sqrt{2},$$

$$-3G = y_1^8 - 14 y_1^4 y_2^4 + y_2^8$$

$$3\sqrt{3}H = y_1^{12} + 33 y_1^8 y_2^4 - 33 y_1^4 y_2^8 - y_2^{12}.$$

Интегралы для третьяго случая.

Для случая $n = 5$ положимъ $C=40\sqrt{3}$. Задача приводится къ рѣшенію уравненій:

$$F^5 - G^3 = H^2,$$

Digitized by Google

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2}-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_1\,\partial y_2}\right)^2=1452\,G,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial G}{\partial y_2}-\frac{\partial F}{\partial y_2}\frac{\partial G}{\partial y_1}=40\sqrt{3}\,H.$$

Рѣшеніе:

$$F=y_1y_2(y_1^{10}+11y_1^5y_2^5-y_2^{10}),$$

$$-3G=y_1^{20}-228y_1^{15}y_2^5+494y_1^{10}y_2^{10}+228y_1^5y_2^{15}+y_2^{20},$$

$$3\sqrt{3}H=y_1^{30}+522y_1^{25}y_2^5-10005y_1^{20}y_2^{10}-10005y_1^{10}y_2^{20}-$$

$$-522y_1^5y_2^{25}+y_2^{30}.$$

Правильные многогранники.

Приравняемъ нулю три примитивныя формы:

$$F(y_1, y_2)=0,$$

$$G(y_1, y_2)=0,$$

$$H(y_1, y_2)=0.$$

По раздѣленіи на нѣкоторыя степени y_2, эти уравненія могутъ быть выражены чрезъ одно перемѣнное $z=\frac{y_1}{y_2}$,

$$\mathfrak{F}(z)=0, \tag{26}$$

$$\mathfrak{G}(z)=0, \tag{27}$$

$$\mathfrak{H}(z)=0. \tag{28}$$

Эти уравненія имѣютъ геометрическое значеніе. Есть простой способъ представленія мнимой величины на поверхности шара. Перенесемъ такимъ образомъ мнимую величину на поверхность шара и построимъ изъ треугольныхъ граней правильный многогранникъ. Тогда мы замѣтимъ, что корни уравненія (26) могутъ быть приняты за вершины многогранника; и въ такомъ случаѣ корни уравненія (27) соотвѣт-

Digitized by Google

ствуютъ центрамъ граней, а корни уравненія (28) — срединамъ реберъ. Изъ треугольныхъ граней можно образовать три правильные многогранники: тетраедръ, октаедръ и икосаедръ, что соотвѣтствуетъ тремъ нашимъ случаямъ, когда $n = 3$, 4, или 5.

Читатели, интересующіеся подробностями, могутъ обратиться къ сочиненію Клейна: «Vorlesungen ueber Ikosaeder».

25-го сентября
1893 года.

Digitized by Google

ОБОБЩЕНІЕ ЧИСЛОВОЙ ФУНКЦІИ ГАУССА И СЛѢДСТВІЯ ЕГО.

І. И. Чистякова.

§ 1. Извѣстно, что число чиселъ, меньшихъ даннаго числа

$$n=a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots$$

и взаимно простыхъ съ n выражается числовой функціей Гаусса:

$$\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)$$

которая при $n=1$ принимается равной 1 и для которой имѣетъ мѣсто теорема Гаусса:

$$\Sigma_n\varphi(d)=n.$$

Ближайшимъ и естественнымъ обобщеніемъ этой функціи должна служить, по нашему мнѣнію, числовая функція:

$$\varphi_p(n)=n^p\left(1-\frac{1}{a^p}\right)\left(1-\frac{1}{b^p}\right)\left(1-\frac{1}{c^p}\right) \qquad (I)$$

(причемъ $\varphi_p(1)=1$), ибо для этой функціи, какъ легко убѣдиться, имѣетъ мѣсто соотношеніе:

$$\Sigma_n\varphi_p(d)=n^p. \qquad (II)$$

Чтобы доказать равенство (II), замѣтимъ, что функція

Digitized by Google

$\varphi_p(n)$ есть числовая производная отъ n^p. Дѣйствительно, пусть, для простоты, n содержитъ лишь 3 простыхъ множителя:

$$n = a^\alpha b^\beta c^\gamma,$$

находя числовую производную отъ n^p по общему правилу, данному Н. В. Бугаевымъ *), имѣемъ:

$$D(n^p) = [\varphi u]^p =$$

$$= [a^{\alpha-1}b^{\beta-1}c^{\gamma-1}(a-1)(b-1)(c-1)]^p =$$

$$= [a^{\alpha-1}b^{\beta-1}c^{\gamma-1}(abc-ac-bc-ab+c+b+a-1)]^p =$$

$$= [n - \frac{n}{c} - \frac{n}{b} - \frac{n}{a} + \frac{n}{bc} + \frac{n}{ac} + \frac{n}{ab} - \frac{n}{abc}]^p =$$

$$= n^p\left(1 - \frac{1}{a^p}\right)\left(1 - \frac{1}{b^p}\right)\left(1 - \frac{1}{c^p}\right) = \varphi_p(n)$$

Итакъ, дѣйствительно:

$$\varphi_p(n) = D(n^p);$$

взявъ отъ обѣихъ частей этого равенства числовой интегралъ по дѣлителямъ, мы и найдемъ (II). При $p=1$ функція $\varphi_p(n)$ переходитъ въ функцію 1-го порядка, т. е. въ Гауссову функцію $\varphi(n)$.

Преобразуя 2-ю часть выраженія (I), мы можемъ ту же функцію представить еще въ видѣ:

$$\varphi_p(n)a^{(\alpha-1)p}b^{(\beta-1)p}c^{(\gamma-1)p}(a^p-1)(b^p-1)(c^p-1);$$

отсюда легко получаются выраженія этой функціи для разныхъ частныхъ случаевъ. Такъ, для простаго числа a имѣемъ:

$$\varphi_p(a) = a^p - 1,$$

Для первичнаго числа $n = abc\ldots$

$$\varphi_p(abc\ldots) = (a^p-1)(b^p-1)(c^p-1)\ldots$$

*) „Ученіе о числовыхъ производныхъ“, ч. I, стр. 5.

Digitized by Google

и т. д. Очевидно, что въ общемъ случаѣ для $n=a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots$ эта функція облагаетъ свойствомъ

$$\varphi_p(n) = \varphi_p(a^{\alpha}).\varphi_p(b^{\beta}).\varphi_p(c^{\gamma})\ldots$$

§ 2. При помощи основнаго свойства (II) функціи $\varphi_p(n)$ можно получить цѣлый рядъ новыхъ числовыхъ интегралов по дѣлителямъ и числовыхъ тождествъ. Для этого мы будемъ пользоваться извѣстнымъ общимъ соотношеніемъ, содержащимъ 3 произвольныя числовыя функціи, которое далъ въ «Ученіи о числовыхъ производныхъ» *) Н. Б. Бугаевъ:

$$\Sigma_n\psi_1(\delta)\Sigma_d\psi_2(\delta')\psi_3(d') = \Sigma_n\psi_2(\delta)\Sigma_d\psi_1(\delta')\psi_3(d') =$$
$$= \Sigma_n\psi_3)\delta)\Sigma_d\psi_1(\delta')\psi_2(d') \qquad (A)$$

и которое, въ случаѣ, если одна изъ произвольныхъ функцій равна 1, т. е. для двухъ произвольныхъ функцій, приводится къ виду:

$$\Sigma_n\Sigma_d\theta(\delta')\psi(d') = \Sigma_n\theta(\delta)\Sigma_d\psi(\delta') = \Sigma_n\psi(\delta)\Sigma_d\theta(d') \qquad (B)$$

Именно, совершивъ прежде всего надъ тожествомъ (II) новую операцію $\Sigma_n\varphi_q(\delta)$ получимъ:

$$\Sigma_n\varphi_q(\delta)\Sigma_d\varphi_p(d') = \Sigma_n\varphi_q(\delta)d^p;$$

на основаніи (B) то же равенство можетъ быть представлено въ видѣ:

$$\Sigma_n\varphi_p(\delta)\Sigma_d\varphi_q(d') = \Sigma_n\varphi_q(\delta)d^p$$

а это даетъ числовое тожество:

$$\Sigma_n\varphi_p(\delta)d^q = \Sigma_n\varphi_q(\delta).d^p \qquad (III)$$

Въ справедливости его можно убѣдиться на любомъ числовомъ примѣрѣ. Въ частномъ случаѣ, когда одно изъ чиселъ p и q равно 1, имѣемъ:

$$\Sigma_n\varphi_p(\delta).d = \Sigma_n\varphi(\delta).d^p \qquad (IV)$$

*) Ч. II, стр. 23.

Digitized by Google

§ 3. Особенно замѣчательные результаты получимъ, совершивъ операцію $\Sigma_n\varphi_p(\delta)$ надъ тождествомъ:

$$\Sigma_n d^\mu = \zeta_\mu(n)$$

гдѣ $\zeta_\mu(n)$—числовая функція, введенная Ліувиллемъ и выражающая сумму μ-хъ степеней дѣлителей числа n, а въ частности, при $\mu=0$—ихъ число. Извѣстно, что для $n=a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots$

$$\zeta_\mu(n) = \frac{a^{\mu(\alpha+1)}-1}{a^\mu-1}\cdot\frac{a^{\mu(\beta+1)}-1}{b^\mu-1}\cdot\frac{c^{\mu(\gamma+1)}-1}{c^\mu-1}$$

На основаніи (B) мы имѣемъ:

$$\Sigma_n\varphi_p(\delta)\Sigma_d d'^\mu = \Sigma_n\varphi_p(\delta)\zeta_\mu(d)$$

или

$$\Sigma_n\delta^\mu\Sigma_d\varphi_p(d) = \Sigma_n\varphi_p(\delta)\zeta_\mu(d)$$

т. е.

$$\Sigma_n\delta^\mu d^p = \Sigma_n\varphi_p(\delta)\zeta_\mu(d)$$

откуда получаемъ тождество

$$n^\mu\xi_{p-\mu} = \Sigma_n\varphi_p(\delta)\xi_\mu(d)$$

Въ случаѣ, когда $p<\mu$ и $p-\mu$—число отрицательное можемъ $\zeta_{p-\mu}(n)$ замѣнить соотвѣтствующимъ интеграломъ съ положительнымъ индексомъ по извѣстному соотношенію:

$$m^\nu\zeta_{-\nu}(m) = \zeta_\nu(m)\ *)$$

Обращаясь къ разсмотрѣнію частныхъ случаевъ соотношенія (V), положимъ:

1., $p=\mu$. Тогда имѣемъ:

$$n^\mu\zeta(n) = \Sigma_n\varphi_\mu(\delta)\zeta_\mu(d) \qquad \text{(VI)}$$

2. $\mu=0$, p—произвольно. Получимъ:

$$\zeta_p(n) = \Sigma_n\varphi_p(\delta)\zeta(d) \qquad \text{(VII)}$$

*) J. de Liouville. 1857, p. 425.

Digitized by Google

3. $\mu = 1$, p произвольно:

$$n\zeta_{p-1}(n) = \Sigma_n \varphi_p(\delta)\zeta_1(d) \qquad \text{(VIII)}$$

Дѣлая затѣмъ $p = 1$, получимъ еще 3 тождества, которыя безъ доказательства были даны въ 1857 г. Ліувиллемъ и впослѣдствіи, вмѣстѣ со всѣми другими его тождествами доказаны русскими учеными. Именно, пусть

4. $p = 1$, μ произвольно. Тогда

$$n^\mu \zeta_{1-\mu} = n\zeta_{\mu-1}(n) = \Sigma_n \varphi(\delta)\zeta_\mu(d)$$

тождество (α) Ліувилля. Точно также, если

5. $p = 1$, $\mu = 1$, имѣемъ:

$$n\zeta(n) = \Sigma_n \varphi(\delta)\zeta_1(d)$$

тождество (c) его же; наконецъ, полагая:

6. $p = 1$, $\mu = 0$, имѣемъ:

$$\zeta_1(n) = \int d = \Sigma_n \varphi(\delta)\zeta(d)$$

—тождество, означенное у Ліувилля формулой (4).

Полученные числовые интегралы (V)—(VIII) въ свою очередь могутъ служить для вывода различныхъ новыхъ числовыхъ тождествъ. Для этого достаточно, примѣняя теоремы (A) и (B) Н. В. Бугаева, комбинировать полученные интегралы съ какими-нибудь извѣстными числовыми тождествами. Не останавливаясь, однако, на этомъ, произведемъ еще операцію $\Sigma\varphi_p(\delta)$ надъ извѣстнымъ тождествомъ, означеннымъ у Ліувилля (a):

$$\Sigma_n \zeta(d^{2\mu}) = \zeta(n)\zeta(n^\mu)$$

Получимъ:

$$\Sigma_n \varphi_p(\delta)\Sigma_d \zeta(d'^{2\mu}) = \Sigma_n \varphi_p(\delta)\zeta(d)\zeta(d^\mu)$$

откуда:

$$\Sigma_n \zeta(\delta^{2\mu})d^p = \Sigma_n \varphi_p(\delta)\zeta(d)\zeta(d^\mu) \qquad \text{(IX)}$$

Это, очевидно, обобщеніе тожества (V) Ліувилля:

$$\Sigma_n d\zeta(\delta^{2\mu}) = \Sigma_n \varphi(d)\zeta(\delta^\mu)\xi(\delta)$$

которое получается изъ (IX) при $p = 1$.

§ 4. Введемъ въ число разсматриваемыхъ функцій еще числовую функцію $\theta(n)$, опредѣляющую, сколькими способами

Digitized by Google

число n можетъ быть разложено на 2 взаимно-простыхъ множителя. Извѣстно *), что

$$\theta(n) = 2^{\xi(n)}$$

гдѣ $\xi(n)$ — число абсолютно простыхъ множителей входящихъ въ n.

Чтобы установить связь между этой функціей и $\varphi(n)$, воспользуемся тождествомъ (V) Ліувилля:

$$\Sigma_n \theta(d)\zeta(\delta) = \zeta(n)^2;$$

поступая съ нимъ по общему правилу (A) Н. В. Бугаева имѣемъ:

$$\Sigma_n \varphi_p(\delta)\Sigma_d \theta(\delta')\zeta(d') = \Sigma_n \varphi_p(\delta)\zeta(d)^2$$

$$\Sigma_n \theta(\delta)\Sigma_d \varphi_p(\delta')\zeta(d') = \Sigma_n \varphi_p(\delta)\zeta(d)^2$$

что, на основаніи выведеннаго въ предыдущемъ § соотношенія (VII), приводитъ къ тождеству:

$$\Sigma_n \theta(\delta)\zeta_p(d) = \Sigma_n \varphi_p(\delta)\zeta(d)(\xi(d))^2 \qquad (X)$$

Частнымъ случаемъ (X) при $p = 1$ будетъ:

$$\Sigma_n \theta(\delta)\zeta_1(d) = \Sigma_n \varphi(\delta)\zeta(d)^2 \qquad (XI)$$

Существуетъ далѣе, соотношеніе, означенное у Ліувилля (XIV):

$$\Sigma_\nu [\theta(d)]^\mu = \zeta(n^{2^\mu})$$

поступая съ нимъ по общему правилу, найдемъ:

$$\Sigma_n \varphi_p(\delta)\Sigma_d [\theta(d')]^\mu = \Sigma_n \varphi_p(\delta)\zeta(d^{2^\mu})$$

откуда

$$\Sigma_n [\theta(\delta)]^\mu d^p = \Sigma_n \varphi_p(\delta)\zeta(d^{2^\mu}) \qquad (XII)$$

Въ частности, при $\mu = 1$, отсюда найдемъ:

$$\Sigma_n \theta(\delta) d^p = \Sigma_n \varphi_p(\delta)\zeta(d^2) \qquad (XIII)$$

сверхъ того, при $p=1$, изъ (XII) получимъ:

---

*) J, de Liouville. 1857, p. 142.

Digitized by Google

$$\Sigma_n[\theta(\delta)]^p.d=\Sigma_n\varphi(\delta)\zeta(d^{\frac{p}{\mu}})$$

тождество (XV) Ліувилля, а при $p=1$, $\mu=1$

$$\Sigma\theta(\delta)d=\Sigma_n\zeta(d^2)\varphi(\delta)$$

его же соотношеніе (I). Вообще, когда $\mu=p$, соотношеніе (XII) получаетъ видъ:

$$\Sigma_n[\theta(\delta)d]^p=\Sigma_n\varphi_p(\delta)\zeta(d^{\frac{p}{p}}) \qquad \text{(XIV)}$$

§ 5. Установимъ, наконецъ, рядъ соотношеній, въ которыя, кромѣ прочихъ функцій, входила бы еще числовая функція $\lambda(n)$, которая опредѣляется, какъ числовая производная:

$$\lambda(n)=D(E\sqrt{n}-E\sqrt{n-1}),$$

Эта формула какъ показалъ Н. В. Бугаевъ *), обладаетъ свойствами:

$$\lambda(n)=\lambda(a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots)=(-1)^{\alpha+\beta+\gamma+}$$

и

$$\Sigma_n\lambda(d)=1 \text{ или } 0,$$

смотря по тому, будетъ ли n точнымъ квадратомъ, или нѣтъ.

Съ этой цѣлью, совершимъ операцію $\Sigma\lambda(\delta)$ надъ основнымъ соотношеніемъ (II); будемъ имѣть:

$$\Sigma_n\lambda(\delta)\Sigma_n\varphi_p(d')=\Sigma_n\lambda(\delta)d^p$$

или

$$\Sigma_n\varphi_p(\delta)\Sigma_d\lambda(d')=\Sigma_n\lambda(\delta)d^p$$

Распространимъ въ лѣвой части операцію интегрированія лишь на такихъ дѣлителей D, квадраты которыхъ тоже дѣлятъ n, тогда, по свойству функціи λ получимъ:

$$\Sigma_n\varphi_p\left(\frac{n}{D^2}\right)=\Sigma_n\lambda(\delta)d^p \qquad \text{(XV)}$$

при $p=1$, это даетъ соотношеніе

*) „Ученіе о числовыхъ произвозныхъ“, ч, I, стр. 18.

Digitized by Google

$$\Sigma_n \varphi_p\left(\frac{n}{D^2}\right) = \Sigma_n \lambda(\delta) d \qquad \text{(XVI)}$$

Поступая аналогичнымъ образомъ съ тождествомъ:

$$\Sigma_n \lambda(d)\theta(d) = \lambda(n)$$

формула (h)—у Ліувилля), имѣемъ:

$$\Sigma_n \varphi_p(\delta)\Sigma_d \lambda(d')\theta(d') = \Sigma_n \varphi_p(\delta)\lambda(d)$$

или, дѣлая перестановку и интегрированіе:

$$\Sigma_n \lambda(\delta)\theta(\delta) d^p = \Sigma_n \varphi_p(\delta)\lambda(d) \qquad \text{(XVII)}$$

и въ частности, при $p=1$

$$\Sigma_n \lambda(\delta)\theta(\delta) d = \Sigma_n \varphi(\delta)\lambda(d) \qquad \text{(XVIII)}$$

Совершая находимъ ту же самую операцію надъ тождествомъ:

$$\Sigma_n \lambda(d)\zeta(d^2) = \lambda(n)\zeta(n)$$

которое мы заимствуемъ у Д. Н. Соколова *), имѣемъ:

$$\Sigma_n \varphi_p(\delta)\Sigma_d \lambda(d')\zeta(d^2) = \Sigma_n \varphi_p(\delta)\lambda(d)\zeta(d)$$

т. е.

$$\Sigma_n \lambda(\delta)\zeta(\delta^2) \cdot d^p = \Sigma_n \varphi_p(\delta)\lambda(d)\zeta(d) \qquad \text{(XIX)}$$

откуда, при $p=1$, найдемъ соотношеніе:

$$\Sigma_n \lambda(\delta)\zeta(\delta^2) d = \Sigma_n \varphi(\delta)\lambda(d)\zeta(d) \qquad \text{(XX)}$$

Приведенными числовыми соотношеніями (I)—(XX), конечно, не исчерпываются всѣ тѣ числовыя зависимости, которыя можно установить, исходя изъ понятія обобщенной числовой функціи Гаусса.

---

*) „Математическій Сборникъ“, т. XVI, 1; ф. Г.

Digitized by Google

О ЧИСЛАХЪ, ДЛЯ КОТОРЫХЪ ЧИСЛО ДѢЛИТЕЛЕЙ РАВНО ЧИСЛУ ЧИСЕЛЪ ПЕРВЫХЪ СЪ НИМИ И МЕНЬШИХЪ ИХЪ.

А. П. Минина.

(Сообщено въ засѣданіи Математическаго Общества 22 октября 1893 г.)

§ 1. Задача объ опредѣленіи чиселъ, для которыхъ число дѣлителей равно числу чиселъ первыхъ съ ними и меньшихъ ихъ, состоитъ въ рѣшеніи уравненія

$$\rho(N) = \varphi(N), \tag{1}$$

въ которомъ функція $\rho(N)$ выражаетъ число дѣлителей N, а функція $\varphi(N)$— число чиселъ первыхъ съ N и меньшихъ N.

Приступая къ рѣшенію уравненія (1), остановимся прежде всего на числахъ вида: 1) $N = a$; 2) $N = ab$; 3) $N = abc$; 4) $N = abcd\ldots$; 5) $N = a^\alpha$; 6) $N = b.a^\alpha$.

§ 2. **Числа вида:** $N = a$.

Имѣемъ

$$\rho(a) = \varphi(a)$$

или

$$2 = a - 1,$$

откуда

$$N = a = 3.$$

Кромѣ этого числа уравненію (1) удовлетворяетъ также $N = 1$.

Digitized by Google

§ 3. **Числа вида:** $N = ab$.

Такъ какъ для этого случая уравненіе (1) принимаетъ видъ:

$$2.2 = (a - 1)(b - 1),$$

то

$$a - 1 = 4$$

$$b - 1 = 1,$$

откуда

$$a = 5, \quad b = 2,$$

и слѣдовательно

$$N = 2.5 = 10.$$

§ 4. **Числа вида:** $N = abc$.

Подобно тому, какъ въ § 3, найдемъ

$$N = 2.3.5 = 30.$$

§ 5. **Числа вида:** $N = abcd\ldots$.

Если число простыхъ множителей, входящихъ въ N, больше трехъ, то числа этого вида не могутъ удовлетворять уравненію (1), ибо при этомъ

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)(\delta+1)\ldots < (a-1)(b-1)(c-1)(d-1)\ldots.$$

§ 6. **Числа вида:** $N = a^{\alpha}$.

Уравненіе (1) принимаетъ видъ

$$\alpha + 1 = (a - 1)\, a^{\alpha-1}.$$

Положимъ здѣсь

$$\alpha + 1 = a^k . p \qquad (2)$$

гдѣ k, будучи меньше α, можетъ получать всѣ цѣлыя и положительныя значенія, начиная съ нуля, а p цѣлое и положительное число, не дѣлящееся на a. Мы будемъ имѣть

$$a^k . p = (a - 1)\, a^{\alpha-1},$$

откуда

$$p = a - 1; \quad \alpha = k + 1.$$

Digitized by Google

Внося эти величины въ уравненіе (2), преобразуемъ его въ слѣдующее

$$k + 2 = a^k(a - 1) \tag{3}$$

Полагая здѣсь $k = 2$, находимъ

$$a = 2$$

$$\alpha = k + 1 = 3,$$

и слѣдовательно

$$N = 2^3 = 8.$$

Другія предположенія относительно k въ уравненіи (3) не даютъ для a рѣшеній, соотвѣтствующихъ разсматриваемой задачѣ.

§ 6. **Числа вида:** $N = b.a^\alpha$.

Имѣемъ

$$\rho(b.a^\alpha) = \varphi(b.a^\alpha)$$

или

$$2(\alpha + 1) = (b - 1)(a - 1)a^{\alpha - 1} \tag{4}$$

Полагая

$$\alpha + 1 = a^k.p \tag{5}$$

гдѣ k, будучи меньше α, можетъ принимать всѣ цѣлыя и положительныя значенія, начиная съ нуля, а p цѣлое и положительное число, не дѣлящаяся на a, уравненіе (4) замѣнимъ слѣдующимъ

$$2a^k p = (b - 1)(a - 1)\, a^{\alpha - 1},$$

которое, если примемъ

$$b - 1 = a^x.m \tag{6}$$

гдѣ m не дѣлится на a,
обратится въ

$$2a^k p = m(a-1)\, a^{x+\alpha-1}$$

или

$$2p = m(a - 1)\, a^{x+\alpha-k-1} \tag{7}$$

Digitized by Google

При разсмотрѣніи уравненія (7) будемъ различать два случая: 1) $a = 2$; 2) $a > 2$.

1-й случай: $a = 2$.

Для этого случая

$$x + a - k - 1 = 1,$$

и слѣдовательно

$$a = k + 2 - x$$

Уравненія (7), (6) и (5) даютъ

$$p = m$$

$$b = 2^x m + 1$$

$$k + 3 - x = 2^k . p \qquad (8)$$

Въ уравненіи (8) относительно x можно сдѣлать три предположенія: 1) $x = 0$; 2) $x = 1$; 3) $x = 2$.

Первое и третье предположенія не даютъ рѣшеній, соотвѣтствующихъ разсматриваемой задачѣ; при второмъ предположеніи уравненіе (8) обращается въ

$$k + 2 = 2^k p.$$

Такъ какъ это послѣднее уравненіе, при условіяхъ разсматриваемой задачи, можетъ быть удовлетворено только при $k = 2$; $p = 1$, то имѣемъ

$$a = k + 2 - x = 2 + 2 - 1 = 3$$

$$m = p = 1$$

$$b = 2m + 1 = 2 + 1 = 3,$$

и слѣдовательно

$$N = 3 . 2^3 = 24.$$

2-й случай: $a > 2$.

Если $a > 2$, то въ уравненіи (7)

$$x + a - k - 1 = 0,$$

и потому

Digitized by Google

$$\alpha = k + 1 - x$$

Изъ уравненій (7), (6) и (5) имѣемъ

$$2p = m(a - 1)$$

$$b = a^x . m + 1,$$

$$k + 2 - x = a^k . p. \qquad (9)$$

Въ уравненіи (9) относительно x можно сдѣлать два предположенія: 1) $x = 1$; 2) $x = 0$.

Первое предположеніе не даетъ рѣшеній, соотвѣтствующихъ разсматриваемому вопросу.

При второмъ предположеніи уравненіе (9) принимаетъ видъ:

$$k + 2 = a^k p.$$

Такъ какъ это уравненіе, при условіяхъ разсматриваемой задачи, удовлетворяется только при $k = 1$, $a = 3$, $p = 1$, то имѣемъ

$$\alpha = k + 1 = 2$$

$$2p = 2m;\ p = m = 1$$

$$b = m + 1 = p + 1 = 1 + 1 = 2,$$

и слѣдовательно

$$N = 2 . 3^1 = 18.$$

Такимъ образомъ уравненію (1) удовлетворяютъ два числа вида $N = b . a^\alpha$:

$$N_1 = 3 . 2^3 = 24$$

$$N_2 = 2 . 3^2 = 18.$$

§ 7. Легко можно замѣтить, что для всѣхъ чиселъ N иного вида нежели тѣ, которыя нами разсмотрѣны, величина

$$(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma +)(\delta + 1) \ldots .$$

Digitized by Google

менѣе величины

$$a^{\alpha-1}b^{\beta-1}c^{\gamma-1}d^{\delta-1}\ldots\ldots(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)\ldots.$$

и потому для такихъ чиселъ первая часть уравненія (1) не можетъ быть равна второй. Отсюда слѣдуетъ, что вышеприведенными рѣшеніями исчерпываются всѣ рѣшенія уравненія (1).

§ 8. **Заключеніе.** Мы нашли, что уравненію (1) удовлетворяютъ только слѣдующія числа: 1, 3, 8, 10, 18, 24, 30, и слѣдовательно только эти числа имѣютъ то свойство, что число ихъ дѣлителей равно числу чиселъ первыхъ съ ними и меньшихъ ихъ.

Digitized by Google

ОБЪ УРАВНЕНІЯХЪ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ, РАЗРѢШАЕМЫХЪ ВЪ РАДИКАЛАХЪ И О РАЗЛАГАЕМОСТИ УРАВНЕНІЯ $\frac{p(p-1)}{2}$-ОЙ СТЕПЕНИ (при p простомъ) ОТЪ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦІИ ДВУХЪ КОРНЕЙ ДАННАГО УРАВНЕНІЯ.

С. Н. Антаева.

Глава I.

§ 1. Кронекеръ, разбирая изслѣдованія Абеля и Мальмстена, приходитъ къ тому заключенію, что тѣ двѣ формы, подъ которыми Абель представляетъ корни уравненія простой степени μ, разрѣшимаго въ радикалахъ:

$$p_0 + s^{\frac{1}{\mu}} + f_2(s)s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots f_{\mu-1}(s)^{\frac{\mu-1}{\mu}}, \qquad (1)$$

$$p_0 + R_1^{\frac{1}{\mu}} + R_2^{\frac{1}{\mu}} + \ldots + R_{\mu-1}^{\frac{1}{\mu}}, \qquad (2)$$

гдѣ $R_1, R_2, \ldots R_{\mu-1}$ суть корни уравненія $(\mu-1)$-ой степени съ раціональными въ данной области коэффиціентами, черезчуръ общи, и выводитъ еще, что это уравненіе $(\mu-1)$-ой степени должно быть Абелевымъ.

Деларю (Общая теорія алгебраическаго рѣшенія уравненій) приходитъ къ тому, что это важное заключеніе Кронекера можетъ быть получено, исходя изъ двухъ теоремъ Абеля, т. е., «что условіе, чтобы всѣ симметрическія функціи коли-

Digitized by Google

чествъ R_1, $R_2 \ldots R_{\mu-1}$ опредѣлялись раціонально, не только необходимо, но и достаточно для разрѣшимости несократимыхъ алгебраическихъ уравненій простыхъ степеней» (стр.68). Такимъ образомъ, теоремы, выраженныя Абелемъ, вполнѣ охватываютъ рѣшеніе уравненія простой степени.

Прилагая теорему, высказанную Кронекеромъ, къ уравненію 5-й степени, мы получимъ, что R_1, R_2, R_3, R_4 зависятъ отъ абелевскаго уравненія 4-й степени, коэффиціенты котораго должны быть раціонально-извѣстными въ случаѣ разрѣшимости нашего уравненія въ радикалахъ. Это уравненіе четвертой степени, какъ Абелевское, должно разрѣшаться въ квадратныхъ радикалахъ, такъ какъ оно распадается на два квадратныхъ уравненія, коэффиціенты которыхъ зависятъ отъ квадратнаго уравненія съ раціональными коэффиціентами, то есть корни нашего уравненія должны быть выражены въ радикалахъ пятой и второй степеней,—результатъ, который можетъ быть полученъ, исходя изъ показателей сложности группы уравненія.

§ 2. Цѣль изложенія первой главы заключается въ томъ, чтобы, основываясь на двухъ формахъ Абеля, придти къ фактическому рѣшенію уравненій 5-й степени и показать, что въ окончательное рѣшеніе его будутъ входить радикалы 2-й и 5-й степеней. Подобная работа была изложена въ Мат. Сборникѣ за 1890 г. т. XV : 1 проф. Бугаевымъ и Лахтинымъ, при чемъ ими взята Жерардовская форма уравненія 5-й степени т.-е.

$$x^5 + ax + b = 0,$$

а извѣстно, что, чтобы придти къ ней отъ общей формы уравненія 5-й степени, придется рѣшать уравненія до 3-й степени включительно (Serret. T. 1, § 193), и слѣдовательно, при переходѣ отъ общей къ Жерардовской формѣ, получимъ коэффиціенты a и b, вообще говоря, зависящими отъ радикаловъ 3-ей степени, которые, казалось бы, могутъ войти въ окончательное рѣшеніе уравненія 5-й степени въ общей формѣ, что, конечно, не согласуется съ теоріей.

Digitized by Google

Вотъ причина, побудившая меня изложить фактическое рѣшеніе уравненія 5-й степени въ радикалахъ для формы, въ которой нѣтъ членовъ съ 4-ою и 3-ею степенями неизвѣстнаго (для простоты вычисленія) и къ которой, какъ извѣстно, переходятъ отъ общей, рѣшая уравненіе только второй степени.

Пусть имѣемъ уравненіе вида:

$$x^5 + p_1x^4 + p_2x^3 + p_3x^2 + p_4x + p_5 = 0. \qquad (1)$$

Положимъ

$$y = c + c_1x + x^2. \qquad (2)$$

Употребляя способъ Чирнгаузена, (Serret. T. I, § 190) мы получимъ относительно y уравненіе 5-ой степени и можемъ выбрать c и c_1 такъ, чтобы коэффиціенты при y^4 и y^3 обращались въ нуль. Для этого же достаточно, чтобы $\sum_{i=1}^{5} y_i = 0$, $\sum_{i=1}^{5} y_i^2 = 0$, при чемъ y_i ($i=1, 2, 3, 4, 5$) суть корни вновь полученнаго уравненія. Слѣдовательно

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = 5c + c_1 \sum_{i=1}^{5} x_i + \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 0,$$

$$\sum y_i^2 = 5c^2 + 2cc_1 \sum_{i=1}^{5} x_i + (2c + c_1^2) \sum_{i=1}^{5} x_i^2 + 2c_1 \sum_{i=1}^{5} x_i^3 + \sum_{i=1}^{5} x_i^4 = 0.$$

Изъ перваго изъ этихъ уравненій получимъ

$$c = -\frac{\sum x_i^2 + c_1 \sum x_i}{5}. \qquad (3)$$

Подставляя во второе, получимъ

$$c_1^2 \left[\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{5} \right] + 2c_1 \left[\sum x_i^3 - \frac{(\sum x_i) \cdot (\sum x_i^2)}{5} \right] +$$

$$+ \sum x_i^4 - \frac{9(\sum x_i^2)^2}{5} = 0. \qquad (4)$$

Digitized by Google

Изъ (4) и (3) опредѣлимъ c_1 и c черезъ радикалъ второй степени; въ формулахъ (3) и (4), конечно, имѣемъ

$$\Sigma x_i = -p_1,\ \Sigma x_i^2 = p_1^2 - 2p_2,\ \Sigma x_i^3 = -p_1^3 + 3p_1p_2 - 3p_3,$$

$$\Sigma x_i^4 = p_1^4 - 4p_1^2p_2 + 4p_1p_3 + 2p_2^2 - 4p_4.$$

Опредѣливъ, такимъ образомъ, c и c_1, мы получимъ уравненіе

$$y^5 + b_3y^3 + b_4y + b_5 = 0,$$

$$b_3 = -\frac{\Sigma y_i^3}{3},\ b_4 = -\frac{\Sigma y_i^4}{4},\ b_5 = -\frac{\Sigma y_i^5}{5};$$

слѣдовательно b_3, b_4, b_5 будутъ содержать одинъ радикалъ второй степени.

§ 3. Итакъ, возьмемъ уравненіе пятой степени подъ видомъ

$$y^5 + b_2y^2 + b_4y + b_5 = 0. \qquad (1)$$

Его рѣшеніе въ радикалахъ по первой теоремѣ Абеля представится въ видѣ

$$y_i = p + \alpha^i A_1 \sqrt[5]{s} + \alpha^{2i} A_2 (\sqrt[5]{s})^2 + \alpha^{3i} A_3 (\sqrt[5]{s})^3 +$$

$$+ \alpha^{4i} A_4 (\sqrt{s})^4,\quad i = 1,2,3,4,5.$$

Уравненія, служащія для опредѣленія p, A_1, A_2, A_3, A_4, s, будутъ

$$\Sigma y_i = 0;\ \Sigma y_i^2 = 0;\ \Sigma y_i^3 = -3b_3;\ \Sigma y_i^4 = -4b_4;\ \Sigma y_i^5 = -5b_5.$$

Первое изъ нихъ даетъ намъ $p = 0$; второе даетъ

$$A_1A_4 + A_2A_3 = 0$$

Полагая

$$A_1\sqrt{\frac{A_1}{A_3}} = d;\ -\frac{A_2A_1}{A_3} = d_1;\ \alpha^i\sqrt[5]{s} = \alpha^i\sqrt{\frac{A_1}{A_3}}\sqrt[5]{\varphi},$$

получимъ

Digitized by Google

$$\alpha^i A_1 \sqrt[5]{s} = d\alpha^i \sqrt[5]{\varphi}; \quad \alpha^{2i} A_2 (\sqrt[5]{s})^2 = -d_1 \alpha^{2i} (\sqrt[5]{\varphi})^2;$$

$$\alpha^{3i} A_3 (\sqrt[5]{s})^3 = \alpha^{3i} A_1 \sqrt{\frac{A_1}{A_3}} (\sqrt[5]{\varphi})^3 = d\alpha^{3i} (\sqrt[5]{\varphi})^3;$$

$$\alpha^{4i} A_4 (\sqrt[5]{s})^4 = \alpha^{4i} A_4 \frac{A_1^2}{A_3^2} (\sqrt[5]{\varphi})^2 = d_1 \alpha^{4i} (\sqrt[5]{\varphi})^4.$$

Полагая для краткости

$$\sqrt[5]{\varphi} = z, \tag{2}$$

получимъ

$$y_i = \alpha^i d z [\alpha^{2i} z^2 + 1] + \alpha^{2i} d_1 z^2 [\alpha^{2i} z^2 - 1], \quad i = 1, 2, 3, 4, 5. \tag{3}$$

Возвышая (3) послѣдовательно въ 3, 4, 5-ую степень, суммируя полученные результаты по i отъ 1 до 5 и приравнивая послѣдовательно $-3b_3, -4b_4, -5b_5$, получимъ слѣдующія уравненія:

$$\frac{b_3}{5} = -\varphi[d(d_1^2 + d^2) + d_1 \varphi(d^2 - d_1^2)], \tag{4}$$

$$\frac{b_4}{5} = \varphi[\varphi(d_1^4 - d^4 + 3d_1^2 d^2) + d_1 d^3 - d_1^3 d\varphi^2], \tag{5}$$

$$\begin{aligned} b_5 = \varphi \{ & \varphi d_1^5 (1 - \varphi^2) - d^5 (1 + \varphi^2) - \\ & - 10 d d_1 \varphi [d(d_1^2 - d^2) + d_1 \varphi (d_1^2 + d^2)] \}. \end{aligned} \tag{6}$$

Назовемъ

$$d^5(1 + \varphi^2)\varphi - d_1^5 \varphi^2 (1 - \varphi^2) = w, \tag{7}$$

$$d d_1 \varphi = u, \tag{8}$$

$$\frac{d^2}{d_1} = v, \quad \frac{b_3}{5} = \beta_3; \quad \frac{b_4}{5} = \beta_4, \tag{9}$$

$$-s = d_1 + \frac{u}{d_1}, \tag{10}$$

$$-t = v - \frac{u}{v}. \tag{11}$$

Digitized by Google

Тогда вмѣсто (4), (5), (6), (7) получимъ

$$\beta_3 = u(s + t), \tag{4'}$$

$$\beta_4 = u\left(d_1 - \frac{u}{d_1}\right)\left(v + \frac{u}{v}\right) + 3u^2, \tag{5'}$$

$$b_5 = -w + 10u^3(s - t), \tag{6'}$$

$$w = \frac{d_1^3 v^4 + u^2 v^3 - d_1^4 uv + u^3 d_1}{d_1^2 v^2}. \tag{7'}$$

Изъ (4') и (6') имѣемъ

$$s = \frac{10\beta_3 u + (b_5 + w)}{20u^2}, \tag{12}$$

$$t = \frac{10\beta_3 u - (b_5 + w)}{20u^3}. \tag{13}$$

Изъ (5'), (10), (11) имѣемъ

$$v = \frac{\beta_4 - 3u^2}{2u(s + 2d_1)} - \frac{t}{2}, \tag{14}$$

т. е. v раціонально выражается черезъ u, w, d_1.

Вмѣсто (7') возьмемъ такое уравненіе:

$$ust(s + t) + 2w + 2u^2(s - t) =$$

$$= u\,\frac{-(d_1^2 + u)(v^2 - u)[d_1 v(v + d_1) + u(v - d_1)] + 2d_1^3 v^4 +}{d_1^2 v^2}$$

$$\frac{+ 2u^2 v^3 - 2d_1^4 uv + 2u^3 d_1 + 2ud_1^2 v^2(v - d_1) - 2u^2 d_1 v(v + d_1)}{d_1^2 v^2} =$$

$$= u\,\frac{v(u^3 + u^2 v^2 - ud_1^4 - d_1^4 v^2) + d_1(u^3 - u^2 d_1^2 - uv^4 + d_1^3 v^4)}{d_1^2 v^2} =$$

$$= u\,\frac{(u + v^2)(u - d_1^2)[d_1 v(d_1 - v) + u(v + d_1)]}{d_1^2 v^2} =$$

$$= u\left(v + \frac{u}{v}\right)\left(d_1 - \frac{u}{d_1}\right)(s - t).$$

Digitized by Google

Слѣд., вмѣсто (7′) возьмемъ

$$ust(s+t)+2w+2u^2(s-t)=u\left(v+\frac{u}{v}\right)\left(d_1-\frac{u}{d_1}\right)(s-t).$$

Если въ это уравненіе занести $u\left(v+\frac{u}{v}\right)\left(d_1-\frac{u}{d_1}\right)$ изъ (5′) и $(s+t)$ изъ (4′), то получимъ

$$\beta_3 st+2w=(s-t)(\beta_4-5u^2). \qquad (15)$$

Если въ (5′) перенести $3u^2$ въ лѣвую часть и возвысить обѣ части уравненія въ квадратъ, помня, что $d_1^2+\frac{u^2}{d_1^2}=s^2-2u$, $v^2+\frac{u^2}{v^2}=t^2+2u$, получимъ

$$(st)^2+4u(s^2-t^2)=\frac{\beta_4^2-6\beta_4u^2+25u^4}{u^2}. \qquad (16)$$

Присоединивъ къ нимъ (12) и (13), получимъ четыре уравненія (12), (13), (15), (16) между четырьмя неизвѣстными s, t, u, w. Подставляя изъ (15) значеніе st въ (16), получимъ

$$\frac{[(s-t)(\beta_4-5u^2)-2w]^2}{\beta_3^2}+4u(s^2-t^2)=\frac{\beta_4^2-6\beta_4u^2+25u^4}{u^2}.$$

Подставляя въ это уравненіе и въ (15) значенія s и t изъ (12), (13), и полагая для сокращенія

$$u^2=\frac{\sigma}{25}, \qquad (17)$$

получимъ

$$25\beta_3\,\frac{4\beta_3^2\sigma-(b_5+w)^2}{16\sigma^2}+2w-\frac{(b_5+w)(5\beta_4-\sigma)}{2\sigma}=0, \qquad (18)$$

$$\frac{[5w(\beta_4-\sigma)+b_5(5\beta_4-\sigma)]^2}{4\beta_3^2\sigma^2}+\frac{10\beta_3(b_5+w)}{\sigma}=$$
$$=\frac{25\beta_4^2-6\beta_4\sigma+\sigma^2}{\sigma}. \qquad (19)$$

Digitized by Google

Изъ (18) и (19) имѣемъ

$$w = \frac{5b_5(-\beta_3^4+\beta_4^3-\beta_3\beta_4b_5)+\sigma(22\beta_3^3\beta_4+3\beta_3b_5^2-11\beta_4^2b_5)+}{5[\beta_3^4-\beta_4^3+\beta_3\beta_4b_5+} \quad (20)$$
$$\frac{+\sigma^2(7\beta_4b_5-12\beta_3^3)-b_5\sigma^3}{+\sigma(3\beta_4^2-\beta_3b_5)-3\sigma^2\beta_4+\sigma^3]}.$$

Составляемъ теперь выраженіе

$$\frac{25\beta_3^3+8w\sigma-2(b_5+w)(5\beta_4-\sigma)}{4\sigma} = \frac{25\beta_3^3(\beta_3^4-\beta_4+\beta_3\beta_4b_5)+}{4\sigma[\beta_3^4-\beta_4^3+\beta_3\beta_4b_5+}$$
$$\frac{+\sigma(31\beta_3^3\beta_4^2-33\beta_3^4b_5-4\beta_3\beta_4b_5^2)+\sigma^2(4\beta_3b_5^2-7\beta_3^2\beta_4)+\beta_3^3\sigma}{+\sigma(3\beta_4^2-\beta_3b_5)-3\sigma^2\beta_4+\sigma^3]}.$$

Подставляя это въ (18) и помня, что (b_5+w) имѣетъ множителемъ σ, по сокращеніи уравненія на β_3^3, получимъ относительно σ уравненіе 6-ой степени

$$\sigma^6-10\beta_4\sigma^5+5\sigma^4(11\beta_4^2-2\beta_3b_5)+10\sigma^3(4\beta_3\beta_4b_5-\beta_3^4-14\beta_4^3)+$$
$$+25\sigma^2(7\beta_4^4+2\beta_3^4\beta_4-4\beta_3\beta_4-4\beta_3\beta_4^2b_5+\beta_4^2b_5^2) \quad (21)$$
$$+\sigma(-15\beta_3^4\beta_4^2-58\beta_3^5b_5-40\beta_3^2\beta_4b_5^2-106\beta_4^5+$$
$$+120\beta_3\beta_4^3b_5-b_5^4)+25(\beta_3^4-\beta_4^3+\beta_3\beta_4b_5)^2=0.$$

Это уравненіе 6-ой степени можно еще представить въ другомъ видѣ:

$$[\sigma^3-5\beta_4\sigma^2+5(3\beta_4^2-\beta_3b_5)\sigma-5(\beta_3^4+\beta_3\beta_4b_5-\beta_4^3)]^2-\Delta\sigma=0, \quad (21')$$
$$\Delta=256\beta_4^5-320\beta_4\beta_4^3b_5-135\beta_3^4\beta_4^2+$$
$$+90\beta_3^2\beta_4b_5^2+108\beta_3^5b_5+b_5^4.$$

Это вычисленіе провѣрено также по таблицамъ, приложеннымъ къ книгѣ Селиванова (объ уравненіяхъ 5-ой степени). Такимъ образомъ, всякое уравненіе 5-ой степени имѣетъ рѣшеніе, выраженное черезъ радикалы второй и пятой степеней, зависящіе отъ корня уравненія 6-ой степени.

Употребляя обозначенія Абеля, получимъ

$$R_1=d^5\varphi,\ R_2=-d_1{}^5\varphi^2,\ R_3=d^5\varphi^3,\ R_4=d_1{}^5\varphi^4,$$

Digitized by Google

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = d^5\varphi(1 + \varphi^2) - d_1{}^5\varphi^2(1 - \varphi^2) = w,$$
$$R_1 . R_2 . R_3 . R_4 = - d^{10} d_1{}^{10}\varphi^{10} = - u^{10} = - \frac{\sigma^5}{5^{10}}.$$

По второй теоремѣ Абеля $R_1 . R_2 . R_3 . R_4$ должно быть раціонально-извѣстно въ случаѣ разрѣшимости уравненія въ радикалахъ, и слѣд. и σ^5 должно быть тоже раціонально-извѣстно. Пусть $\sigma^5 = M$. Слѣдовательно, для разрѣшимости необходимо и достаточно, чтобы M было раціонально-извѣстнымъ; если такъ, то $\sigma = \sqrt[5]{M}$ будетъ или раціональною, если точно извлекается корень, или радикаломъ пятой степени. А такъ какъ мы получили для σ уравненіе 6-ой степени (21), то, введя $\sigma^6 = M\sigma$, $\sigma^5 = M$, получимъ уравненіе 4-ой степени относительно σ, и слѣдов., оно не можетъ имѣть корнемъ радикалъ пятой степени; слѣдов. допущеніе σ^5 раціональною ведетъ непремѣнно къ тому, что σ должно быть тоже раціональною. Слѣдов., уравненіе (21) должно имѣть соизмѣримый корень для того, чтобы наше уравненіе (1) рѣшалось въ радикалахъ.

Формула (20) показываетъ, что и w будетъ раціонально-извѣстною при σ раціональной, что, конечно, и слѣдовало ожидать по теоріи, такъ какъ $w = \sum_{i=1}^{4} R_i$.. Окончательное рѣшеніе уравненія представится въ слѣдующемъ видѣ: найдя соизмѣримое σ изъ (21), найдемъ такое же w изъ (20); $u = \pm \frac{\sqrt{\sigma}}{5}$ изъ (17); изъ (12) и (13) найдемъ s и t черезъ $\sqrt{\sigma}$; изъ (10) получимъ

$$d_1 = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - 4u}}{2}; \qquad (22)$$

подставляя это значеніе въ (14), получимъ v выраженнымъ черезъ два квадратныхъ радикала $\sqrt{\sigma}$, $\sqrt{s^2 - 4u}$, слѣдовательно

$$\sqrt[5]{R_1} = \sqrt[5]{w^2 d_1}; \quad \sqrt[5]{R_2} = -\sqrt[5]{\frac{d_1{}^2 u^2}{v}};$$
$$\sqrt[5]{R_3} = \sqrt[5]{\frac{u^3 v}{d_1{}^2}}; \quad \sqrt[5]{R_4} = \sqrt[5]{\frac{u^4}{d_1 v^2}}. \qquad (23)$$

Digitized by Google

$$y_i = \alpha^i \sqrt[5]{R_1} + \alpha^{2i} \sqrt[5]{R_2} + \alpha^{3i} \sqrt[5]{R_3} + \alpha^{4i} \sqrt[5]{R_4}; \quad i = 1, 2, 3, 4, 5; \quad (24)$$

такъ что въ окончательное рѣшеніе (1) войдетъ радикалъ пятой степени и два радикала квадратныхъ, что и согласуется съ теоріей.

Здѣсь не мѣшаетъ замѣтить, что

$$y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_4 + y_4y_5 + y_5y_1 = 5u(2\alpha^4 + 2\alpha + 1).$$

Такъ какъ коэффиціентъ при y^3 равенъ нулю, то

$$y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_4 + y_4y_5 + y_5y_1 + y_2y_4 +$$
$$+ y_3y_5 + y_4y_1 + y_5y_2 + y_1y_3 = 0;$$

слѣдовательно

$$(y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_4 + y_4y_5 + y_5y_1 - 2y_2y_4 - y_3y_5 - y_4y_1 -$$
$$- y_5y_2 - y_1y_3)^2 = (10u)^2(2\alpha^4 + 2\alpha + 1)^2 = 500u^2 = 20\sigma.$$

Слѣдовательно введенная нами σ есть метациклическая функція Якоби, уменьшенная въ 20 разъ.

Глава II.

§ 1. Элементарныхъ симметрическихъ функцій двухъ корней x_i, x_k двѣ, именно $x_i + x_k$ и x_ix_k; всѣ остальныя, какъ извѣстно, выражаются раціонально въ области коэффиціентовъ нашего уравненія черезъ одну изъ нихъ. Кромѣ того число различныхъ значеній каждой изъ нихъ есть вообще $\frac{p(p-1)}{2}$ (p есть число, обозначающее степень нашего уравненія), и, слѣдовательно, легко составить уравненіе $\frac{p(p-1)}{2}$-ой степени, корнями котораго будутъ эти $\frac{p(p-1)}{2}$ различныхъ значеній (въ частности степень этого уравненія можетъ быть дѣлителемъ $\frac{p(p-1)}{2}$). (Serret T. 1, § 181). Въ этой главѣ бу-

Digitized by Google

детъ изложено о разлагаемости этого уравненія $\frac{p(p-1)}{2}$-ой степени и въ частности, приложеніе этого общаго свойства къ уравненію 5-ой степени.

Во всемъ этомъ изложеніи будемъ предполагать степень даннаго неразлагаемаго уравненія p числомъ простымъ и произведеніе $x_i x_k$ будемъ считать корнемъ уравненія $\frac{p(p-1)}{2}$-ой степени, заранѣе составленнаго.

Всѣ значенія $x_i x_k$ можно заключить въ одну общую форму $x_{l+k-1}\ x_{p-l+k}$, гдѣ $l=1, 2, 3 \ldots \frac{p-1}{2}$; $k=1, 2, 3 \ldots p$, при чемъ значки у $x-a$ берутся по mod. p. Дѣйствительно, такихъ значеній числомъ $\frac{p(p-1)}{2}$, и легко доказать, что тождественныхъ между ними нѣтъ. Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ противное, мы имѣли бы одновременно

$$l + k - 1 \equiv l' + k' - 1 \pmod{p},$$

$$p - l + k \equiv p - l' + k' \pmod{p}.$$

Складывая и вычитая почленно, получимъ два слѣдующихъ одновременныхъ сравненія:

$2k \equiv 2k' \pmod{p}$, $2l \equiv 2l' \pmod{p}$ или $k \equiv k'$, $l \equiv l' \pmod{p}$,

чего быть не можетъ, кромѣ $k=k'$, $l=l'$, такъ какъ k, k', l, l' числа меньшія простаго числа p.

Также не можетъ быть двухъ слѣдующихъ совмѣстныхъ сравненій

$$l + k - 1 \equiv p - l' + k' \pmod{p},$$

$$l' + k' - 1 \equiv p - l + k \pmod{p}.$$

Складывая и вычитая, получимъ

$2(l + l') \equiv 2 \pmod{p}$; $2(k - k') \equiv 0 \pmod{p}$ или $l + l' \equiv 1$,

Digitized by Google

$k \equiv k'$ (mod. p); этихъ совмѣстныхъ сравненій не можетъ быть, такъ какъ l, $l' \leqq \frac{p-1}{2}$.

Такимъ образомъ мы видимъ, что форма

$$x_{l+k-1}\, x_{p-l+k};\quad l=1,\ 2,\ 3\ldots\ \frac{p-1}{2};\ k=1,\ 2\ldots p \qquad (1)$$

даетъ всѣ возможныя различныя значенія $x_i x_k$, и поэтому мы можемъ различныя значенія $x_i x_k$ расположить въ p строкъ ($k=1,\ 2,\ 3\ldots.p$) и въ каждой строкѣ по $\frac{p-1}{2}$ членовъ $\left(l=1,\ 2,\ 3\ldots\ \frac{p-1}{2}\right)$. Поэтому условимся считать значекъ k, какъ указатель строки, а значекъ l, какъ указатель столбца.

Чтобы перейти отъ $x_m x_n$ къ $x_r x_s$ можно приложить къ первому подстановку вида $(x_z\ x_{az+b})$. Въ самомъ дѣлѣ, для этого перехода должны имѣть

$$ma+b \equiv r \text{ (mod. } p)$$

$$na+b \equiv s \text{ (mod. } p)$$

вычитая получимъ $a(m-n) \equiv r-s$ (mod. p); такъ какъ число p простое, то всегда найдемъ корень этого сравненія a; $b \equiv r-ma$ (mod. p), т. е. тоже опредѣлится.

Въ каждомъ изъ вертикальныхъ столбцовъ, какъ мы сказали, находится p значеній $x_{l+k-1}x_{p-l+k} (k=1,2,3\ldots p)$. Если бы мы пожелали составить уравненіе p-ой степени, имѣющее корнями эти различныя значенія одного изъ столбцовъ, то для опредѣленія коэффиціентовъ этого уравненія достаточно было бы знать элементарныя симметрическія функціи его корней

$$\sum_{k=1}^{p} x^r{}_{l+k-1}\, x^r{}_{p-l+k},$$

гдѣ $r=1,2,3\ldots(p-1)$. Послѣдній же коэффиціентъ каждаго изъ этихъ множителей будетъ

Digitized by Google

$$-\prod_{k=1}^{p} x_{l+k-1} \cdot x_{p-l+k} = -\prod_{k=1}^{p} x^2{}_k = -\left(\prod_{k=1}^{p} x_k\right)^2,$$

то есть равенъ квадрату коэффиціента при неизвѣстной въ нулевой степени даннаго уравненія съ обратнымъ знакомъ.

Назовемъ для краткости

$$\sum_{k=1}^{p} x^r{}_{l+k-1}\ x^r{}_{p-l+k} = A_{r,l}.$$

Въ этомъ случаѣ мы видимъ, что всѣ $A_{r,l}$ для опредѣленаго значенія l суть подобныя функціи, а слѣдовательно всѣ $A_{r,l}$ ($r=1,2,3\ldots p-1$) выражаются раціонально черезъ одну изъ нихъ, напр. $A_{r_1,l}$.

Легко видѣть, что $A_{r_1,l}$ не измѣняется отъ приложенія ко всѣмъ p его элементамъ циклической подстановки $(x_z\, x_{z+c})$, такъ какъ отъ этого перемѣстятся только его слагаемыя, а слѣдовательно они не измѣнятся и отъ произведенія такихъ подстановокъ.

Такихъ множителей r-ой степени можно составить столько, сколько столбцовъ, т. е. $\frac{p-1}{2}$. Такимъ образомъ, $A_{r,l}$ будетъ имѣть $\frac{p-1}{2}$ значеній, слѣдовательно можно составить уравненіе $\frac{p-1}{2}$-ой степени, корнями котораго будутъ значенія $A_{r,l}$.

Чтобы вычислить коэффиціенты этого уравненія, достаточно знать элементарныя симметрическія функціи его корней, т. е

$$\sum_{l=1}^{\frac{p-1}{2}} A^{r_1}{}_{r,l}$$

Назовемъ это для краткости черезъ B_{rr_1} ($r_1=1,2,3\ldots\frac{p-1}{2}$).

Можно показать, что

$$B_{rr_1} = \sum_{l=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\sum_{k=1}^{p} x^r{}_{l+k-1} x^r{}_{p-l+k}\right]^{r_1}$$

Digitized by Google

не измѣняется только лишь въ томъ случаѣ когда слагаемыя или самые столбцы взаимно перемѣщаются (конечно для $r_i = |= 1$). Если же перемѣщаются нѣкоторые члены столбца, что только, конечно, и возможно, такъ какъ наша таблица строкъ и столбцовъ заключаетъ всѣ значенія $x_i x_k$, то эта сумма вообще измѣняется.

Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ такое перемѣщеніе, мы непремѣнно найдемъ значекъ e, при которомъ другой элементъ замѣстился новымъ со значкомъ изъ остальныхъ $(p-1)$ значковъ, то есть до подстановки, напр., имѣли

$$[x_e^r (x_{a_1}^r + x_{b_1}^r) + \ldots]^{r_1} + \ldots .$$

а послѣ подстановки

$$[x^r{}_e (x_{c_1}^r + x_{b_1}^r) + \ldots]^{r_1} + \ldots .$$

Отбирая въ этихъ скобкахъ члены при $x_e^r)^{r_1}$, получимъ въ первомъ случаѣ

$$(x_{a_1}^r + x_{b_1}^r)^{r_1} + (x_{a_2}^r + x_{b_2}^r)^{r_1} +$$

во второмъ

$$(x_{c_1}^r + x_{b_1}^r)^{r_1} + (x_{c_2}^r + x_{d_2}^r)^{r_1} +$$

Мы видимъ, что между ними тождества быть не можетъ. Членами мы называемъ слагаемыя столбца, напр. $x_{i+\delta} x_i$; первымъ элементомъ называемъ $x_{i+\delta}$, вторымъ элементомъ x_i. Пусть къ нашей суммѣ приложена подстановка $(z, \varphi(z))$, гдѣ $\varphi(z)$ цѣлая раціональная функція не выше $(p-2)$-ой степени, которая не измѣняетъ ее, то есть, перестанавливаетъ ея столбцы или слагаемыя въ этихъ столбцахъ. Каждый столбецъ характеризуется тѣмъ, что разность значковъ элементовъ, составляющихъ его членъ, есть по mod. $p \equiv 2l-1$; назовемъ для краткости эту разность черезъ δ; слѣд., всѣ члены этого столбца будутъ вида $x^r{}_{i+\delta} x_i^r$ $(i = 1,2,3 \ldots p)$, такъ какъ первыми элементами его членовъ будутъ всѣ p различныхъ буквъ; то же относится и ко вторымъ элементамъ.

Digitized by Google

Послѣ этой подстановки, какъ уже было замѣчено, получимъ цѣликомъ новый столбецъ, члены котораго будутъ $x_{i+\delta_i} x_i$ ($i=1,2,3\ldots p$); эти же самые члены можно разсматривать, какъ имѣющіе разность значковъ элементовъ—δ_1; при этомъ первая операція, т. е. полученіе членовъ съ разностью δ_1, соотвѣтствуетъ переходу первыхъ элементовъ столбца δ къ первымъ элементамъ столбца δ_1 и вторыхъ — ко вторымъ; вторая же операція, т. е. полученіе членовъ съ разностью $-\delta_1$ соотвѣтствуетъ переходу первыхъ элементовъ столбца съ разностью δ ко вторымъ элементамъ столбца съ разностью δ_1 и наоборотъ. Но легко видѣть, что не можетъ быть подстановки при замѣнѣ столбцовъ, которая давала бы нѣкоторые члены съ разностью δ_1 и нѣкоторые того же столбца съ разностью — δ_1. Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ это, мы всегда нашли бы такой значекъ i у перваго элемента члена (столбца δ), который данною подстановкою давалъ бы значекъ l члена разности δ_1, и тотъ же значекъ втораго элемента (столбца δ), который этою подстановкою давалъ-бы тотъ же значекъ l (для возможности подстановки члена разности—δ_1; слѣдовательно, эта подстановка была-бы возможна, если бы въ числѣ первыхъ элементовъ столбца δ было два равныхъ значка l, чего, какъ уже замѣтили, быть не можетъ (это влекло бы $l+k-1\equiv l+k'-1$, т. е. $k\equiv k'$) Такимъ образомъ, заключаемъ, что подстановки, служащія для перехода отъ столбца разности δ къ столбцу разности δ_1 таковы, что даютъ *весь* столбецъ или съ разностью δ_1 или съ разностью $-\delta_1$.

Слѣдовательно, подстановка, не измѣняющаяся нашей суммы, должна для значковъ удовлетворять совмѣстно сравненіямъ

$$\varphi(i) \equiv l \pmod{p},$$

$$\varphi(i+\delta) \equiv l+\delta_1 \pmod{p},$$

гдѣ i и l имѣютъ всѣ значенія изъ ряда $1,2,3\ldots p$.
Здѣсь δ_1 можетъ быть и отрицательнымъ, или же $p-\delta_1$. Если-бы оказалось, что $i+\delta > p$ и k былъ наименьшій вычетъ числа

Digitized by Google

$i+\delta$, то мы должны бы брать $\varphi(k)$, но можно, конечно, взять и $\varphi(i+\delta)$, такъ какъ $i+\delta \equiv k \pmod{p}$ (Serret § 282).

Раскладывая $\varphi(i+\delta)$ по строкѣ Тейлора и вычитая изъ нижняго сравненія верхнее, получимъ

$$\delta\varphi'(i)+\frac{\delta^2}{1.2}\varphi''(i)+\ldots+\frac{\delta^{p-2}}{(p-2)!}\varphi^{(p-2)}(i)\equiv\delta_i \pmod{p},$$
$$i=1,2,3\ldots p.$$

Слѣдовательно, мы получили сравненіе отъ i не выше $(p-3)$-ой степени, которое должно имѣть p несравнимыхъ по mod. p корней, чего быть не можетъ (Serret § 298), и это будетъ до тѣхъ поръ, пока лѣвая часть сравненія будетъ зависѣть отъ i, т. е. необходимо имѣть

$$\varphi'(i)=const=a,\ \varphi''(i)=\ldots=\varphi^{(p)}(i)=0.$$

Интегрируя первое изъ нихъ, получимъ

$$\varphi(i)=ai+b.$$

Т. е. наши суммы не измѣняются лишь только отъ линейныхъ подстановокъ.

Теперь докажемъ, что эти суммы не измѣняются отъ линейныхъ подстановокъ вида (x_i, x_{ai+b}).

Пусть приложена подстановка вида (x_i, x_{ai+b}); тогда получимъ, что

$$x^r{}_{l+k-1}\ x^r{}_{p-l+k}$$

перейдетъ въ

$$x^r{}_{a(l+k-1)+b}\ x^r{}_{a(p-l+k)+b}.$$

Разность значковъ будетъ

$$a(2l-1-p), \text{ или по mod. } p \equiv a(2l-1),$$

т. е., прикладывая одну и ту же подстановку къ различнымъ $l=1,2,3\ldots\frac{p-1}{2}$, получимъ различныя разности, такъ какъ сравнимыхъ разностей быть не можетъ при $a=1,2,3\ldots(p-1)$, такъ какъ въ противномъ случаѣ имѣли бы $l\equiv l'$.

Digitized by Google

И въ каждомъ такимъ образомъ полученномъ столбцѣ не можетъ быть тождественныхъ членовъ, такъ какъ въ противномъ случаѣ имѣли бы или

$$a(l+k-1)+b \equiv a(l+k'-1)+b \pmod{p}$$

или

$$a(l+k-1)+b \equiv a(p-l+k')+b \pmod{p},$$

$$a(p-l+k)+b \equiv a(l+k'-1)+b \pmod{p}.$$

первое и сумма двухъ послѣднихъ влечетъ за собой

$$k \equiv k' \pmod{p}$$

чего, какъ мы положили, нѣтъ.

Итакъ, наши суммы B_{rr_1} не измѣняются отъ линейныхъ подстановокъ—и *только отъ нихъ*, слѣдовательно—онѣ функціи метациклическія.

Приложеніе къ примѣру для 5 буквъ: имѣемъ

$$\begin{vmatrix} x_1x_5 & x_2x_4 \\ x_2x_1 & x_3x_5 \\ x_3x_2 & x_4x_1 \\ x_4x_3 & x_5x_2 \\ x_5x_4 & x_1x_3 \end{vmatrix}$$; приложимъ (x_z, x_{z^2+1}) получимъ: $$\begin{vmatrix} x_2x_1 & x_4x_5 \\ x_4x_2 & x_3x_1 \\ x_3x_4 & x_5x_2 \\ x_5x_3 & x_1x_4 \\ x_1x_5 & x_2x_3 \end{vmatrix}$$; приложимъ $(x_z\ x_{3z+4})$ получимъ: $$\begin{vmatrix} x_2x_4 & x_5x_1 \\ x_5x_2 & x_3x_4 \\ x_3x_5 & x_1x_2 \\ x_1x_3 & x_4x_5 \\ x_4x_1 & x_2x_3 \end{vmatrix}.$$

Для первой и третьей таблицъ имѣемъ

$$[x_2^r(x_1^r+x_3^r)+\ldots]^{r_1}+[x_2^r(x_5^r+x_4^r)+\ldots]^{r_1}$$

Для второй таблицы

$$[x_2^r(x_1^r+x_4^r)+\ldots]^{r_1}+[x_2^r(x_3^r+x_5^r)+\ldots]^{r_1}$$

Отсюда видимъ, что вторая сумма не можетъ равняться первой для $r_1 \neq 1$.

Digitized by Google

Эти метациклическія функціи (Селивановъ. Теорія алгебраическаго рѣшенія уравненій §§ 68, 85) должны быть раціональными въ случаѣ разрѣшимости нашего уравненія въ радикалахъ, и наоборотъ, если B_{rr_1}, какъ функціи метациклическія, раціональны, то наше уравненіе p-ой степени разрѣшимо въ радикалахъ.

Итакъ, мы пришли къ такому заключенію: неразлагаемое уравненіе простой p-ой степени, въ случаѣ его разрѣшимости въ радикалахъ имѣетъ уравненіе $\frac{p(p-1)}{2}$-ой степени относительно $x_i x_k$ или другой какой-либо симметрической функціи двухъ корней его такимъ, что оно разлагается на $\frac{p-1}{2}$ множителей, каждый изъ нихъ степени p, при чемъ элементарныя симметрическія функціи корней этого множителя выражаются раціонально черезъ одну изъ нихъ, которая есть корень уравненія степени $\frac{p-1}{2}$ съ коэффиціентами раціональными, такъ какъ элементарныя симметрическія функціи корней его должны быть раціональны, какъ метациклическія функціи. И наоборотъ, если уравненіе $\frac{p(p-1)}{2}$-ой степени разлагается на $\frac{p-1}{2}$ множителей, каждый изъ которыхъ степени p, такъ, что элементарныя симметрическія функціи корней этого множителя выражаются раціонально черезъ одну изъ нихъ, которая есть корень уравненія $\frac{p-1}{2}$-ой степени съ коэффиціентами раціональными, то наше первоначальное уравненіе рѣшается въ радикалахъ, такъ какъ элементарныя симметрическія функціи корней уравненія $\frac{p-1}{2}$-ой степени, которыя суть метациклическія функціи,—раціональны. (Селивановъ § 85).

Здѣсь не мѣшаетъ помнить, что послѣдній коэффиціентъ каждаго изъ множителей p-ой степени есть квадратъ по-

Digitized by Google

слѣдняго коэффиціента нашего уравненія съ обратнымъ знакомъ.

Насколько мнѣ извѣстно, это свойство, необходимое и достаточное для разрѣшимости уравненія въ радикалахъ, въ первый разъ замѣчено мною.

Такимъ образомъ вопросъ о разрѣшимости нашего уравненія свелся къ разысканію случаевъ, въ которыхъ уравненіе $\frac{p(p-1)}{2}$-ой степени относительно $x_i\,x_k$ разлагается на $\frac{p-1}{2}$ множителей, при чемъ въ область входятъ радикалы, полученные отъ разрѣшенія уравненія $\frac{p-1}{2}$-ой степени.

§ 2. Прилагая это свойство къ нашему уравненію 5-ой степени

$$y^5+b_3y^2+b_4y+b_5=0, \tag{1}$$

мы должны, согласно съ изложеннымъ, заключить, что уравненіе

$$\begin{gathered} v^{10}-b_4v^8-b_3{}^2v^7-(b_4{}^2-b_3b_5)v^6-2b_5{}^2v^5+ \\ +(b_4{}^3-3b_3b_4b_5)v^4+b_4b_5{}^2v^3-b_5{}^3b_3v+b_5{}^4=0, \end{gathered} \tag{2}$$

гдѣ v есть $y_i\,y_k$, должно въ случаѣ разрѣшимости разлагаться на два множителя 5-ой степени, при чемъ всѣ коэффиціенты каждаго множителя выражаются раціонально черезъ одинъ изъ нихъ, который есть корень квадратнаго уравненія съ раціональными коэффиціентами, и также обратно.

Выписывая всѣ члены перваго столбца y_1y_5, y_2y_1, y_3y_2, y_4y_3, y_5y_4, каждый изъ нихъ можно представить въ видѣ $y_l\,y_{l+1}$ $(l=1,\,2,\,3,\,4,\,5)$. Составивъ $y_l\,y_{l+1}$, исходя изъ (гл. I, § 3, фор. 3), получимъ

$$\left.\begin{aligned} &y_l\,y_{l+1}=A+(\alpha^lz)B+(\alpha^lz)^2C+(\alpha^lz)^3D+(\alpha^lz)^4E, \\ &\text{гдѣ} \\ &\qquad A=u(2\alpha^4+2\alpha+1), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} B &= u\left[-\frac{d_1}{d}(\alpha^4+\alpha^2)+\frac{d}{d_1}\alpha^3\right], \\ C &= u(\alpha^3+\alpha^4)+d^2\alpha, \\ D &= -dd_1(\alpha+\alpha^2)+u\frac{d_1}{d}\alpha^4, \\ E &= d_1{}^2\alpha^2+d^2(\alpha+\alpha^3). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Чтобы опредѣлить коэффиціенты уравненія, имѣющаго корнями $y_l\ y_{l+1}$ (l=1, 2, 3, 4, 5), достаточно найти элементарныя симметрическія функціи этихъ корней

$$\sum_{l=1}^{5} y_l\, y_{l+1},\quad \sum_{l=1}^{5} y^2{}_l\, y^2{}_{l+1},\quad \sum_{l=1}^{5} y^3{}_l\, y^3{}_{l+1},\quad \sum_{1=l}^{5} y^4{}_l\, y^4{}_{l+1}. \quad (4)$$

Коэффиціентъ при нулевой степени будетъ—$b_5{}^2$.

Изъ (3) имѣемъ

$$\sum_{l=1}^{5} y_l\, y_{l+1} = 5A = 5u(2\alpha^4+2\alpha+1) \quad (5).$$

Легко составить квадратное уравненіе, отъ котораго зависитъ A; возвышая (5) въ квадратъ, получимъ

$$25A^2 = 125u^2;\ A^2 = \frac{\sigma}{5}, \quad (6)$$

такъ какъ

$$(2\alpha^4+2\alpha+1)^2 = 5;$$

слѣдовательно, если уравненіе (1) разрѣшимо въ радикалахъ, то $\frac{\sigma}{5}$ будетъ раціональною, какъ корень резольвенты, и наоборотъ, если A^2 будетъ раціональною, то резольвента имѣетъ раціональный корень, и наше уравненіе разрѣшимо въ радикалахъ.

Остается теперь показать, что остальные члены (4) выражаются раціонально черезъ A (т. е. одинъ изъ коэффиціентовъ).

Digitized by Google

Изъ (3) имѣемъ

$$\Sigma\, y^2_l\, y^2_{l+1} = 5A^2 + 10\varphi(BE + CD) =$$

$$= 5A^2 + 10\left[-u^2 + u^3\left(\frac{d^2}{d_1^2} - \frac{d_1^3}{d^2}\right)(\alpha^4 + \alpha) - (\alpha^3 + \alpha^2)u\left(d^2 - \frac{u^2}{d^2}\right)\right] \tag{7}$$

Перемноживъ (10), (11) (гл. I), получимъ

$$ust = u\left(d^2 - \frac{u^2}{d^2}\right) + u\left(\frac{d^2}{d_1^2} - \frac{d_1^2}{d^2}\right);$$

изъ (5′ гл. I) имѣемъ

$$\beta_4 - 3u^2 = u\left(d^2 - \frac{u^2}{d^2}\right) - u^3\left(\frac{d^2}{d_1^2} - \frac{d_1^2}{d^2}\right).$$

Изъ этихъ двухъ уравненій имѣемъ

$$u\left(d^2 - \frac{u^2}{d^2}\right) = \frac{ust + \beta_4 - 3u^2}{2}\,;\quad u^2\left(\frac{d^2}{d_1^2} - \frac{d_1^2}{d^2}\right) = \frac{ust - (\beta_4 - 3u^2)}{2}\,. \tag{8}$$

Помня, что $\alpha^2 + \alpha^3 = -1 - \alpha - \alpha^4$, получимъ

$$\varphi(BE + CD) = -u^2 + u^2\left(\frac{d^2}{d_1^2} - \frac{d_1^2}{d^2}\right)(\alpha^4 + \alpha) -$$

$$-u\left(d^2 - \frac{u^2}{d^2}\right)(\alpha^2 + \alpha^3) = \frac{stu(2\alpha^4 + 2\alpha + 1) + \beta_4 - 5u^2}{2} = \tag{9}$$

$$= \frac{Ast + \beta_4 - 5u^2}{2}\,.$$

Помня, что $A^2 = 5u^2$, имѣемъ

$$\sum_{l=1}^{5} y^2_l\, y^2_{l+1} = 5\beta_4 + 5Ast = b_4 + 4Ast, \tag{10}$$

$$st = \frac{20\beta_3^2 A^3 - (b_5 + w)^2}{16A^3},$$

Digitized by Google

при чемъ w есть раціональная функція отъ σ (20 гл. I), а слѣдовательно и A^2.

Изъ (3) имѣемъ

$$\sum_{l=1}^{5} y^3_l y^3_{l+1} = 5\{A[A^2 + 6\varphi(BE + CD)] + 3\varphi[BC^2 + B^2D + \varphi CE^2 + \varphi D^2E]\} \tag{11}$$

Производя вычисленія, получимъ:

$$\varphi[BC^2 + B^2D + \varphi CE^2 + \varphi D^2E] = (2\alpha^4 + 2\alpha + 1)u\left[u\left(d_1^2 - \frac{u^2}{d^2}\right) - u^2\left(\frac{d^2}{d_1^2} - \frac{d_1^2}{d^2}\right)\right] + u^3\left[(\alpha^4 + \alpha + 3)\left(d_2^2 + \frac{u^2}{d_1^2}\right) + (\alpha^2 + \alpha^3 + 3)\left(\frac{d^4}{d_1^2} + u^2\frac{d_1^2}{d^4}\right)\right].$$

Изъ (10), (11) гл. I послѣ возвышенія въ квадратъ имѣемъ

$$d_1^2 + \frac{u^2}{d_1^2} = s^2 - 2u = \frac{100\beta_3^2u^2 + (b_5 + w)^2 + 20\beta_3u(b_5 + w)}{400u} - 2u,$$

$$\frac{d^4}{d_1^2} + u^2\frac{d_1^2}{d^4} = t^2 + 2u = \frac{100\beta_3^2u^2 + (b_5 + w)^2 - 20\beta_3u(b_5 + w)}{400u^4} + 2u.$$

Слѣдовательно

$$(\alpha^4 + \alpha + 3)\left(d_1^2 + \frac{u^2}{d_1^2}\right) + (\alpha^2 + \alpha^3 + 3)\left(\frac{d^4}{d_1^2} + u^2\frac{d_1^2}{d^4}\right) = \frac{5[20\beta_3^2A^2 + (b_5 + w)^2] + 20\beta_3A(b_5 + w) - 32A^5}{16A^2}.$$

Слѣдовательно по (5) и (8) имѣемъ

$$\varphi[BC^2 + B^2D + \varphi CE^2 + \varphi D^2E] = A\beta_4 - A_1^3 + \frac{20\beta_3^2A^2 + (b_5 + w)^2 + 4\beta_3A(\beta_5 + w)}{16A^2}. \tag{12}$$

Digitized by Google

Изъ (9), (12), (11), получимъ

$$\sum_{l=1}^{5} y^3_l\, y^3_{l+1} = 5\left[-5A^3+5A\beta_4+3A^2st+\right.$$
$$\left.+3\,\frac{20\beta_3{}^2A_4{}^2+(b+w)^2+4\beta_3A(b_5+w)}{16A^2}\right] \qquad (13)$$

Изъ (3) имѣемъ

$$\sum_{l=1}^{5} y^4_l\, y^4_{l+1} = \frac{1}{5}[\sum_{l=1}^{5} y^2_l y^2_{l+1}]^2+10\varphi\{[2AB+\varphi D^2+2\varphi CE]\times$$
$$\times[C^2+2AE+3BD]+[B^2+2AC+2\varphi DE]\times$$
$$\times[2AD+2BC+\varphi E^2]\} = \frac{1}{5}[\sum_{l=1}^{5} y^2_l\, y^2_{l+1}]^2+ \qquad (14)$$
$$+40A^2\varphi(BE+CD)+60A\varphi[BC^2+B^2D+\varphi ED^2+\varphi CE^2]+$$
$$+10[\varphi(BE+DC)]^2+20\varphi[\varphi(BD^2+3BCED+C^3E)+$$
$$+\varphi^2DE^2+B^2C].$$

Первыя четыре слагаемыя уже опредѣлены (10), (9), (12); остается опредѣлить пятое слагаемое; вычисляя его, получимъ

$$\varphi[\varphi(BD^2+3BCED+C^3E)+\varphi^2DE^2+B^2C = u^2\left(d^4+\frac{u^4}{d^4}\right)+$$
$$+u^4\left(\frac{d^2}{d_1{}^2}-\frac{d_1{}^2}{d^2}\right)^2+17u^4-u^3(\alpha^4+\alpha-1)\left(\frac{d^4}{d_1{}^2}+u^2\frac{d_1{}^2}{d^4}\right)+$$
$$+u^3(\alpha^2+\alpha^3-1)\left(d_1{}^2+\frac{u^2}{d_1{}^2}\right)-u^3(2\alpha^2+2\alpha^3-1)\left(d^2-\frac{u^2}{d^2}\right)+ \qquad (15)$$
$$+u^4(2\alpha^4+2\alpha-1)\left(\frac{d^2}{d_1{}^2}-\frac{d_1{}^2}{d^2}\right)+u^2(\alpha+\alpha^4)\left(\frac{d^6}{d_1{}^2}-\frac{d_1{}^2u^4}{d^6}\right)-$$
$$-(\alpha^2+\alpha^3)\left(\frac{d_1{}^4}{d^2}-u^2\frac{d^2}{d_1{}^4}\right)u^3.$$

Digitized by Google

Возвышая въ квадратъ (8), получимъ

$$u^2\left(d^4+\frac{u^4}{d^4}\right)=\frac{(ust+\beta_4-3u^2)^2}{4}+2u^4,$$

$$u^4\left(\frac{d^2}{d_1^{\,2}}-\frac{d_1^{\,2}}{d^2}\right)^2+17u^4=\frac{(ust+\beta_4-3u^2)^2}{4}+17u^4.$$

Складывая, получимъ

$$u^2\left(d^4+\frac{u^4}{d^4}\right)+u^4\left(\frac{d^2}{d_1^{\,2}}-\frac{d_1^{\,2}}{d^2}\right)+17u^4= \tag{16}$$

$$\frac{u^2s^2t^2+(\beta_4-3u^2)^2}{2}+19u^4 \text{ (рац. отъ } A^2)$$

Изъ (10, 11 гл. I) имѣемъ

$$-(\alpha^4+\alpha-1)\left(\frac{d^4}{d_1^{\,2}}+u^2\frac{d_1^{\,2}}{d^4}\right)u^3=-u^3(\alpha^4+\alpha-1)(t^2+2u)$$

$$(\alpha^2+\alpha^3-1)\left(d_1^{\,2}+\frac{u^2}{d_1^{\,2}}\right)u^3=u^3(\alpha^2+\alpha^3-1)(s^2-2u)$$

Складывая, получимъ

$$-u^3(\alpha^4+\alpha-1)\left(\frac{d^4}{d_1^{\,2}}+u^2\frac{d_1^{\,2}}{d^4}\right)+u^3(\alpha^2+\alpha^3-1)\left(d_1^{\,2}+\frac{u^2}{d_1^{\,2}}\right)= \tag{17}$$

$$=-\frac{20\beta_3^{\,2}A^2+(b_5+w)^2}{80A}-\frac{3\beta_3(b_5+w)}{20}-\frac{6A^4}{25}$$

Изъ (8) имѣемъ

$$-u^2(2\alpha^2+2\alpha^3-1)\left(d^2-\frac{u^2}{d^2}\right)=-u^2(2\alpha^2+2\alpha^3-1)\frac{ust+\beta_4-3u^2}{2},$$

$$u^4(2\alpha^4+2\alpha-1)\left(\frac{d^2}{d_1^{\,2}}-\frac{d_1^{\,2}}{d^2}\right)=u^2(2\alpha^4+2\alpha-1)\frac{ust-\beta_4+3u^2}{2},$$

Складывая, получимъ

Digitized by Google

$$-u^3(2\alpha^2+2\alpha^3-1)\left(d^2-\frac{u^2}{d^2}\right)+u^4(2\alpha^4+2\alpha-1)\left(\frac{d^2}{d_1^2}-\frac{d_1^2}{d^2}\right)=$$

$$=u^2stA-2(3u^2-\beta_4)u^2. \tag{18}$$

Если первую изъ (8) умножимъ на квадратъ (11 гл. I), получимъ

$$u^2\left(\frac{d^6}{d_1^2}-\frac{d_1^2u^4}{d^6}\right)=\frac{u^2(ust+\beta_4-3u^2)(t^2+2u)+u^2(ust-\beta_4+3u^2)}{2u}=$$

$$=\frac{u^2st(t^2+3u)+(\beta_4-3u^2)(t^2+u)u}{2}.$$

Если вторую изъ (8) умножить на квадратъ (10 гл. I), получимъ

$$-u^3\left(\frac{d_1^4}{d^2}-u^2\frac{d^2}{d_1^4}\right)=$$

$$=\frac{u(ust-\beta_4+3u^2)(s^2-2u)-u^2(ust+\beta_4-3u^2)}{2}=$$

$$=\frac{u^2st(s^2-3u)-(\beta_4-3u^2)(s^2-u)u}{2}.$$

Умноживъ соотвѣтственно на $(\alpha+\alpha^4)$ и $(\alpha^2+\alpha^3)$ и результаты сложивъ, получимъ

$$u^3(\alpha+\alpha^4)\left(\frac{d^6}{d_1^2}-\frac{d_1^2u^4}{d^6}\right)-(\alpha^2+\alpha^3)u^3\left(\frac{d_1^4}{d^2}-u^2\frac{d^2}{d_1^4}\right)=$$

$$=\frac{3u^2stA-u^3(\beta_4-3u^2)-\dfrac{u^2st[20\beta_3{}^2A^2+(b_5+w)^2+20\beta A(b_5+w)]}{16A^4}}{2}+ \tag{19}$$

$$+\frac{A(\beta_4-3u^2)[20\beta_3A^2+(b_5+w)^2]+20\beta_3(b_5+w)(\beta_4-3u^2)u^2}{32A^4}.$$

Подставляя (19), (18), (17), (16) въ (15), а потомъ—въ (14), получимъ $\sum_{l=1}^{5} y'_l\,y'_{l+1}$, какъ раціональную функцію отъ A.

Digitized by Google

Зная

$$\sum_{l=1}^{5} y_l y_{l+1},\ \sum_{l=1}^{5} y^2_l y^2_{l+1},\ \sum_{l=1}^{5} y^3_l y^3_{l+1},\ \sum_{l=1}^{5} y^4_l y^4_{l+1},$$

найдемъ по извѣстнымъ формуламъ коэффиціенты при четвертой, третьей, второй и первой степеняхъ неизвѣстнаго; послѣдній же коэффиціентъ будетъ, какъ мы замѣтили,—b_5^2.

Чтобы получить коэффиціенты для другаго множителя 5-ой степени, имѣющаго корнями $y_l y_{l+2}$ (l=1, 2, 3, 4, 5), какъ легко въ томъ убѣдиться, слѣдуетъ подставить вмѣсто A—A, т. е. другой корень уравненія $A^2=\frac{\sigma}{5}$.

Такимъ образомъ видимъ, что теоретическій выводъ вполнѣ примѣнимъ къ уравненію 5-ой степени.

§ 3. Въ § 1 (гл. 2-я) было замѣчено, что вопросъ о разрѣшимости въ радикалахъ уравненія p-ой степени сводится къ розысканію разложенія уравненія $\frac{p(p-1)}{2}$-ой степени на $\frac{p-1}{2}$ множителей.

Покажемъ теперь на уравненіи 5-ой степени (1) гл. 2-я § 2 необходимость и достаточность, для разрѣшимости его въ радикалахъ, такого разложенія уравненія (2) гл. 2-я § 2 на два множителя 5-ой степени. Для этого покажемъ, что всѣ коэффиціенты выражаются раціонально черезъ одинъ коэффиціентъ при четвертой степени неизвѣстнаго, квадратъ котораго, дѣленный на 5, будетъ корнемъ резольвенты (21) гл. I, которое, какъ было сказано, необходимо должно имѣть соизмѣримый корень (въ области коэффиціентовъ), въ случаѣ разрѣшимости нашего уравненія въ радикалахъ.

Пусть эти множители взяты съ неопредѣленными коэффиціентами въ видѣ

1-й $\quad v^5+a_1v^4+a_2v^2+a_3v^2+a_4v+a_5,$

2-й $\quad v^5+c_1v^4+c_2v^3+c_3v^2+c_4v+c_5.$

Перемножая ихъ и приравнивая коэффиціенты этого про-

Digitized by Google

изведенія соотвѣтственнымъ коэффиціентамъ уравненія (2) гл. 2, § 2, получимъ слѣдующія 10 уравненій:

$$a_1+c_1=0, \tag{1}$$

$$a_2+c_2+a_1c_1=-b_4, \tag{2}$$

$$a_3+c_3+a_1c_2+c_1a_2=-b_3^2, \tag{3}$$

$$a_4+c_4+a_1c_3+c_1a_3+a_2c_2=-b_4^2+b_3b_5, \tag{4}$$

$$a_5+c_5+a_1c_4+c_1a_4+a_2c_3+c_2a_3=-2b_5^2, \tag{5}$$

$$a_1c_5+c_1a_5+a_2c_4+c_2a_4+a_3c_3=b_4^3-3b_3b_4b_5, \tag{6}$$

$$a_2c_5+c_2a_5+a_3c_4+c_3a_4=b_4b_5^2, \tag{7}$$

$$a_3c_5+c_3a_5+a_4c_4=0, \tag{8}$$

$$a_4c_5+c_4a_5=-b_5^2b_3, \tag{9}$$

$$c_5a_5=b_5^4. \tag{10}$$

По изложенной выше теоремѣ $c_5=a_5=-b_5^2$.

Подставляя въ (9) получимъ

$$a_4+c_4=b_5b_3 \tag{9'}$$

Обозначая черезъ

$$c_3+a_3=-(b_3^2+x), \tag{11}$$

$$c_3-a_3=\frac{z}{a_1}, \tag{12}$$

принимая изъ (1) $a_1=-c_1$ и занеся въ (2) и (3), получимъ

$$c_2=\frac{a_1(a_1^2-b_4)+x}{2a_1};\quad a_2=\frac{a_1(a_1^2-b_4)-x}{2a_1}. \tag{13}$$

изъ (11) и (12)

$$c_3=\frac{z-a_1(b_3^2+x)}{2a_1};\quad a_3=\frac{-z-a_1(b_3^2+x)}{2a_1}. \tag{14}$$

Digitized by Google

Принимая во вниманіе (9′), а также (13) и (14), изъ (4) получимъ послѣ совершенія дѣйствій

$$4a_1^2z - x^2 + a_1^2(a_1^4 - 2a_1^2b_4 + 5b_4^2) = 0. \qquad (A)$$

Изъ (13) имѣемъ

$$c_3a_4 + a_2c_4 = \frac{a_1b_3b_5(a_1^2 - b_4) - x(c_4 - a_4)}{2a_1};$$

подставляя это въ (6), принимая $c_5 = a_5 = -b_5^2$, получимъ

$$c_4 - a_4 = \frac{-4a_1^2b_4^3 + 2b_3b_5a_1^3(a_1^2 + 5b_4) - z^2 + a_1^2(b_3^2 + x)^2}{2a_1x}.$$

Подставляя это въ (5) получимъ

$$-x^2z - xa_1^2(a_1^2 - b_4)(b_3^2 + x) - 4a_1^4b_4^3 +$$
$$+ 2b_3b_5a_1^4(a_1^2 + 5b_4) - a_1^2z^2 + a_1^4(b_3^2 + x)^2 = 0.$$

Исключая x^2 при помощи (A), получимъ по сокращеніи на a_1^2

$$-5z^2 - z(a_1^2 - b_4)(a_1^2 - 5b_4) + a_1^2b_4(a_1^2 - b_4)^2 +$$
$$+ 2b_3b_5a_1^2(a_1^2 + 5b_4) + b_3^2x(a_1^2 + b_4) + a_1^2b_3^4 = 0. \qquad (B)$$

Изъ (7) и (9′) имѣемъ

$$c_4 + a_4 = b_3b_5,$$

$$a_3c_4 + c_3a_4 = a_1^2b_5^2.$$

Отсюда имѣемъ

$$a_1(c_4 - a_4) = -\frac{a_1^2b_3b_5(b_3^2 + x) + 2a_1^4b_5^2}{z},$$

$$c_4a_4 = \frac{-4a_1^6b_5^4 - 4b_3b_5^3a_1^4(b_3^2 + x) + b_3^2b_5^2[z^2 - a_1^2(b_2^2 + x)^2]}{4z^2}.$$

Подставляя это въ (5) и (8), сокративъ послѣднее на b_5^2, получимъ

Digitized by Google

$$xz^2+za_1^2(a_1^2-b_4)(b_3^2+x)+2a_1^4b_3b_5(b_3^2+x)+4a_1^6b_5^2=0 \quad (C)$$

$$4z^2(b_3^2+x)-4a_1^6b_5^2-4b_3b_5(b_3^2+x)a_1^4+$$

$$+b_3^2z^2-b_3^2a_1^2(b_3^2+x)^2=0. \quad (D)$$

Сложивъ (C) и (D), получимъ

$$(b_3^2+x)[5z^2+za_1^2(a_1^2-b_4)-2b_3b_5a_1^4-b_3^2a_1^2(b_3^2+x)]=0.$$

Приравниваніе $b_3^2+x=0$ ведетъ къ частному случаю $c_3+a_3=0$; поэтому, опуская этотъ множитель, получимъ

$$5z^2+za_1^2(a_1^2-b_4)-2b_3b_5a_1^4-b_3^2a_1^2(b_3^2+x)=0. \quad (D')$$

Сложивъ (B) и (D'), по сокращеніи на b_4 получимъ

$$5z(a_1^2-b_4)+b_3^2x+10b_3b_5a_1^2+a_1^2(a_1^2-b_4)^2=0. \quad (B')$$

Введемъ новыя неизвѣстныя такія u, st, w

$$b_1^2=125u^2;\ x=-a_1^2st;\ z=\frac{2a_1^2(b_4-a_1^2)-25b_3(b_5+w)}{10} \quad (15)$$

Подставляя это въ (B'), получимъ

$$b_3st+\frac{(b_5+w)\left(25u^2-\frac{b_4}{5}\right)}{2u^2}-10b_5=0.$$

а это есть уравненіе (15) главы 1-й, въ которое вмѣсто $s-t$ занесено его значеніе $\frac{(b_5+w)}{10u^2}$.

Занося эти перемѣнныя въ A, получимъ

$$s^2t^2+\frac{2b_3(b_5+w)}{25u^2}-\frac{(25u^4-6u^2\beta_4+\beta_4^2)}{u^2}=0. \quad \left(\beta_4=\frac{b_4}{5}\right)$$

а это будетъ уравненіе (16) главы I-ой, въ которое вмѣсто s^2-t^2 занесено его значеніе изъ (12) и (13) той же главы. Если въ уравненія (B) и (D') подставить эти перемѣнныя и

Digitized by Google

исключить изъ полученныхъ уравненій первую степень количества (b_5+w), то получимъ

$$-\frac{x}{a_1^2}=st=\frac{100\beta_3^2u^2-(b_5+w)^2}{400u^2},$$

т. е. это будетъ произведеніе уравненій (12) и (13) главы I-й.

Итакъ, мы видимъ, что ур-ія (A), (B) и сумма уравненій (C) и (D) привели насъ къ тѣмъ же тремъ уравненіямъ главы I-ой изъ которыхъ легко получается уравненіе резольвенты (21), при чемъ $\sigma=25u^2=\frac{a_1^2}{5}$.

Остается показать, что одно изъ уравненій (C) или (D) есть слѣдствіе трехъ взятыхъ уравненій; но вмѣсто нихъ можно взять разность между (C) и (D), такъ какъ ихъ сумма уже была взята.

Беря разность между (C) и (D) и изъ полученнаго уравненія исключая xz, при помощи (B') умноженнаго на x, получимъ

$$zb_3^2(29a_1^2-25b_4)+x[20a_1^2b_3b_5+5b_3^4-4a_1^2(a_1^2-b_4)^2]+$$

$$+a_1^2[b_3^2(a_1^4-2a_1^2b_4+5b_4^2)+50b_3^3b_5+100a_1^2b_5^2]=0.$$

Исключая x при помощи (B') и вмѣсто z подставляя его значеніе черезъ w изъ (15), получимъ

$$b_5+w=\sigma\frac{4\beta_4^2b_5-2\beta_3b_5^2+22\beta_3^3\beta_4-\sigma(8\beta_4b_5+12\beta_3^3)+4b_5\sigma^2}{5[\beta_3^4-\beta_4^3+\beta_3\beta_4b_5+\sigma(3\beta_4^2-\beta_3b_5)-3\sigma^2\beta_4+\sigma^3]},$$

т. е. получили такую формулу, какъ и изъ уравненія (20) главы I-ой, которая получена изъ вышеупомянутыхъ трехъ уравненій.

Найдемъ теперь изъ (15) x какъ раціональную функцію a_1; слѣдовательно, такою же будутъ c_2, a_2, c_3, a_3 изъ (13), (14), а также c_4 и a_4 изъ уравненій

Digitized by Google

$$c_4 + a_4 = b_3 b_5,$$

$$a_3 c_4 + c_3 c_4 = a_1{}^2 b_5{}^2.$$

Такимъ образомъ, резольвента для уравненія 5-ой степени получена изъ 10 уравненій, опредѣляющихъ коэффиціенты разложенія уравненія 10-ой степени (2) гл. 2 § 1 на два множителя.

Гельсингфорсъ,
26 апрѣля 1893 г.

Digitized by Google

ОДНО ИЗЪ РѢШЕНІЙ ОСНОВНАГО ВОПРОСА ГЕОДЕЗІИ.

М. Ѳ. Хандрикова.

Основнымъ вопросомъ геодезіи занимались многіе геометры и главнымъ образомъ Гауссъ, Бессель и Якоби. Рѣшенія, данныя ими, по формѣ своей существенно различны. Гауссъ выводитъ это рѣшеніе, основываясь на общей теоріи проэкцій; онъ имѣетъ въ виду непосредственное примѣненіе своей теоріи къ вычисленію тріангуляціи, какъ контура построеннаго на поверхности эллипсоида вращенія, по проложенію этого контура на поверхность сферы,—по ряду сферическихъ треугольниковъ. Примѣчательно, что радіусъ той сферы, на которую пролагаетъ контуръ Гауссъ, есть средній радіусъ кривизны для дѣйствительной поверхности земли.

Въ самомъ дѣлѣ, если примемъ въ общей теоріи Гаусса за произвольную функцію извѣстнаго интеграла уравненій съ частными производными функцію вида $f(v) = \alpha v - i\, lgk$; то какъ весьма извѣстно, радіусъ сферы, на которую пролагается дѣйствительная тріангуляція, есть

$$R = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 sin^2\varphi}.$$

Извѣстно также, что средній радіусъ кривизны представляется въ видѣ $\rho = \sqrt{R_1 R_2}$, гдѣ подъ R_1 разумѣемъ радіусъ кривизны меридіана и подъ R_2 радіусъ кривизны главнаго сѣченія перпендикулярнаго къ меридіану, а такъ какъ

Digitized by Google

$$R_1 = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2\varphi)^{3/2}}; \quad R_2 = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

то ясно, что Гауссова сфера проэкціи описывается среднимъ радіусомъ кривизны.

Рѣшеніе основнаго вопроса геодезіи, предложенное Якоби, зависитъ отъ вычисленія эллиптическаго аргумента перваго вида и отъ двухъ Якобіевыхъ функцій Θ и H. По этимъ функціямъ оно представляется въ конечномъ видѣ.

Наконецъ рѣшеніе предложенное Бесселемъ, и почти исключительно примѣняемое на практикѣ, сводитъ рѣшеніе сфероидическаго треугольника съ сторонами какъ частями геодезическихъ кривыхъ, къ рѣшенію вспомогательнаго сферическаго треугольника. Въ этомъ смыслѣ между рѣшеніями Гаусса и Бесселя существуетъ извѣстная аналогія. Бессель рѣшаетъ вопросъ посредствомъ рядовъ, но приходитъ къ рѣшенію весьма искусственнымъ пріемомъ, и искусственность обусловливается необходимостью устранить эллиптическій интегралъ третьяго вида съ мнимымъ параметромъ.

Если условимся не избѣгать разложенія въ ряды извѣстныхъ функцій по степенямъ эксцентриситета, то рѣшеніе задачи весьма просто можетъ быть получено чрезъ интегрированіе уравненій геодезической кривой посредствомъ разложенія въ ряды. При малости эксцентриситета земного меридіана эти ряды имѣютъ быструю сходимость и вычисленіе точное до величинъ шестаго порядка относительно эксцентриситета отнюдь не представляется болѣе сложнымъ, чѣмъ рѣшеніе Бесселя, но по аналитической формѣ гораздо болѣе просто чѣмъ это послѣднее.

Такъ какъ радіусъ кривизны геодезической кривой, проведенной по поверхности $u=0$, направляется по нормали къ поверхности, то

$$\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{du}{dx}} = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{du}{dy}} = \frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\frac{du}{dz}};$$

Digitized by Google

если уравненіе поверхности рѣшено относительно z, то

$$\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}}{p} = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}}{q} = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}}{-1},$$

гдѣ какъ обыкновенно:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x};\ q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Изъ этихъ пропорцій имѣемъ между прочимъ уравненіе

$$p.\partial\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right) - q.\partial\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) = 0.$$

Будемъ имѣть въ виду исключительно поверхности вращенія. Такія поверхности представляются уравненіемъ

$$z = \varphi(x^2 + y^2),$$

гдѣ φ есть совершенно произвольная функція. Посредствомъ этого приводимъ предыдущее уравненіе въ виду:

$$x.\partial\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right) - y.\partial\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) = 0.$$

Интегралъ этого уравненія есть

$$x.dy - y.dx = c.ds,$$

гдѣ c есть произвольная постоянная. Отсюда легко вывести конечный интегралъ. Въ самомъ дѣлѣ, если означимъ чрезъ ρ радіусъ какой либо параллели поверхности вращенія и чрезъ λ уголъ составленный этимъ радіусомъ съ плоскостію xs, то при всякой формѣ меридіана имѣемъ

$$x = \rho.\cos\lambda,\quad y = \rho.\sin\lambda.$$

слѣдовательно

$$x.dy - y.dx = \rho^2.d\lambda,$$

а потому предыдущій интегралъ принимаетъ видъ

Digitized by Google

$$\rho^2 . d\lambda = c . ds.$$

Означимъ чрезъ α азимутъ геодезической кривой при данной точкѣ, считаемый отъ сѣверной части меридіана. Изъ безконечно малаго треугольника составленнаго элементами параллели, меридіана и геодезической кривой имѣемъ

$$ds . sin\alpha = \rho . d\lambda,$$

гдѣ подъ ds разумѣемъ элементъ геодезической кривой. Посредствомъ этого приводимъ предыдущее уравненіе въ виду

$$\rho . sin\alpha = c.$$

откуда заключаемъ, что на всякой поверхности вращенія въ каждой точкѣ геодезической кривой произведеніе радіуса параллели на синусъ азимута есть величина постоянная.

Пользуясь этимъ свойствомъ, рѣшимъ основной геодезическій вопросъ. Опредѣлимъ разстояніе двухъ точекъ на эллипсоидѣ вращенія, считаемое по геодезической кривой, и разность долготъ этихъ точекъ.

Вообще элементарное разстояніе между двумя точками на какой-либо поверхности представляется въ видѣ

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

или

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 . d\lambda^2 + dz^2.$$

Чтобы это выраженіе представляло элементъ геодезической кривой, необходимо чтобы

$$\rho^2 . d\lambda = c . ds,$$

опредѣляя изъ этихъ двухъ уравненій сначала ds, а потомъ $d\lambda$, находимъ

$$ds = \rho \sqrt{\frac{d\rho^2 + dz^2}{\rho^2 - c^2}}\ ;\ d\lambda = \frac{c}{\rho} \sqrt{\frac{d\rho^2 + dz^2}{\rho^2 - c^2}}\ . \qquad (1)$$

Эти выраженія справедливы для всякой поверхности вращенія. Разовьемъ ихъ и приведемъ интегралы къ канонической формѣ

Digitized by Google

для поверхности эллипсоида вращенія. Означимъ полуоси и эксцентриситетъ эллипсоида чрезъ a, b и e. Пусть приведенная широта разсматриваемой точки будетъ u. Тогда при извѣстномъ выборѣ осей координатъ

$$x = a.\cos u.\cos\lambda$$

$$y = a.\cos u.\sin\lambda$$

$$z = b.\sin u$$

$$\rho = a.\cos u$$

поэтому

$$d\rho^2 + dz^2 = a^2\,(1 - e^2.\cos^2 u).du^2.$$

На основаніи вышеупомянутаго свойства геодезической кривой имѣемъ

$$c = a.\cos u_0$$

гдѣ подъ u_0 разумѣемъ приведенную широту той точки, въ которой разсматриваемая геодезическая кривая съ однимъ изъ меридіановъ пересѣкается подъ прямымъ угломъ.

Такимъ образомъ

$$\rho^2 - c^2 = a^2\,(\cos^2 u - \cos^2 u_0).$$

Итакъ для поверхности эллипсоида вращенія

$$s = a\int \cos u \sqrt{\frac{1 - e^2\cos^2 u}{\cos^2 u - \cos^2 u_0}}.du$$

$$\lambda = \int \frac{\cos u_0}{\cos u} \sqrt{\frac{1 - e^2.\cos^2 u}{\cos^2 u - \cos^2 u_0}}.du.$$

Чтобы привести эти квадратуры въ канонической формѣ, введемъ новое перемѣнное ψ подъ условіемъ

$$\cos\psi = \frac{\sin u}{\sin u_0}$$

и принимая

$$e.\cos u_0 = \cos h;\quad \frac{e.\sin u_0}{\sin h} = k,$$

Digitized by Google

найдемъ

$$s = -a.\sin h \int \sqrt{1-k^2.\sin^2\psi}.\partial\psi,$$

$$\lambda = -\int \frac{\sin h.\sqrt{1-k^2.\sin^2\psi}\,\partial\psi}{\cos u_0(1+tang^2 u_0 \sin^2\psi)},$$

послѣднее легко представляется въ видѣ

$$\lambda = \frac{-1}{\sin h.\cos u_0}\int \frac{\partial\psi}{(1+tang^2 u_0\sin^2\psi)\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} + \\ + \frac{e^2.\cos u_0}{\sin h}\int \frac{\partial\psi}{\sqrt{1-k^2.\sin^2\psi}}.$$

Итакъ видимъ, что вычисленіе разстоянія считаемаго по геодезической кривой приводится къ вычисленію эллиптическаго интеграла втораго вида, а вычисленіе разности долготъ тѣхъ же точекъ зависитъ отъ вычисленія интеграла перваго вида и интеграла третьяго вида съ мнимымъ параметромъ. Во всякомъ случаѣ эти квадратуры въ конечномъ видѣ выполнены быть не могутъ.

Такъ какъ эксцентриситетъ земнаго меридіана не великъ, то вычисленіе точное до членовъ шестаго порядка относительно эксцентриситета удовлетворитъ всѣмъ потребностямъ практики; а въ этихъ предѣлахъ точности, какъ легко видѣть, интегрированіе приведетъ только къ элементарнымъ трансцендентнымъ функціямъ. Для эллипсиса $e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$; но мы примемъ

$$\frac{a^2-b^2}{b^2} = \mu$$

и разложимъ подъинтегральныя функціи по степенямъ μ.

Второе изъ выраженій (1) представляется между прочимъ въ видѣ

$$\lambda = \int \frac{\cos u_0}{\cos u}\sqrt{\frac{b^2.\cos^2 u + a^2.\sin^2 u}{a^2(\cos^2 u - \cos^2 u_0)}}\,\partial u,$$

Digitized by Google

при нашемъ означеніи это легко приводится къ виду

$$\lambda = \frac{b}{a}\int \frac{\cos u_0}{\cos u}\sqrt{\frac{1+\mu\sin^2 u}{\cos^2 u - \cos^2 u_0}}\,du,$$

или

$$\lambda = \frac{b}{a}\int \frac{\cos u \cdot \cos u_0}{\cos^2 u\sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}}\sqrt{1+\mu\sin^2 u}\cdot du;$$

откуда вѣрно до членовъ шестаго порядка относительно эксцентриситета находимъ

$$\lambda = \int \frac{\cos u \cdot \cos u_0}{\cos^2 u\sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}}\left[1 - \left(\frac{\mu}{2} - \frac{\mu^2}{4}\right)\cos^2 u + \frac{\mu^2}{8}(1 - \sin^4 u)\right]du,$$

что легко приводимъ къ виду

$$\lambda = \int \frac{\cos u \cdot \cos u_0 \cdot du}{\cos^2 u\sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}} - \left(\frac{\mu}{2} - \frac{3}{8}\mu^2\right)\int \frac{\cos u_0 \cos u \cdot du}{\sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}} +$$

$$+ \frac{\mu^2}{8}\int \frac{\cos u_0 \cos u \cdot \sin^2 u \cdot du}{\sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}}.$$

Такъ какъ тождественно

$$\sin^2 u_0 - \sin^2 u = [tang^2 u_0 - tang^2 u]\cos^2 u \cdot \cos^2 u_0$$

то

$$\int \frac{\cos u \cos u_0 du}{\cos^2 u\sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}} = -arc.\left(\cos = \frac{tang\, u}{tang\, u_0}\right).$$

Кромѣ того очевидно

$$\int \frac{\cos u_0 \cos u \cdot du}{\sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}} = -\cos u_0 \cdot arc\left(\cos = \frac{\sin u}{\sin u_0}\right).$$

Наконецъ посредствомъ интегрированія по частямъ выводимъ

$$\int \frac{\sin^2 u \cdot \cos u \cdot du}{\sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}} = \int \frac{\sin^2 u \cdot \partial(\sin u)}{\sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}} = -\sin u\sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}$$

$$+ \int \cos u\sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}\cdot du.$$

Digitized by Google

Это можно представить въ видѣ

$$\int \frac{\sin^2 u \cdot \cos u \, du}{\sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}} = -\sin u \sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u} + \int \frac{\sin^2 u_0 \cos u \cdot du}{\sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}} - \int \frac{\sin^2 u \cos u \, du}{\sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}}.$$

Слѣдовательно

$$\int \frac{\sin^2 u \cdot \cos u \cdot du}{\sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}} = -\frac{\sin u}{2} \sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u} - \frac{\sin^2 u_0}{2} \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{\sin u}{\sin u_0}\right).$$

Такимъ образомъ окончательно находимъ

$$\lambda = -\operatorname{arc}.\left(\cos = \frac{\operatorname{tang} u}{\operatorname{tang} u_0}\right) + \left(\frac{\mu}{2} - \frac{3}{8}\mu^2 - \frac{\mu^2}{16}\sin^2 u_0\right) \cos u_0 \operatorname{arc}.\left(\cos = \frac{\sin u}{\sin u_0}\right) - \frac{\mu^2}{16} \cos u_0 \sin^2 u_0 \frac{\sin u}{\sin u_0} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2 u_0}}. \quad (2)$$

Первое изъ выраженій (1) легко представляется въ видѣ

$$s = b \int \frac{\partial(\sin u)}{\sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}} \sqrt{1 + \mu \sin^2 u}.$$

Съ тою же степенью точности, какъ при вычисленіи разности долготъ, имѣемъ

$$\frac{s}{b} = \int \frac{\partial(\sin u)}{\sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}} + \frac{\mu}{2} \int \frac{\sin^2 u \cdot \partial(\sin u)}{\sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}} - \frac{\mu^2}{8} \int \frac{\sin^4 u \partial(\sin u)}{\sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}}$$

Мы уже видѣли къ чему приводятся два первые интеграла. Остается выполнить интегрированіе въ послѣднемъ членѣ. Интегрируя по частямъ, имѣемъ

Digitized by Google

$$\int \frac{\sin^4 u\, \partial(\sin u)}{\sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}}$$

$$= -\sin^3 u \sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u} + 3 \int \sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}\, .\, \sin^2 u\, .\, \partial(\sin u)\, .$$

Что можемъ представить въ видѣ

$$\int \frac{\sin^4 u\, .\, \partial(\sin u)}{\sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}}$$

$$= -\sin^3 u \sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u} + 3\sin^2 u_0 \int \frac{\sin^2 u\, .\, \partial(\sin u)}{\sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}}$$

$$- 3 \int \frac{\sin^4 u\, \partial(\sin u)}{\sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}}$$

или

$$\int \frac{\sin^4 u\, \partial(\sin u)}{\sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}} = -\frac{\sin^3 u}{4} \sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}$$

$$- \frac{3}{4} \sin^2 u_0 \left[\frac{\sin u}{2} \sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u} + \frac{\sin^2 u_0}{2} arc\left(\cos = \frac{\sin u}{\sin u_0}\right) \right].$$

Такимъ образомъ

$$\frac{s}{b} = -\left(1 + \frac{\mu}{4}\sin^2 u_0 - \frac{3}{64}\mu^2 .\sin^4 u_0\right) arc\left(\cos = \frac{\sin u}{\sin u_0}\right)$$

$$- \left(\frac{\mu}{4} - \frac{3}{64}\mu^2 .\sin^2 u_0\right) \sin u \sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u}$$

$$+ \frac{\mu^2}{32} \sin^3 u \sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u},$$

а это представимъ въ видѣ

$$\frac{s}{b} = -\left(1 + \frac{\mu}{4}\sin^2 u_0 - \frac{3}{64}\mu^2 .\sin^4 u_0\right) arc\left(\cos = \frac{\sin u}{\sin u_0}\right)$$

$$- \left(\frac{\mu}{4}\sin^2 u_0 - \frac{3}{64}\mu^2 .\sin^4 u_0\right) \frac{\sin u}{\sin u_0} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2 u_0}} \qquad (3)$$

$$+ \frac{\mu^2}{32} \sin u_0 \sin^3 u \sqrt{1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2 u_0}}.$$

Digitized by Google

Примемъ

$$arc\left(cos = \frac{sin\, u}{sin\, u_0}\right) = \sigma;\ arc.\left(cos = \frac{tang\, u}{tang\, u_0}\right) = \omega,$$

тогда

$$cos\,\sigma = \frac{sin\, u}{sin\, u_0};\ cos\omega = \frac{tang\, u}{tang\, u_0}\ *). \qquad (4)$$

Легко видѣть, что эти уравненія представляютъ соотношенія между частями сферическаго треугольника, стороны котораго суть $90^0 - u$, $90^0 - u_0$ и σ; противъ стороны σ лежитъ уголъ ω, а противъ стороны $90 - u$ находится прямой уголъ. Отсюда заключаемъ, что уравненія (4) всегда возможны.

Съ помощію уравненій (4) легко составляемъ

$$\frac{sin\, u}{sin\, u_0}\sqrt{1 - \frac{sin^2 u}{sin^2 u_0}} = \frac{sin\, 2\sigma}{2}$$

$$\frac{sin^3 u}{sin^3 u_0}\sqrt{1 - \frac{sin^2 u}{sin^2 u_0}} = \frac{1}{8}\, sin\, 4\sigma + \frac{1}{4}\, sin\, 2\sigma.$$

Принимая это во вниманіе, приводимъ выраженія (2) и (3) къ виду

$$\frac{s}{b} = -\left(1 + \frac{\mu}{4} sin^2 u_0 - \frac{3}{64}\mu^2 . sin^4 u_0\right)\sigma$$

$$-\left(\frac{\mu}{4} . sin^2 u_0 - \frac{\mu^2}{32} sin^4 u_0\right) sin\, 2\sigma$$

$$+ \frac{\mu^2}{256} sin^4 u_0\, sin\, 4\sigma;$$

$$\lambda = -\omega + \left[\left(\frac{\mu}{2} - \frac{3}{8}\mu^2 - \frac{\mu^2}{16} sin^2 u_0\right) cos\, u_0\right]\sigma$$

$$-\frac{\mu^2}{32} cos\, u_0\, sin^2 u_0\, sin\, 2\sigma.$$

Къ этимъ интегралamъ мы не прибавляемъ постоянныхъ, ибо имѣемъ въ виду взять ихъ между надлежащими предѣлами.

---

*) Замѣтимъ, что σ есть то перемѣнное, по которому интегралы рѣшенія приводятся къ канонической формѣ.

Digitized by Google

Первый изъ этихъ интеграловъ представляетъ выраженную въ единицахъ малой оси сфероида длину геодезической кривой, заключающейся между точкой, приведенная широта которой есть u, и точкой, въ которой эта геодезическая кривая пересѣкается съ нѣкоторымъ меридіаномъ подъ прямымъ угломъ. Также λ есть уголъ, который составляютъ меридіанъ точки съ широтою u и меридіанъ пересѣкающійся съ разсматриваемой геодезической кривой подъ прямымъ угломъ.

Примемъ для постоянныхъ слѣдующія означенія

$$A = 1 + \frac{\mu}{4} sin^2 u_0 - \frac{3}{64} \mu^2 sin^2 u_0$$

$$B = \frac{\mu}{4} sin^2 u_0 - \frac{\mu^2}{32} sin^4 u_0$$

$$C = \frac{\mu^2}{256} sin^4 u_0$$

$$F = \left(\frac{\mu}{2} - \frac{3}{8} \mu^2 + \frac{\mu^2}{16} . sin^2 u_0 \right) cos u_0$$

$$G = \frac{\mu^2}{32} cos\, u_0 sin^2 u_0 .$$

Тогда

$$\frac{s}{b} = -A\sigma - B\, sin\, 2\sigma + C\, sin\, 4\sigma$$

$$\lambda = -\omega + F.\sigma - G.sin\, 2\sigma.$$

Эти выраженія соотвѣтствуютъ дугѣ геодезической кривой, заключающейся между точками съ приведенными широтами u и u_0.

Для дуги той же геодезической кривой, конечныя точки которой имѣютъ широты u_0 и u_1, подобно предыдущему напишемъ

$$\frac{s_1}{b} = -A\sigma_1 - B . sin\, 2\sigma_1 + C . sin\, 4\sigma$$

$$\lambda_1 = -\omega_1 + F.\, \sigma_1 - G. sin\, 2\sigma,$$

гдѣ

$$cos\, \sigma_1 = \frac{sin\, u_1}{sin\, u_0}\, ;\ cos\omega_1 = \frac{tang\, u_1}{tang\, u_0} .$$

Digitized by Google

Слѣдовательно для части геодезической кривой, заключающейся между точками съ приведенными широтами u и u_1, имѣемъ

$$\frac{S}{b} = A(\sigma_1 - \sigma) + 2B\sin(\sigma_1 - \sigma)\cos(\sigma_1 + \sigma) -$$

$$- 2C\sin 2(\sigma_1 - \sigma)\cos 2(\sigma_1 + \sigma)$$

$$L = \omega_1 - \omega - F(\sigma_1 - \sigma) + 2G.\sin(\sigma_1 - \sigma)\cos(\sigma_1 + \sigma).$$

Это рѣшеніе основнаго геодезическаго вопроса по формѣ аналогично съ рѣшеніемъ Бесселя, оно также какъ и рѣшеніе Бесселя зависитъ отъ вычисленія вспомогательнаго сферическаго треугольника, но показанный здѣсь анализъ не заключаетъ въ себѣ искусственныхъ пріемовъ и не требуетъ построенія упомянутаго треугольника a priori. Что касается до степени точности представляемой этимъ рѣшеніемъ, то въ вычисленіи дѣйствительныхъ тріангуляцій оно удовлетворяетъ всѣмъ потребностямъ практики.

Для вычисленія предыдущихъ выраженій по даннымъ приведеннымъ широтамъ разсматриваемыхъ точекъ необходимо прежде всего вычислить постоянную u_0. Основное свойство геодезической кривой на всякой поверхности вращенія даетъ для этого уравненія

$$\cos u_0 = \cos u.\sin\alpha = \cos u_1 \sin\alpha_1.$$

Если данной точкѣ соотвѣтствуютъ u_1 и α_1, то u_0 опредѣлится изъ

$$\cos u_0 = \cos u_1 \sin\alpha_1.$$

Хотя въ это выраженіе входитъ α_1 т. е. азимутъ геодезической кривой, но онъ всегда можетъ быть замѣненъ азимутомъ нормальнаго сѣченія проведеннаго изъ данной чрезъ опредѣляемую точку.

Digitized by Google

НѢКОТОРЫЯ ТЕОРЕМЫ ИЗЪ ТЕОРІИ ОПРЕДѢЛИТЕЛЕЙ.

И. М. Занчевскаго.

(Сообщено математической секціи IX Съѣзда Естествоиспытателей и Врачей 8-го января 1894 г.).

§ 1. Обозначимъ буквою D опредѣлитель

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (1)$$

черезъ $D^{n_1 n_2 \dots n_p}_{m_1 m_2 \dots m_p}=\left(D^n_m\right)$ — его миноръ, взятый со своимъ знакомъ, черезъ $\overline{D}^{n_1 \dots n_p}_{m_1 \dots m_p}=\left(\overline{D}^n_m\right)$ — опредѣлитель, получающійся изъ опредѣлителя (1) выпущеніемъ m_1-ой,... m_p-ой горизонталей и n_1-ой,....n_p-ой вертикалей. Если въ символахъ $\left(D^n_m\right)$ и $\left(\overline{D}^n_m\right)$ нужно будетъ замѣнить указатели m_{k_1}, m_{k_2}....указателями r_{k_1}, r_{k_2},..., то эту замѣну будемъ обозначать такъ:

$$\left(D^n_m\right)^{m_{k_1},\ m_{k_2},\dots}_{r_{k_1},\ r_k\dots,}, \quad \left(\overline{D}^n_m\right)^{m_{k_1},\ m_{k_2},\dots}_{r_{k_1},\ r_{k_2},\dots}$$

Digitized by Google

Условившись въ этихъ обозначеніяхъ, докажемъ справедливость тождества

$$\left(D_m^n\right)\cdot\left(D_q^n\right)=\sum_{r=1}^{r=p}\left(D_m^n\right)_{q_r}^{m_k}\cdot\left(D_q^n\right)_{m_k}^{q_r}, \qquad (2)$$

гдѣ m_k какой либо изъ указателей $m_1,\ldots.m_p$.

По теоремѣ Сильвестра *) произведеніе двухъ опредѣлителей одинаковаго порядка можетъ быть составлено слѣдующимъ образомъ. Намѣтивъ какую либо горизонталь, напр. k-ую, во второмъ опредѣлителѣ, замѣнимъ ее какою-либо горизонталью, напр. x-вою, изъ перваго, поставивъ вмѣстѣ съ тѣмъ въ первомъ на мѣстѣ x-вой горизонтали k-ую изъ втораго. Перемноживъ полученные такимъ образомъ два опредѣлителя, составимъ сумму такихъ произведеній для всѣхъ возможныхъ значеній x. Опредѣлители $\left(\overline{D}_m^n\right)$ и $\left(\overline{D}_q^n\right)$ имѣютъ нѣкоторыя горизонтали равными, поэтому нѣкоторыя изъ вышеуказанныхъ частныхъ произведеній будутъ нулями. Если помѣтимъ во второмъ опредѣлителѣ горизонталь

$$a_{1,m_k},\ a_{2,m_k}\cdot\ldots\ a_{n,m_k} \qquad (3)$$

и будемъ вмѣсто нея ставить горизонтали

$$a_{1,x},\ a_{2,x},\ldots\ a_{n,x}$$

изъ перваго, то только тогда будемъ получать произведенія отличныя отъ нулей, если x имѣетъ одно изъ значеній $q_1, q_2\ldots.q_p$.

Измѣнивъ во второмъ опредѣлителѣ горизонталь (3) на

$$a_{1,q_r},\ a_{2,q_r},\ldots\ a_{n,q_r} \qquad (4)$$

передвинемъ послѣднюю такимъ образомъ, чтобы вторые указатели элементовъ полученнаго опредѣлителя шли въ убы-

*) См. The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine за 1851 г.

Digitized by Google

вающемъ порядкѣ, при чемъ опредѣлитель придется умножить на $(-1)^{\lambda'_r}$, гдѣ

$$\lambda'_r = m_k - q_r - 1 + \nu'_r.$$

и ν'_r есть число указателей изъ ряда $q_1 \ldots q_p$, заключающихся между числами m_k и q_r.

Поставивъ затѣмъ въ опредѣлитель $\left(\overline{D}^n_m\right)$ вмѣсто горизонтали (4) горизонталь (3) и передвинувъ ее такъ, чтобы вторые указатели элементовъ полученнаго опредѣлителя шли въ убывающемъ порядкѣ, мы его умножимъ на $(-1)^{\lambda''_r}$, гдѣ

$$\lambda''_r = m_k - q_r - 1 + \nu''_r,$$

гдѣ ν''_r есть число указателей изъ ряда $m_1, \ldots . m_p$, заключающихся между m_k и q_r. Такимъ образомъ наше произведеніе получитъ множителя

$$(-1)^{\lambda'_r + \lambda''_r} = (-1)^{\nu'_r + \nu''_r},$$

и мы можемъ написать

$$\left(\overline{D}^n_m\right).\left(\overline{D}^n_q\right) = \sum_{r=1}^{r=p} \left(\overline{D}^n_m\right)^{m_k}_{q_r} . \left(\overline{D}^n_q\right)^{q_r}_{m_k} . (-1)^{\nu'_r + \nu''_r}. \quad (5)$$

Пусть s_1, s_2 и s_3 обозначаютъ, сколько должно быть произведено двойныхъ перестановленій въ каждомъ изъ порядковъ

$$\begin{matrix} m_1 & m_2 \ldots . m_p \\ q_1 & q_2 \ldots . q_p \\ n_1 & n_2 \ldots . n_p, \end{matrix}$$

чтобы получить въ каждомъ рядъ убывающихъ чиселъ. Умноживъ обѣ части равенства (5) на $(-1)^\varepsilon$, гдѣ

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^{k=p} (m_k + 2n_k + q_k) + s_1 + s_2 + 2s_3,$$

Digitized by Google

мы получимъ слѣва произведеніе миноровъ $\left(D^n_m\right)$ и $\left(D^n_q\right)$.

Покажемъ, что общій членъ суммы, стоящей въ правой части равенства, обратится при этомъ также въ произведеніе миноровъ $\left(D^n_m\right)^{m_k}_{q_r}$ и $\left(D^n_q\right)^{q_r}_{m_k}$.

Въ самомъ дѣлѣ, чтобы обратить рядъ

$$m_1\ m_2 \ldots . m_{k-1}\ q_r\ m_{k+1} \ldots . m_p$$

въ рядъ убывающихъ чиселъ мы можемъ поступить слѣдующимъ образомъ: составить рядъ убывающихъ указателей изъ порядка

$$m_1\ m_2 \ldots\ m_{k-1}\ m_k\ m_{k+1} \ldots\ m_p,$$

слѣдовательно произвести s_1 двойныхъ перестановленій, измѣнить m_k на q_r и отвести q_r на подобающее ему мѣсто, для чего потребуется произвести ν''_r новыхъ двойныхъ перестановленій. Слѣдовательно

$$\left(D^n_m\right)^{m_k}_{q_r} =$$

$$= \left(\overline{D}^n_m\right)^{m_k}_{q_r} (-1)^{\sum_1^p n_k + m_1 + \ldots + m_{k-1} + q_r + m_{k+1} + \ldots m_p + s_1 + \nu'_r + s_2}$$

Подобнымъ же образомъ

$$\left(D^n_q\right)^{q_r}_{m_k} =$$

$$= \left(\overline{D}^n_q\right)^{q_r}_{m_k} (-1)^{\sum_1^p n_k + q_1 + \ldots q_{r-1} + m_k + q_{r+1} + \ldots q_p + s_2 + \nu'_r + s_3}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что равенство (5) послѣ умноженія на $(-1)^s$ обратится въ (2), что и потребовалось доказать.

Digitized by Google

§ 2. Предыдущую теорему можно обобщить въ томъ направленіи, что вмѣсто одного указателя m_k взять k какихъ либо указателей $m_{l_1} \ldots m_{l_k}$ изъ ряда $m_1 \ldots m_p$. Поставивъ вмѣсто нихъ k нижнихъ указателей минора $\left(D_q^n \right) : q_{r_1} \ldots q_{r_k}$, отошлемъ на мѣста послѣднихъ указатели $m_{l_1} \ldots m_{l_k}$, составимъ произведеніе двухъ полученныхъ миноровъ и просуммируемъ его по всѣмъ различнымъ сочетаніямъ $r_1 \ldots r_k$ изъ ряда $1, 2, \ldots p$; тогда получимъ:

$$\left(D_m^n \right) \cdot \left(D_q^n \right) = \sum_{r_1, \ldots r_k} \left(D_m^n \right)_{q_r \ldots q_{r_k}}^{m_{l_1} \ldots m_{l_k}} \cdot \left(D_q^n \right)_{m_{l_1} \ldots m_{l_k}}^{q_{r_1} \ldots q_r} \qquad (6)$$

Предполагая это равенство справедливымъ при какомъ либо k, докажемъ, что оно будетъ справедливымъ для $k+1$. Примѣнимъ къ произведенію двухъ миноровъ, стоящихъ подъ знакомъ суммы въ равенствѣ (6), теорему § 1, ставя вмѣсто указателя $m_{l_{k+1}}$ въ первомъ минорѣ различные указатели второго минора. Эти послѣдніе двухъ родовъ: они принадлежатъ или къ группѣ m или къ группѣ q; поэтому

$$\left(D_m^n \right) \cdot \left(D_q^n \right) = \sum_{r_1 \ldots r_k} \sum_{x=1}^{k} \left(D_m^n \right)_{q_{r_1} \ldots m_{r_x}}^{m_{l_1} \ldots m_{l_{k+1}}} \cdot \left(D_q^n \right)_{m_{l_1} \ldots m_{l_k} m_{l_{k+1}}}^{q_{r_1} \ldots q_{r_k} m_{r_x}}$$

$$+ \sum_{r_1 \ldots r_k} \sum_{r_{k+1}} \left(D_m^n \right)_{q_{r_1} \ldots q_{r_{k+1}}}^{m_{l_1} \ldots m_{l_{k+1}}} \cdot \left(D_q^n \right)_{m_{l_1} \ldots m_{l_{k+1}}}^{q_{r_1} \ldots q_{r_{k+1}}} . \qquad (7)$$

Разсмотримъ общій членъ первой суммы. Въ первомъ множителѣ мы должны вмѣсто указателей

$$m_{l_1} \ldots m_{l_k}, m_{l_{k+1}}$$

ставить указатели

$$q_{l_1} \ldots q_{l_k}, m_{r_x},$$

Digitized by Google

или, умножая миноръ на —1 и переставляя указатели m_{r_x} и q_{l_x}, мы сведемъ весь процессъ къ замѣнѣ указателей

$$m_{l_1} \ldots m_{l_{x-1}} m_{l_{x+1}} \ldots m_{l_k}, m_{l_{k+1}}$$

указателями

$$q_{l_1} \ldots q_{l_{x-1}}, q_{l_{x+1}} \ldots q_{l_k}, q_{l_x}$$

и къ умноженію минора на —1. Во второмъ множителѣ дѣло сводится къ замѣнѣ указателей

$$q_{r_1} \ldots q_{r_x} \ldots q_{r_k}$$

указателями

$$m_{l_1} \ldots m_{l_{k+1}} \ldots m_{l_k}.$$

Отсюда видно, что общій членъ первой суммы разнится отъ общаго члена суммы (6) только тѣмъ, что вмѣсто k указателей $m_{l_1} \ldots m_{l_k}$ взяты k другихъ, именно указатель m_{l_x} отброшенъ и вмѣсто него взять указатель $m_{l_{k+1}}$; кромѣ того этотъ общій членъ сопровождается множителемъ—1. Просуммировавъ по $r_1 \ldots r_k$, мы получимъ

$$-\left(D_m^n\right).\left(D_q^n\right)$$

и такъ какъ затѣмъ придется суммировать по x, то первая сумма равенства (7) дастъ

$$-k\left(D_m^n\right).\left(D_q^n\right). \qquad (8)$$

Обратимся ко второй суммѣ равенства (7).

Такъ какъ $r_1 \ldots r_k$ представляетъ какое-либо сочетаніе изъ k элементовъ ряда $1, 2, \ldots p$, а r_{k+1} одно изъ оставшихся чиселъ, то какому-либо сочетанію изъ $k+1$ чиселъ $r_1 \ldots r_k, r_{k+1}$ будетъ соотвѣтствовать $k+1$ различныхъ сочетаній по k, причемъ r_{k+1} будетъ получать послѣдовательно значенія r_{k+1}, $r_k \ldots r_1$. Каждому такому сочетанію изъ $k+1$ элементовъ будетъ соотвѣтствовать $k+1$ произведеній, которыя между со-

Digitized by Google

бою равны. Перенеся слѣдовательно выраженіе (8) въ лѣвую часть равенства и сокративъ на общаго множителя $k+1$, получимъ

$$\left(D^{n}_{m}\right)\left(D^{n}_{q}\right)=\sum\left(D^{n}_{m}\right)^{m_{l_1}\ldots m_{l_{k+1}}}_{q_{r_1}\ldots q_{r_{k+1}}}\left(D^{n}_{m}\right)^{q_{r_1}\ldots q_{r_{k+1}}}_{m_{l_1}\ldots m_{l_{k+1}}},$$

т. е. мы получили равенство (6) для значенія k на единицу большаго.

§ 3. Разсмотримъ теперь тотъ случай, когда нѣкоторые изъ верхнихъ указателей двухъ миноровъ-производителей различны. Пусть напр. имѣемъ произведеніе

$$D^{n_1\,n_2\,n_3}_{m_1 m_2 m_3}\cdot D^{n_1 n_4}_{k_1 k_4}.$$

Разлагая каждый изъ миноровъ, получимъ

$$D^{n_1\,n_2\,n_3}_{m_1 m_2 m_3}\cdot D^{n_1 n_4}_{k_1 k_4}=$$

$$=\sum_{x_4,\,y_2,\,y_3} D^{n_1\,n_2\,n_3 n_4}_{m_1 m_2 m_3 x_4}\;D^{n_1 n_2 n_3 n_4}_{k_1 y_2\,y_3 k_4}\cdot a_{n_1 x_4} a_{n_2 y_2} a_{n_3 y_3}, \qquad (9)$$

гдѣ x_4, y_2, y_3 могутъ имѣть значенія $1, 2, \ldots n$.

Остается преобразовать какимъ-либо образомъ, руководствуясь § 2, произведеніе, стоящее подъ знакомъ суммы. Примемъ напр. указатели m_1 и x_4 за тѣ указатели перваго минора, съ которыми мы будемъ обмѣнивать различные указатели второго минора; тогда получимъ: *)

$$\begin{aligned} D^{n_1\,n_2\,n_3 n_4}_{m_1 m_2 m_3 x_4}\cdot D^{n_1 n_2 n_3 n_4}_{k_1 y_2 y_3 k_4} &= D^{(n)}_{k_1 m_2 m_3 y_2}\;D^{(n)}_{m_1 x_4 y_3 k_4} + \\ &+ D^{(n)}_{k_1 m_2 m_3 y_3}\cdot D^{(n)}_{m_1 y_2 x_4 k_4} + D^{(n)}_{k_1 m_2 m_3 k_4}\cdot D^{(n)}_{m_1 y_2 y_3 x_4} + \\ &+ D^{(n)}_{y_2 m_2 m_3 y_3}\cdot D^{(n)}_{k_1 m_1 x_4 k_4} + D^{(n)}_{y_2 m_2 m_3 k_4}\cdot D^{(n)}_{k_1 m_1 y_3 x_4} + \\ &+ D^{(n)}_{y_3 m_2 m_3 k_4}\cdot D^{(n)}_{k_1 y_2 m_1 x_4}. \end{aligned} \qquad (10)$$

*) Для сокращенія письма во второй части слѣдующаго равенства послѣдовательность указателей $n_1\,n_2\,n_3\,n_4$ замѣнена символомъ (n).

Digitized by Google

Замѣняя затѣмъ въ равенствѣ (9) произведеніе миноровъ его значеніемъ изъ (10), получимъ:

$$D^{n_1\,n_2\,n_3}_{m_1 m_2 m_3} \cdot D^{n_1 n_4}_{k_1 k_4} = -D^{n_1\,n_3\,n_4}_{k_1 m_2 m_3} \cdot D^{n_1 n_2}_{m_1 k_4} + D^{n_1 n_2\,n_4}_{k_1 m_2 m_3} \cdot D^{n_3 n_3}_{k_1 k_4}$$

$$+ D^{n_1 n_2 n_3\,n_4}_{k_1 m_2 m_3 k_4} \cdot D^{n_1}_{m_1} - D^{n_1\,n_4}_{m_2 m_3} \cdot D^{n_1 n_2 n_3}_{k_1 m_1 k_4} - \qquad (11)$$

$$- D^{n_1 n_2 n_4}_{m_2 m_3 k_4} \cdot D^{n_1 n_3}_{k_1 m_1} + D^{n_1 n_2 n_4}_{m_2 m_3 k_4} \cdot D^{n_1 n_3}_{k_1 m_1} .$$

На практикѣ для полученія тождествъ подобныхъ (11) нѣтъ надобности искать разложеній (9), а достаточно ввести рядъ вспомогательныхъ указателей. Нужно къ каждому символу минора добавить такіе верхніе указатели, чтобы полный рядъ верхнихъ указателей одного символа оказался тождественнымъ съ полнымъ рядомъ такихъ же указателей другого, недостающіе же нижніе указатели замѣнить вспомогательными. Произведя затѣмъ преобразованіе по правиламъ § 1 или § 2, нужно переставить вспомогательные нижніе указатели такъ, чтобы они стояли подъ соотвѣтствующими имъ верхними указателями, причемъ перестановка двухъ указателей влечетъ перемѣну знака минора; послѣ чего они вмѣстѣ съ соотвѣтствующими верхними указателями отбрасываются.

Примѣръ 1. Для составленія произведенія

$$D^{n_1}_{r_1} \cdot D^{n_1 n_2}_{p_1 p_2}$$

введемъ вспомогательный указатель x_2, соотвѣтствующій верхнему n_2, получимъ

$$D^{n_1 n_2}_{r_1 x_2} \cdot D^{n_1 n_2}_{p_1 p_2} .$$

Принявъ, напримѣръ, x_2 за постоянный указатель, съ которымъ будемъ обмѣнивать указатели второго минора, преобразуемъ его по § 1; получимъ

Digitized by Google

$$D^{n_1 n_2}_{r_1 x_2} \cdot D^{n_1 n_2}_{p_1 p_2} = D^{n_1 n_2}_{r_1 p_1} \cdot D^{n_1 n_2}_{x_2 p_2} + D^{n_1 n_2}_{r_1 p_2} \cdot D^{n_1 n_2}_{p_1 x_2}$$

$$= - D^{n_1 n_2}_{r_1 p_1} \cdot D^{n_1 n_2}_{p_2 x_2} + D^{n_1 n_2}_{r_1 p_2} \cdot D^{n_1 n_2}_{p_1 x_2}.$$

Слѣдовательно

$$D^{n_1}_{r_1} \cdot D^{n_1 n_2}_{p_1 p_2} = - D^{n_1 n_2}_{r_1 p_1} \cdot D^{n_1}_{p_2} + D^{n_1 n_2}_{r_1 p_2} \cdot D^{n_1}_{p_1}. \qquad (12)$$

Изъ этого тождества между прочимъ слѣдуетъ извѣстная *) теорема:

Если миноръ $D^{n_1}_{r_1} = 0$, *то*

$$D^{n_1}_{p_1} : D^{n_1}_{p_2} = D^{n_1 n_2}_{r_1 p_1} : D^{n_1 n_2}_{r_1 p_2}$$

при произвольныхъ p_1, p_2 и n_2, *или*

$$D^{n_1}_{p_1} \cdot D^{n_1 n_2}_{r_1 p_2} = D^{n_1}_{p_2} \cdot D^{n_1 n_2}_{r_1 p_1} = const.$$

Тождество (12) показываетъ, что *это же соотношеніе будетъ имѣть мѣсто, если миноръ* $D^{n_1 n_2}_{p_1 p_2} = 0$.

Примѣръ 2. *Произведеніе опредѣлителя на его p-ый миноръ можетъ быть представлено въ видѣ произведеній k-ыхъ и* $(p-k)$*-ыхъ миноровъ.*

Представимъ напримѣръ произведеніе опредѣлителя на третій миноръ въ видѣ суммы произведеній первыхъ и вторыхъ миноровъ.

Вводя вспомогательные указатели, получимъ

---

*) W. Schrader. Beiträge zur Theorie der Determinanten. Halle, 1887, pp. 78—79.

Digitized by Google

$$D^{n_1 n_2 n_3}_{m_1 m_2 m} \cdot D^{n_1 n_2 n_3}_{x_1 x_2 x_3} =$$

$$= D^{n_1 n_2 n_3}_{x_1 m_2 m_3} \cdot D^{n_1 n_2 n_3}_{m_1 x_2 x_3} + D^{n_1 n_2 n_3}_{m_1 x_1 m_3} \cdot D^{n_1 n_2 n_3}_{m_2 x_2 x_3} + D^{n_1 n_2 n_3}_{m_1 m_2 x_1} \cdot D^{n_1 n_2 n_3}_{m_3 x_2 x_3}$$

$$= D^{n_1 n_2 n_3}_{x_1 m_2 m_3} \cdot D^{n_1 n_2 n_3}_{m_1 x_2 x_3} - D^{n_1 n_2 n_3}_{x_1 m_1 m_3} \cdot D^{n_1 n_2 n_3}_{m_2 x_2 x_3} + D^{n_1 n_2 n_3}_{x_1 m_1 m_2} \cdot D^{n_1 n_2 n_3}_{m_3 x_2 x_3}$$

Слѣдовательно

$$D^{n_1 n_2 n_3}_{m_1 m_2 m_3} \cdot D = D^{n_1}_{m_1} \cdot D^{n_2 n_3}_{m_2 m_3} - D^{n_1}_{m_2} \cdot D^{n_2 n_3}_{m_1 m_3} + D^{n_1}_{m_3} \cdot D^{n_2 n_3}_{m_1 m_2}.$$

Примѣръ 3. Иногда введеніе вспомогательныхъ указателей бываетъ излишне. Разсмотримъ напр. произведеніе

$$D^{n_1 n_2 \ldots n_p}_{m_1 m_2 \ldots m_p} \cdot D^{n_1 n_2 \ldots n_{p+k}}_{r_1 r_2 \ldots r_{p+k}}.$$

Если примемъ какую-либо группу изъ указателей $m_1, \ldots m_p$ за тѣ, съ которыми будемъ обмѣнивать различные указатели изъ ряда $r_1 \ldots r_{p+k}$, то очевидно можно не вводить вспомогательныхъ указателей. Возьмемъ напримѣръ въ группу всѣ p указателей $m_1, m_2, \ldots m_p$; тогда получимъ:

$$D^{n_1 n_2 \ldots n_p}_{m_1 m_1 \ldots m_p} \cdot D^{n_1 n_2 \ldots n_{p+k}}_{r_1 r_2 \ldots r_{p+k}} =$$

$$= \sum_{r_{k_1} \ldots r_{k_p}} \left(D^{n_1 \ldots n_p}_{m_1 \ldots m_p} \right)^{m_1 \ldots m_p}_{r_{k_1} \ldots r_{k_p}} \cdot \left(D^{n_1 \ldots n_{p+k}}_{r_1 \ldots r_{p+k}} \right)^{r_{k_1} \ldots r_{k_p}}_{m_1 \ldots m_p},$$

гдѣ $r_{k_1} \ldots r_{k_p}$ одно изъ сочетаній по p изъ элементовъ $r_1 \ldots r_{p+k}$, а суммированіе распространяется на всѣ такія сочетанія. Это тождество даетъ такую теорему:

Если при верхнихъ указателяхъ $n_1 \ldots n_p$ и при всякихъ p нижнихъ указателяхъ $r_{k_1} \ldots r_{k_p}$ изъ ряда $r_1 \ldots r_{k+p}$ имѣетъ мѣсто равенство

Digitized by Google

$$D^{n_1 \ldots n_p}_{r_{k_1} \ldots r_{k_p}} = 0,$$

то или

$$D^{n_1 \ldots n_p}_{m_1 \ldots m_p} = 0,$$

гдѣ $m_1 \ldots m_p$ *произвольныя числа изъ ряда* 1, 2, $\ldots n$, *или*

$$D^{n_1 \ldots n_{p+k}}_{r_1 \ldots r_{p+k}} = 0,$$

гдѣ $n_{p+1}, \ldots n_{p+k}$ *произвольныя числа того же ряда.*

Digitized by Google

ОБЪ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГІИ.

Кн. Б. Б. Голицына.

Въ недавно появившейся статьѣ проф. П. А. Некрасова, озаглавленной «Термодинамика и Электричество» [1]), приведено на стр. 32 (формула 33) интересное обобщенное выраженіе электростатической энергіи W плоскаго конденсатора для того случая, когда не дѣлается гипотезы, что діэлектрическая постоянная k среды не зависитъ отъ квадрата силы поля.

Формула проф. Некрасова имѣетъ слѣдующій видъ:

$$W = \frac{v}{8\pi} \int_0^{\mathfrak{H}} \left(k + 2\mathfrak{H} \frac{dk}{d\mathfrak{H}}\right) d\mathfrak{H}, \qquad (1)$$

гдѣ v есть объемъ конденсатора, а $\mathfrak{H}$ — квадратъ силы поля.

Хотя фактъ зависимости діэлектрической постоянной отъ силы поля, представляющійся для сильныхъ полей и весьма вѣроятнымъ, не былъ еще до сихъ поръ опытнымъ путемъ установленъ съ полною достовѣрностью, тѣмъ не менѣе обобщенія, подобныя вышеуказанному, представляютъ суще-

[1]) Ученыя Записки Имп. Московскаго Университета, отдѣлъ физ.-матем., выпускъ 11.

Digitized by Google

ственный интересъ, такъ какъ въ аналогичныхъ явленіяхъ магнитизма случаи зависимости магнитной проницаемости отъ силы поля являются для нѣкоторыхъ тѣлъ хорошо провѣренными и установленными.

Формула (1), относящаяся къ случаю однороднаго діэлектрика и однороднаго поля, была выведена проф. Некрасовымъ, опираясь на извѣстныя соотношенія между электрической массой M, потенціаломъ φ и силой поля F для случая плоскаго конденсатора, каковыя соотношенія, какъ не трудно въ томъ убѣдиться, повторяя извѣстный выводъ формулъ плоскаго конденсатора (исходя изъ основнаго уравненія Лапласа $\Delta\varphi=0$), сохраняютъ свою силу и для того случая, когда k само зависитъ отъ квадрата силы электрическаго поля.

Формула (1) представляетъ однако лишь частный случай болѣе общей формулы для электростатической энергіи W нѣкотораго объема v, при чемъ эта послѣдняя формула, содержащая четырехъ-кратный интегралъ, свободна уже отъ всякихъ ограниченій относительно однородности діэлектрика и поля. Это обобщенное выраженіе можно получить изъ извѣстнаго основнаго уравненія электростатики, которое связываетъ значеніе потенціальной функціи и объемной плотности электричества въ данной точкѣ. Разсмотрѣніемъ именно случая объемнаго распредѣленія электричества я и ограничу свое изслѣдованіе.

Взявъ прямоугольную систему координатъ x, y, z и обозначивъ чрезъ φ значеніе потенціальной функціи, ε объемной плотности электричества и k діэлектрической постоянной въ данной точкѣ x, y, z, мы будемъ имѣть:

$$-4\pi\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right). \qquad (2)$$

Если мы предположимъ, что въ каждой единицѣ объема v масса электричества увеличилась на безконечно-малый приростокъ $d\varepsilon$, то работа внѣшнихъ силъ, которую нужно при этомъ

Digitized by Google

затратить, представится суммой выраженій вида $dxdydz\ \varphi d\varepsilon$, распространенной на весь данный объемъ v. Эта работа представляетъ однако съ другой стороны не что иное, какъ приращеніе электростатической энергіи W.

Слѣдовательно

$$dW = \iiint_v dx\ dy\ dz\ .\ \varphi d\varepsilon.$$

Для той же самой точки пространства приращеніе, которое мы сообщаемъ массѣ ε, зависитъ совершенно отъ нашего произвола. Такъ какъ мы имѣемъ дѣло съ консервативной системой, то рѣшительно все равно, какимъ именно образомъ мы приводимъ эту систему въ ея конечное состояніе, лишь бы только основные элементы, которые характеризуютъ окончательное состояніе поля и которые я буду впредь обозначать тѣми же буквами, но со значкомъ 1 внизу, а именно ε_1, φ_1, F_1 *), k_1 **), имѣли во всѣхъ этихъ случаяхъ то же самое конечное численное значеніе.

Мы можемъ слѣдовательно считать эти величины ε, φ, F и k функціями координатъ и еще нѣкотораго другаго совершенно произвольнаго параметра t, причемъ видъ этихъ функцій можно безъ труда подобрать такъ, чтобы при $t=b$ величины эти принимали свои окончательныя значенія ε_1, φ_1, F_1 и k_1, а при $t=a$ все пространство находилось бы въ нейтральномъ состояніи.

На основаніи этого замѣчанія мы можемъ написать:

$$W = \iiint_v dx\ dy\ dz \int_a^b \varphi \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dt. \qquad (3)$$

---

*) F сила поля.

**) Здѣсь предполагается, что само k зависитъ отъ силы поля F.

Digitized by Google

Таково совершенно общее выраженіе электростатической энергіи *), свободное отъ вышеуказанныхъ ограниченій.

Попробуемъ теперь его развить.

Изъ уравненія (2) находимъ непосредственно:

$$\varphi\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=-\frac{1}{4\pi}\left[\varphi\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right\}+\varphi\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right\}+\right.$$
$$\left.+\varphi\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right\}\right].$$

Замѣтимъ при этомъ, что

$$\varphi\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right\}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\varphi\frac{\partial}{\partial t}\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right\}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right).$$

Опредѣленный интегралъ

$$\int_a^b\varphi\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\,dt$$

можно представить суммою трехъ членовъ $E_x+E_y+E_z$, гдѣ

$$E_x=\frac{1}{4\pi}\int_a^b\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dt-\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\int_a^b\varphi\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dt,\qquad(4)$$

при чемъ E_y и E_z получаются отсюда чрезъ круговую перестановку.

Обозначивъ проэкціи электрической силы F въ данной точкѣ на оси координатъ чрезъ X, Y, Z, мы будемъ имѣть:

$$X=-\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad Y=-\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad Z=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Преобразуя затѣмъ первый интегралъ въ выраженіи E_x въ предположеніи, что діэлектрическая постоянная k, зависящая

*) Для случая объемнаго распредѣленія электричества.

Digitized by Google

отъ плотности матеріальнаго діэлектрика, зависитъ еще и отъ величины силы электрическаго поля F, находимъ:

$$\frac{1}{4\pi}\int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(k\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)dt = \frac{1}{4\pi}\int_a^b k\,X.\frac{\partial X}{\partial t}dt + \frac{1}{4\pi}\int_a^b X^2\frac{\partial k}{\partial F}\cdot\frac{\partial F}{\partial t}dt.$$

Положивъ еще для краткости:

$$\psi_x = \int_a^b \varphi\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(k\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)dt, \qquad (5)$$

при чемъ ψ_y и ψ_z получаются отсюда чрезъ круговую перестановку, находимъ слѣдующее выраженіе искомаго опредѣленнаго интеграла:

$$\int_a^b \varphi\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}dt = E_x + E_y + E_z = \frac{1}{4\pi}\int_a^b k\left(X\frac{\partial X}{\partial t} + Y\frac{\partial Y}{\partial t} + Z\frac{\partial Z}{\partial t}\right)dt +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_a^b (X^2 + Y^2 + Z^2)\frac{\partial k}{\partial F}\cdot\frac{\partial F}{\partial t}dt - \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \psi_z}{\partial z}\right).$$

Обозначая квадратъ силы поля чрезъ $\mathfrak{H}$, имѣемъ:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = F^2 = \mathfrak{H},$$

$$\frac{\partial k}{\partial F}\cdot\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial \mathfrak{H}}\cdot 2F\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial \mathfrak{H}}\cdot\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t},$$

$$\int_a^b \varphi\frac{d\varepsilon}{\partial t}dt = \frac{1}{8\pi}\int_a^b\left(k + 2\mathfrak{H}\frac{\partial k}{\partial \mathfrak{H}}\right)\frac{d\mathfrak{H}}{dt}dt - \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \psi_z}{\partial z}\right).$$

Замѣняя въ послѣднемъ интегралѣ, въ который входитъ производная $\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}$, интегрированіе по t соотвѣтствующимъ

Digitized by Google

интегрированіемъ по $\mathfrak{H}$, при чемъ $\mathfrak{H}$, при измѣненіи t отъ a до b, само мѣняется въ предѣлахъ отъ 0 до $\mathfrak{H}_1$, находимъ окончательно:

$$\int_a^b \varphi \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\, dt = \frac{1}{8\pi}\int_0^{\mathfrak{H}_1}\left(k + 2\mathfrak{H}\frac{\partial k}{\partial \mathfrak{H}}\right)d\mathfrak{H} - \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \psi_z}{\partial z}\right\}.$$

Слѣдовательно:

$$W = \frac{1}{8\pi}\int_v\int\int dx\, dy\, dz \cdot \int_0^{\mathfrak{H}_1}\left(k + 2\mathfrak{H}\frac{\partial k}{\partial \mathfrak{H}}\right)d\mathfrak{H} + R, \qquad (6)$$

гдѣ

$$R = -\frac{1}{4\pi}\int_v\int\int dx\, dy\, dz \left\{\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \psi_z}{\partial z}\right\}. \qquad (7)$$

Таково, пока довольно сложное, выраженіе электростатической энергіи данной системы; но выраженіе это въ дѣйствительности крайне упрощается, такъ какъ на самомъ дѣлѣ оказывается, что $R=0$.

Эту послѣднюю функцію можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$R = -\frac{1}{4\pi}(R_x + R_y + R_z), \qquad (8)$$

гдѣ

$$R_x = \int_v\int\int \frac{\partial \psi_x}{\partial x}\, dx\, dy\, dz\,,$$

а R_y и R_z получаются отсюда чрезъ круговую перестановку.

Представимъ себѣ нѣкоторую поверхность S, охватывающую со всѣхъ сторонъ данный нашъ объемъ v и преобразуемъ объемный интегралъ R_x въ интегралъ по поверхности S. Обозначая чрезъ n направленіе *внѣшней* нормали, легко видѣть, что

Digitized by Google

$$R_x = \iiint_v \frac{\partial \psi_x}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \int_S \psi_x \cos(nx)\, dS, \qquad (9)$$

гдѣ $\int_S$ долженъ быть распространенъ на всѣ элементы поверхности S.

Это преобразованіе предполагаетъ однако, что функція ψ_x въ предѣлахъ интегрированія остается конечной и непрерывной, что въ нашемъ случаѣ дѣйствительно и имѣетъ мѣсто, такъ какъ мы ограничиваемся разсмотрѣніемъ случая объемнаго распредѣленія электричества, когда потенціальная функція и ея первыя производныя остаются всегда конечными и непрерывными; при этомъ и самый діэлектрикъ предполагается у насъ непрерывнымъ, хотя и не однороднымъ. Что же касается діэлектрической постоянной k, то мы, само собою разумѣется, считаемъ ее непрерывной функціей силы поля.

Для того, чтобы проще всего опредѣлить ψ_x, предположимъ, что

$$\varphi = t\ \varphi_1.$$

Тогда

$$F = tF_1,\quad \mathfrak{H} = t^2 \mathfrak{H}_1,\quad a = 0 \text{ и } b = 1.$$

Мы имѣемъ полное право это полагать, такъ какъ имѣемъ дѣло съ консервативной системой.

Обращаясь къ формулѣ (5), находимъ:

$$\psi_x = \int_0^1 t\ \varphi_1 \frac{\partial}{\partial t}\left(kt \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right) dt = \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \int_0^1 t \frac{\partial (kt)}{\partial t}\, dt.$$

Обозначая величину послѣдняго опредѣленнаго интеграла чрезъ A, имѣемъ:

$$A = \int_0^1 t \frac{\partial (kt)}{\partial t}\, dt = k_1 - \int_0^1 tk\, dt,$$

или, обозначая чрезъ $\varkappa$ нѣкоторое среднее значеніе k,

Digitized by Google

$$A=k_1-\varkappa\int_0^1 t\,dt=k_1-\frac{1}{2}\varkappa.$$

Слѣдовательно

$$\psi_x=A\,\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}$$

Отсюда на основаніи формулъ (8) и (9) находимъ:

$$R=-\frac{1}{4\pi}\int_S A\,\varphi_1\left\{\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\cos nx+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\cos ny+\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\cos nz\right\}dS=$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_S A\,\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\,dS.$$

Функція R приводится такимъ образомъ къ весьма простому виду.

Мы можемъ теперь, слѣдуя хорошо извѣстному пріему *), предположить, что поверхность S, принимая сферическую форму и постепенно расширяясь, удаляется въ безконечность. Приведенныя формулы сохраняютъ при этомъ свою полную силу, при чемъ, обозначая радіусъ сферы чрезъ r, легко видѣть, что φ_1 у поверхности S будетъ безконечно-малая величина порядка $\frac{1}{r}$ $\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}$ — порядка $\frac{1}{r^2}$, поверхность же шара безконечно-большая величина порядка r^2. Теперь, если только k въ безконечности сохраняетъ конечное значеніе, что мы á priori обязаны допустить, то вышеприведенный интегралъ всегда будетъ равенъ нулю.

Итакъ $R=0$, а слѣдовательно

$$W=\frac{1}{8\pi}\iiint_v dx\,dy\,dz\cdot\int_0^{\mathfrak{H}_1}\left(k+2\mathfrak{H}\frac{\partial k}{\partial\mathfrak{H}}\right)d\mathfrak{H}. \qquad (10)$$

---

*) См. напр. *Boltzmann*. Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Elektricität und des Lichtes. Bd. I. p. 108. 1891.

Mascart et Joubert. Leçons sur l'électricité et le magnétisme. T. I. p. 110, 1882.

Digitized by Google

Таково окончательное обобщенное выраженіе электростатической энергіи, свободное отъ ограниченій относительно однородности діэлектрика и поля и независимости k отъ силы электрическаго поля.

Если мы предположимъ, что $\frac{\partial k}{\partial \mathfrak{H}} = 0$, то получимъ отсюда общеупотребительную формулу электростатической энергіи

$$W = \frac{1}{8\pi} \iiint_v k \mathfrak{H}_1 \, dx \, dy \, dz.$$

Если же, допуская зависимость k отъ $\mathfrak{H}$, будемъ считать діэлектрикъ и поле однородными, то формула (10) воспроизведетъ формулу (1) проф. Некрасова, полученную примѣнительно къ важному при изученіи теоріи электростатическихъ явленій случаю плоскаго конденсатора.

С.-Петербургъ. 5 апрѣля 1894 года.

Digitized by Google

О НѢКОТОРЫХЪ СООТНОШЕНІЯХЪ ВЪ ТЕОРІИ ОПРЕДѢЛЕННЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ.

П. Шиффа.

Въ теоріи опредѣленныхъ интеграловъ, какъ кратныхъ, такъ и одиночныхъ, имѣется цѣлый рядъ теоремъ, стоящихъ, повидимому, совершенно особнякомъ; формулы, выражающія эти теоремы, выводятся, обыкновенно, каждая отдѣльно, независимо отъ другихъ, такъ что можно подумать, что каждая такая теорема выражаетъ собою новое свойство опредѣленнаго интеграла, не заключающееся въ другихъ теоремахъ.

Въ настоящей статьѣ мы имѣемъ въ виду показать, что всѣ извѣстныя соотношенія между интегралами, распространенными на область и интегралами, распространенными на границу области, а также многія другія общія соотношенія, вытекаютъ изъ одного общаго принципа, изъ котораго, въ частномъ случаѣ, получаются также многія изъ извѣстныхъ теоремъ, относящіяся къ одиночнымъ опредѣленнымъ интеграламъ.

Необходимо замѣтить, что попытка синтеза теоремъ, относящихся къ опредѣленнымъ интеграламъ, формуламъ квадратуръ и формуламъ для интерполированія, сдѣлана впервые покойнымъ профессоромъ Московскаго Университета А. Ю. Давидовымъ. На VI съѣздѣ Естествоиспытателей въ С.-Петербургѣ А. Ю. Давидовъ вывелъ одно соотношеніе, которое дало возможность связать нѣсколько отдѣльныхъ теоремъ. Работа эта была напечатана въ трудахъ означеннаго съѣзда и, затѣмъ, въ болѣе развитомъ видѣ, въ 1881 г. въ Мате-

Digitized by Google

матическомъ Сборникѣ, издаваемомъ Московскимъ Математическимъ Обществомъ, подъ заглавіемъ, «Объ одной общей формулѣ въ теоріи опредѣленныхъ интеграловъ». Работа эта напечатана также въ журналѣ Резаля подъ заглавіемъ: «Sur une formule générale des integrales definies». (t. VIII 1882. p. 389).

Первое соотношеніе, полученное А. Ю. Давидовымъ, есть ни что иное, какъ извѣстная формула Лагранжа для интерполированія безъ остаточнаго члена; второе же соотношеніе получается изъ перваго интегрированіемъ обѣихъ частей равенства, выражающаго первое соотношеніе, какъ это вообще дѣлается при переходѣ отъ формулъ для интерполированія къ формуламъ квадратуръ.

Надо отдать полную справедливость покойному А. Ю. Давидову, что онъ первый обратилъ вниманіе на синтезъ отдѣльныхъ теоремъ и что, исходя изъ вышесказанной формулы Лагранжа для интерполированія, онъ съ замѣчательнымъ искуствомъ дѣйствительно выводитъ цѣлый рядъ извѣстныхъ весьма важныхъ теоремъ, каковы: интегралъ Коши, формула Фурье, формула Куммера, интегралъ Пуассона, формула квадратуръ Гаусса и др.; но намъ кажется, что формула Лагранжа не настолько общна, чтобы служить исходною точкою болѣе полнаго синтеза; для этой цѣли, какъ мы это увидимъ, значительно лучше принять за исходную точку вышесказанное соотношеніе между интеграломъ, распространеннымъ на всю область и интеграломъ, распространеннымъ на границу области.

Въ этой статьѣ мы, конечно, не имѣли въ виду излагать всѣ извѣстные способы приведенія кратныхъ интеграловъ; способы эти, а равно какъ главнѣйшія ихъ приложенія, изложены въ прекрасной книгѣ Н. Н. Зинина подъ заглавіемъ: «Различные пріемы приведенія кратныхъ интеграловъ и главнѣйшія приложенія этихъ пріемовъ». (Варшава. 1892 г.), гдѣ также помѣщены богатыя литературныя указанія по различнымъ вопросамъ, касающимся этого ученія. Точно также не выводимъ здѣсь тѣ формулы, которыя выведены въ вышеска-

Digitized by Google

занномъ сочиненіи А. Ю. Давидова, и обращаемъ вниманіе только на тѣ формулы, которыя въ этомъ сочиненіи не имѣются; впрочемъ многія изъ формулъ, встрѣчающихся въ сочиненіи А. Ю. Давидова, выведены нами изъ теоремы Грина въ засѣданіи С.-Петербургскаго Математическаго Общества 16 сентября 1891 года.

ГЛАВА I.

Соотношенія между интегралами, распространенными на область и интегралами, распространенными на границу области.

§ 1. Опредѣленія *).

Въ настоящей статьѣ мы будемъ придерживаться нижеслѣдующихъ опредѣленій:

Точкою называется система частныхъ значеній перемѣнныхъ независимыхъ: $x_1, \ldots x_n$; перемѣнныя эти называются *координатами* точки.

Отклоненіемъ точки p отъ точки p' будемъ называть сумму абсолютныхъ значеній разностей координатъ этихъ точекъ, т.-е.

$$pp' = |x_1 - x_1'| + |x_2 - x_2'| + \ldots + |x_n - x_n'|$$

Положимъ, что имѣемъ рядъ точекъ:

$$p = (a_1, \ldots a_n)$$
$$p_1 = (a'_1, \ldots a'_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_m = (a_1^{(m)}, \ldots a_n^{(m)})$$

и допустимъ, что съ безграничнымъ возрастаніемъ числа m — отклоненіе: pp_m можетъ быть сдѣлано менѣе всякой заранѣе заданной произвольно-малой величины ε, то точка p называется *предѣльною* точкою разсматриваемаго ряда точекъ.

---

*) См. Jordan C. Cours d'analyse de l'Ecole polytechnique. 2-me édition, t. I Paris. 1892.

Digitized by Google

Совокупностью—называется собраніе точекъ въ конечномъ или безконечномъ числѣ; при чемъ *измѣреніемъ* совокупности называется число независимыхъ координатъ, служащихъ для опредѣленія любой изъ ея точекъ.

Представимъ себѣ въ нѣкоторой совокупности E рядъ точекъ, которыхъ предѣльная точка есть p, затѣмъ другой рядъ точекъ съ предѣльною точкою q и т. д. Всѣ эти предѣльныя точки образуютъ новую совокупность E', которая называется *производною* совокупности E. Точки производной могутъ заключаться въ первоначальной совокупности и могутъ въ ней не заключаться.

Совершенною совокупностью—называется совокупность, заключающая въ себѣ всѣ точки производной. Легко доказать, что производная нѣкоторой совокупности—есть совершенная совокупность.

Всевозможныя точки, по отношенію къ данной совокупности E, могутъ быть раздѣлены на двѣ категоріи: однѣ — заключающіеся въ совокупности E, другія—въ ней незаключающіеся. Послѣднія образуютъ новую совокупность E_1,— которая называется *дополнительною* совокупностью.

По отношенію къ совокупности E и ея дополнительной E_1 всѣ точки раздѣляются на три категоріи: 1) Точки, заключающіяся въ E, но не заключающіяся въ E_1' (производной E_1); эти точки называются *внутренними* точками совокупности E (внѣшними совокупности E_1); 2) Точки, заключающіеся въ E_1, и не заключающіяся въ E' (производной E) —точки *внѣшнія* относительно E и внутреннія относительно E_1; и 3) Точки, заключающіяся одновременно въ E и въ E_1' или въ E_1 и въ E'; эти точки образуютъ *границу* совокупностей E и E_1.

Легко доказать, что эта граница существуетъ и что она образуетъ совершенную совокупность.

Совершенная совокупность, заключающая въ себѣ внутреннія точки—называется *областью*.

Положимъ, что у насъ имѣется нѣкоторая функція:

Digitized by Google

$$L_1(x_1, \ldots x_n).$$

По отношенію къ этой функціи всевозможныя точки могутъ быть раздѣлены на двѣ слѣдующія категоріи: однѣ,— для которыхъ $L_1 < 0$ и другія,—для которыхъ $L_1 > 0$; обѣ эти категоріи точекъ образуютъ двѣ, дополняющія другъ другу, совокупности; границу ихъ образуютъ точки, для которыхъ $L_1 = 0$. Эту границу будемъ называть *границею перваго рода* или просто *границею области* $L_1 < 0$.

Положимъ, далѣе, что у насъ имѣется функція:

$$L_2(x_1, \ldots x_n).$$

По отношенію къ этой функціи всѣ точки границы $L_1 = 0$ образуютъ двѣ, взаимнодополнительныя совокупности: $L_2 < 0$ и $L_2 > 0$, которыхъ границу составятъ точки, координаты которыхъ удовлетворяютъ условію: $L_2 = 0$. Эту границу будемъ называть *границею второго рода.* Точки границы втораго рода, по отношеоію къ функціи L_3, опять образуютъ двѣ области: $L_3 < 0$ и $L_3 > 0$ съ *границею третьяго рода*: $L_3 = 0$ и т. д.

Элементомъ области будемъ называть положительное значеніе опредѣлителя:

$$dv = \begin{vmatrix} d_1x_1 \ldots d_1x_n \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ d_nx_1 \ldots d_nx_n \end{vmatrix} \qquad (1)$$

при чемъ предполагается, что область опредѣляется условіемъ $L_1 < 0$ или $L_1 > 0$, во всемъ послѣдующемъ будемъ предполагать, что область опредѣляется условіемъ $L_1 < 0$.

Составляющими элемента границы перваго рода будемъ называть коэффиціенты при разложеніи опредѣлителя dv по элементамъ первой строки, т. е.

Digitized by Google

$$ds_k = (-1)^{k+1} \begin{vmatrix} d_2x_1 \ldots d_2x_{k-1}\, d_2x_{k+1} \ldots . dx_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_nx_1 \ldots d_nx_{k-1}\, d_nx_{k+1} \ldots d_nx_n \end{vmatrix} \begin{matrix} k=1,2\ldots n \\ \\ \\ , \end{matrix} \quad (2)$$

а *элементомъ границы перваго рода* будемъ называть выраженіе:

$$ds^{(1)} = \sqrt{ds_1^2 + \ldots + ds_n^2}. \quad (3)$$

Изъ равенства:

$$L_1(x_1, \ldots x_n) = 0.$$

имѣемъ

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_1} d_2x_1 + \ldots + \frac{\partial L_1}{\partial x_{n-1}} d_2x_{n-1} = -\frac{\partial L_1}{\partial x_n} d_2x_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_1} d_nx_1 + \ldots + \frac{\partial L_1}{\partial x_{n-1}} d_nx_{n-1} = -\frac{\partial L_1}{\partial x_n} d_nx_n$$

Откуда, опредѣляя величины:

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial L_1}{\partial x_{n-1}},$$

получаемъ

$$ds_n \frac{\partial L_1}{\partial x_1} = ds_1 \frac{\partial L_1}{\partial x_n}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$ds_n \frac{\partial L_1}{\partial x_{n-1}} = ds_{n-1} \frac{\partial L_1}{\partial x_n},$$

или

$$\frac{ds_1}{\frac{\partial L_1}{\partial x_1}} = \frac{ds_2}{\frac{\partial L_1}{\partial x_2}} = \ldots = \frac{ds_n}{\frac{\partial L_1}{\partial x_n}} = \frac{ds^{(1)}}{R_1}, \quad (4)$$

гдѣ

$$R_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial L_1}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial L_1}{\partial x_n}\right)^2 \ldots}\ ; \quad (5)$$

Digitized by Google

поэтому, полагая:

$$c_i = \frac{1}{R_1}\frac{\partial L_1}{\partial x_i};\ i=1,2,\ldots n \tag{6}$$

будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} ds^{(1)} &= c_1 ds_1 + \ldots + c_n ds_n \\ c_1^{\,2} &+ \ldots + c_n^{\,2} = 1 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Составляющими элемента границы второго рода будемъ называть коэффиціенты при разложеніи опредѣлителя dv по минорамъ

$$\begin{vmatrix} d_1x_i & d_1x_k \\ d_2x_i & d_2x_k \end{vmatrix} \quad \begin{cases} i=1,\ldots n \\ k=1,\ldots n \end{cases}$$

т.-е.

$$ds^{(2)}{}_{ik} = (-1)^{i+k+1} \begin{vmatrix} d_3x_1 \ldots d_3x_{i-1}\, d_3x_{i+1} \ldots d_3x_{k-1}\, d_3x_{k+1} \ldots d_3x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_nx_1 \ldots d_nx_{i-1}\, d_nx_{i+1} \ldots d_nx_{k-1}\, d_nx_{k+1} \ldots d_nx_n \end{vmatrix},$$

элементомъ границы второго рода будемъ называть выраженіе:

$$ds^{(2)} = \sqrt{\sum_{i,k} ds^2{}_{ik}} \qquad \begin{matrix} i=1,2\ldots n \\ k=1,2\ldots n. \end{matrix} \tag{8}$$

Изъ уравненій:

$$L_1(x_1, \ldots x_n) = 0$$

$$L_2(x_1, \ldots x_n) = 0$$

имѣемъ:

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_1} d_n x_1 + \ldots + \frac{\partial L_1}{\partial x_{i-1}} d_n x_{i-1} + \frac{\partial L_1}{\partial x_{i+1}} d_3 x_{i+1} \ldots +$$

$$+ \frac{\partial L_1}{\partial x_{k-1}} d_3 x_{k-1} + \frac{\partial L_1}{\partial x_{k+1}} d_3 x_{k+1} + \ldots + \frac{\partial L_1}{\partial x_n} d_3 x_n =$$

$$= -\left[\frac{\partial L_1}{\partial x_i} d_3 x_i + \frac{\partial L_1}{\partial x_k} d_3 x_k\right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Digitized by Google

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_1} d_n x_1 + \ldots + \frac{\partial L_1}{\partial x_{i-1}} d_n x_{i-1} + \frac{\partial L_1}{\partial x_{i-1}} d_n x_{i+1} + \ldots +$$

$$+ \frac{\partial L_1}{\partial x_{k-1}} d_n x_{k-1} + \frac{\partial L_1}{\partial x_{k+1}} d_n x_{k+1} + \ldots + \frac{\partial L_1}{\partial x_n} d_n x_n =$$

$$= -\left[\frac{\partial L_1}{\partial x_i} d_n x_i + \frac{\partial L_1}{\partial x_k} d_n x_k\right]$$

Откуда, опредѣляя величины

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial L_1}{\partial x_n},$$

получаемъ:

$$ds_{ik} \frac{\partial L_1}{\partial x_1} = \frac{\partial L_1}{\partial x_i} ds_{ik} - \frac{\partial L_1}{\partial x_k} ds_{1i}$$

и точно также:

$$ds_{ik} \frac{\partial L_2}{\partial x_1} = \frac{\partial L_2}{\partial x_i} ds_{ik} - \frac{\partial L_2}{\partial x_k} ds_{1i}.$$

Изъ этихъ двухъ равенствъ имѣемъ:

$$\frac{ds_{ik}}{\frac{\partial(L_1, L_2)}{\partial(x_i, x_k)}} = \frac{ds_1}{\frac{\partial(L_1, L_2)}{\partial(x_1, x_i)}} = \frac{ds_{ik}}{\frac{\partial(L_1, L_2)}{\partial(x_1, x_k)}} = \ldots = \frac{ds_{pq}}{\frac{\partial(L_1, L_2)}{\partial(x_p, x_q)}} = \frac{ds^{(2)}}{R_2} \quad *) \qquad (9)$$

гдѣ

$$R_2 = \sqrt{\sum_{ik} \left[\frac{\partial(L_1, L_2)}{\partial(x_i, x_k)}\right]^2} \quad \begin{pmatrix} i=1, \ldots n \\ k=1, \ldots n \end{pmatrix},$$

откуда получаемъ:

$$ds_{ik} = \frac{1}{R_2} \frac{\partial(L_1, L_2)}{\partial(x_i, x_k)} ds^{(2)}. \qquad (10)$$

Полагая, далѣе,

---

*) Во всемъ послѣдующемъ мы обозначаемъ дифференціальный опредѣлитель или Якобіанъ слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{\partial(L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_1, \ldots x_p)}.$$

Digitized by Google

$$c_{ik}=\frac{1}{R_2}\frac{\partial(L_1, L_2)}{\partial(x_i, x_k)}, \begin{pmatrix} i=1,\ldots n \\ k=1,\ldots n \end{pmatrix} \tag{11}$$

будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} ds^{(2)} &= \sum_{ik} c_{ik}\, ds_{ik} \cdot \begin{pmatrix} i=1,\ldots n \\ k=1,\ldots n \end{pmatrix} \\ \sum_{ik} c^2{}_{ik} &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Точно такимъ же образомъ мы, по аналогіи, получаемъ понятіе о составляющихъ элемента границы третьяго, четвертаго и т. д. родовъ, т. е. обозначая черезъ $ds_{ij\ldots l}$ —составляющую элемента $ds^{(m)}$ границы m-го рода и полагая ее равною коэффиціенту при разложеніи опредѣлителя dv по минорамъ, составленнымъ изъ m первыхъ строкъ и m столбцовъ (изъ столбцовъ; стоящихъ на мѣстахъ: $i, j, \ldots l$), мы можемъ положить:

$$ds^{(m)}=\sqrt{\sum_{i,j\ldots l} ds^2{}_{ij,\ldots l}}\,.$$

Принимая во вниманіе равенства:

$$L_1=0,\ L_2=0;\ldots L_m=0,$$

получимъ:

$$ds_{ij\ldots l}=ds^{(m)}\frac{1}{R_m}\frac{\partial(L_1,\ldots L_m)}{\partial(x_i,\ldots x_l)} \tag{13}$$

гдѣ

$$R_m=\sqrt{\sum_{ji\ldots l}\left[\frac{\partial(L_1,\ldots L_m)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\right]^2} \tag{14}$$

и

$$ds^{(m)}=\sum_{ij\ldots l} c_{ij\ldots l}\, ds_{ij\ldots l} \tag{15}$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} c_{ij\ldots l} &= \frac{1}{R_m}\frac{\partial(L_1,\ldots L_m)}{\partial(x_i,\ldots x_l)} \\ \sum_{ij\ldots l} c^2{}_{ij\ldots l} &= 1 \end{aligned}\right| \begin{aligned} i&=1,\ldots n \\ j&=1,\ldots n \\ &\ldots\ldots\ldots \\ l&=1,\ldots n \end{aligned} \tag{16}$$

Digitized by Google

§ 2. Объ одной формулѣ для преобразованія опредѣлителя.

При выводы формулы для замѣны перемѣнныхъ въ выраженіи элемента области придется пользоваться слѣдующею формулою:

$$\begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1k} \\ a_{21}\ldots a_{2k} \\ \cdots\cdots \\ a_{k1}\ldots a_{kk} \end{vmatrix}^{p-k-1} \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1k}\, a_{1,k+1}\ldots a_{1p} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}\ldots a_{kk}\, a_{k1\,k+1}\ldots a_{kp} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{p1}\ldots a_{pk}\, a_{p,k+1}\ldots a_{pp} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1k}\, a_{1,k+1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{k+1,1}\ldots a_{k+1,k+1} \end{vmatrix} & \cdots\cdots & \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1k}\, a_{1p} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}\ldots a_{kk}\, a_{kp} \\ a_{k+1,1}\ldots a_{k+1,p} \end{vmatrix} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1k}\, a_{1\,k+1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{p1},\ldots a_{p,k+1} \end{vmatrix} & \cdots\cdots & \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1k}\, a_{1p} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{p1}\ldots a_{pk}\, a_{pp} \end{vmatrix} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Эта формула можетъ быть выведена слѣдующимъ образомъ: Пусть:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12}\ldots a_{1k}\ldots a_{1p} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}\ldots a_{kk}\ldots a_{kp} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{p1}\ldots a_{pk}\ldots a_{pp} \end{vmatrix}$$

Digitized by Google

Помноживъ первую строку на $:-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и прибавивъ ко второй, помноживъ затѣмъ первую строку на: $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ и прибавивъ къ третьей и т. д. будемъ имѣть:

$$\Delta=\frac{1}{a_{11}^{\,p-2}}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1p} \\ a_{21} & a_{2p} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1p} \\ a_{31} & a_{3p} \end{vmatrix} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{p1} & a_{p2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{p1} & a_{p3} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1p} \\ a_{p1} & a_{pp} \end{vmatrix} \end{vmatrix}; \qquad (a)$$

Обозначая элементы новаго опредѣлителя черезъ b_{ij}, мы на основаніи равенства (*a*), получаемъ:

$$\Delta a_{11}^{\,p-2}=\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} b_{11} & b_{1,p-1} \\ b_{21} & b_{2,p-1} \end{vmatrix} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{p-1,1} & b_{p-1,2} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} b_{11} & b_{1,p-1} \\ b_{p-1,1} & b_{p-1,p-1} \end{vmatrix} \end{vmatrix}\frac{1}{b_{11}^{\,p-3}}; \qquad (b)$$

но полагая въ равенствѣ (*b*) $p=3$, имѣемъ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\frac{1}{a_{11}}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

и точно также всѣ элементы новаго опредѣлителя выразятся

Digitized by Google

въ опредѣлителяхъ третьяго порядка; подставивъ поэтому въ равенство (*b*), получимъ:

$$\Delta \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^{p-3} = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2p} \\ a_{31} & a_{32} & a_{3p} \end{vmatrix} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1p} \\ a_{21} & a_{21} & a_{2p} \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{pp} \end{vmatrix} \end{vmatrix}. \qquad (c)$$

Обозначивъ элементы новаго опредѣлителя черезъ c_{ij}, мы, на основаніи равенства (*a*), можемъ написать:

$$\begin{vmatrix} c_{11} \cdots c_{1,p-2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{p-2,1} \cdots c_{p-2,\,p-1} \end{vmatrix} = \frac{1}{c_{11}^{\,p-4}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} c_{11} & c_{1,p-2} \\ c_{11} & c_{2,p-2} \end{vmatrix} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{p-2,1} & c_{p-2,2} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} c_{11} & c_{1p-2} \\ c_{p-2,1} & c_{p-2,p-2} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

Но полагая въ равенствѣ (*c*) $p=4$, имѣемъ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{44} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$$

и точно также выразятся всѣ элементы новаго опредѣлитель въ опредѣлителяхъ четвертаго порядка, подставивъ, поэтому, въ (*c*), будемъ имѣть:

Digitized by Google

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}^{p-4} \Delta = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2p} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{3p} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & a_{p4} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2p} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{3p} \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & a_{pp} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

Продолжая такимъ же образомъ и дальше, мы получимъ вышесказанную формулу (1), предполагая которую справедливою для нѣкотораго числа k, легко будетъ, по только что указанному пріему, доказать справедливость ея и для $k+1$.

§ 3. Замѣна перемѣнныхъ въ выраженіи для элемента области.

Рѣшимъ слѣдующую задачу: имѣемъ двѣ системы перемѣнныхъ:

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

$$y_1, y_2, \ldots y_n, y_{n+1}, \ldots y_p,$$

связанныхъ уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} L_1(x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_p) &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ L_p(x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_p) &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

требуется выразить элементъ области:

$$dv = \begin{vmatrix} d_1x_1 \ldots . d_1x_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ d_nx_1 \ldots . d_nx_n \end{vmatrix}$$

Digitized by Google

въ новыхъ перемѣнныхъ, считая независимыми перемѣнными: $y_1, y_2, \ldots y_n$.

Для этого продифференцируемъ равенства (1), тогда будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial L_1}{\partial x_1} d_k x_1 + \ldots + \frac{\partial L_1}{\partial x_n} dx_n = -\left[\frac{\partial L_1}{\partial y_1} d_k y_1 + \ldots + \frac{\partial L_1}{\partial y_p} d_k y_p\right] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (k=1, \ldots n) \\
&\frac{\partial L_p}{\partial x_1} d_k x_1 + \ldots + \frac{\partial L_p}{\partial x_n} d_k x_n = -\left[\frac{\partial L_p}{\partial y_1} d_k y_1 + \ldots + \frac{\partial L_p}{\partial y_p} d_k y_p\right].
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Исключая изъ этихъ уравненій $d_k x_1, \ldots d_k x_n$, получаемъ:

$$\left(D\frac{\partial L_q}{\partial y_1} - D_1\frac{\partial L_1}{\partial y_1} - \ldots - D_n\frac{\partial L_n}{\partial y_1}\right) d_k y_1 + \ldots +$$

$$+\left(D\frac{\partial L_p}{\partial y_p} - D_1\frac{\partial L_1}{\partial y_p} - \ldots - D_n\frac{\partial L_n}{\partial y_p}\right) d_k y_p = 0$$

$$q = n+1,\ n+2, \ldots p.$$

гдѣ

$$D = \frac{\partial(L_1, \ldots L_n)}{\partial(x_1, \ldots x_n)};$$

$$D_1 = \frac{\partial(L_p, L_2 \ldots L_n)}{\partial(x_1, \ldots x_n)} \ldots D_n = \frac{\partial(L_1, \ldots L_{p+1} L_p)}{\partial(x_1, \ldots x_n)}.$$

Замѣчая, что

$$D\frac{\partial L_p}{\partial y_i} - D_1\frac{\partial L_1}{\partial y_i} - \ldots - D_n\frac{\partial L_n}{\partial y_i} = \frac{\partial(L_p, L_1, \ldots L_n)}{\partial(y_i, x_1, \ldots x_n)},$$

мы, для опредѣленія $d_k y_{n+1}$, $d_k y_{n+2}, \ldots d_k y_p$, получаемъ слѣдующія уравненія:

$$\frac{\partial(L_p, L_1, \ldots L_n)}{\partial(y_{n+1}, x_1, \ldots x_n)} d_k y_{n+1} + \ldots \frac{\partial(L_p, L_1, \ldots L_n)}{\partial(y_p, x_1, \ldots x_n)} d_k y_p = -$$

$$-\left[\frac{\partial(L_p, L_1, \ldots L_n)}{\partial(y_1, x_1, \ldots x_n)} d_k y_1 + \ldots + \frac{\partial(L_p, L_1, \ldots L_n)}{\partial(y_n, x_1, \ldots x_n)} d_k y_n\right]$$

Digitized by Google

$$q = n+1, \ldots p; \; k = 1, 2 \ldots n.$$

Принимая во вниманіе вспомогательную формулу (1) предъидущаго параграфа, мы легко убѣждаемся, что опредѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ при $d_k y_{n+1}, \ldots d_k y_p$, принимаетъ слѣдующій видъ:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial(L_{n+1}, L_1, \ldots L_n)}{\partial(y_{n+1}, x_1, \ldots x_n)} & \cdots & \frac{\partial(L_{n+1}, L_1, \ldots L_n)}{\partial(y_p, x_1, \ldots x_n)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial(L_p, L_1, \ldots L_n)}{\partial(y_{n+1}, x_1, \ldots x_n)} & \cdots & \frac{\partial(L_p, L_n, \ldots L_n}{\partial(y_p, x_1, \ldots x_n)} \end{vmatrix} =$$

$$= D^{p-n-1} \frac{\partial(L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_1, \ldots x_n, y_{n+1}, \ldots y_p)};$$

а тогда изъ послѣднихъ уравненій получаемъ:

$$-\frac{\partial(L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_1, \ldots x_n, y_{n+1}, \ldots y_p)} d_k y_{n+1} =$$

$$= \frac{\partial(L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_1, \ldots x_n, y_1, y_{n+2}, \ldots y_p)} d_k y_1 + \ldots +$$

$$+ \frac{\partial(L_1, \ldots y_n)}{\partial(x_1, \ldots x_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots y_p)} d_k y_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-\frac{\partial(L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_1, \ldots x_n, y_{n+1}, \ldots y_p)} d_k y_p =$$

$$= \frac{\partial(L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_1, \ldots x_n, y_{n+1}, \ldots y_{p-1}, y_1)} d_k y_1 + \ldots +$$

$$+ \frac{\partial(L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_1, \ldots x_n, y_{n+1}, y_{p-1}, y_n)} d_k y_n.$$

Подставивъ найденныя выраженія въ первыя n изъ уравненій (2), получимъ:

Digitized by Google

$$-\frac{\partial(L_1,\ldots.L_p)}{\partial(x_1,\ldots x_n,y_{n+1},\ldots y_p)}\left(\frac{\partial L_i}{\partial x_1}d_kx_1+\ldots+\frac{\partial L_i}{\partial x_n}d_kx_n\right)=$$

$$=\left[\frac{\partial(L_1,\ldots.L_p)}{\partial(x_1,\ldots x_n,y_{n+1},\ldots y_p)}\cdot\frac{\partial L_i}{\partial y_1}-\right.$$

$$-\frac{\partial(L_1\ldots.L_p)}{\partial(x_1,\ldots x_n,y_1,y_{n+2},\ldots y_p)}\cdot\frac{\partial L_i}{\partial y_{n+1}}-$$

$$\left.-\ldots-\frac{\partial(L_1,\ldots.L_p)}{\partial(x_1,\ldots x_n,\ldots y_{n+1},\ldots y_{p-1},y_1)}\frac{\partial L_i}{\partial y_p}\right]d_ky_1$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left[\frac{\partial(L_1,\ldots.L_p)}{\partial(x_1,\ldots x_n,y_{n+1},\ldots y_p)}\frac{\partial L_i}{\partial y_n}-\right.$$

$$-\frac{\partial(L_1,\ldots.L_p)}{\partial(x_1,\ldots x_n,y_n,y_{n+2},\ldots y_p)}\frac{\partial L_i}{\partial y_{n+1}}-\ldots-$$

$$\left.-\frac{\partial(L_1,\ldots.L_p)}{\partial(x_1,\ldots x_n,y_{n+1},\ldots y_{p-1},y_n)}\frac{\partial L_i}{\partial y_p}\right]d_ky_n$$

$$(i=1,2,\ldots n;\quad k=1,2,\ldots n),$$

или

$$\frac{\partial L_i}{\partial x_1}d_kx_1+\ldots+\frac{\partial L_i}{\partial x_n}d_kx_n=-\frac{1}{\Delta}(\Delta_{i1}\,d_ky_1+\ldots\Delta_{in}\,d_ky_n)\qquad(\alpha)$$

$$(i=1,2\ldots n,\ k=1,\ldots n)$$

гдѣ черезъ Δ_{ij} мы обозначили коеффиціенты при $d_ky_1,\ldots d_ky_n$ въ предыдущемъ равенствѣ, а

$$\Delta=\frac{\partial(L_1,\ldots.L_p)}{\partial(x_1,\ldots x_n,y_{n+1},\ldots y_p)}.$$

Составивъ опредѣлители изъ первыхъ и вторыхъ частей полученныхъ равенствъ (α), принимая при этомъ во вниманіе теорему объ умноженіи опредѣлителей, будемъ имѣть:

Digitized by Google

$$Ddv = (-1)^n \frac{1}{\Delta^n} \begin{vmatrix} \Delta_{11} \ldots \Delta_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \Delta_{n1} \ldots \Delta_{nn} \end{vmatrix} dv', \qquad (\beta)$$

гдѣ:

$$dv' = \begin{vmatrix} d_1 y_1 \ldots\ldots d_1 y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_n y_1 \ldots\ldots d_n y_n \end{vmatrix}.$$

Опредѣлитель, входящій въ равенство (β) можетъ быть преобразованъ на основаніи формулы (1) предъидущаго параграфа, именно:

$$\begin{vmatrix} \Delta_{11} \ldots\ldots \Delta_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \Delta_{n1} \ldots\ldots \Delta_{nn} \end{vmatrix} = D\Delta^{n-1} \frac{\partial(L_1, \ldots\ldots L_p)}{\partial(y_1, \ldots\ldots y_p)},$$

и, такимъ образомъ, окончательно получаемъ:

$$dv = (-1)^n dv' \frac{\partial(L_1, \ldots L_p)}{\partial(y_1, \ldots y_p)} : \frac{\partial(L_1, \ldots\ldots L_p)}{\partial(x_1, \ldots x_n, y_{n+1}, \ldots y_p)} \qquad (3)$$

§ 4. Частные случаи формулы (3) предъидущаго параграфа. Формула Кронекера и аналогичныя ей формулы.

Полученная нами въ предъидущемъ параграфѣ формула (3) довольно общна; она можетъ служить для полученія многихъ весьма примѣчательныхъ соотношеній.

Полагая: $p=n$, получаемъ извѣстную формулу:

$$dv = (-1)^n \frac{\partial(L_1 \ldots\ldots L_n)}{\partial(y_1, \ldots\ldots y_n)} dv' : \frac{\partial(L_1, \ldots\ldots L_n)}{\partial(x_1, \ldots\ldots x_n)}.$$

Вышесказанная формула можетъ также служить для выраженія элемента границы какого угодно рода въ новыхъ перемѣнныхъ.

Пусть напр. дано:

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - \psi_1(y_1, \ldots y_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n - \psi_n(y_1 \ldots n_n) = 0 \\ L_1(x_1, \ldots\ldots x_n) = 0 \\ \lambda_1(y_1, \ldots\ldots y_n) = 0 \end{array}\right\}, \quad (1)$$

гдѣ функція λ_1 получается изъ функціи L_1, замѣною перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$ перемѣнными: $y_1, \ldots y_n$.

Подставивъ въ формулу (3) предъидущаго параграфа $n-1$ вмѣсто n, отдѣливъ первыя $n-1$ изъ уравненій (1) и присоединивъ къ нимъ уравненіе: $\lambda_1 = 0$, получимъ:

$$ds_n = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial y_1} & \ldots\ldots\ldots & \frac{\partial \lambda_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \ldots\ldots\ldots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial y_1} & \ldots\ldots & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial y_n} \end{vmatrix} \begin{matrix} d\sigma_n \\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial y_n} \end{matrix}$$

гдѣ ds_n—составляющая элемента прежней границы, а $d\sigma_n$—составляющая элемента новой границы.

Полагая

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial y_i} = \gamma_i \ (i = 1, \ldots n),$$

гдѣ

$$\rho_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial y_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial y_n}\right)^2}$$

и принимая во вниманіе (§ 1), что:

$$d\sigma_k = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \lambda_1}{\partial y_k} d\sigma^{(1)} \ (k = 1, \ldots n)$$

$$ds^{(1)} = c_1 ds_1 + \ldots + c_n ds_n:$$

Digitized by Google

$$c_i = \frac{1}{R_1}\frac{\partial L_1}{\partial x_i} \quad (i = 1, \ldots n)$$

$$R_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial L_1}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial L_n}{\partial x_n}\right)^2}$$

получаемъ:

$$ds^{(1)} = -\begin{vmatrix} 0 & \gamma_1 & \ldots & \gamma_n \\ c_1 & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \quad d\sigma^{(1)} = -\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \lambda_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial \lambda_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial L_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial L_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \frac{d\sigma^{(1)}}{\rho_1 R_1}$$

Формула эта дана безъ доказательства Кронекеромъ; доказательство ея впервые дано А. В. Васильевымъ *).

Положимъ далѣе, что намъ дано:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - \psi_1(y_1, \ldots y_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n - \psi_n(y_1, \ldots y_n) = 0 \\ L_1(x_1, \ldots\ldots x_n) = 0 \\ L_2(x_1, \ldots\ldots x_n) = 0 \\ \lambda_1(y_1, \ldots\ldots y_n) = 0 \\ \lambda_2(y_1, \ldots\ldots y_n) = 0 \end{array}\right\}, \quad (2)$$

*) Васильевъ. Теорія отдѣленія корней системъ алгебраическихъ уравненій. Казань 1884 г.

Digitized by Google

гдѣ λ_1 и λ_2 получаются изъ L_1 и L_2 замѣною перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$—перемѣнными: $y_1, \ldots y_n$.

Отбирая изъ уравненій (2) первыя $n-2$, и присоединяя къ нимъ уравненія: $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 0$, мы изъ формулы (3) предъидущаго параграфа получаемъ:

$$ds_{n-1,\,n} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\lambda_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\lambda_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial\lambda_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\lambda_2}{\partial y_n} \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\psi_{n-2}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_{n-2}}{\partial y_n} \end{vmatrix} \frac{d\sigma_{n-1,\,n}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial\lambda_1}{\partial y_{n-1}} & \frac{\partial\lambda_2}{\partial y_{n-1}} \\ \frac{\partial\lambda_1}{\partial y_n} & \frac{\partial\lambda_2}{\partial y_n} \end{vmatrix}},$$

гдѣ $ds_{n-1,\,n}$—составляющая элемента прежней границы второго рода, а $d\sigma_{n-1,\,n}$—составляющая элемента новой границы второго рода.

Принимая во вниманіе равенства (§ 1):

$$ds_{pq} = \frac{ds^{(2)}}{R_2} \frac{\partial(L_1, L_2)}{\partial(x_p, x_q)} \quad \begin{pmatrix} p=1, \ldots n, \\ q=1, \ldots n \end{pmatrix}$$

$$d\sigma_{pq} = \frac{d\sigma^{(2)}}{\rho_2} \frac{\partial(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial(y_p, y_q)}$$

$$ds^{(2)} = \sum_{ik} c_{ik}\, ds_{ik};\quad d\sigma^{(2)} = \sum_{ik} \gamma_{ik}\, d\sigma_{ik} \quad \begin{pmatrix} i=1, \ldots n \\ k=1, \ldots n \end{pmatrix}$$

гдѣ

$$R_2 = \sqrt{\sum_{ik} \left[\frac{\partial(L_1, L_2)}{\partial(x_i, x_k)}\right]^2}$$

$$\rho_2 = \sqrt{\sum_{ik} \left[\frac{\partial(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial(y_i, y_k)}\right]^2}$$

Digitized by Google

$$c_{ik}=\frac{1}{R_2}\frac{\partial(L_1,L_2)}{\partial(x_i,x_k)}$$

$$\gamma_{ik}=\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial(\lambda_1,\lambda_2)}{\partial(y_i,y_k)},$$

получаемъ:

$$ds^{(2)}=\frac{d\sigma^{(2)}}{\rho_2}\sum_{ik}c_{ik}\Delta_{ik}.$$

гдѣ Δ_{ik}—представляетъ собою опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_n} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \frac{\partial\psi_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

въ которомъ двѣ функціи: ψ_i и ψ_k замѣнены функціями λ_1 и λ_2.

Послѣднее соотношеніе можетъ быть написано въ слѣдующемъ видѣ:

$$ds^{(2)}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial\lambda_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\lambda_1}{\partial y_n} \\ 0 & 0 & \frac{\partial\lambda_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\lambda_2}{\partial y_n} \\ \frac{\partial L_1}{\partial x_1} & \frac{\partial L_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_n} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \frac{\partial L_1}{\partial x_n} & \frac{\partial L_2}{\partial x_n} & \frac{\partial\psi_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}\frac{d\sigma^{(2)}}{\rho_2 R_2}$$

Полученная формула аналогична формулѣ Кронекера и выражаетъ элементъ границы второго рода въ новыхъ перемѣнныхъ и въ элементѣ новой границы второго рода.

Совершенно также получимъ формулы, аналогичныя формулѣ Кронекера, для элемента границы какого угодно рода;

Digitized by Google

о видѣ подобныхъ формулъ легко судить по виду полученныхъ формулъ для элементовъ границъ перваго и второго родовъ.

Иногда, какъ извѣстно, задаютъ границу перваго рода тѣмъ, что выражаютъ перемѣнныя: $x_1, \ldots x_n$ въ функціи новыхъ перемѣнныхъ: $u_1, \ldots u_{n-1}$; границу второго рода задаютъ въ видѣ зависимости перемѣнныхъ: $x_1, \ldots x_n$ отъ $n-2$ перемѣнныхъ: $u_1, \ldots u_{n-2}$ и т. д.

Во всѣхъ этихъ случаяхъ формула (3) предъидущаго параграфа даетъ возможность выразить элементъ границы въ новыхъ перемѣнныхъ.

Пусть напр. дано:

$$x_1 - \Psi_1(u_1, \ldots u_{n-1}) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n - \Psi_n(u_1, \ldots u_{n-1}) = 0,$$

тогда вышеуказанная формула (3) намъ даетъ:

$$d\sigma_1 \frac{\partial(x_1, \ldots x_{n-1})}{\partial(u_1, \ldots u_{n-1})} = ds_n.$$

и вообще

$$d\sigma_1 \frac{\partial(x_1, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n)}{\partial(u_1, \ldots u_{n-1})} = ds_i$$

гдѣ

$$d\sigma_1 = \begin{vmatrix} d_1u_1 \ldots d_1u_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{n-1}u_1 \ldots d_{n-1}u_{n-1} \end{vmatrix};$$

откуда:

$$ds^{(1)} = d\sigma_1 \sqrt{\sum_i \left[\frac{\partial(x_1, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n)}{\partial(u_1, \ldots u_{n-1})}\right]^2} \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

Если намъ дано:

$$x_1 - \Psi_1(u_1, \ldots u_{n-2}) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n - \Psi_n(u_1 \ldots u_{n-2}) = 0,$$

Digitized by Google

то вышесказанная формула (3) намъ даетъ:

$$ds^{(2)} = d\sigma_2 \sqrt{\sum_i \left[\frac{\partial(x_1, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots x_n)}{\partial(u_1, \ldots u_{n-2})} \right]^2}$$

$$\begin{pmatrix} i=1, \ldots n \\ h=1, \ldots n \end{pmatrix}$$

гдѣ

$$d\sigma_2 = \begin{vmatrix} d_1u_1 \ldots d_1u_{n-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{n-2}u_1 \ldots d_{n-2}u_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Такимъ же образомъ получаемъ выраженіе въ новыхъ координатакъ для элемента границы какого-угодно рода.

§ 5. **Соотношеніе между интеграломъ, распространеннымъ на область и интеграломъ, распространеннымъ на границу области.**

Бъ послѣдующемъ мы предполагаемъ, что имѣемъ дѣло съ такъ называемыми, *интегрируемыми* функціями, т. е. съ такими функціями, которыхъ интегралы по *избытку* и по *недостатку* совпадаютъ; область же предполагаемъ *измѣряемою* *).

Пусть

$$L_1(x_1, \ldots x_n) = 0.$$

Представляетъ собою конечную, простую сомкнутую границу **).

Преобразуемъ интегралъ

$$\int f(x_1, \ldots x_n) dv,$$

распространенный на область

$$L_1(x_1, \ldots x_n) < 0,$$

---

*) Jordan. C. Cours d'analyse de l'ecole polytechnique. 2-me cdition t. I Paris 1892.

**) Зининъ Н. Различные пріемы приведенія кратныхъ интеграловъ. Стр. 80.

Digitized by Google

принимая новыя перемѣнныя:

$$u, \xi_1, \ldots \xi_n,$$

связанныя съ прежними перемѣнными при помощи слѣдующихъ равенствъ:

$$x_1 - \xi_1 + u(\xi_1 - \alpha_{11}) = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n - \xi_n + u(\xi_n - \alpha_{1n}) = 0$$

$$L_1(\xi_1, \ldots \xi_n) = 0,$$

гдѣ $\alpha_{11}, \ldots \alpha_{1n}$ — какія-нибудь постоянныя, удовлетворяющія условію

$$L_1(\alpha_{11}, \ldots \alpha_{1n}) < 0.$$

Прилагая къ настоящему случаю формулу (3) § 3 и предполагая

$$dv = dx_1 \ldots dx_n,$$

получаемъ:

$$dv = (1-u)^{n-1} \sum (\xi_i - \alpha_{1i}) \frac{\partial L_1}{\partial \xi_i} du d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1} : \frac{\partial L_1}{\partial \xi_n}$$

Подставивъ это выраженіе въ нашъ интегралъ и принимая во вниманіе, что интегрированіе по u производится въ предѣлахъ отъ 0 до единицы, а также, что

$$\frac{d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1}}{\frac{\partial L_1}{\partial \xi_n}} = \frac{ds^{(1)}}{R_1},$$

будемъ имѣть:

$$\int f(x_1, \ldots x_n)\, dv = \int F \sum_i (x_i - \alpha_{1i}) \frac{\partial L_1}{\partial x_i} \frac{ds^{(1)}}{R_1} \qquad (1)$$

гдѣ

$$F = \int_0^1 (1-u)^{n-1} f[x_1 - u(x_1 - \alpha_{11}), \ldots x_n - u(x_n - \alpha_{1n})]\, du, \qquad (2)$$

Digitized by Google

при чемъ интегралъ правой части равенства распространяется на границу

$$L_1(x_1, \ldots x_n)=0.$$

§ 6. Обобщенная формула Борхардта.

Въ послѣдующихъ параграфахъ мы постараемся показать, что всѣ извѣстныя соотношенія между интегралами, распространенными на область и интегралами, распространенными на границу области (за исключеніемъ соотношенія, которое получается при дифференцированіи интеграла по параметру *), суть слѣдствіе равенства (1) предъидущаго параграфа или, что тоже,— замѣны перемѣнныхъ. Мы думаемъ, что вообще *всѣ* подобныя соотношенія, а также и соотношенія между интегралами, распространенными на границу какого угодно рода и интегралами, распространенными на границу высшаго рода,— что всѣ они суть слѣдствія формулы, получающейся при приличной замѣнѣ перемѣнныхъ въ интегралѣ.

Изъ формулы (1) § 5 легко получить обобщенную формулу Борхардта. Въ самомъ дѣлѣ, полагая:

$$F\sum_i (x_i - \alpha_{1i}) \frac{\partial L_1}{\partial x_i} \frac{1}{R_1} = \varphi_1,$$

будемъ имѣть:

$$F = \int_0^1 (1-u)^{n-1} f[x_1 - u(x_1 - \alpha_{11}), \ldots x_n - u(x_n - \alpha_{1n})]\, du =$$

$$= \frac{R_1 \varphi_1}{\sum_i (x_i - \alpha_{1i}) \frac{\partial L_1}{\partial x_i}}$$

*) Въ концѣ этой главы мы покажемъ, что обѣ эти исходныя точки могутъ быть сведены къ одной общей теоремѣ.

Digitized by Google

Дифференцируя послѣднее равенство по $x_1, \ldots x_n$, получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^1 (1-u)^n \frac{\partial f}{\partial\,[x_1 - u(x_1 - a_{11})]}\,du = \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\int_0^1 (1-u)^n \frac{\partial f}{\partial\,[x_n - x(_n - \alpha_{1n})]}\,du = \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Но

$$-\frac{df}{du} = \frac{\partial f}{\partial\,[x_1 - u(x_1 - \alpha_{11})]}\,(x_1 - \alpha_{11}) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\partial f}{\partial [x_n - u(x_n - \alpha_{1n})]}\,(x_n - \alpha_{1n});$$

Поэтому, помноживъ послѣдовательно равенства (2) на $x_1 - \alpha_{11}, \ldots x_n - \alpha_{1n}$ и складывая, получимъ:

$$-\int_0^1 (1-u)^n \frac{df}{du}\,du = (x_1 - \alpha_{11})\frac{\partial F}{\partial x_1} + \ldots + (x_n - \alpha_{1n})\frac{\partial F}{\partial x_n}.$$

Интегрируя по частямъ въ лѣвой части равенства, будемъ имѣть

$$f(x_1, \ldots x_n) = (x_1 - \alpha_{11})\frac{\partial F}{\partial x_i} + \ldots + (x_n - \alpha_{1n})\frac{\partial F}{\partial x_n} + nF.$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{R_1 \varphi_1 (x_1 - \alpha_{11})}{\sum_i (x_i - \alpha_{1i})\frac{\partial L_1}{\partial x_i}}\right] + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left[\frac{R_1 \varphi_1 (x_n - \alpha_{1n1})}{\sum_i (x_i - \alpha_{1i})\frac{\partial L_1}{\partial x_i}}\right].$$

Digitized by Google

Подставивъ полученное выраженіе въ равенство (1) § 5, получимъ:

$$\int\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{R_1\varphi_1(x_1-\alpha_{11})}{\sum_i (y_i-\alpha_{1i})\frac{\partial L_1}{\partial x_i}}\right]+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\left[\frac{R_1\varphi_1(x_n-\alpha_{1n})}{\sum_i (x_i-\alpha_{1i})\frac{\partial L_1}{\partial x_i}}\right]\right\}dv=\int\varphi_1 ds^{(1)}$$

Подобныя же равенства можемъ написать для другихъ функій φ и для различныхъ α, именно:

$$\int\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{R_1\varphi_2(x_1-\alpha_{21})}{\sum_i (x_i-\alpha_{2i})\frac{\partial L_1}{\partial x_i}}\right]+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{R_1\varphi_2(x_n-\alpha_{2n})}{\sum_i (x_i-a_{2i})\frac{\partial L_1}{\partial x_i}}\right]\right\}dv=\int\varphi_2 ds^{(1)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{R_1\varphi_n(x_1-\alpha_{n1})}{\sum_i (x_i-\alpha_{ni})\frac{\partial L_1}{\partial x_i}}\right]+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\left[\frac{R_1\varphi_n(x_n-\alpha_{nn})}{\sum_i (x_i-\alpha_{ni})\frac{\partial L_1}{\partial x_i}}\right]\right\}dv=\int\varphi_2 ds^{(1)}$$

Складывая всѣ эти равенства и полагая:

$$\frac{\varphi_1(x_k-\alpha_{1k})}{\sum_i (x_i-\alpha_{1i})\frac{\partial L_1}{\partial x_i}}+\ldots+\frac{\varphi_n(x_k-\alpha_{nk})}{\sum_i (x_i-\alpha_{ni})\frac{\partial L_1}{\partial x_i}}=\frac{\lambda_k\varphi}{\sum_i \lambda_i\frac{\partial L_1}{\partial x_i}},$$

Digitized by Google

мы получаемъ:

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots \varphi_n = \varphi$$

и

$$\int \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{R_1 \lambda_1 \varphi}{\sum_i \lambda_i \frac{\partial L_i}{\partial x_i}} \right] + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} \left[\frac{R_1 \lambda_n \varphi}{\sum_i \lambda_i \frac{\partial L_i}{\partial x_i}} \right] \right\} dv = \int \varphi ds^{(1)}. \quad (2)$$

Формула (2) представляетъ собою обобщенную формулу Борхардта, которая получается, если въ формулѣ (2) положить: $\lambda_i = \frac{\partial L_i}{\partial x_i}$ и $n=3$; вообще же формула (2), заключающая въ себѣ n произвольныхъ функцій: $\lambda_1, \ldots \lambda_n$, очень общна и изъ нея могутъ быть получены многіе опредѣленные интегралы.

Необходимо замѣтить, что изъ формулы (2) можетъ быть получена формула (1) § 5.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая въ (2): $\lambda_i = x_i - \alpha_{1i}$ $(i=1,2 \ldots n)$

$$F = \frac{R_1 \varphi}{\sum_i (x_i - \alpha_{1i}) \frac{\partial L_i}{\partial x_i}}$$

$$f(x_1, \ldots x_n) = (x_1 - \alpha_{11}) \frac{\partial F}{\partial x_1} + \ldots + (x_n - \alpha_{1n}) \frac{\partial F}{\partial x_n} + nF,$$

мы, интегрируя это уравненіе въ частныхъ производныхъ, получимъ:

$$x_2 - \alpha_{12} = c_2 (x_1 - \alpha_{11})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n - \alpha_{1n} = c_n (x_n - \alpha_{11})$$

$$F = (x_1 - \alpha_{11})^{-n} \int_{a_{11}}^{x_1} (x_1' - \alpha_{11})^{-n} f \left[x_1', \alpha_{12} + c_2 (x_1' - \alpha_{11}), \ldots \alpha_{1n} + \right.$$

$$\left. + c_1 (x_1' - \alpha_{11}) \right] dx_1'$$

Digitized by Google

Полагая въ этомъ интегралѣ:

$$x_i' = \alpha_{i\,i} + (x_i' - \alpha_{i\,i})(1 - u),$$

получимъ:

$$F = \int_0^1 (1-n)^{n-1} f\left[x_1 - u(x_1 - \alpha_{1\,i}), \ldots x_n - u(x_n - \alpha_{i\,n})\right] du,$$

и такимъ образомъ:

$$\int f(x_1, \ldots x_n)\, dv = \int F \sum_i (x_i - \alpha_{i\,i}) \frac{\partial L_i}{\partial x_i} \frac{1}{R_i}\, ds\ ^{(1)}.$$

Замѣтимъ еще слѣдующее: въ виду того, что правая часть равенства (2) независитъ вовсе отъ функцій $\lambda_1, \ldots \lambda_n$, мы можемъ написать слѣдующее равенство:

$$\int \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{R_i \lambda_i \varphi}{\sum_k \lambda_k \frac{\partial L_i}{\partial x_k}}\right] dv = \int \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{R_i \mu_i \varphi}{\sum_k \mu_k \frac{\partial L_i}{\partial x_k}}\right] dv, \qquad (3)$$

гдѣ функціи $\mu_1, \ldots \mu_n$—тоже совершенно произвольны.

§ 7. **Формула Остроградскаго. Обобщенная формула Грина.** Полагая въ равенствѣ (2) § 6.

$$\frac{R_i \lambda_i \varphi}{\sum_k \lambda_k \frac{\partial L_i}{\partial x_k}} = P_i \ (i = 1, 2, \ldots n),$$

получаемъ:

$$\varphi = \frac{1}{K_i}\left(P_1 \frac{\partial L_i}{\partial x_1} + \ldots + P_n \frac{\partial L_i}{\partial x_n}\right),$$

и тогда вышесказанное равенство (2) принимаетъ слѣдующій видъ:

Digitized by Google

$$\int\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial P_n}{\partial x_n}\right)dv=\int\frac{1}{R_1}\left(P_1\frac{\partial L_1}{\partial x_1}+\ldots+P_n\frac{\partial L_1}{\partial x_n}\right)ds^{(1)}\quad(1)$$

Послѣднее равенство выражаетъ собою замѣчательное соотношеніе, данное Остроградскимъ.

Полагая въ послѣднемъ равенствѣ

$$P_i=\sum_{ij}a_{ij}P\frac{\partial Q}{\partial x_j}\begin{pmatrix}i=1,\ldots n\\ j=1,\ldots n\end{pmatrix}$$

получаемъ:

$$\int\sum_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}P\frac{\partial Q}{\partial x_j}\right)dv=\int P\sum_{ij}a_{ij}\frac{\partial Q}{\partial x_j}\frac{1}{R_1}\frac{\partial L_1}{\partial x_i}\,ds^{(1)};$$

но послѣднее равенство можетъ быть написано въ слѣдующемъ видѣ:

$$\int\sum_{ij}a_{ij}\frac{\partial P}{\partial x_i}\frac{\partial Q}{\partial x_j}dv+\int P\sum_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial Q}{\partial x_j}\right)dv=$$

$$=\int P\sum_{ij}\frac{\partial Q}{\partial x_j}\frac{a_{ij}}{R_1}\frac{\partial L_1}{\partial x_i}\,ds^{(1)}$$

Полагая, поэтому,

$$a_{ij}=a_{ji},$$

мы въ первомъ интегралѣ можемъ переставить функціи P и Q безъ измѣненія величины интеграла, и тогда

$$\int P\sum_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial Q}{\partial x_j}\right)dv-\int Q\sum_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial P}{\partial x_j}\right)dv=$$

$$=\int P\sum_{ij}\frac{\partial Q}{\partial x_j}\frac{a_{ij}}{R_1}\frac{\partial L_1}{\partial x_i}\,ds^{(1)}-\int Q\sum_{ij}\frac{\partial P}{\partial x_j}\frac{a_{ij}}{R_1}\frac{\partial L_1}{\partial x_i}\,ds^{(1)}\quad(2)$$

Digitized by Google

Послѣднее равенство представляетъ собою, въ нѣсколько обобщенной формѣ, извѣстную формулу Грина для функцій многихъ перемѣнныхъ.

Если функція Q удовлетворяетъ уравненію:

$$\sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial Q}{\partial x_j}\right) = AQ, \tag{3}$$

гдѣ A—конечная, однозначная и непрерывная функція, то равенство (2) принимаетъ слѣдующій видъ:

$$\int Q\left[AP - \sum_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial P}{\partial x_j}\right)\right]dv =$$

$$= \int P\sum_{ij}\frac{\partial Q}{\partial x_j}\frac{a_{ij}}{R_1}\frac{\partial L_1}{\partial x_i}\,ds^{(1)} - \int Q\sum_{ij}\frac{\partial P}{\partial x_j}\frac{a_{ij}}{R_1}\frac{\partial L_1}{\partial x_i}ds^{(1)}. \tag{4}$$

Если и функція P удовлетворяетъ уравненію (3), то формула (2) намъ даетъ:

$$\int\left[P\sum_{ij}\frac{\partial Q}{\partial x_j}\frac{a_{ij}}{R_1}\frac{\partial L_1}{\partial x_i} - Q\sum_{ij}\frac{\partial P}{\partial x_j}\frac{a_{ij}}{R_1}\frac{\partial L_1}{\partial x_i}\right]ds^{(1)} = 0 \tag{5}$$

независимо отъ границы $L_1 = 0$.

Замѣтимъ еще, что если разсматриваемая область ограничена двумя границами:

$$L_1 = 0 \text{ и } l_1 = 0,$$

то равенство (5) приметъ слѣдующій видъ:

$$\int_{L_1}\left[P\sum_{ij}\frac{\partial Q}{\partial x_j}\frac{a_{ij}}{R_1}\frac{\partial L_1}{\partial x_i} - Q\sum_{ij}\frac{\partial P}{\partial x_j}\frac{a_{ij}}{R_1}\frac{\partial L_1}{\partial x^i}\right]ds^{(1)} =$$

$$= \int_{l_1}\left[P\sum_{ij}\frac{\partial Q}{\partial x_j}\frac{a_{ij}}{R_1'}\frac{\partial l_1}{\partial x_i} - Q\sum_{ij}\frac{\partial P}{\partial x_j}\frac{a_{ij}}{R_1'}\frac{\partial l_1}{\partial x_i}\right]ds_1^{(1)}, \tag{6}$$

Digitized by Google

гдѣ:

$$R_i' = \sqrt{\left(\frac{\partial l_i}{\partial x_i}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial l_i}{\partial x_n}\right)^2},$$

ds [1]—элементъ границы: $l_i = 0$ и буквы въ низу интеграловъ указываютъ на какую границу распространяется интегралъ.

§ 8. **Обобщенная формула Стокса.**

Изъ равенства (1) § 7 можетъ быть получено одно весьма примѣчательное соотношеніе между интеграломъ, распространеннымъ на границу области и итеграломъ, распросраненнымъ на границу второго рода.

Пусть имѣемъ функцію.

$$f_{i, n+1}(x_1, \ldots x_n, x_{n+1}),$$

причемъ одна изъ перемѣнныхъ, входящихъ въ эту функцію, есть функція другихъ; это условіе пусть выражается уравненіемъ:

$$L_1(x_1, \ldots x_n, x_{n+1}) = 0.$$

Въ предположеніи, что x_{n+1} есть функція перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$, обозначимъ черезъ $d\sigma_{n+1}$—элементъ области, опредѣляемой условіями:

$$\left.\begin{aligned} L_1(x_1, \ldots x_n, x_{n+1}) &= 0 \\ L_2(x_1, \ldots x_n, x_{n+1}) &< 0 \end{aligned}\right\},$$

причемъ граница этой области опредѣляется условіями

$$\left.\begin{aligned} L_1(x_1, \ldots x_n, x_{n+1}) &= 0 \\ L_2(x_1, \ldots x_n, x_{n+1}) &= 0 \end{aligned}\right\},$$

элементъ этой границы пусть будетъ ds. При этихъ обозначеніяхъ, мы, на основаніе равенства (1) § 7, можемъ написать:

Digitized by Google

$$\int \sum_i \left(\frac{\partial f_{i,n+1}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{i,n+1}}{\partial x_{n+1}} \cdot \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_i} \right) d\sigma_{n+1} =$$

$$= \int \sum_i f_{i,n+1} \left(\frac{\partial L_2}{\partial x_i} + \frac{\partial L_2}{\partial x_{n+1}} \cdot \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_i} \right) \frac{ds}{\rho_2}, \qquad (\alpha)$$

гдѣ:

$$\rho_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial L_2}{\partial x_1} + \frac{\partial L_2}{\partial x_{n+1}} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_1} \right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial L_2}{\partial x_n} + \frac{\partial L_2}{\partial x_{n+1}} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} \right)^2}$$

Подставивъ въ равенство (α) вмѣсто $\frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_i}$ — ея значенія изъ уравненія:

$$L_1 (x_1, \ldots x_n, x_{n+1}) = 0,$$

будемъ имѣть:

$$\int \sum_i \frac{\partial (f_{i,n+1}, L_1)}{\partial (x_i, x_{n+1})} \frac{d\sigma_{n+1}}{\frac{\partial L_1}{\partial x_{n+1}}} = \int \sum_i f_{i,n+1} \frac{\partial (x_i, x_{n+1})}{\partial (L_2, L_1)} \frac{ds}{\rho_2 \frac{\partial L_2}{\partial x_{n+1}}},$$

гдѣ первый интегралъ распространяется на область

$$L_1 = 0, \; L_2 < 0,$$

а второй — на границу:

$$L_1 = 0, \; L_2 < 0.$$

Обозначивъ черезъ $ds^{(1)}$ элементъ границы $L_1 = 0$ въ области $L_1 < 0$ $(n+1)$-го измѣренія, будемъ имѣть

$$ds^{(1)} = \sqrt{ds_1^2 + \ldots + ds_{n+1}^2}$$

$$\frac{ds_i}{\frac{\partial L_1}{\partial x_i}} = \frac{1}{R} ds^{(1)},$$

Digitized by Google

$$R_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial L_1}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial L_1}{\partial x_{n+1}}\right)^2}.$$

Разсматривая, далѣе, границу: $L_1 = 0$ и $L_2 = 0$, какъ границу втораго рода по отношенію къ сказанной области $(n+1)$-го измѣренія и принимая во вниманіе равенства (§ 1)

$$\frac{dS_{1,\,n+1}}{\frac{\partial(L_1, L_2)}{\partial(x_1, x_{n+1})}} = \ldots = \frac{dS_{n,\,n+1}}{\frac{\partial(L_1, L_2)}{\partial(x_n, x_{n+1})}} = \ldots = \frac{dS_{pq}}{\frac{\partial(L_1, L_2)}{\partial(x_p, x_q)}} = \frac{dS^{(2)}}{R_2},$$

легко убѣждаемся, что

$$\frac{dS}{\rho_2 \frac{\partial L_1}{\partial x_{n+1}}} = \frac{dS^{(2)}}{R_2},$$

и поэтому:

$$\int \sum_i \frac{\partial(f_{i,\,n+1}, L_1)}{\partial(x_i, x_{n+1})} \frac{dS^{(1)}}{R_1} = -\int \sum_i f_{i,n+1} \frac{\partial(L_1, L_2)}{\partial(x_i, x_{n+1})} \frac{dS^{(2)}}{R_2} \qquad (\beta)$$

Принимая, далѣе, послѣдовательно всѣ перемѣнныя: $x_1, \ldots x_n$, x_{n+1} за функціи остальныхъ и разсматривая при этомъ различныя функціи f, можетъ написать цѣлый рядъ равенствъ, подобныхъ равенству (β), складывая которыя, окончательно получаемъ:

$$\int \sum_{ik} \frac{\partial(f_{ik}, L_1)}{\partial(x_i, x_k)} \frac{dS^{(1)}}{R_1} =$$

$$= -\int \sum_{ik} f_{ik} \frac{\partial(L_1, L_2)}{\partial(x_i, x_k)} \frac{dS^{(2)}}{R_2} \begin{pmatrix} i = 1, \ldots n+1 \\ k = 1, \ldots n+1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Равенство (1) представляетъ собою извѣстную формулу Стокса, обобщенную для функцій многихъ перемѣнныхъ; послѣдняя получается полагая въ формулѣ (1) $n+1 = 3$.

Соотношеніе (1) § 7 даетъ возможность вывести еще болѣе общую формулу, выражающую соотношеніе между интегра-

Digitized by Google

ломъ, распространеннымъ на границу какого угодно рода и интеграломъ, распространеннымъ ра границу слѣдующаго высшаго рода; при этомъ выводъ ничѣмъ неотличается отъ предыдущаго.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть имѣется функція:

$$f_i(x_1, \ldots x_n, x_{n+1}, \ldots x_{n+p}),$$

причемъ существуютъ слѣдующія равенства:

$$\left.\begin{aligned} L_1(x_1, \ldots x_{n+p}) &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ L_p(x_1, \ldots x_{n+p}) &= 0 \end{aligned}\right\}(\gamma),$$

такъ что p перемѣнныхъ суть функціи n—остальныхъ; напр. $x_{n+1}, \ldots x_{n+p}$ суть функціи перемѣнныхъ: $x_1, \ldots x_n$.

Въ этомъ предположеніи равенство (1) § 7 намъ даетъ:

$$\int\sum_i \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \frac{\partial f_i}{\partial x_{n+1}}\frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_{n+p}}\frac{\partial x_{n+p}}{\partial x_i}\right] d\sigma_n =$$

$$= \int\sum_i f_i \left(\frac{\partial L_{p+1}}{\partial x_i} + \frac{\partial L_{p+1}}{\partial x_{n+1}}\frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_i} + \ldots\right)\frac{ds}{\rho} \qquad (\delta)$$

гдѣ интегралъ лѣвой части равенства распространяется на область

$$L_{p+1}(x_1, \ldots x_{n+p}) < 0,$$

а интегралъ правой части равенства—на границу

$$L_{p+1}(x_1, \ldots x_{n+p}) = 0.$$

$d\sigma_n$—элементъ области; ds—элементъ границы области ρ—корень квадратный изъ суммы квадратовъ полныхъ производныхъ функцій L_{p+1} по перемѣннымъ независимымъ $x_1, \ldots x_n$.

Изъ равенствъ (γ) имѣемъ:

Digitized by Google

$$\frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_i} = -\frac{\partial(L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_i, x_{n+2}, \ldots x_{n+p})} : \frac{\partial(L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_{n+1}, \ldots x_{n+p})}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial x_{n+p}}{\partial x_i} = -\frac{(\partial L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_{n+1}, \ldots x_{n+p-1}, x_i)} : \frac{\partial(L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_{n+1}, \ldots x_{n+p})}$$

Подставивъ эти выраженія въ интегралы равенства (δ), будемъ имѣть:

$$\int \sum_i \frac{\partial(f_i, L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_i, x_{n+1}, \ldots x_{n+p})} \frac{d\sigma_n}{\frac{\partial(L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_{n+1}, \ldots x_{n+p})}} =$$

$$= \int \sum_i f_i \frac{\partial(L_{p+1}, L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_i, x_{n+1}, \ldots x_{n+p})} \frac{ds}{\rho \frac{\partial(L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_{n+1}, \ldots x_{n+p})}}$$

Но разсматривая первый интегралъ, какъ интегралъ, распространенный на границу p-го рода, а второй — какъ интегралъ, распространенный на границу $(p+1)$-го рода, легко убѣдиться (§ 1), что:

$$\frac{d\sigma_n}{\frac{\partial(L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_{n+1}, \ldots x_{n+p})}} = \frac{ds^{(p)}}{R_p}$$

и

$$\frac{ds}{\rho \frac{\partial(L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_{n+1}, \ldots x_{n+p})}} = \frac{ds^{(p+1)}}{R_{p+1}}$$

гдѣ

$$R_p = \sqrt{\sum_{ij\ldots l} \left[\frac{\partial(L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_i, \ldots x_l)}\right]^2} \quad \begin{pmatrix} i=1, \ldots n+p \\ j=1, \ldots n+p \end{pmatrix}$$

$$R_{p+1} = \sqrt{\sum_{jik\ldots l} \left[\frac{\partial(L_1, \ldots L_p, L_{p+1})}{\partial(x_i, x_j, x_k, \ldots x_l)}\right]^2}$$

и тогда

Digitized by Google

$$\int \sum_i \partial \frac{\partial (f_i, L_1, \ldots L_p)}{\partial (x_i, x_{n+1}, \ldots x_{n+p})} \frac{ds^{(p)}}{R_p} =$$

$$= \int \sum_i f_i \frac{\partial (L_{p+1}, L_1, \ldots L_p)}{\partial (x_i, x_{n+1}, \ldots x_{n+p})} \frac{ds^{(p+1)}}{R_{p+1}}.$$

Написавъ такія же равенства для цѣлаго ряда функцій и суммируя, мы получимъ:

$$\int \sum_{ij\ldots l} \frac{\partial (f_{ij\ldots l}, L_1, \ldots L_p)}{\partial (x_i, x_j, \ldots x_l)} \frac{ds^{(p)}}{R_p} =$$

$$= \int \sum_{ij\ldots l} f_{ij\ldots l} \frac{\partial (L_{p+1}, L_1, \ldots L_p)}{\partial (x_i, x_j, \ldots x_l)} \frac{ds^{(p+1)}}{R_{p+1}}, \qquad (2)$$

гдѣ первый интегралъ распространяется на границу

$$L_1 = 0, \ldots L_p = 0, \; L_{p+1} < 0.$$

а второй на границу:

$$L_1 = 0, \ldots L_p = 0, \; L_{p+1} = 0.$$

§ 9. Формула, аналогичная формулѣ Грина.

Обобщенная формула Борхардта § 6 можетъ тоже служить для полученія нѣкоторыхъ другихъ соотношеній, но мы на этомъ не останавливаемся, такъ какъ способъ полученія этихъ соотношеній почти тотъ же, что и въ предъидущемъ параграфѣ. Укажемъ только здѣсь на соотношеніе, получающееся изъ равенства (2) § 8 и представляющее собою формулу, аналогичную формулѣ Грина § 7.

Полагая въ равенствѣ (2) предъидущаго параграфа:

$$f_{ij\ldots l} = a_{ij\ldots l} P \frac{\partial (Q, L_1 \ldots L_p)}{\partial (x_i, \ldots x_l)},$$

будемъ имѣть:

Digitized by Google

$$\int \sum_{ij\ldots l} a_{ij\ldots l} \frac{\partial(P, L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_i, x_j, \ldots x_l)} \cdot \frac{\partial(Q, L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_i, \ldots x_l)} \frac{ds^{(p)}}{R_p} +$$

$$+ \int P \sum_{ij\ldots l} \frac{\partial \left[a_{ij\ldots l} \frac{\partial(Q, L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_i, \ldots x_l)}, L_1, \ldots L_p \right]}{\partial(x_i, \ldots x_l)} \frac{ds^{(p)}}{R_p} =$$

$$= \int P \sum_{ij\ldots l} a_{i\ldots l} \frac{\partial(Q, L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_i, \ldots x_l)} \cdot \frac{\partial(L_{p+1}, L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_i, \ldots x_l)} \frac{ds^{(p+1)}}{R_{p+1}}$$

Имѣя въ виду, что первый интегралъ лѣвой части равенства не измѣняется отъ перестановки P и Q, можно написать:

$$\int \sum_{ij\ldots l} a_{i\ldots l} \frac{\partial(Q, L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_i, \ldots x_l)} \cdot \frac{\partial(P, L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_i, \ldots x_l)} \frac{ds^{(p)}}{R_p} +$$

$$+ \int Q \sum_{ij\ldots l} \frac{\partial \left| a_{i\ldots i} \frac{\partial(P, L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_i \ldots x_l)}, L_1, \ldots L_p \right|}{\partial(x_i, \ldots x_l)} \frac{ds^{(p)}}{R_p} =$$

$$= \int Q \sum_{i\ldots l} a_{ij\ldots l} \frac{\partial(P, L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_i, \ldots x_l)} \cdot \frac{\partial(L_{p+1}, L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_i, \ldots x_l)} \frac{ds^{(p+1)}}{R_{p+1}}$$

Вычитая обѣ части полученнаго равенства изъ соотвѣтствующихъ частей предъидущаго равенства, будемъ имѣть:

$$\int \left\{ P \sum_{i\ldots l} \frac{\partial \left[a_{i\ldots l} \frac{\partial(Q, L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_i, \ldots x_l)}, L_1, \ldots L_p \right]}{\partial(x_i, \ldots x_l)} - \right.$$

$$\left. - Q \sum_{i\ldots l} \frac{\left[a_{ij\ldots l} \frac{\partial(P, L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_i, \ldots x_l)} \right]}{\partial(x_i, \ldots x_l)} \right\} \frac{ds^{(p)}}{R_p} =$$

$$= \int \left\{ P \sum_{i\ldots l} a_{\ldots l} \frac{\partial(Q, L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_i, \ldots x_l)} \cdot \frac{\partial(L_{p+1}, L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_i, \ldots x_l)} - \right. \tag{1}$$

$$\left. - Q \sum_{i\ldots l} a_{i\ldots l} \frac{\partial(P, L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_i, \ldots x_l)} \cdot \frac{\partial(L_{p+1}, L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_i, \ldots x_l)} \right\} \frac{ds^{(p+1)}}{R_{p+1}}$$

Digitized by Google

Это равенство представляетъ собою формулу, аналогичную формулѣ Грина, причемъ интегралъ лѣвой части равенства распространенъ на границу p-го рода, а интегралъ правой части—на границу $(p+1)$-го рода.

Если функція Q удовлетворяетъ уравненію:

$$\sum_{i\ldots l} \frac{\partial\left[a_{i\ldots l}\frac{\partial(Q,L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)},\ L_1,\ldots L_p\right]}{\partial(x_i,\ldots x_l)} = AQ \qquad (2),$$

гдѣ A—нѣкоторая сплошная, конечная и непрерывная функція, то равенство (1) приметъ слѣдующій видъ:

$$\int Q\left[AP - \sum_{i\ldots l}\frac{\partial\left[a_{i\ldots l}\frac{\partial(P,L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)},\ L_1,\ldots L_p\right]}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\right]\frac{ds^{(p)}}{R_p} =$$

$$= \int\Big[P\sum_{i\ldots l} a_{i\ldots l}\frac{\partial(Q,L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\cdot\frac{\partial(L_{p+1},L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)} - \qquad (3)$$

$$- Q\sum_{i\ldots l} a_{i\ldots l}\frac{\partial(P,L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\cdot\frac{\partial(L_{p+1},L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\Big]\frac{ds^{(p+1)}}{R_{p+1}}$$

Наконецъ, если и функція P удовлетворяетъ уравненію (2), то:

$$\int P\sum_{i\ldots l} a_{i\ldots l}\frac{\partial(Q,L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\cdot\frac{\partial(L_{p+1},L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\frac{ds^{(p+1)}}{R_{p+1}} =$$

$$= \int Q\sum_{i\ldots l} a_{i\ldots l}\frac{\partial(P,L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\cdot\frac{\partial(L_{p+1},L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\frac{ds^{(p+1)}}{R_{p+1}} \qquad (4)$$

Примѣчаніе. Замѣтимъ, что выраженіе:

$$\frac{\partial(Q,L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)},$$

Digitized by Google

если ввести новыя перемѣнныя:

$$\xi_1, \ldots \xi_n;\ \zeta_1 = L_1,\ \zeta_2 = L_2, \ldots \zeta_p = L_p,$$

принимаетъ такой видъ, что въ немъ войдутъ только частныя производныя функціи Q по перемѣннымъ $\xi_1, \ldots \xi_n$. Тоже самое, очевидно, справедливо и относительно уравненія (2). Это обстоятельство очень важно въ томъ случаѣ, когда приходится интегрировать уравненіе (2); тогда, указанною здѣсь замѣною перемѣнныхъ, мы приводимъ вопросъ къ интегрированію уравненія съ меньшимъ числомъ перемѣнныхъ.

§ 10. **Дифференцированіе кратнаго интеграла по параметру.**

Мы видѣли, что всѣ формулы предъидущихъ параграфовъ суть слѣдствія одной формулы, получающейся при замѣнѣ перемѣнныхъ въ интегралѣ, распространенномъ на область; при чемъ легко было замѣтить, что каждая изъ выведенныхъ общихъ формулъ можетъ служить исходною точкою для полученія всѣхъ остальныхъ, такъ что весь циклъ этихъ формулъ выражаетъ собою одну общую теорему.

Другою исходною точкою для полученія соотношеній между интегралами, распространенными на область и интегралами, распространенными на границу области — можетъ служить дифференцированіе кратнаго интеграла по параметру.

Формула для дифференцированія по параметру кратнаго интеграла впервые дана Остроградскимъ *) (варіація кратнаго интеграла); Кронекеръ **) приводитъ эту формулу безъ доказательства. Укажемъ еще на доказательство этой формулы, приведенное въ сочиненіи Н. Н. Зинина *).

Мы здѣсь приводимъ другое доказательство этой формулы, отличающееся, по нашему мнѣнію, бо́льшею элементарностью.

---

*) Ostrogradsky. Mémoire sur le calcul des variations des intégrales multiples. Mémoires de l'Académie de sciences de St-Pétersbourg. VI Série t. 1. 1838 p. 35—58.

**) Kronecher. Ueber Systeme von Functionen mehrer Variabeln Monatsberichte der Academie zu Berlin (aus dem Jahre 1869). 1870 p. 159—193.

*) Зининъ. Н. Различные пріемы приведенія кратныхъ интеграловъ. Варшава 1892.

Digitized by Google

Мы знаемъ, что операція дифференцированія по параметру одиночнаго опредѣленнаго интеграла выражается слѣдующею формулою:

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x, \alpha)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{d\alpha}\,dx + f(b, \alpha)\,\frac{db}{d\alpha} - f(a, \alpha)\,\frac{da}{d\alpha} \quad (1)$$

Исходя изъ этой формулы, легко получить формулу для дифференцированія по параметру кратнаго интеграла.

Положимъ сначала, что у насъ имѣется двукратный интегралъ:

$$I = \int\int f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2,$$

распространенный на площадь, ограниченной сомкнутымъ контуромъ, который, допустимъ для простоты, пересѣкается прямою въ двухъ точкахъ. Пусть уравненіе кривой, ограничивающей разсматриваемую площадь—будетъ

$$L_1(x_1, x_2, \alpha) = 0;$$

функцію же f предполагаемъ сначала независящею отъ α.

Обозначивъ черезъ $f_1(x_1, x_2)$—неопредѣленный интегралъ функціи f, взятый по x_2 (считая x_1 постояннымъ), будемъ имѣть:

$$I = \int_a^b \left[f_1(x_1, x''_2) - f_1(x_1, x'_2) \right] dx_1,$$

гдѣ

x''_2 и x'_2—два значенія перемѣнной x_2, получаемыя изъ уравненія $L_1 = 0$

a и b — значенія перемѣнной x_1, при которыхъ $x''_2 = x'_2$.

Прилагая формулу (1) къ предъидущему равенству, будемъ имѣть:

Digitized by Google

$$\frac{dI}{d\alpha}=\int_a^b\left[f(x_1, x''_2)\frac{dx''_2}{d\alpha}-f(x_1, x'_2)\frac{dx'_2}{d\alpha}\right]dx_1+$$

$$+\frac{db}{d\alpha}\left[f_1(x_1, x''_2)-f_1(x_1, x'_2)\right]_{x_1=b}-$$

$$-\frac{da}{d\alpha}\left[f_1(x_1, x''_2)-f_1(x_1, x'_2)\right]_{x_1=a}$$

Послѣдніе два члена полученнаго равенства очевидно равны нулю, такъ какъ при $x_1=a$ и при $x_1=b$, $x''_2=x'_2$; что же касается перваго члена правой части равенства, то, принимая во вниманіе уравненіе $L_1=0$, получимъ:

$$\frac{dI}{d\alpha}=\int_a^b\left[-f(x_1, x''_2)\frac{\partial L_1}{\partial\alpha}\frac{dx_1}{\frac{\partial L_1}{\partial x''_2}}+f(x_1, x'_2)\frac{\partial L_1}{\partial\alpha}\frac{dx_1}{\frac{\partial L_1}{\partial x''_2}}\right]=$$

$$=-\int f(x_1, x_2)\frac{\partial L}{\partial\alpha}\frac{1}{R_1}\,ds^{(1)}$$

Совершенно ясно, что если подинтегральная функція зависитъ отъ α, то будемъ имѣть

$$\frac{dI}{d\alpha}=\int\int\frac{\partial f}{\partial\alpha}dx_1\,dx_2-\int f\frac{\partial L_1}{\partial\alpha}\frac{ds^{(1)}}{R_1}\quad\cdot\qquad(2)$$

Допустимъ теперь, что формула (2) справедлива для n—кратнаго интеграла и покажемъ, что она справедлива и для $(n+1)$—кратнаго интеграла, т. е. что она справедлива вообще.

Пусть, въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ интегралъ:

$$I=\int f(x_1, \ldots . x_n, x_{n+1})dv,$$

распространенный на область

$$L_1(x_1, \ldots . x_n, x_{n+1}, \alpha)<0,$$

Digitized by Google

при чемъ функція f—независитъ отъ α. Обозначивъ черезъ f_1 неоопредѣленный интегралъ, взятый по x_{n+1} (считая всѣ остальныя перемѣнныя постоянными), будемъ имѣть:

$$I = \int [f_1(x_1, \ldots x_n, x''_{n+1}) - f_1(x_1, \ldots x_n, x'_{n+1})]\, dv',$$

гдѣ dv'—элементъ области n—измѣренія, въ частномъ случаѣ $dv' = dx_1 \ldots dx_n$; при этомъ, для простоты, мы предположили, что уравненіе $L_1 = 0$ намъ даетъ два значенія перемѣнной x_{n+1}, именно: x''_{n+1} и x'_{n+1}; интегралъ правой части равенства распространяется на область, опредѣляемую условіемъ:

$$x''_{n+1} - x'_{n+1} \gtrless 0,$$

а граница этой области опредѣляется уравненіемъ:

$$x''_{n+1} - x'_{n+1} = 0$$

Имѣя все это въ виду и предполагая формулу (2) справедливою для n—кратнаго интеграла, будемъ имѣть:

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int \left[f(x_1, \ldots x_n, x''_{n+1}) \frac{dx''_{n+1}}{d\alpha} - \right.$$

$$\left. - f(x_1, \ldots x_n, x'_{n+1}) \frac{dx'_{n+1}}{d\alpha} \right] dv' - \int \left[f_1(x_1, \ldots x_n, x''_{n+1}) - \right.$$

$$\left. - f_1(x_1, \ldots x_n, x'_{n+1}) \right] \frac{d(x''_{n+1} - x'_{n+1})}{d\alpha} \frac{1}{R'_1} ds_1^{(1)},$$

гдѣ первый интегралъ распространяется на вышесказанную область, а второй на границу

$$x''_{n+1} - x'_{n+1} = 0.$$

Такъ какъ второй интегралъ тождественно равенъ нулю, то и въ этомъ случаѣ получаемъ:

$$\frac{dI}{d\alpha} = -\int f \frac{\partial L_1}{\partial \alpha} \frac{1}{R_1} ds^{(1)}$$

Digitized by Google

Если и функція f зависитъ отъ σ, то будемъ имѣть:

$$\frac{dI}{d\alpha}=\int\frac{\partial f}{\partial\alpha}dv-\int f\frac{\partial L_1}{\partial\alpha}\frac{1}{R_1}ds^{(1)}, \qquad (3)$$

что и требовалось доказать.

§ 11. **Дифференцированіе по параметру интеграла, распространеннаго на границу какого угодно рода.**

Изъ полученной въ предъидущемъ параграфѣ формулы (3) легко вывести формулу для дифференцированія по параметру интеграла, распространеннаго на границу какого угодно рода.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть имѣемъ функцію

$$f(x_1,\ldots x_n, x_{n+1},\ldots x_{n+p}, \alpha),$$

при чемъ перемѣнныя связаны уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} L_1(x_1,\ldots x_n, x_{n+1},\ldots x_{n+p}, \alpha)&=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ L_p(x_1,\ldots x_n, x_{n+1},\ldots x_{n+p}, \alpha)&=0\end{aligned}\right\}, \qquad (a)$$

тогда полная производная отъ f по α выразится слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{df}{d\alpha}=\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}\frac{\partial x_{n+1}}{\partial\alpha}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_{n+p}}\frac{\partial x_{n+p}}{\partial\alpha}, \qquad (b)$$

при этомъ, конечно, считаемъ перемѣнныя $x_{n+1}\ldots$ функціями другихъ перемѣнныхъ и параметра α.

Изъ равенствъ (a) имѣемъ:

$$\frac{\partial x_{n+1}}{\partial\alpha}=-\frac{\partial(L_1,\ldots L_p)}{\partial(\alpha, x_{n+2},\ldots x_{n+p})}:\frac{\partial(L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_{n+1},\ldots x_{n+p})}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial x_{n+p}}{\partial\alpha}=-\frac{\partial(L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_{n+1},\ldots x_{n+p-1},\alpha)}:\frac{\partial(L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_{n+1},\ldots x_{n+p})}.$$

Подставивъ въ равенство (a) и въ равенство (3) § 10, принимая при этомъ во вниманіе, какъ мы это раньше видѣли (§ 8), что

Digitized by Google

$$dv = \frac{ds^{(p)}}{R_p} \cdot \frac{\partial(L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_{n+1}, \ldots x_{n+p})}$$

$$\frac{ds^{(1)}}{R_1 \dfrac{\partial(L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_{n+1}, \ldots x_{n+p})}} = \frac{ds^{(p+1)}}{R_{p+1}},$$

получимъ:

$$\frac{d}{d\alpha}\int f \frac{\partial(L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_{n+1}, \ldots x_{n+p})} \frac{ds^{(p)}}{R_p} = \int \frac{\partial(f, L_1, \ldots L_p)}{\partial(\alpha, x_{n+1}, \ldots x_{n+p})} \frac{ds^{(p)}}{R_p} -$$

$$- \int f \frac{\partial(L_{p+1}, L_1, \ldots L_p)}{\partial(\alpha, x_{n+1}, \ldots x_{n+p})} \frac{ds^{(p+1)}}{R_{p+1}}$$

Суммируя подобныя же равенства для различныхъ функцій f, при чемъ какъ функціи другихъ перемѣнныхъ послѣдовательно принимаются перемѣнныя: $x_i, x_j, \ldots x_l$ ($i=1, \ldots n+p$, $j=1, \ldots n+p \ldots$), получаемъ:

$$\frac{d}{d\alpha}\int \sum_{ij\ldots l} f_{ij\ldots l} \frac{\partial(L_1, \ldots L_p)}{\partial(x_i, x_j \ldots x_l)} \frac{ds^{(p)}}{R_p} = \int \sum_{ij\ldots l} \frac{\partial(f_{ij\ldots l}, L_1, \ldots L_p)}{\partial(\alpha, x_i, \ldots x_l)} \frac{ds^{(p)}}{R_p} -$$

$$- \int \sum_{ij\ldots l} f_{ij\ldots l} \frac{\partial(L_{p+1}, L_1, \ldots L_p)}{\partial(\alpha, x_i, \ldots x_l)} \frac{ds^{(p+1)}}{R_{p+1}} \qquad (1)$$

При этомъ интегралъ лѣвой части равенства и первый интегралъ правой части распространяются на границу:

$$L_1 = 0, \; L_2 = 0 \ldots L_p = 0, \; L_{p+1} < 0,$$

второй же интегралъ правой части распространяется на границу:

$$L_1 = 0, \; L_2 = 0 \ldots L_p = 0, \; L_{p+1} = 0.$$

§ 12. **Формулы, аналогичныя формуламъ Борхардта, Остроградскаго. Грина и др.**

Формула (3) § 10 даетъ возможность получить формулы, аналогичныя формуламъ предъидущихъ параграфовъ.

Положимъ, что у насъ имѣются функціи:

Digitized by Google

$$f_1, f_2, \ldots f_p,$$

зависящія отъ параметровъ $\alpha_1, \ldots \alpha_p$.

Прилагая къ каждой изъ нихъ формулу (3) § 10 и суммируя, получимъ формулу, аналогичную формулѣ Остроградскаго (§ 7), именно:

$$\int\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial f_p}{\partial x_p}\right)dv=\sum_1^p\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\int f_i\,dv+$$

$$+\int\left(f_1\frac{\partial L_1}{\partial x_1}+\ldots+f_p\frac{\partial L_1}{\partial x_p}\right)\frac{ds^{(1)}}{R_1}, \qquad (1)$$

при чемъ предполагается, что функція L_1 зависитъ отъ параметровъ $\alpha_1, \ldots \alpha_p$.

Полагая въ равенствѣ (1)

$$f_i=\frac{R_1\lambda_i\varphi}{\sum_1^p\lambda_k\frac{\partial L_1}{\partial x_k}},$$

гдѣ λ_i—произвольныя функціи, получаемъ формулу, аналогичную формулѣ Борхардта (§ 6), именно:

$$\int\sum_1^p\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left[\frac{R_1\lambda_i\varphi}{\sum_1^p\lambda_k\frac{\partial L_1}{\partial x_k}}\right]dv=\sum_1^p\frac{\partial}{\partial x_i}\int\frac{R_1\lambda_i\varphi}{\sum_1^p\lambda_k\frac{\partial L_1}{\partial x_i}}\,dv+\int\varphi\,ds^{(1)}, \qquad (2)$$

изъ которой, какъ легко видѣть, можетъ быть выведена формула, аналогичная формулѣ (1) § 5.

Полагая въ равенствѣ (1)

$$f_i=\sum_{ij}a_{ij}P\frac{\partial Q}{\partial x_j},$$

при чемъ:

Digitized by Google

$$a_{ij} = a_{ji},$$

получаемъ формулу, аналогичную формулѣ Грина, (§ 7), именно:

$$\int\left[P\sum\frac{\left(\partial(a_{ij}\frac{\partial Q}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i} - Q\sum\frac{\left(\partial(a_{ij}\frac{\partial P}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i}\right]dv = \tag{3}$$

$$= \sum_1^p \frac{\partial}{\partial x_i}\int\left[P\sum_{ij} a_{ij}\frac{\partial Q}{\partial x_j} - Q\sum_{ij} a_{ij}\frac{\partial P}{\partial x_j}\right]dv =$$

$$+\int\left[P\sum_{ij} a_{ij}\frac{\partial Q}{\partial x_j}\frac{\partial L_1}{\partial x_i} - Q\sum_{ij} a_{ij}\frac{\partial P}{\partial x_j}\frac{\partial L_1}{\partial x_i}\right]\frac{ds^{(1)}}{R_1}$$

откуда получаемъ слѣдствія аналогичныя тѣмъ, которыя получены нами въ § 7 изъ формулы Грина.

§ 13. Заключеніе.

Резюмируя все сказанное въ этой главѣ, мы приходимъ къ заключенію, что всѣ извѣстныя соотношенія между интегралами, распространенными на область и интегралами, распространенныи на границу области, получаются изъ двухъ исходныхъ точекъ: 1) перемѣны перемѣнныхъ въ интегралѣ, распространенномъ на область и 2) дифференцированіи по параметру.

Но легко свести эти исходныя точки къ одному, если можно такъ выразиться, общему принципу. Для этого достаточно соединить въ одну—двѣ аналогичныя формулы, получающіяся: одна при помощи замѣны перемѣнныхъ въ интегралѣ, распространенномъ на область и другая дифференцированіемъ по параметру.

Если для этой цѣли взять, напримѣръ, формулы, аналогичныя формулѣ Борхардта §§ 6 и 12, то этотъ принципъ можетъ быть формулированъ слѣдующимъ образомъ:

Если у насъ имѣются функціи:

$$\varphi,\ \lambda_1,\ \lambda_2, \ldots \lambda_p,\ L,$$

Digitized by Google

зависящія отъ перемѣнныхъ:

$$x_1,\ x_2,\ldots x_n,\ y_1,\ y_2,\ldots y_m,$$

то

$$\int\sum_1^p \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{R_1\lambda_i\varphi}{\sum_1^p \lambda_k\frac{\partial L}{\partial x_k}}\right]dv = \sum_1^p \frac{\partial}{\partial x_i}\int\frac{R_1\lambda_i\varphi}{\sum_1^p \lambda_k\frac{\partial L}{\partial x_k}}\,dv + \int\varphi\,ds^{(1)},$$

гдѣ интегралъ лѣвой части и интегралы правой, стоящіе подъ знакомъ суммы,—распространяются на область:

$$L<0,$$

а послѣдній интегралъ правой части—на границу области

$$L=0,$$

при чемъ координатами точекъ области и ея границы считаются перемѣнныя:

$$x_1,\ldots x_n$$

и

$$R_1=\sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial L}{\partial x_n}\right)^2}.$$

Что же касается перемѣнныхъ: $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots$, по которымъ въ вышесказанной формулѣ берутся производныя, то онѣ суть: или $y_1,\ y_2\ldots y_m$, или $x_1,\ x_2,\ldots x_n$. Въ послѣднемъ случаѣ все выраженіе, стоящее подъ знакомъ суммы въ правой части равенства, обращается въ нуль, такъ какъ интегралы отъ этихъ перемѣнныхъ независятъ.

ГЛАВА II.

Нѣкоторыя слѣдствія раньше выведенныхъ формулъ.

§ 1. Формулы Грина для случая, когда одна изъ подинтегральныхъ функцій обращается въ безконечность въ точкѣ, принадлежащей области.

Во всемъ предъидущемъ мы предполагали, что функціи, входящія подъ знакомъ интеграла, остаются для всѣхъ точекъ

Digitized by Google

разсматриваемой области сплошными, однозначными *) и конечными, точно также какъ и ихъ частныя производныя; посмотримъ теперь, какой видъ принимаютъ формулы когда подинтегральная функція обращается въ безконечность. Мы главнымъ образомъ имѣемъ здѣсь въ виду обобщенную формулу Грина и аналогичныя ей формулы, выведенныя въ предъидущей главѣ.

Формула Грина, какъ мы видѣли (глава I, § 7) имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\int\left[P\sum_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial Q}{\partial x_i}\right)-Q\sum_{ji}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial P}{\partial x_j}\right)\right]dv=$$

$$=\int\left[P\sum_{ji}\frac{\partial R}{\partial x_j}\frac{\partial L_1}{\partial x_i}\frac{a_{ij}}{R_1}-Q\sum_{ji}\frac{\partial P}{\partial x_j}\frac{\partial L_1}{\partial x_i}\frac{a_{ij}}{R_1}\right]ds^{(1)} \tag{1}$$

гдѣ

$$i=1,\ldots n;\ j=1,\ldots n;\ a_{ij}=a_{ji}.$$

при чемъ функціи P и Q—конечныя, однозначныя и непрерывныя.

Пусть функція Q удовлетворяетъ уравненію:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial Q}{\partial x_j}\right)=AQ \tag{2}$$

тогда равенство (1) принимаетъ слѣдующій видъ:

$$\int\left[AP-\sum_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial P}{\partial x_j}\right)\right]Qdv=$$

$$=\int\left[P\sum_{ij}\frac{\partial Q}{\partial x_i}\frac{\partial L_1}{\partial x_i}a_{ij}-Q\sum_{ij}\frac{\partial P}{\partial x_j}a_{ij}\right]\frac{ds^{(1)}}{R_1} \tag{3}$$

*) Разсматриваемая функція можетъ быть и многозначная, лишь бы только въ данной области не было точки развѣтвленія, и тогда мы имѣемъ въ виду функцію при одномъ какомъ-нибудь ея опредѣленіи.

Digitized by Google

Допустимъ теперь, что функція Q въ нѣкоторой точкѣ области, координаты которой суть: $x_1', \ldots x_n'$,— обращается въ безконечность порядка n—2—по отношенію къ величинѣ

$$\rho = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + \ldots + (x_n - x_n')^2},$$

т. е. мы допускаемъ, что, вводя новыя перемѣнныя:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1' + \rho \operatorname{Cos} \theta_1 \\ x_2 &= x_2' + \rho \operatorname{Sin} \theta_1 \operatorname{Cos} \theta_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} &= x'_{n-1} + \rho \operatorname{Sin} \theta_1 \operatorname{Sin} \theta_2 \ldots \operatorname{Sin} \theta_{n-2} \operatorname{Cos} \theta_{n-1} \\ x_{n-1} &= x_n' + \rho \operatorname{Sin} \theta_1 \operatorname{Sin} \theta_2 \ldots \operatorname{Sin} \theta_{n-1} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

функція Q принимаетъ слѣдующій видъ:

$$Q = \rho^{-(n-2)} Q_1 \quad (5),$$

гдѣ Q_1 стремится къ конечному предѣлу, когда ρ стремится къ нулю.

Въ случаѣ n=2, мы предполагаемъ, что функція Q принимаетъ слѣдующій видъ:

$$Q = lg\, \rho \cdot Q_1 \quad (6)$$

Для особенно насъ интересующаго случая, именно, для случая, когда $n = 2$, мы дальше увидимъ, что существуетъ такая функція, которая одновременно удовлетворяетъ уравненію (2) и условію (6), по крайней мѣрѣ для того вида уравненія (2), который мы будемъ разсматривать.

При этихъ условіяхъ нельзя уже распространить интегрированіе на всю разсматриваемую область, потому что функція Q и ея производныя обращаются въ безконечность когда перемѣнныя принимаютъ значенія: $x_1', \ldots x_n'$. Но мы можемъ тогда интегралъ лѣвой части равенства (3) разбить на два интеграла: одинъ—распространеный на область, удовлетворяющую условіямъ:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} &L_1(x_1, \ldots x_n) \leqq 0 \\ &(x_1 - x_1')^2 + \ldots + (x_n - x'_n)^2 > \rho^2 \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

и другой—распространенный на область:

$$(x_1 - x_1')^2 + \ldots + (x_n - x_n')^2 < \rho^2 \qquad (\beta)$$

Легко убѣдиться, что интегралъ, распространенный на область (β), стремится къ нулю вмѣстѣ съ ρ въ виду тѣхъ предположеній (условія (5) или (6)), какія мы дѣлали относительно функціи Q.

Такимъ образомъ мы видимъ, что интегралъ лѣвой части равенства (3) можетъ быть разсматриваемъ, какъ предѣлъ, къ которому стремится интегралъ, распространенный на область, опредѣляемую условіями (β), когда ρ стремится къ нулю; что же касается лѣвой части равенства (3), то она, въ этомъ случаѣ, можетъ быть разсматриваема какъ предѣлъ, къ которому стремится разность двухъ интеграловъ, распространенныхъ на границы вышеуказанныхъ областей.

Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\lim_{\rho=0} \int Q \left[\sum_{ji} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial P}{\partial x_j}\right) - AP \right] dv =$$

$$= \int_{L_1} \left[Q \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial P}{\partial x_j} \frac{\partial L_1}{\partial x_i} - P \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial Q}{\partial x_i} \frac{\partial L_1}{\partial x_i} \right] \frac{ds^{(1)}}{R_1} \qquad (7)$$

$$- \int_{l_1} \left[Q \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial P}{\partial x_j} \frac{\partial l_1}{\partial x_i} - P \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial Q}{\partial x_j} \frac{\partial l_1}{\partial x_i} \right] \frac{ds_1^{(1)}}{R_1'},$$

гдѣ буквы подъ интегралами обозначаютъ границы, на которыя распространяются интегралы, именно

$$L_1(x_1, \ldots x_n) = 0,$$

и

$$(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + \ldots + (x_n - x_n')^2 - \rho^2 = l_1 = 0.$$

Имѣя въ виду, что

Digitized by Google

$$\frac{\partial l_1}{\partial x_i} = 2(x_i - x_i')$$

$$R_1^2 = \sqrt{\left(\frac{\partial l_1}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial l_1}{\partial x_n}\right)^2} = 2\rho$$

$$ds_1' = \rho^{n-1} Sin^{n-2}\theta_1 Sin^{n-3}\theta_2 \ldots Sin\,\theta_{n-2} d\theta_1 d\theta_2 \ldots d\theta_{n-1}$$

при чемъ интегрированіе по $\theta_1, \ldots \theta_{n-1}$ должны быть произведены въ предѣлахъ:

$$\left.\frac{0}{\pi}\right\} \text{для } \theta_1, \quad \left.\frac{0}{\pi}\right\} \text{для } \theta_2 \ldots \quad \left.\frac{0}{2\pi}\right\} \text{для } \theta_{n-2},$$

легко убѣждаемся (Q—безконечно большая величина порядка $n-2$, $\frac{\partial Q}{\partial x_j}$— безконечность порядка $n-1$), что:

$$lim \int_{l_1} Q \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial P}{\partial x_j} \frac{x_i - x_i'}{\rho} \rho^{n-1} Sin^{n-2}\theta_1 \ldots Sin\,\theta_{n-2} d\theta_1 \ldots d\theta_{n-2} = 0.$$

Съ другой стороны, принимая во вниманіе теорему о среднихъ, будемъ имѣть:

$$lim \int_{l_1} P \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial Q}{\partial x_1} \frac{x_i - x_i'}{\rho} ds' = (P)\,W\,,$$

гдѣ (P) значеніе этой функціи, когда вмѣсто перемѣнныхъ подставимъ величины: x_1', x_2', $\ldots x_n'$, а

$$W = lim \left[\int_{l_1} \sum_{ij} \frac{\partial Q}{\partial x_i} \frac{x_i - x_i'}{\rho} ds' \right]_{\rho=0:} \tag{8}$$

Такимъ образомъ равенство (7) обращается въ слѣдующее:

$$\int Q \left[\sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) - AP \right] dv =$$

$$= \int \left[Q \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial P}{\partial x_j} \frac{\partial L_1}{\partial x_i} - P \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial Q}{\partial x_i} \frac{\partial L_1}{\partial x_i} \right] \frac{ds^{(1)}}{R_1} + (P)\,W.$$

Digitized by Google

Откуда:

$$P(x_1', \ldots x'_n) = \frac{1}{W}\left[\int\left[P\sum_{ij} a_{ij}\frac{\partial Q}{\partial x_j}\frac{\partial L_1}{\partial x_i} - Q\sum_{ij} a_{ij}\frac{\partial P}{\partial x_i}\frac{\partial L_1}{\partial x_i}\right]\frac{ds^{(1)}}{R_1}\right.$$

$$\left. - \int Q\left[AP - \sum_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ji}\frac{\partial P}{\partial x_j}\right)\right]dv\right]$$

Если и функція P удовлетворяетъ уравненію:

$$\sum\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial P}{\partial x_j}\right) = AP,$$

то

$$P(x_1', \ldots x_n') = \frac{1}{W}\left[\int P\sum_{ij} a_{ij}\frac{\partial Q}{\partial x_s}\frac{\partial L_1}{\partial x_i}\frac{ds^{(1)}}{R_1}\right.$$

$$\left. - \int Q\sum_{ij} a_{ij}\frac{\partial Q}{\partial x_j}\frac{\partial L_1}{\partial x_i}\frac{ds^{(1)}}{R_1}\right]. \qquad (9)$$

§ 2. **Формула, аналогичная формулѣ (9) предъидущаго параграфа.**

Совершенно подобнымъ же образомъ, какъ мы вывели формулу (9) предъидущаго параграфа, можно вывести аналогичную ей формулу, исходя изъ равенства (1) или (4) § 9 главы I.

Въ самомъ дѣлѣ эти равенства выведены въ предположеніи, что на разсматриваемой границѣ функціи P и Q сплошныя, непрерывныя и конечныя, точно также какъ ихъ частныя производныя; предположимъ теперь, что функція Q, удовлетворяя уравненію (2) § 9, главы I, обращается въ нѣкоторой точкѣ границы въ безконечность порядка n — 2 по отношенію къ величинѣ ρ, опредѣляемой равенствомъ:

$$\rho^2 = (x_1 - x_1')^2 + \ldots + (x_{n+p} - x'_{n+p})^2,$$

гдѣ: $x_1', \ldots x'_{n+p}$ — координаты сказанной точки, въ которой функція Q обращается въ безконечность. Иначе сказать, мы

Digitized by Google

предполагаемъ, что функція Q, удовлетворяя уравненію (2) § 9 главы I, можетъ послѣ замѣны координатъ обобщенными полярными координатами, принять слѣдующій видъ:

$$Q=\rho^{-(n-2)}Q_1,$$

или

$$Q=lg\,\rho\,.\,Q_1 --$$

для случая $n=2$

при чемъ Q_1 стремится къ конечной величинѣ, когда ρ стремится къ нулю.

Въ этомъ случаѣ нельзя уже распространять интегрированіе на всю разсматриваемую границу, такъ какъ подъинтегральная функція обращается въ безконечность въ одной изъ ея точекъ; поэтому мы здѣсь поступимъ слѣдующимъ образомъ:

Разсмотримъ сумму двухъ интераловъ J_1 и J_2 вида:

$$J=\int Q\left[AP-\sum_{i,j\ldots l}\frac{\partial\left[a_{i\ldots l}\dfrac{\partial(P,L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,x_j\ldots x_l)},\ L_1,\ldots L_p\right]}{\partial(x_i,x_j,\ldots x_l)}\right]\frac{ds^{(p)}}{R_p}$$

гдѣ

J_1—распространяется на границу, опредѣляемую условіемъ:

$$\left.\begin{aligned}&L_1=0;\ L_2=0;\ldots L_p=0\\&(x_1-x_1')^2+\ldots+(x_{n+p}-x'_{n+p})^2>\rho^2\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

а второй J_2—на границу, опредѣляемую условіями

$$\left.\begin{aligned}&L_1=0;\ L_2=0\ldots L_{p-1}=0\\&(x_1-x_1')^2+\ldots+(x_{n+p}-x'_{n+p})^2-\rho^2=0\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Имѣя въ виду предъидущее условіе, которому удовлетворяетъ функція Q, а также и видъ выраженія

$$\frac{ds^{(p)}}{R_p},$$

мы, введя обобщенныя полярныя координаты, легко убѣж-

Digitized by Google

даемся, что интегралъ J_2 стремится къ нулю вмѣстѣ съ ρ, и, такимъ образомъ, видимъ, что интегралъ J, распространенный на всю разсматриваемую часть границы:

$$L_1=0;\ldots L_p=0,$$

можетъ быть вычисленъ какъ предѣлъ, къ которому стремится интегралъ J_1, когда ρ подходитъ къ нулю. Принимая во вниманіе вышесказанное, вычислимъ сначала интегралъ J_1 по формулѣ (3) § 9 главы I и затѣмъ перейдемъ къ предѣлу.

Мы имѣемъ:

$$\int Q\left\{AP-\sum_{ij\ldots l}\frac{\partial\left[a_{ij\ldots l}\frac{\partial(P,L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)},\ L_1,\ldots L_p\right]}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\right\}\frac{ds^{(p)}}{R_p}=$$

$$=\int_{L_{p+1}}\left[P\sum_{ij\ldots l}a_{ij\ldots l}\frac{\partial(Q,L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\frac{\partial(L_{p+1},L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}-\right.$$

$$\left.-Q\sum_{i\ldots l}a_{ij\ldots l}\frac{\partial(P,L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\frac{\partial(L_{p+1},L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\right]\frac{ds^{(p+1)}}{R_{(p+1)}}$$

$$-\int_{\lambda}\left[P\sum_{i\ldots l}a_{ij\ldots l}\frac{\partial(Q,L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\frac{\partial(\lambda,L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}-\right.$$

$$\left.-Q\sum_{i\ldots l}a_{ij\ldots l}\frac{\partial(P,L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\frac{\partial(\lambda,L_1\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\right]\frac{ds_1^{(p+1)}}{R'_{p+1}}$$

гдѣ

$$\lambda=(x_1-x_1')^2+\ldots+(x_{n+p}-x'_{n+p})^2-\rho^2=0.$$

$$\frac{ds_1^{(p+1)}}{R'_{p+1}}=\frac{dx_1\ldots dx_{n-1}}{\frac{\partial(\lambda,L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_n,x_{n+1},\ldots x_{n+p})}}.$$

Переходя къ предѣлу и принимая во вниманіе, что:

Digitized by Google

$$lim\left\{\int Q\sum_{i..l}a_{i\cdots l}\frac{\partial(P,L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\frac{\partial(\lambda,L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\frac{ds_1^{(p+1)}}{R'_{p+1}}\right\}_{\rho=0}=0\ ,$$

получаемъ:

$$\int Q\left[AP-\sum_{i..l}\frac{\partial\left[a_{i\cdots l}\frac{\partial(P,L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)},L_1,\ldots L_p\right]}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\right]\frac{ds^{(p)}}{R_p}=$$

$$=\int\left[P\sum_{i\ldots l}a_{i\cdots l}\frac{\partial(Q,L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\cdot\frac{\partial(L_{p+1},L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}-\right.$$

$$\left.-Q\sum_{i..l}a_{i\cdots l}\frac{\partial(P,L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\frac{\partial(L_{p-1},L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\right]\frac{ds^{(p+1)}}{R_{p+1}}-$$

$$-P(x_1',x_2',\ldots x'_{n-p})\ V,$$

гдѣ

$$V=lim\left[\int\sum_{i..l}a_{i\cdots l}\frac{\partial(Q,L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\cdot\frac{\partial(\lambda,L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\frac{ds^{(p-1)}}{R'_{p-1}}\right]_{\rho=0}$$

Если и функція P удовлетворяетъ уравненію (2) § 9 гл. I то послѣднее равенство принимаетъ слѣдующій видъ:

$$P(x_1',\ldots x'_{n+p})=$$

$$=\frac{1}{V}\left\{\int\left[P\sum_{i\ldots l}a_{i\cdots l}\frac{\partial(Q,L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\cdot\frac{\partial(L_{p+1},L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-Q\sum_{i\ldots l}a_{i\cdots l}\frac{\partial(P,L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\cdot\frac{\partial(L_{p+1},L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\right]\frac{ds^{(p+1)}}{R_{p+1}}\right\}$$

§ 3. Объ интегрированіи въ конечномъ видѣ одного уравненія въ частныхъ проводныхъ втораго порядка.

Для того, чтобы можно было, изъ полученныхъ въ предъидущихъ параграфахъ настоящей главы формулъ, вывести какія нибудь частныя теоремы, необходимо проинтегриро-

Digitized by Google

вать уравненія: (3) § 7 и (2) § 9 главы I. Въ этомъ параграфѣ мы разберемъ одинъ частный случай уравненія (3) § 7 главы I, именно: найдемъ при какомъ значеніи A интегрируется въ конечномъ видѣ уравненіе:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(a_{11}\frac{\partial Q}{\partial x_1}+a_{12}\frac{\partial Q}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(a_{12}\frac{\partial Q}{\partial x_1}+a_{22}\frac{\partial Q}{\partial x_2}\right)=AQ. \qquad (1)$$

Для этого введемъ новыя перемѣнныя ξ_1 и ξ_2, связанныя съ прежними слѣдующими равенствами:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}+a_{22}\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\right)^2=0 \\ a_{11}\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}+a_{22}\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}\right)^2=0 \end{aligned}\right\}$$

Или

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}=\lambda_1\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}=\lambda_2\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1&=\frac{-a_{12}+r}{a_{11}} \\ \lambda_2&=\frac{-a_{12}-r}{a_{11}} \\ r&=\sqrt{a^2_{12}-a_{11}a_{22}}\ \text{не}=0 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Подставивъ въ (1), получимъ:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \xi_1\,\partial \xi_2}+\frac{1}{2r}\frac{\partial r}{\partial \xi_2}\frac{\partial Q}{\partial \xi_1}+\frac{1}{2r}\frac{\partial r}{\partial \xi_1}\frac{\partial Q}{\partial \xi_2}=\frac{A\,a_{11}}{4r^2\dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\dfrac{\partial \xi_2}{\partial x_2}}Q \qquad (4)$$

Полагая, далѣе,

$$Q=r^{-\frac{1}{2}}M,$$

будемъ имѣть:

Digitized by Google

$$\frac{\partial^2 M}{\partial\xi_1\,\partial\xi_2}=\left[\frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial^2(r^{\frac{1}{2}})}{\partial\xi_1\partial\xi_2}-\frac{A\,a_{11}}{4r^2\,\dfrac{\partial\xi_1}{\partial x_2}\,\dfrac{\partial\xi_2}{\partial x_2}}\right]M.$$

Послѣднее уравненіе интегрируется, когда:

$$\frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial^2(r^{\frac{1}{2}})}{\partial\xi_1\,\partial\xi_2}-\frac{A\,a_{11}}{4r^2\,\dfrac{\partial\xi_1}{\partial x_2}\,\dfrac{\partial\xi_2}{\partial x_2}}=\frac{n(n-1)}{(\xi_1+\xi_2)^2},$$

гдѣ n—цѣлое положительное число *)
Въ самомъ дѣлѣ, полагая въ этомъ случаѣ:

$$M=(\xi_1+\xi_2)^n\frac{\partial^{n-1}M_2}{\partial\xi_2^{\,n-1}},$$

получимъ:

$$\frac{\partial^n}{\partial\xi_2^{\,n}}\left[(\xi_1+\xi_2)\frac{\partial M_2}{\partial\xi_1}\right]+n\frac{\partial^n M_2}{\partial\xi_2^{\,n}}=0,$$

интегрируя которое, будемъ имѣть:

$$(\xi_1+\xi_2)\frac{\partial M_2}{\partial\xi_1}+nM_2=\omega_0+\xi_2\omega_1+\ldots+\xi_2^{\,n-1}\omega_{n-1},$$

гдѣ $\omega_0,\ \omega_1,\ldots\omega_{n-1}$ — произвольныя функціи перемѣнной ξ_1; но, такъ какъ намъ достаточно имѣть частный интегралъ, то можемъ приравнять нулю всѣ произвольныя функціи и тогда получимъ:

$$M_2=(\xi_1+\xi_2)^{-n}\varphi_2(\xi_2),$$

гдѣ φ_2—произвольная функція.

Совершенно также, полагая:

$$M=(\xi_1+\xi_2)^n\frac{\partial^{n-1}M_1}{\partial\xi_1^{\,n-1}},$$

получимъ:

$$M_1=(\xi_1+\xi_2)^{-n}\varphi_1(\xi_1)$$

---

*) Если n—какое угодно число, то уравненіе интегрируется при помощи опредѣленныхъ интеграловъ, но мы здѣсь на этомъ не останавливаемся.

Digitized by Google

и полный интегравъ уравненія (1) будетъ:

$$M=(\xi_1+\xi_2)^n\left\{\frac{\partial^{n-1}}{\partial\xi_1^{n-1}}\left[(\xi_1+\xi_2)^{n-1}\varphi_1(\xi_1)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^{n-1}}{\partial\xi_2^{n-1}}\left[(\xi_1+\xi_2)^{-n}\varphi_2(\xi_2)\right]\right\} \qquad (5)$$

§ 4. **Интегрированіе одного частнаго случая уравненія (2) § 9 главы I.**

Управленіе (2) § 9 главы I имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\sum_{i\ldots l}\frac{\partial\left[a_{i\ldots l}\frac{\partial(Q,L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)},\ L_1,\ldots L_p\right]}{\partial(x_i,\ldots x_l)}=AQ\begin{pmatrix}i=1,2,\ldots n+p\\ l=1,2,\ldots n+p\end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Посмотримъ, при какомъ значеніи для A уравненіе это интегрируется въ случаѣ: $n=2$.

Для этого введемъ новыя перемѣнныя:

$$\xi_1,\xi_2,\zeta_1=L_1,\ldots\zeta_p=L_p,$$

тогда, какъ мы это замѣтили въ примѣчаніи къ § 9 главы I, будемъ имѣть:

$$\frac{\partial(Q,L_1,\ldots L_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}=\frac{\partial Q}{\partial\xi_1}\cdot\frac{\partial(\xi_1,\zeta_1,\ldots\zeta_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}+\frac{\partial Q}{\partial\xi_2}\frac{\partial(\xi_2,\zeta_1,\ldots\zeta_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)} \qquad (2)$$

и уравненіе (1) обратится въ слѣдующее:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\xi_1^2}\sum_{i\ldots l}a_{i\ldots l}\left[\frac{\partial(\xi_1,\zeta_1,\ldots\zeta_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\right]^2+$$
$$+2\frac{\partial^2 Q}{\partial\xi_1\partial\xi_2}\sum_{i\ldots l}a_{i\ldots l}\frac{\partial(\xi_1,\zeta_2,\ldots\zeta_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\cdot\frac{\partial(\xi_2,\zeta_1,\ldots\zeta_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}+$$
$$+\frac{\partial^2 Q}{\partial\xi_2^2}\sum_{i,\ldots l}a_{i\ldots l}\left[\frac{\partial(\xi_2,\zeta_2,\ldots\zeta_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\right]^2+$$
$$+\frac{\partial Q}{\partial\xi_1}\sum_{i\ldots l}\frac{\partial\left[a_{i\ldots l}\frac{\partial(\xi_1,\zeta_1,\ldots\zeta_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)},\zeta_1,\ldots\zeta_p\right]}{\partial(x_i,\ldots x_l)}+$$
$$+\frac{\partial Q}{\partial\xi_2}\sum_{i\ldots l}\frac{\partial\left[a_{i\ldots l}\frac{\partial(\xi_2,\zeta_1,\ldots\zeta_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)},\zeta_1,\ldots\zeta_n\right]}{\partial(x_i,\ldots x_l)}=AQ.$$

Digitized by Google

Полагая:

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{i\ldots l} a_{i,\ldots l}\left[\frac{\partial(\xi_1,\zeta_1,\ldots\zeta_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\right]^2 &= b_{11}\lambda\\
\sum_{i\ldots l} a_{i,\ldots l}\frac{\partial(\xi_1,\zeta_1,\ldots\zeta_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\cdot\frac{\partial(\xi_2,\zeta_1,\ldots\zeta_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)} &= b_{12}\lambda\\
\sum_{i\ldots l} a_{i,\ldots l}\left[\frac{\partial(\xi_2,\zeta_1,\ldots\zeta_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)}\right]^2 &= b_{22}\lambda\\
\sum_{i\ldots l}\frac{\partial\left[a_{i,\ldots l}\frac{\partial(\xi_1,\zeta_1,\ldots\zeta_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)},\ \zeta_1,\ldots\xi_p\right]}{\partial(x_i,\ldots x_l)} &= \lambda\left(\frac{\partial b_{11}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial b_{12}}{\partial\xi_2}\right)\\
\sum_{i\ldots l}\frac{\partial\left[a_{i,\ldots l}\frac{\partial(\xi_2,\zeta_1,\ldots\zeta_p)}{\partial(x_i,\ldots x_l)},\ \zeta_1,\ldots\zeta_p\right]}{\partial(x_i,\ldots x_l)} &= \lambda\left(\frac{\partial b_{12}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial b_{22}}{\partial\xi_2}\right),
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Получимъ:

$$\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(b_{11}\frac{\partial Q}{\partial\xi_1}+b_{12}\frac{\partial Q}{\partial\xi_2}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(b_{12}\frac{\partial Q}{\partial\xi_1}+b_{22}\frac{\partial Q}{\partial\xi_2}\right)=\frac{A}{\lambda}Q\qquad(4)$$

Итакъ мы видимъ, что при соблюденіи условія, вытекающаго изъ положеній (3), уравненіе (1) приводится къ уравненію, неотличающемуся по виду отъ уравненія (1) предъидущаго параграфа и поэтому оно интегрируется при тѣхъ же условіяхъ, при которыхъ интегрируется сказанное уравненіе; именно, вводя новыя перемѣнныя η_1 и η_{12}, удовлетворяющія уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\eta_1}{\partial\xi_1}=\mu_1\frac{\partial\eta_1}{\partial\xi_2};\ \frac{\partial\eta_{12}}{\partial\xi_1}=\mu_2\frac{\partial\eta_{12}}{\partial\xi_2};\\
&\mu_1=\frac{-b_{12}+\rho}{b_{11}};\ \mu_2=\frac{-b_{12}-\rho}{b_{11}};\\
&\rho=\sqrt{b_{12}^2-b_{11}b_{22}}\ \text{не}=o
\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

и полагая:

Digitized by Google

$$\frac{1}{\rho_1^2}\frac{\partial^2(\rho^2)}{\partial\eta_1\partial\eta_2}-\frac{Ab_{11}}{4\rho^2\lambda\dfrac{\partial\eta_1}{\partial\xi_2}\dfrac{\partial\eta_2}{\partial\xi_2}}=\frac{m(m-1)}{(\eta_1+\eta_2)^2},$$

получимъ:

$$Q=\tfrac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)^m\left\{\frac{\partial^{m-1}}{\partial\eta_1^{m-1}}\left[(\eta_1+\eta_2)^{-m}\varphi_1(\eta_1)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^{m-1}}{\partial\eta_2^{m-1}}\left[(\eta_1+\eta_2)^{-m}\varphi_2(\eta_2)\right]\right\} \qquad (6)$$

Замѣтимъ здѣсь, что уравненія (1) § 3 и (4) настоящаго параграфа, въ случаѣ когда $A=0$, представляютъ собою, по виду, уравненіе, которое послужило Бельтрами *) для обобщенія функціи комплекснаго перемѣннаго, разсматривая послѣднюю не на плоскости, а на нѣкоторой поверхности. Въ случаѣ, когда функція r (равенство (3) § 3) удовлетворяетъ уравненію.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial\xi_1\partial\xi_2}=\frac{n(n-1)}{(\xi_1+\xi_2)^2},$$

интегралъ уравненія, разсматриваемаго Бельтрами, получается въ конечномъ видѣ.

§ 5. Интегралъ Коши въ нѣсколько обобщенной формѣ.

Выведенныя нами формулы (9) §§ 1 и 2 могутъ служить для полученія цѣлаго ряда замѣчательныхъ опредѣленныхъ интеграловъ. Во всемъ послѣдующемъ мы исключительно займемся выводомъ тѣхъ слѣдствій, которыя получаются изъ разсмотрѣнія формулы (9) § 1 для случая двухъ перемѣнныхъ.

Принимая, какъ мы это дѣлали въ § 3, новыя перемѣнныя ξ_1 и ξ_2, удовлетворяющія условіямъ:

---

*) Beltrrmi Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque (Annali di Mathematica, 2 série, t I)

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}=\lambda_1\frac{\partial\xi_1}{\partial x_2};\ \frac{\partial\xi_2}{\partial x_1}=\lambda_2\frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}\\ &\lambda_1=\frac{-a_{12}+r}{a_{11}};\ \lambda_2=\frac{-a_{12}-r}{a_{11}}\\ &r=\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}\ \text{ не}=0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

и предполагая, что функціи P и Q удовлетворяютъ уравненію (1) § 3, мы преобразуемъ равенство (9) § 1 въ слѣдующее:

$$W_1 M(\xi_1',\xi_2')=\int\left[M\left(\frac{\partial N}{\partial\xi_1}d\xi_1-\frac{\partial N}{\partial\xi_2}d\xi_2\right)-\right.$$
$$\left.-N\left(\frac{\partial M}{\partial\xi_1}d\xi_1-\frac{\partial M}{\partial\xi_2}d\xi_2\right)\right], \qquad (\alpha)$$

гдѣ:

$$W_1=lim\left[\int\left(\frac{\partial N}{\partial\xi_1}d\xi_1-\frac{\partial N}{\partial\xi_2}d\xi_2\right)\right]_{\substack{\xi_1=\xi_1'\\ \xi_2=\xi_2'}}$$

при чемъ ξ_1' и ξ_2' суть значенія функцій ξ_1 и ξ_2, когда перемѣнныя x_1 и x_2 принимаютъ значенія x_1' и x_2', при которыхъ функція N обращается въ безконечность;

$$P=r^{-\frac{1}{2}}M;\ Q=r^{-\frac{1}{2}}N$$

$$M=(\xi_1+\xi_2)^n\left\{\frac{\partial^{n-1}}{\partial\xi_1^{n-1}}\left[(\xi_1+\xi_2)^{-n}f_1(\xi_1)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^{n-1}}{\partial\xi_2^{n-1}}\left[(\xi_1+\xi_2)^{-n}f_2(\xi_2)\right]\right\}$$

$$N=(\xi_1+\xi_1)^n\left\{\frac{\partial^{n-1}}{\partial\xi_1^{n-1}}\left[(\xi_1+\xi_2-^n\varphi_1(\xi_1)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^{n-1}}{\partial\xi_2^{n-1}}\left[(\xi_1+\xi_2)^{-n}\varphi_2(\xi_2)\right]\right\}.$$

Digitized by Google

При этомъ предполагается, что функціи ξ_1 и ξ_2 разлагаются въ рядъ Тейлора во всѣхъ точкахъ разсматриваемой части плоскости, ограниченной даннымъ контуромъ, и что $(\xi_1+\xi_2)$ необращается въ нуль ни въ одной изъ точекъ сказанной части плоскости.

Равенство (α) можетъ быть написано въ одномъ изъ слѣдующихъ видовъ:

$$\frac{1}{2}\left[W_1 M(\xi_1',\xi_2')+/MN\right]=\int\left(M\frac{\partial N}{\partial\xi_1}d\xi_1+N\frac{\partial M}{\partial\xi_2}d\xi_2\right) \qquad (\beta)$$

$$\frac{1}{2}\left[-W_1 M(\xi_1',\xi_2')+/MN\right]=\int\left(N\frac{\partial M}{\partial\xi_1}+M\frac{\partial N}{\partial\xi_2}d\xi_2\right), \qquad (\gamma)$$

гдѣ $/MN$ измѣненіе произведенія MN, когда разсматриваемая точка контура описываетъ полный контуръ; въ частномъ случаѣ, когда значенія произведенія въ точкѣ исхода и въ точкѣ прихода одинаковы въ то время когда точка описываетъ полный контуръ,—то $/MN=0$.

Положимъ теперь, что:

$$\varphi_1=(\xi_1-\xi_1')^{n-1}lg(\xi_1-\xi_1');\varphi_2=(\xi_2-\xi_2')^{n-1}lg(\xi_2-\xi_2'),$$

и вычислимъ при этомъ предположеніи значеніе величины W_1. Для этого отберемъ въ выраженіи:

$$\frac{\partial N}{\partial\xi_1}d\xi_1-\frac{\partial N}{\partial\xi_2}d\xi_2$$

только тѣ члены, которые обращаются въ безконечность въ точкѣ (x_1', x_2'), такъ какъ остальные члены не вліяютъ на значеніе величины W_1 и тогда:

$$W_1=1.2...(n-1)\,lim\left[\int_{l_1}\left\{\frac{d\xi_1}{\xi_1-\xi_1'}-\frac{d\xi_1}{\xi_2-\xi_2'}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{n(n-1)}{\xi_1+\xi_2}\left[lg(\xi_1-\xi')d\xi_1-lg(\xi_2-\xi_2')d\xi_2\right]\right\}\right]_{\rho=0};$$

но легко убѣдиться, что часть интеграла, содержащая лога-

Digitized by Google

риемы, обращается въ предѣлѣ въ нуль, поэтому будемъ имѣть:

$$W_1 = 1.2\ldots(n-1)\ lim\left[\int\left(\frac{d\xi_1}{\xi_1-\xi_1'}-\frac{d\xi_2}{\xi_2-\xi_2'}\right)\right]_{\rho=0};$$

при чемъ при $n=1$ — множитель: $1.2\ldots(n-1)$ долженъ быть замѣненъ единицею.

Положимъ далѣе, что

$$\xi_1 = u_1 + v_1 i;\quad \xi_2 = u_2 + v_2 i,$$

тогда

$$\int\frac{d\xi_1}{\xi_1-\xi_1'} = \int\frac{d[u-u_1'+i(v_1-v_1')]}{u_1-u_1'+i(v_1-v_1')} =$$

$$= \int\frac{(u_1-u_1')d(u_1-u_1')+(v_1-v_1')d(v_1-v_1')}{(u_1-u_1')^2+(v_1-v_1')^2} +$$

$$+ i\int\frac{(u_1-u_1')d(v_1-v_1')-(v_1-v_1')d(u_1-u_1')}{(u_1-u_1')^2+(v_1-v_1')^2}.$$

Предполагая, что функціи u_1 и v_1 разлагаются въ рядъ Тейлора, будемъ имѣть:

$$u_1-u_1' = a_1(x_1-x_1')+b_1(x_2-x_2')+\ldots$$

$$v_1-v_1' = a_2(x_1-x_1')+b_2(x_2-x_2')+\ldots,$$

но такъ какъ мы имѣемъ въ виду перейти потомъ къ предѣлу, то можемъ въ этомъ разложеніи откинуть члены высшаго измѣренія и тогда получимъ:

$$\int\frac{d\xi_1}{\xi_1-\xi_1'} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{d\{[a_1(x_1-x_1')+b_1(x_2-x_2')]^2+[a_2(x_1-x_1')+b_2(x_2-x_2')]^2\}}{[a_1(x_1-x'_1)+b_1(x_2-x_2')]^2+[a_2(x_1-x_1')+b_2(x_2-x_2')]^2}$$

$$+ iD\int\frac{(x_1-x_1')d(x_2-x_2')-(x_2-x_2')d(x_1-x_1')}{[a_1(x_1-x_1')+b_1(x_2-x_2')]^2+[a_2(x_1-x_1')+b_2(x_2-x_2')]^2},$$

гдѣ: $D=a_1b_2-a_2b_1$ не $=0$.

Digitized by Google

Примемъ за контуръ, по которому производится интегрированіе эллипсъ, уравненіе котораго:

$$[a_1(x_1-x_1')+b_1(x_2-x_2')]^2+[a_2(x_1-x_1')+b_2(x_2-x_2')]^2=1,$$

тогда первый интегралъ очевидно равенъ нулю, второй же— обращается въ удвоенную площадь эллипса, которая равна: $\frac{\pi}{|D|}$, поэтому

$$lim\int\frac{d\xi_1}{\xi_1-\xi_1'}=\pm 2\pi i,$$

гдѣ знаки $\pm$ зависятъ отъ знака

$$D=\frac{\partial(u_1', v_1')}{\partial(x_1', x_2')}.$$

Точно также найдемъ:

$$lim\int\frac{d\xi_2}{\xi_2-\xi_2}=\pm 2\pi i,$$

гдѣ знакъ зависитъ отъ знака выраженія:

$$\frac{\partial(u_2, v_2)}{\partial(x_1, x_2)}$$

въ точкѣ (x'_1, x_2').

Такимъ образомъ получаемъ:

1) Если въ точкѣ (x_1', x_2') опредѣлители:

$$\frac{\partial(u_1, v_1)}{\partial(x_1, x_2)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial(u_2, v_2)}{\partial(x_1, x_1)}$$

одного знака, то

$$W_1=0$$

2) Если сказанные опредѣлители въ разсматриваемой точкѣ имѣютъ различные знаки, то

$$W_1=\pm 1.2\ldots(n-1)4\pi i,$$

при чемъ верхній знакъ соотвѣтствуетъ тому случаю, когда опредѣлитель

Digitized by Google

$$\frac{\partial(u_1, v_1)}{\partial(x_1, x_2)}$$

положителенъ, а нижній знакъ—случаю отрицательнаго значенія опредѣлителя. Имѣя въ виду все вышесказанное, положимъ въ равенствѣ (β) напримѣръ:

$$n=1$$

$$\xi_1=x_1+x_2 i\,,\quad \xi_2=x_1-x_2 i$$

$$M=f(\xi_1)$$
$$N=lg(\xi_1-\xi_1')+lg(\xi_2-\xi_2'),$$

тогда будемъ имѣть:

$$\int \frac{f(\xi_1)}{\xi_1-\xi_1'}\,d\xi_1=2\pi i f(\xi_1'),$$

т. е. мы получаемъ извѣстный интегралъ Коши; вообще же на равенства (α), (β) и (γ) можно смотрѣть, какъ на нѣкоторое обобщеніе формулы Коши.

§ 6. Формула Пуассона.

Обобщенныя формулы Коши предъидущаго параграфа могутъ служить для полученія цѣлаго ряда весьма замѣчательныхъ опредѣленныхъ интеграловъ. Мы здѣсь покажемъ, какимъ образомъ изъ интеграла Коши получаются извѣстные интегралы, выводимыя обыкновенно отдѣльно, независимо отъ интеграла Коша.

Начнемъ съ формулы Пуассона.

Изъ полученныхъ равенствъ (β) и (γ) имѣемъ:

$$\int\left[\frac{f_1(\xi_1)d\xi_1}{\xi_1-\xi_1'}-\frac{f_2(\xi_2)d\xi_2}{\xi_2-\xi_2'}\right]=2\pi i[f_1(\xi_1')+f_2(\xi_2')] \qquad (1)$$

гдѣ:

$$\xi_1=x_1+ix_2;\ \xi_2=x_1-ix_2;\ \xi_1'=x_1'+ix_2';\ \xi_2'=x_1'-ix_2';\ i=\sqrt{-1}.$$

Полагая:

$$\xi_1=\rho e^{\tau i};\ \xi_2=\rho e^{-\tau i};\ \xi_1'=ke^{\theta i},\ \xi_2'=ke^{-\theta i}.$$

Digitized by Google

$$\frac{k}{\rho}=p<1;\ \theta=\pi;\ \rho=const.$$

получимъ:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{f_1(\rho e^{\lambda i})\,e^{\lambda i}d\lambda}{e^{\lambda i}-p}+\frac{f_2(\rho e^{\lambda i})e^{\lambda i}d\lambda}{e^{-\lambda i}-p}\right]=2\pi[f_1(\rho p)+f_2(\rho p)] \quad (2)$$

откуда:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{F_1(\rho e^{\lambda i})+F_2(\rho e^{-\lambda i})}{1+p^2-2\rho cos\lambda}\,d\lambda+\frac{2\pi}{1-p_2}[F_1(\rho p)+F_2(cp)] \quad (3)$$

гдѣ:

$$F_1(\rho e^{\lambda i})=(1-pe^{\lambda i})f_1(\rho e^{\lambda i})$$

$$F_2(\rho e^{-\lambda i})=(1-pe^{-\lambda i})f_2(\rho e^{-\lambda i})$$

Полагая въ равенствѣ (3) $p=0$, будемъ имѣть:

$$\int_{-\pi}^{\pi}[F_1(\rho e^{\lambda i})+F_2(\rho e^{-\lambda i})]\,d\lambda=2\pi[F_1(0)+F_2(0)] \quad (4)$$

или

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{[F_1(\rho e^{\lambda i})+F_2(\rho e^{-\lambda i})](1+p^2-2pcos\lambda)}{1+p^2-2pcos\lambda}\,d\lambda=2\pi[F_1(0)+F_2(0)],$$

которое вмѣстѣ съ равенствомъ (3) даетъ:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{F_1(\rho e^{\lambda i})+F_2(\rho e^{-\lambda i})}{1+p^2-2pcos\lambda}(1-pcos\lambda)d\lambda=\pi[F_1(p\rho)+F_1(0)+$$

$$+F_2(p\rho)+F_2(0)]$$

$$pi\int_{-\pi}^{\pi}\frac{F_1(\rho e^{\lambda i})-F_2(\rho e^{-\lambda i})}{1+p^2-2pcos\lambda}\,sin\lambda d\lambda=\pi[F_1(\rho p)-F_1(0)+$$

$$+F_2(\rho p)-F_2(0)]$$

Digitized by Google

Послѣднія формулы и формула (3) и суть извѣстныя формулы Пуассона, имѣющія, какъ видно мѣсто, когда $p<1$ и и когда функціи F_1 и F_2—голоморфны для всѣхъ точекъ разсматриваемаго круга радіуса ρ.

§ 7. **Формула Абеля.**

Полагая въ формулѣ (4) предыдущаго параграфа:

$$F_1(\rho e^{\lambda i}) = f(a+\rho+\rho e^{\lambda i})$$

$$F_2(\rho e^{-\lambda i}) = f(a+\rho+\rho e^{-\lambda i}),$$

будемъ имѣть:

$$4\pi f(a+\rho) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(a+\rho+\rho e^{\lambda i}) + f(a+\rho+\rho e^{-\lambda i})]\,d\lambda$$

или

$$2\pi f(a+\rho) = \int_{0}^{\pi} [f(a+\rho+\rho e^{\lambda i}) + f(a+\rho+\rho e^{-\lambda i})]\,d\lambda.$$

Полагая, далѣе

$$tg\,\frac{\lambda}{2} = t,$$

получимъ:

$$\pi f(a+\rho) = \int_{0}^{\infty} \frac{\left[f\left(a+\frac{2\rho}{1+ti}\right) + f\left(a+\frac{2\rho}{1-ti}\right)\right] dt}{1+t^2}.$$

Послѣднее равенство, если въ немъ положить:

$$\frac{1}{2\rho} = \alpha;\ b + \frac{1}{2\rho} = x$$

$$f\left(a+\frac{2\rho}{1+ti}\right) = \varphi\left(b+\frac{1+ti}{2\rho}\right),$$

обращается въ слѣдующую формулу Абеля:

$$\pi\varphi(x+\alpha) = \int_{0}^{\infty} \frac{\varphi(x+\alpha ti) + \varphi(x-\alpha ti)}{1+t^2}\,dt,$$

Digitized by Google

имѣющая мѣсто, когда $\varphi\left(b+\frac{1+ti}{2\rho}\right)$ есть голоморфная функція отъ $\frac{1}{1+ti}$.

§ 8. Формула Фруліани.

Полагая въ равенствѣ (4) § 6.

$$F_1(\rho e^{\lambda i})=f(a+\rho+\rho e^{\lambda i})\varphi(a+\rho+\rho e^{\lambda i})$$
$$F_2(\rho e^{-\lambda i})=f(a+\rho+\rho e^{-\lambda i})\varphi(a+\rho+\rho e^{-\lambda i}),$$

получаемъ:

$$\int_0^\pi f(a+\rho+\rho e^{\lambda i})\varphi(a+\rho+\rho e^{\lambda i})d\lambda+\int_0^\pi f(a+\rho+\rho e^{-\lambda i})\varphi(a+\rho+$$
$$+\rho e^{-\lambda i})d\lambda=\varphi(a+\rho)\int_0^\pi[f(a+\rho+\rho e^{\lambda i})+f(a+\rho+\rho e^{-\lambda i})]\,d\lambda.$$

Положимъ въ первыхъ интегралахъ обѣихъ частей равенства:

$$e^{\lambda i}=\frac{1-mz}{1+mz},$$

во вторыхъ же интегралахъ положимъ

$$e^{-\lambda i}=\frac{1-nz}{1+nz},$$

тогда равенство приметъ слѣдующій видъ:

$$\int_0^\infty f\left(a+\frac{2\rho}{1+mz}\right)\varphi\left(a+\frac{2\rho}{1+mz}\right)\frac{d(mz)}{1-m^2z^2}-$$
$$-\int_0^\infty f\left(a+\frac{2\rho}{1+nz}\right)\varphi\left(a+\frac{2\rho}{1+nz}\right)\frac{d(nz)}{1-n^2z^2}=$$
$$=\varphi(a+\rho)\left[\int_0^\infty f\left(a+\frac{2\rho}{1-mz}\right)\frac{d(mz)}{1-m^2z^2}-\right.$$
$$\left.-\int_0^\infty f\left(a+\frac{2\rho}{1+n^2}\right)\frac{d(nz)}{1-n^2z^2}\right]$$

Digitized by Google

Полагая, далѣе:

$$f\left(a+\frac{2\rho}{1+mz}\right)=(1-m^2z^2)\psi(a+mz)$$

$$\varphi\left(a+\frac{2\rho}{1+mz}\right)=\theta(a+mz),$$

будемъ имѣть:

$$\int_0^\infty \theta(a+mz)\psi(a+mz)d)mz) - \int_0^\infty \theta(a+nz)\psi(a+nz)d(nz)=$$

$$=\theta(a+1)\left[\int_0^\infty \psi(a+mz)d(mz) - \int_0^\infty \psi(a+nz)d(nz)\right]$$

Допуская, что разсматриваемыя функціи удовлетворяютъ условіямъ:

$$lim\left[\int_p^{\frac{p}{\kappa}} \theta(ku)\psi(ku)du \;\Big[_{p=\infty}=0;\; lim\Big]\int_p^{\frac{p}{\kappa}} \psi(ku)du\right]_{p=\infty}=0,$$

положимъ въ первыхъ интегралахъ:

$$a+mz=ku,$$

во вторыхъ:

$$a+nz=lu,$$

тогда

$$\int_0^\infty \theta(ku)\psi(ku)d(ku) - \int_0^\infty \theta(lu)\psi(lu)d(lu)=$$

$$=\theta(a+1)\left[\int_0^\infty \psi(ku)d(ku) - \int_0^\infty \psi(lu)d(lu)\right] \qquad (1)$$

Digitized by Google

Дѣлая въ полученномъ равенствѣ различныя предположенія относительно функціи ψ, допускаемыя условіями, которымъ эта функція должна удовлетворять, мы получимъ цѣлый рядъ формулъ; такъ напримѣръ если:

$$a=-1;\ \psi(ku)=\frac{e^{-ku}}{ku};\ \theta(ku)e^{-ku}=\psi(ku),$$

то получимъ формулу Фруліани:

$$\int_0^\infty \frac{\theta(ku)-\theta(lu)}{u}du=\theta(0)\,lg\,\frac{k}{l}.$$

§ 9. Теорема Парсеваля.

Формула Коши намъ даетъ:

$$2\pi f(a+\rho p)=\int_0^{2\pi}\frac{f(a+\rho e^{\lambda i})e^{\lambda i}}{e^{\lambda i}-p}\,d\lambda. \qquad (1)$$

Взявъ производныя по p, получаемъ:

$$2\pi f^n(a+\rho p).\frac{\rho^n}{1,\,2,\ldots n}=\int_0^{2\pi}\frac{f(a+\rho e^{\lambda i})e^{\lambda i}}{(e^{\lambda i}-p)^{n+1}}d\lambda \qquad (2)$$

Положимъ теперь, что у насъ имѣется функція:

$$\varphi[b+c(e^{\lambda i}-p)^{-1}],$$

разлагаемая въ рядъ по теоремѣ Тейлора, т. е.

$$\varphi[b+c(e^{\lambda i}-p)^{-1}]=\varphi(b)+c(e^{\lambda i}-p)^{-1}\varphi'(b)+\ldots+$$

$$+\frac{c^n(^{\lambda i}-p)^{-n}}{1,\,2\ldots n}\varphi^{(n)}(b)+R;$$

тогда получимъ:

Digitized by Google

$$2\pi\left[f(a+\rho p)\varphi(b)+\rho cf'(a+\rho p)\varphi'(b)+\frac{\rho^2c^2}{(1,2)2}f''(a+\rho)\varphi''(b)+\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{\rho^nc^n}{(1,2\ldots n)^2}f^{(n)}(a+\rho p)\varphi^{(n)}(b)\right]$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{f(a+\rho e^{\lambda i})e^{\lambda i}}{e^{\lambda i}-p}[\varphi(b+c(e^{\lambda i}-p)^{-1})-R]d\lambda.$$

Если съ возрастаніемъ n R стретится къ нулю независимо отъ значенія λ, то при $p=0$, получаемъ теорему Парсеваля, именно:

$$\int^{2\pi}f(a+\rho e^{\lambda i})\varphi(b+ce^{-\lambda i})d\lambda=2\pi\left[f(a)\varphi(b)+\rho cf'(a)\varphi'(b)+\right.$$

$$\left.+\frac{\rho^2c^2}{(1,2)2}f''(a)\varphi''(b)+\ldots\right]$$

§ 10. О формулѣ Куммера *).

Изъ формулы (4) § 6 имѣемъ:

$$2\pi F(\rho)=\int_0^{\pi}[F(\rho+\rho e^{\lambda i})+F(\rho+\rho e^{-\lambda i})]d\lambda$$

или

$$\pi F(\rho)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}F(2\rho\cos\lambda e^{\lambda i})d\lambda=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}F(\rho+\rho e^{2\lambda i})d\lambda.$$

---

*) Формула Куммера имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(2\rho\cos\lambda e^{\lambda i})e^{2u\lambda i}d\lambda=\sin n\pi\int_0^1 f(\rho-\rho w)w^{n-1}dw.$$

Digitized by Google

Дифферендируя послѣднее равенство по ρ, легко убѣждаемся, что:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F^{(n)}(\rho + \rho e^{2\lambda i}) e^{n\lambda i} d\lambda = 0;$$

интегрируя же по частямъ равенство:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F^{(n)}(\rho + \rho e^{2\lambda i}) d\lambda = \mp F^{(n)}(\rho),$$

получаемъ:

$$\pi \frac{\rho^n}{1, 2 \ldots n} F^{(n)}(\rho) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\rho + \rho e^{2\lambda i}) e^{-2n\lambda i} d\lambda.$$

Послѣдняя формула дополняетъ собою формулу Куммера, которая при $n=0$ или при n цѣломъ и отрицательномъ представляетъ собою неопредѣленность.

С.-Петербургъ
2 декабря 1893 г

Digitized by Google

О НАХОЖДЕНІИ ДРОБНЫХЪ РАЦІОНАЛЬНЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ ЛИНЕЙНЫХЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ *).

Н. Гюнтера.

Вопросъ о нахожденіи дробныхъ раціональныхъ интеграловъ линейнаго дифференціальнаго уравненія мы можемъ считать рѣшеннымъ, если мы знаемъ такую цѣлую раціональную функцію, по умноженіи на которую дробные раціональные интегралы даннаго уравненія обращаются въ цѣлыя раціональныя функціи.

Дѣйствительно, положимъ, что намъ дано линейное дифференціальное уравненіе порядка n

$$X_n y^{(n)} + X_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + X_i y^{(i)} + \ldots X_0 y = U, \qquad (1)$$

въ которомъ

$$X_n, X_{n-1}, \ldots X_i, \ldots X_0, U$$

*) Настоящая статья, рекомендованная академикомъ *А. А. Марковымъ*, внутренне соприкасается со статьею проф. *П. А. Некрасова*, содержащею изложеніе способа академика *В. Г. Имшенецкаго* для нахожденія алгебраическихъ раціональныхъ дробныхъ рѣшеній линейныхъ дифференціальныхъ уравненій (см. Матем. Сборникъ, т. XVII, вып. 2, стр. 341 — 382, 1893). Выраженія K, разсматриваемыя Н. Гюнтеромъ, получаются изъ указанныхъ въ статьѣ П. А. Некрасова функцій ζ_n при $x=-a$, $m=n+\alpha-\beta-1$ и при надлежащей перемѣнѣ обозначеній (Матем. Сб., т. XVII, вып. 2, стр. 366). Въ статьѣ Н. Гюнтера главный результатъ изложенъ въ формѣ, ближе подходящей къ пріемамъ и обозначеніямъ Ліувилля.—*(Примѣч. Ред.)*.

Digitized by Google

цѣлыя и раціональныя функціи, имѣющее нѣсколько дробныхъ раціональныхъ интегловъ, и пусть P цѣлая раціональная функція, кратная знаменателей этихъ интегралов.

Тогда, если y дробный раціональный интегралъ уравненія (1), функція

$$z=yP$$

цѣлая и раціональная, и слѣдовательно, положивъ

$$y=\frac{z}{P}$$

и введя въ уравненіе (1) новую перемѣнную z, мы получимъ линейное уравненіе, въ которомъ каждому дробному интегралу даннаго уравненія, соотвѣтствуетъ интегралъ въ видѣ цѣлой и раціональной функціи, нахожденіе котораго не представляетъ уже затрудненій.

Такимъ образомъ вопросъ о нахожденіи дробныхъ раціональныхъ интегралов линейнаго дифференціальнаго уравненія сводится къ нахожденію цѣлой и раціональной функціи P, дѣлящейся безъ остатка на знаменателей искомыхъ дробей т. е. содержащей всѣ множители этихъ знаменателей въ степеняхъ не меньшихъ тѣхъ, въ которыхъ они входятъ въ эти знаменатели.

2. Положимъ, что дифференціальное уравненіе (1) имѣетъ интеграломъ дробную раціональную функцію, знаменатель которой содержитъ $x-a$ множителемъ кратности p,

$$y=\frac{Q_1}{(x-a)^p Q_2},$$

и пусть $x-a$ входитъ множителемъ въ коэффиціенты уравненія (1)

$$X_n, X_{n-1}, \ldots X_i, \ldots X_0$$

соотвѣтственно въ степеняхъ

$$\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots \alpha_i, \ldots \alpha_0.$$

Digitized by Google

Для удобства представимъ дробный интегралъ уравненія (1) при помощи разложенія на простѣйшія дроби подъ видомъ:

$$y = \frac{A}{(x-a)^p} + R, \tag{2}$$

гдѣ A постоянное, а R дробная раціональная функція, знаменатель которой содержитъ $x-a$ множителемъ въ степени меньшей p, и X_i—подъ видомъ:

$$X_i = (x-a)^{\alpha_i} [B_i + (x-a)T],$$

гдѣ

$$B_i = \left[\frac{X_i}{(x-a)^{\alpha_i}}\right]_{x=a} = \frac{(X_i^{(\alpha_i)})_{x=a}}{\alpha_i!},$$

и T цѣлая раціональная функція.

Продифференцировавъ (2) i разъ, имѣемъ:

$$y^{(i)} = \frac{A(-1)^i p(p+1)\ldots(p+i-1)}{(x-a)^{p+i}} + R^{(i)},$$

гдѣ $R^{(i)}$ дробная функція, знаменатель которой содержитъ $x-a$ множителемъ въ степени меньшей $p+i$.

Произведеніе $y^{(i)}$ на X_i можно, очевидно, написать подъ видомъ:

$$X_i y^{(i)} = \frac{1}{(x-a)^{p+i-\alpha_i}} \left[A(-1)^i p\,(p+1)\ldots(p+i-1)B_i + \right.$$

$$\left. + (x-a)\,T_1 \right],$$

гдѣ T_1 нѣкоторая дробная функція, знаменатель которой на $x-a$ не дѣлится.

Если $p+i-\alpha_i > 0$, знаменатель дробной функціи $X_i y^{(i)}$ содержитъ $x-a$ множителемъ въ степени $p+i-\alpha_i$

Если-же $p+i-\alpha_i \leqq 0$, знаменатель $X_i y^{(i)}$ свободенъ отъ множителей $x-a$, числитель-же ея содержитъ $x-a$ множителемъ въ степени $\alpha_i - i - p$.

Digitized by Google

Давая i всѣ значенія отъ 0 до n мы получимъ

$$X_n y^{(n)}, X_{n-1} y^{(n-1)}, \ldots X_s y^{(s)}, \ldots X_0 y.$$

въ видѣ дробей, знаменатели которыхъ содержитъ $x-a$ множителями соотвѣтственно въ степеняхъ

$$p+n-\alpha_n, p+n-1-\alpha_{n-1}, \ldots, p+s-\alpha_s, \ldots, p-\alpha_0.$$

Сложивъ полученныя такимъ образомъ выраженія, мы получимъ результатъ подстановки (2) въ лѣвую часть уравненія (1), который, если (2) дѣйствительно интегралъ уравненія (1), долженъ быть тождественно равенъ цѣлой и раціональной функціи U.

Пусть $p+s-\alpha_s$ наибольшее среди чиселъ

$$p+n-\alpha_n, p+n-1-\alpha_{n-1}, \ldots, p+s-\alpha_s, \ldots, p-\alpha_0.$$

Могутъ быть 2 случая: случай $p+s-\alpha_s > 0$ и случай $p+s-\alpha_s \leqq 0$.

Въ первомъ случаѣ, назвавъ черезъ K сумму

$$K = A \sum_i (-1)^i p(p+1)\ldots(p+i-1) B_i,$$

распространенную на всѣ значенія i, для которыхъ

$$p+i-\alpha_i = p+s-\alpha_s = max.$$

или проще

$$i-\alpha_i = s-\alpha_s = max.,$$

мы можемъ представить результатъ подстановки (2) въ лѣвую часть уравненія (1) подъ видомъ дроби

$$\frac{1}{(x-a)^{p+s-\alpha_s}} \left[K + (x-a) T_2 \right]. \qquad (3)$$

Здѣсь T_2 дробная раціональная функція, знаменатель которой на $x-a$ не дѣлится.

Для того, чтобы выраженіе (3) могло быть равно цѣлой и раціональной функціи U, прежде всего необходимо удовлетворить условію:

Digitized by Google

$$K=A\sum_i(-1)^i p(p+1)\ldots(p+i-1)B_i=0. \qquad (4)$$

Напомнимъ, что суммированіе распространено на всѣ значенія i, для которыхъ

$$i-\alpha_i=s-\alpha_s=max.$$

Выраженіе (4) даетъ намъ необходимое условіе, которому должны удовлетворять a и p для того, чтобы знаменатель дробнаго интеграла y могъ содержать множителемъ $(x-a)^p$.

При извѣстномъ a, но неизвѣстномъ p условіе (4) обращается въ уравненіе, изъ котораго можно найти p. Для того, чтобы изъ уравненія (4) можно было найти для p цѣлое значеніе большее нуля, K не должно быть одночленомъ, т. е. въ ряду чиселъ

$$p+n-\alpha_n,\ldots,\ p+s-\alpha_s,\ldots,\ p-\alpha_0$$

должны по крайней мѣрѣ два, будучи наибольшими, быть равными между собою.

Отсюда слѣдуетъ, что всегда должно имѣть мѣсто соотношеніе

$$p+n-\alpha_n\leqq p+s-\alpha_s$$

при s неравномъ n, и потому

$$\alpha_n\geqq n-s+\alpha_s>0,$$

т. е. только для тѣхъ значеній a можетъ быть удовлетворено условіе (4), которыя обращаютъ X_a въ 0.

Отсюда вытекаетъ теорема, доказанная Ліувилемъ*).

Теорема. Если линейное дифференціальное уравненіе порядка n имѣетъ частнымъ интеграломъ дробную раціональную функцію, знаменатель который обращается въ 0 при $x=a$, то a обращаетъ въ 0 и коэффиціентъ при наивысшей производной въ данномъ уравненіи.

---

*) J. Liouville. Sur détermination des intégrales dont la valeur est algebrique. Jour. de l'Ecole Polyt, t. XIV, cah. 22.

Digitized by Google

Изъ этой теоремы слѣдуетъ, что въ составъ функціи P можно не вводить множителей, которыхъ нѣтъ въ X_n; слѣдовательно мы можемъ ограничить наше изслѣдованіе корнями уравненія $X_n=0$.

Положимъ, что a корень уравненія $X_n=0$ и соотвѣтствующее ему уравненіе

$$K=A\sum_i(-1)^i p(p+1)\ldots(p+i-1)B_i=0$$

имѣетъ нѣсколько цѣлыхъ и положительныхъ корней

$$p_1, p_2, \ldots p_k,$$

среди которыхъ p_1 наибольшій и удовлетворяетъ условію

$$p_1+s-\alpha_s>0.$$

Если мы положимъ, что $x-a$ входитъ множителемъ въ P въ степени p_1, то мы можемъ утверждать, что $z_1=yP$ дробная функція, знаменатель которой $x-a$ множителемъ не содержитъ, т. к. если въ знаменатель искомой дробной функціи $x-a$ входитъ множителемъ, то въ степени $p_1, p_2, \ldots p_k$, не превышающей p_1.

Мы исключили случай $p+s-\alpha_s\leqq 0$.

Этотъ случай однако не противорѣчитъ теоремѣ, доказанной выше, т. к. изъ неравенствъ

$$\alpha_s\geqq s+p,$$

$$\alpha_n\geqq n+p,\ \alpha_{n-1}\geqq n-1+p,\ldots,\alpha_i\geqq i+p,\ldots,\alpha_0\geqq p$$

слѣдуетъ, что $x-a$ входитъ множителемъ въ каждую изъ функцій

$$X_n, X_{n-1}, \ldots X_i, \ldots X_0.$$

Онъ входитъ множителемъ въ общій наибольшій дѣлитель функцій

$$X_n^{(n)}, X_{n-1}^{(n-1)}, \ldots X_s^{(s)}, \ldots X_0$$

въ степени равной α_s-s.

Digitized by Google

Замѣтимъ, что мы можемъ полагать, что $x-a$ въ этомъ случаѣ множителемъ въ U не входитъ.

Результатъ подстановки (2) въ лѣвую часть уравненія (1) въ этомъ случаѣ дробная функція, числитель которой содержитъ $x-a$ множителемъ въ степени α_s-s-p, именно:

$$(x-a)^{\alpha_s-s-p}[K+(x-a)\,T_2], \qquad (3')$$

гдѣ по прежнему

$$K=A\sum_i(-1)^i p(p+1)\dots(p+i-1)B_i,$$

$$i-\alpha_i=s-\alpha_s=max.$$

Если (2) дѣйствительно интегралъ уравненія (1), то функція (3′) должна быть тожественно равною U, и изъ того, что U не равно нулю при $x=a$, слѣдуетъ, что $\alpha_s-p-s>0$ быть не можетъ.

Остается предположеніе

$$p=\alpha_s-s.$$

Чтобы сразу охватить оба случая, можно вводить множитель $x-a$ въ степени равной $\alpha_s-s>0$, если изъ уравненія (4) получаются для p меньшія значенія или вовсе не получается никакихъ цѣлыхъ положительныхъ значеній. Мы можемъ ввести такимъ образомъ въ P лишніе множители, которые однако не нарушатъ правильности нашихъ выраженій.

Такимъ образомъ, зная корни уравненія $X_n=0$ и изслѣдуя каждый изъ нихъ въ отдѣльности, мы легко составимъ по частямъ функцію P.

Чтобы удобнѣе было производить эти изслѣдованія, мы представимъ уравненіе

$$K=A\sum_i(-1)^i p(p+1)\dots(p+i-1)\left[\frac{X_i}{(x-a)^{\alpha}}\right]_{x=a}=0, \qquad (4)$$

$$i-\alpha_i=s-\alpha_s=max.$$

въ болѣе удобномъ видѣ.

3. Введемъ слѣдующее обозначеніе

$$i-\alpha_i=n-h_i, \qquad (A)$$

Digitized by Google

такъ что $s-\alpha_s=n-h_s$ и суммированіе въ (4) оказывается распространеннымъ на всѣ значенія i, для которыхъ

$$n-h_i=n-h_s=max.,$$

или проще

$$h_i=h_s=min.$$

h_s для краткости будемъ обозначать просто черезъ h.

Можно однако распространить суммированіе и на всѣ значенія i, переписавъ K такъ:

$$K=\sum p\,(p+1)\ldots(p+i-1)\left(\frac{(-1)^i X_i}{(x-a)^{i-n+h}}\right)_{x=a},$$

ибо при

$$h_i > h$$

имѣемъ:

$$i-n+h<i-n+h_i=\alpha_i,$$

и потому

$$\left(\frac{(-1)^i X_i}{(x-a)^{i-n+h}}\right)_{x=a}=0.$$

Этимъ мы прибавимъ къ (4) только нѣсколько членовъ равныхъ нулю. Мы получимъ

$$K=A\sum_{i=0}^{i=n}(-1)^i p(p+1)\ldots(p+i-1)\left[\frac{X_i}{(x-a)^{i-n+h}}\right]_{x=a}=0. \quad (5)$$

Назовемъ для краткости черезъ $O_l(p)$ сумму зависящую отъ p и отъ l:

$$O_l(p)=\sum_{i=0}^{i=n}(-1)^i p(p+1)\ldots(p+i-1)\left[\frac{X_i}{(x-a)^{i-n+l}}\right]_{x=a}=$$

$$=(-1)^n p\,(p+1)\ldots(p+n-1)\frac{\left[X_n^{(l)}\right]_{x=a}}{l!}+ \quad (B)$$

$$+(-1)^{n-1}p(p+1)\ldots(p+n-2)\frac{\left[X_{n-1}^{(l-1)}\right]_{x=a}}{(l-1)!}+$$

$$+\ldots\pm p(p+1)\ldots(p+n-l-1)\,(X_{n-l})_{x=a}.$$

Digitized by Google

Тогда (5) представится окончательно въ видѣ:

$$K=O_h(p)=0. \tag{6}$$

Укажемъ на 2 слѣдствія введенныхъ нами обозначеній.

1) Изъ равенства

$$i-\alpha_i=n-h_i \tag{A}$$

непосредственно слѣдуетъ,

$$h_i=n-i+\alpha_i\geqq n-i>0,$$

т. е. что h величина положительная, могущая принимать только значенія 1,2,3,...

2) Всѣ функціи $O_l(p)$, для которыхъ $l<h$, тожественно равны нулю.

Дѣйствительно при $l<h$ имѣемъ:

$$O_l(p)=\sum_{j=l}^{j=0}(-1)^{(n-j)}p(p+1)\ldots(p+n-j-1)\frac{\left[X_{n-j}^{(l-j)}\right]_{x=a}}{(l-j)!}, \tag{B}$$

$$n-j-\alpha_{n-j}=n-h_{n-j},$$

$$\alpha_{n-j}=h_{n-j}-j\geqq h-j>l-j$$

и

$$\left[X_{n-j}^{(l-j)}\right]_{x=a}=0.$$

тожественно.

Это заключеніе даетъ возможность весьма легко составить для каждаго a соотвѣтствующее ему уравненіе

$$K=O_h(p)=0.$$

Будемъ подставлять a послѣдовательно въ $O_1(p)$, $O_2(p)\ldots$ Первая изъ этихъ функцій, не обратившаяся тожественно въ 0, и дастъ искомое уравненіе.

Если α_s-s больше нуля, то h больше n.

4. Положимъ, что мы какимъ-нибудь образомъ разложили на множители функцію X_n и имѣемъ

$$X_n=(x-a_1)^{\rho_1}(x-a_2)^{\rho_2}\ldots(x-\alpha_n)^{\rho_n}.$$

Digitized by Google

Составимъ произведеніе

$$M=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k)(x-a_{k+1})\ldots(x-a_n.)$$

изъ всѣхъ *различныхъ* множителей, входящихъ въ X_n.

Если уравненіе (1) имѣетъ интеграломъ дробную раціональную функцію, то въ знаменатель этой функціи не могутъ входить множители, не входящіе въ M.

Положимъ, что, изслѣдуя порознь корни

$$a_1, a_2, \ldots a_k, a_{k+1}, \ldots a_n$$

уравненія $M=0$, мы нашли, что

$$(x-a_{k+1}), (x-a_{k+2}), \ldots (x-a_n)$$

ен могутъ входить въ знаменатель искомой дробной функціи.

Напротивъ пусть для

$$(x-a_1), (x-a_2), \ldots (x-a_k)$$

мы нашли цѣлыя и положительныя значенія p:

$$p_1, p_2, \ldots p_k.$$

Замѣчаніе. Если какому-нибудь a_i соотвѣтствуетъ нѣсколько цѣлыхъ и положительныхъ значеній p, то за p_i мы беремъ наибольшее. Если уравненіе (6) даетъ для какого-нибудь a_i значеніе p меньшее α_s-s, то за p_i мы принимаемъ α_s-s.

Не трудно убѣдиться, что произведеніе

$$z=y(x-a_1)^{p_1}(x-a_2)^{p_2}\ldots(x-a_k)^{p_k},$$

если y раціональный интегралъ уравненія (1), функція цѣлая и раціональная и что, слѣдовательно, произведеніе

$$(x-a_1)^{p_1}(x-a_2)^{p_2}\ldots(x-a_k)^{p_k}.$$

можно взять за искомую функцію P.

Такое рѣшеніе интересующей насъ задачи повидимому требуетъ полнаго разложенія функціи X_n на множителя первой

Digitized by Google

степени; но только повидимому, какъ замѣтилъ уже самъ Ліувилль *), что̀ мы и покажемъ въ слѣдующемъ параграфѣ.

5. Мы видѣли, что только множители функціи M могутъ входить въ знаменатели дробныхъ раціональныхъ интеграловъ уравненія (1). Нахожденіе M не представляетъ затрудненій. Если D есть общій наибольшій дѣлитель функцій X_n и X'_n, то

$$M=\frac{X_n}{D}.$$

Значенія p, соотвѣтствующія нѣкоторому a, только въ томъ случаѣ могутъ быть найдены изъ уравненія

$$O_1(p)=0,$$

если a не обращаетъ въ 0 ни X'_n ни X_{n-1}.

Представимъ M слѣдующимъ образомъ

$$M=A_1 B_1 C_1,$$

гдѣ A_1 B_1 и C_1 суть такія функціи, что всѣ корни уравненія $A_1=0$ обращаютъ въ 0 какъ X'_n, такъ и X_{n-1}, всѣ корни уравненія $B_1=0$ обращаютъ въ 0 одну изъ функцій X'_n, X_{n-1}, не обращая въ 0 другой, и всѣ корни уравненія $C_1=0$ не обращаетъ въ 0 ни X'_n, ни X_{n-1}.

Нахожденіе A_1, B_1 и C_1 не представляетъ особенныхъ затрудненій.

Назовемъ черезъ D_1 общій наибольшій дѣлитель функцій M и X'_n,

$$M=D_1 L_1,$$

$$X'_n=D_1 T_1,$$

и черезъ D_2 общій наибольшій дѣлитель функцій D_1 и X_{n-1},

*) Toutefois on se formerait de notre méthode une idée trés—inexacte si l'on se figurait que pour l'appliquer aux cas particuliers on a besoin de résoudre certaines équations. Cela n'est point du tout nécessaire, et les géomètres versés dans la théorie des fonctions symétriques le comprendront d'abord.

Jour. de l' Ecole Polytéchnique. Cah. 22, p. 175.

Digitized by Google

$$D_1 = D_2 R_1,$$

$$X_{n-1} = D_2 T_2,$$

и слѣдовательно

$$X'_n = D_2 R_1 T_1,$$

$$M = D_2 R_1 L_1.$$

Очевидно, что только корни уравненія $D_2 = 0$ обращаютъ въ 0 одновременно какъ X'_n, такъ и X_{n-1}. Слѣдовательно $A_1 = D_2$ — общему наибольшему дѣлителю функцій M, X'_n и X_{n-1}.

Корни уравненія $R_1 = 0$, гдѣ R_1 общій наибольшій дѣлитель функцій $\frac{M}{A_1}$ и $\frac{X'_n}{A_1}$ обращаютъ въ нуль X'_n, не обращая X_{n-1}.

Если мы назовемъ черезъ R_2 общій наибольшій дѣлитель функцій $L_1 = \frac{M}{A_2 R_1}$ и $T_2 = \frac{X_{n-1}}{A_2}$, то всѣ корни уравненія $R_1 = 0$ обратятъ въ нуль X_{n-1}, не обращая X'_n.

Всѣ корни уравненія $R_1 R_2 = 0$ обращаютъ въ 0 одну изъ функцій X'_n, X_{n-1}, оставляя другую не равною нулю. Слѣдовательно

$$B_1 = R_1 R_2, \quad C_1 = \frac{M}{A_1 R_1}.$$

Изъ того, что было сказано во второмъ параграфѣ, слѣдуетъ, что ни одинъ изъ множителей функціи B_1 не можетъ входить множителемъ въ знаменатели дробныхъ раціональныхъ интеграловъ уравненія (1).

Поэтому функцію B_1 мы можемъ вовсе и не разсматривать.

Въ уравненіе $O_1(p) = 0$ придется подставлять только корни уравненія $C_1 = 0$.

Представимъ $O_1(p) = 0$ слѣдующимъ образомъ:

$$(p+n-1)X'_n - X_{n-1} = 0,$$

Digitized by Google

т.-е. будемъ считать его лѣвую часть функціей какъ отъ p, такъ и отъ x; мы можемъ сказать, что если p дано значеніе, соотвѣтствующее одному изъ корней уравненія $C_1=0$ (то, которое мы нашли-бы изъ уравненія $O_1(p)=0$, подставивъ въ него вмѣсто x этотъ корень), уравненія $O_1(p)=0$ и $C_1=0$ имѣютъ общій корень x. Слѣдовательно результантъ ихъ равенъ нулю:

$$[C_1, O_1(p)]=\Delta_1=0. \qquad (7)$$

Условіе (7) даетъ намъ уравненіе, которому должно удовлетворять p для того, чтобы уравненія $O_1(p)=0$ и $C_1=0$ имѣли общій корень x.

Положимъ, что уравненіе (7) на ряду съ отрицательными и дробными корнями имѣетъ нѣсколько цѣлыхъ и положительныхъ корней

$$p_1, p_2, \ldots, p_k,$$

среди которыхъ p_1 наибольшій.

Это значитъ, что нѣкоторые изъ множителей функціи C_1 входятъ въ знаменатель искомой дробной функціи въ степеняхъ $p_1, p_2, \ldots p_k$.

Какому множителю соотвѣтствуетъ каждая степень, равно какъ и самихъ множителей, мы пока еще не знаемъ.

Но положивъ

$$y=\frac{z_1}{C_1^{p_1}},$$

мы можемъ утверждать, что если y дробный раціональный интегралъ уравненія (1), то $z_1=yC_1^{p_1}$ есть нѣкоторая, вообще говоря, дробная функція, знаменатель которой общихъ множителей съ C_1 не имѣетъ; $C_1^{p_1}$ можно взять за одинъ изъ множителей, изъ которыхъ составлена P*).

*) Вмѣсто $C_1^{p_1}$ можно однако взять и функцію болѣе простую. Дѣйствительно если D_1 есть общій наибольшій дѣлитель функцій

$$O_1(p_1)=(p_1+n-1)X'_n-X_{n-1} \text{ и } C_1,$$

то очевидно, что этому D_1 соотвѣтствуетъ показатель p_1; степени-же $p_2, p_3, \ldots p_k$

Digitized by Google

Дальнѣйшее изслѣдованіе придется производить уже только съ корнями уравненія $A_1=0$.

A_1 представимъ въ видѣ произведенія

$$A_1=A_2\ B_2\ C_2,$$

гдѣ A_2, B_2 и C_2 такія функціи, что всѣ корни уравненія $A_2=0$ обращаютъ одновременно въ 0

$$X''_n,\ X'_{n-1},\ X_{n-2}$$

функціи входящія въ $O_2(p)$.

Всѣ корни уравненія $B_2=0$ обращаютъ въ 0 двѣ изъ этихъ функцій, не обращая въ нуль третьей, и всѣ корни уравненія $C_2=0$ не обращаютъ въ нуль по крайней мѣрѣ 2-хъ изъ нихъ.

A_2 очевидно общій наибольшій дѣлитель функцій

$$A_1,\ X''_n, X'_{n-1}, X_{n-2}.$$

Для нахожденія B_2 составляемъ общихъ наибольшихъ дѣлителей

R_1 функцій $\dfrac{A_1}{A_2}, \dfrac{X''_n}{A_2}\ \dfrac{X'_{n-1}}{A_2}$

R_2 » $\dfrac{A_1}{A_2R_1}, \dfrac{X''_n}{A_2R_1}, \dfrac{X_{n-2}}{A_2}$

R_3 » $\dfrac{A_1}{A_2R_1R_2}, \dfrac{X'_{n-1}}{A_2R_1}, \dfrac{X_{n-2}}{A_2R_2}.$

---

[1] d' соотвѣтствуетъ множителямъ функціи $C'=\dfrac{C_1}{D_1}$, которую опять можно упростить такимъ-же образомъ.

Пусть D_2 общій наибольшій дѣлитель функцій

$$O_1(p_2) \text{ и } \frac{C_1}{D_1},$$

D_3 общій наибольшій дѣлитель функцій

$$O_1(p_3) \text{ и } \frac{C_1}{D_1D_2} \text{ и т. д.}$$

Тогда множителемъ P вмѣсто $C_1^{p_1}$ можно взять болѣе простую функцію $D_1^{p_1}D_2^{p_2}D_3^{p_3}\ldots$

Digitized by Google

Корни уравненія $R_1 . R_2 . R_3 = 0$ обращаютъ въ 0 двѣ изъ функцій X''_n, X'_{n-1}, X_{n-2}, не обращая въ нуль третьей. Слѣдовательно

$$B_2 = R_1 R_2 R_3, \quad C_2 = \frac{A_1}{A_2 B_2}.$$

Затѣмъ считая p извѣстнымъ, составляемъ результантъ уравненій

$$O_2(p) = (p+n-2)(p+n-1)\frac{X''_n}{2} - (p+n-2)X'_{n-1} +$$

$$+ X_{n-2} = 0$$

и

$$C_2 = 0.$$

Составивъ этотъ результантъ:

$$[C_2, O_2(p)] = \Delta_2 \qquad (8)$$

и приравнявъ его нулю, ищемъ цѣлые, положительные корни получившагося уравненія. Найдя ихъ, возводимъ C_2 въ степень равную наибольшему изъ нихъ.

Поступая затѣмъ съ A_2 также, какъ съ A_1 и M, мы найдемъ разложенія

$$A_2 = A_3 B_3 C_3,$$

$$A_3 = A_4 B_4 C_4,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_m = A_{m+1} B_{m+1} C_{m+1}$$

Дѣйствіе кончается, когда одна изъ функцій A, напр. A_{m+1}, сдѣлается равной постоянной величинѣ.

Затѣмъ составляемъ уравненія

$$[C_3, O_3(p)] = \Delta_3 = 0,$$

$$[C_4, O_4(p)] = \Delta_4 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$[C_{m+1}, O_{m+1}(p)] = \Delta_{m+1} = 0.$$

и ищемъ ихъ положительные корни.

Digitized by Google

Если p_h есть наибольшій положительный корень уравненія

$$[C_h, O_h(p)] = \Delta_h = 0, \quad h \leqq n,$$

то степень, въ которой входитъ C_h въ функцію P, равна p_h.

Функціи B_h со значками h меньшими $n+1$ мы можемъ выкидывать.

Наши выкладки нѣсколько измѣняются для функцій A со значками большими n.

Положимъ, что, A_{n+k-1}, гдѣ $k=1, 2 \ldots$, еще не равна постоянной величинѣ.

Мы имѣемъ A_{n+k-1} въ видѣ произведенія

$$A_{n+k-1} = A_{n+k} B_{n+k} C_{n+k},$$

гдѣ корни уравненія $A_{n+k}=0$ обращаютъ въ нуль всѣ функціи

$$X_n^{(n+k)}, \; X_{n-1}^{(n+k-1)}, \ldots \; X_0^{(k)},$$

корни уравненія $B_{n+k}=0$ обращаютъ n изъ этихъ $n+1$ функцій въ нуль, корни же уравненія $C_{n+k}=0$ не обращаютъ въ 0 по крайней мѣрѣ 2-хъ изъ нихъ.

Множители функціи A_{n+k} входятъ на основаніи этого въ общій наибольшій дѣлитель функцій

$$X_n^{(n)}, X_{n-1}^{(n-1)}, \ldots X_s^{(s)}, \ldots X_0$$

въ степени большей k, множители-же функцій B_{n+k}, C_{n+k} входятъ въ этотъ наибольшій дѣлитель въ степени k.

Изъ того, что́ было сказано въ концѣ параграфа 2-го, слѣдуетъ, что во первыхъ мы не имѣемъ права вполнѣ откинуть функцію B_{n+k}, какъ сдѣлали съ функціями B, значки которыхъ меньше $n+1$. Ее нужно взять множителемъ P въ степени k.

Во вторыхъ, что если наибольшій положительный цѣлый корень p_k уравненія

$$\left[C_{n+k} O_{n+k}(p)\right] = \Delta_{n+k} = 0 \qquad (9)$$

Digitized by Google

меньше k, или если уравненіе (9) вовсе не имѣетъ положительныхъ цѣлыхъ корней, то за показатель функціи C_{n+k} слѣдуетъ брать k.

Такимъ образомъ мы получимъ для P выраженіе слѣдующаго вида:

$$P=C_1^{p_1}C_2^{p_2}\dots C_n^{p_n}C_{n+1}^{p_{n+1}}B_{n+1}C_{n+2}^{p_{n+2}}B_{n+2}^{2}\dots,$$

гдѣ

$$p_{n+1}\geqq 1, p_{n+2}\geqq 2,\dots$$

6. Сдѣлаемъ нѣсколько примѣровъ *).

Примѣръ 1.

$$(x-1)^2y'''+10(x-1)y''-(x^2-2x-19)y'-2(x-1)y=0;$$

$$M=x-1,\ X'_3=2(x-1),\ X_2=10(x-1);$$

$$A_1=x-1,\ B_1=C_1=1;$$

$$\frac{X_3''}{2}=1,\ X_2'=10,\ X_1=-(x^2-2x-19);$$

$$A_2=B_2=1,\ C_2=x-1;$$

$$h=2;\ O_2(p)=(p+1)(p+2)-(p+1)10-(x^2-2y-19).$$

Полагаемъ $x=1$. Получаемъ уравненіе

$$(p+1)(p+a)-(p+1)10+20=p^2-7p+12=0,$$

---

*) Первые два примѣра взяты изъ статьи академика В. Г. Имшенецкаго „Общій способъ нахожденія раціональныхъ дробныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами“

Digitized by Google

корни котораго

$$p_1 = 4,\ p_2 = 3.$$

За показатель у $x - 1$ въ P слѣдуетъ взять большій изъ нихъ, т.-е. 4.

Положивъ

$$y = \frac{z}{(x-1)^4},$$

легко преобразуемъ заданное уравненіе въ слѣдующее:

$$(x-1)\,z''' - 2z'' - (x-1)\,z' + 2z = 0.$$

Полагая

$$z'' - z = u,$$

получимъ новое уравненіе

$$(x-1)\,u' - 2u = 0.$$

интегралъ котораго

$$u = z'' - z = c(x-1)^2.$$

Интегрируя послѣднее уравненіе по общимъ правиламъ, получимъ

$$z = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - c(x^2 - 2x + 3),$$

откуда

$$y = \frac{c_1 e^x + c_2 e^{-x} - c(x^2 - 2x + 3)}{(x-1)^4}$$

Примѣръ 2.

$$(x^{11} + 5px^7 + 3qx^6 - 5pqx^2 - 4q^2x)y'' +$$

$$+ (7x^{10} - 5px^6 - 24qx^5 - 20pqx - 8q^2)y' +$$

$$+ (5x^9 - 15px^5 + 30qx^4 - 10pq)y = 0.$$

Общій наибольшій дѣлитель функцій

$$X_2 = x^{11} + 5px^7 + 3qx^6 - 5pqx^2 - 4q^2x$$

Digitized by Google

и

$$X'_1 = 11x^{10} + 35px^6 + 18qx^5 - 10pqx - 4q^2$$

равенъ единицѣ.

Слѣдовательно $M = X_2$.

Общій наибольшій дѣлитель функцій

$$X_2 \text{ и } X_1 = 7x^{10} - 5px^6 - 24qx^5 - 20pqx - 8q^2$$

равенъ единицѣ

Слѣдовательно

$$A_1 = B_1 = 1,\ C_1 = M.$$

Уравненіе для нахожденія показателей напишется такъ:

$$(n+1)(11x^{10} + 35px^6 + 18qx^5 - 10pqx - 4q^2) - (7x^{10} - 5px^6 -$$

$$- 24qx^5 - 20pqx - 8q^2) = (11n + 4)x^{10} + (35n + 40)px^6 +$$

$$+ (18n + 42)qx^5 - (10n - 10)pqx - (4n - 4)q^2 = 0. \qquad (1)$$

Уравненіе $M = 0$ имѣетъ очевидный корень

$$x = 0.$$

Полагая въ уравненіи (1) x равнымъ нулю, обращаемъ его въ

$$4n - 4 = 0.$$

Слѣдовательно показатель у x въ P равенъ единицѣ.

Остается составить результантъ уравненія (1) и

$$M_1 = x^{10} + 5px^6 + 3qx^5 - 5pqx - 4q^2 = 0.$$

Функція M_1 легко разлагается на 2 множителя:

$$x^{10} + 5px^6 + 3qx^5 - 5pqx - 4q^2 =$$

$$= x^{10} + 5px^6 + 4qx^5 - qx^5 - 5pqx - 4q^2 =$$

$$= x^5(x^5 - q) + 5px(x^5 - q) + 4q(x^5 - q) = (x^5 + 5px + 4q)(x^5 - q).$$

Первый остатокъ отъ дѣленія 1-го на

Digitized by Google

$$x^5+5px+4q$$

равенъ

$$-(20n-20)px^6-(26n-26)qx^5-(10n-10)pqx-(4n-4)q^2$$

и очевидно равенъ нулю только при $n=1$.

Слѣдовательно $x^5+5px+4q$ соотвѣтствуетъ показатель $n_2=1$.

Остатокъ отъ дѣленія (1) на x^5-q равенъ

$$(25n+50)pqx+(25n+50)q^2$$

и очевидно равенъ нулю при $n=-2$.

Слѣдовательно функціи x^5-q соотвѣтствуетъ показатель $n_3=-2$ и она не можетъ входить въ знаменатель искомой дробной функціи.

Полагаемъ

$$y=\frac{z}{(x^5+5px+4q)x}.$$

Преобразованное уравненіе будетъ

$$(x^5-q)z''-5x^4z'+5x^3z=0. \qquad (2)$$

Уравненіе, которому должны удовлетворять наивысшіе показатели цѣлыхъ раціональныхъ функцій, интегралов уравненія (2), напишется такъ:

$$n(n-1)-5n+5=0.$$

Корни его $n_1=5$, $n_2=1$.

Полагаемъ

$$z=A_0x^5+A_1x^4+A_2x^3+A_3x^2+A_4x+A_5$$

По способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ находимъ для $A_0, A_1 \ldots A_5$ слѣдующія значенія:

$A_1=0$, $A_2=0$, $A_3=0$, A_4 произвольно, A_0 произвольно, $A_5=4A_0q$.

A_4 представимъ такъ:

Digitized by Google

$$A_4 = 5pA_0 + C.$$

Слѣдовательно

$$z = A_0 (x^5 + 5px + 4q) + Cx$$

и

$$y = \frac{A_0}{x} + \frac{C}{x^5 + 5px + 4q}.$$

Примѣръ 3 (проф. К. А. Поссе).

$$x^3(x+1)^4 y'' + x(x+1)^3 y' - (132x^4 + 175x^3 + 105x^2 + 15x - 5)y =$$

$$= 6(x^4 - 62x^3 - 82x^2 - 50x - 3).$$

$$M = x(x+1),$$

$$X'_2 = 3x^2(x+1)^4 + 4x^3(x+1)^3,$$

$$X_1 = x(x+1)^3.$$

$$A_1 = x(x+1), B_1 = C_1 = 1,$$

$$\frac{X''_2}{2} = 3x(x+1)^4 + 12x^2(x+1)^3 + 6x^3(x+1)^2,$$

$$X'_1 = (x+1)^3 + 3x(x+1)^2,$$

$$X_0 = -(132x^4 + 175x^3 + 105x^2 + 15x - 5).$$

$$A_2 = 1, B_2 = (x+1), C_2 = x, h = 2,$$

$$O_2(p) = p(p+1)[3x(x+1)^4 + 12x^2(x+1)^3 + 6x^3(x+1)^2] -$$

$$- p[(x+1)^3 + 3x(x+1)^2] - (132x^4 + 175x^3 + 105x^2 - 15x - 5).$$

Положивъ x равнымъ нулю, получимъ уравненіе

$$-p + 5 = 0, p = 5.$$

Полагаемъ

$$y = \frac{z}{x^5}.$$

Преобразованное уравненіе напишется такъ:

$$(x^6 + 4x^5 + 6x^4 + 4x^3 + x^2)z'' - (10x^5 + 40x^4 + 59x^3 + 37x^2 +$$

$$+ 7x - 1)z' + (30x^4 - 12x^3)z = 6x^4(x^4 - 62x^3 - 82x^2 - 50x - 3).$$

Digitized by Google

Уравненіе, которому должны удовлетворять наивысшіе показатели цѣлыхъ раціональныхъ функцій интегралов уравненія съ z:

$$p(p-1)-10p+30=0$$

имѣетъ корнями $p_1=6, p_2=5$.

Полагаемъ

$$z=A_6x^6+A_5x^5+A_4x^4+A_3x^3+A_2x^2+A_1x+A_0$$

и ищемъ коэффиціенты $A_6, A_5, \ldots A_0$ по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.

Искомые коэффиціенты должны удовлетворять слѣдующимъ условіямъ:

$$A_6=A_1=A_2=A_3=0,$$

$$-132A_5+2A_4-6=0,$$

$$-175A_5-124A_4+372=0,$$

$$-105A_5-164A_4+492=0,$$

$$-15A_5-100A_4+300=0,$$

$$5A_5-16A_4+30A_0+18=0,$$

$$4A_4-12A_0=0.$$

Этимъ условіямъ удовлетворяютъ слѣдующія величины:

$$A_5=0, A_4=3, A_0=1.$$

Слѣдовательно

$$z=3x^4+1$$

и

$$y=\frac{3x^4+1}{x^5}.$$

Февраль
1894 г.

Digitized by Google

КЪ ВОПРОСУ О РАЗРѢЗАНІИ ВИХРЕВЫХЪ ШНУРОВЪ.

Н. Е. Жуковскаго.

(Сообщено на IX съѣздѣ русскихъ естествоиспытателей и врачей 1894 г. января 8).

§ 1. Рядомъ съ доказательствомъ невозможности образованія въ жидкости безъ тренія новыхъ вихрей, высказывается обыкновенно положеніе о невозможности раздѣленія вихреваго шнура на части—о невозможности его разрѣзанія. Это послѣднее положеніе, насколько мнѣ извѣстно, не было обстоятельно теоретически изслѣдовано и опирается болѣе на опыты Томсона съ дымными вихревыми кольцами, которыя уклоняются отъ приближаемаго къ нимъ ножа.

Но слѣдуетъ замѣтить, что при такихъ опытахъ все-таки является возможность получить въ продолженіе нѣкотораго времени вихревое кольцо разрѣзаннымъ на двѣ половины. Стоитъ только пустить его такъ, чтобы остріе ножа направлялось по діаметру кольца; тогда, набѣжавъ на ножъ, кольцо раздѣлится на два полукольца, опирающіяся своими концами на бока ножа. Эти полукольца, проскользя по ножу, возсоединятся опять въ вихревое кольцо (такой опытъ мы много разъ демонстрировали).

Рѣзкое уклоненіе вихреваго кольца отъ подносимаго ножа собственно замѣчается въ томъ случаѣ, когда мы желаемъ разрѣзать кольцо, поднося ножъ сбоку.

Digitized by Google

Было бы весьма интересно изслѣдовать этотъ вопросъ теоретически, т.-е. рѣшить задачу о движеніи вихреваго кольца вблизи острія клина, погруженнаго въ жидкую массу, но задача эта очень трудная. Въ виду трудности задачи въ трехъ измѣреніяхъ мы предлагаемъ здѣсь рѣшеніе аналогичной задачи въ двухъ измѣреніяхъ, которую ставимъ такъ: изслѣдовать движеніе прямолинейнаго вихреваго шнура вблизи острія погруженнаго въ жидкость клина, причемъ остріе клина направлено параллельно оси вихреваго шнура.

§ 2. Выведемъ сначала нѣкоторыя общія формулы о движеніи центра вихревой площадки (нормальнаго сѣченія шнура). Предположимъ, что теченіе несжимаемой жидкости въ двухъ измѣреніяхъ характеризуется формулами:

$$u = \frac{d\psi}{dy}, \qquad v = -\frac{d\psi}{dx} \tag{1}$$

гдѣ u и v проекціи скорости жидкости на нѣкоторыя прямоугольныя оси координатъ x, y, а

$$\psi = const.$$

даетъ уравненія линій тока. Во всѣхъ точкахъ жидкости внѣ вихревыхъ площадокъ функція ψ удовлетворяетъ условію

$$\Delta_2 \psi = 0,$$

а на вихревыхъ площадкахъ даетъ:

$$\Delta_2 \psi = 2\omega,$$

гдѣ ω угловая скорость частицы жидкости, считаемая положительной при вращеніи по солнцу.

Выдѣлимъ мысленно одну вихревую площадку и разобьемъ функцію ψ на двѣ части, изъ которыхъ часть ψ_1 зависитъ отъ граничныхъ условій и отъ вліянія всѣхъ вихревыхъ площадокъ, кромѣ первой, а остающаяся часть зависитъ только отъ вліянія первой вихревой площадки. Тогда

Digitized by Google

$$\psi = \psi_1 + \frac{1}{\pi}\iint \omega \lg R\rho\sigma, \qquad (2)$$

гдѣ R есть разстояніе разсматриваемой точки жидкости отъ элемента площади $d\tau$ выдѣленной площадки, а двойная интеграція распространяется на всю площадь этой площадки.

Составимъ, какъ это дѣлаетъ Lamb *), выраженія компонентовъ скорости центра тяжести разсматриваемой площадки въ предположеніи, что по ней распредѣлена матерія съ плотностью ω. Называя чрезъ x_1, y_1 координаты упомянутаго центра тяжести, найдемъ по форм. (1) и (2):

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{k}\left\{\iint \frac{d\psi_1}{dy}\,\omega d\sigma + \frac{1}{\pi}\iiiint \frac{\omega\omega'}{R}(y-y')d\sigma d\sigma'\right\},$$

$$-\frac{dy_1}{dt} = \frac{1}{k}\left\{\iint \frac{d\psi_1}{dx}\,\omega d\sigma + \frac{1}{\pi}\iiiint \frac{\omega\omega'}{R}(x-x')d\sigma d\sigma'\right\},$$

гдѣ

$$k = \iint \omega d\sigma$$

представляетъ напряженіе разсматриваемаго вихреваго шнура, или половину циркуляціи скорости по охватывающему его контуру. Четырекратный интегралъ въ первой формулѣ берется два раза по площади разсматриваемой площадки, и такъ какъ въ немъ всякому элементу

$$\frac{\omega\omega' d\sigma d\sigma'}{R}(y-y')$$

соотвѣтствуетъ другой элементъ

$$\frac{\omega\omega' d\sigma d\sigma'}{R}(y'-y)$$

съ обратнымъ знакомъ, то весь этотъ четырекратный интегралъ обращается въ нуль. Также обращается въ нуль и четырекратный интегралъ второй формулы.

Мы получаемъ:

---

*) *Lamb.* A treatise on the mathematical theory of the motion of fluids. § 138.

Digitized by Google

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{k}\iint \frac{d\psi_1}{dy}\,\omega d\sigma,$$
$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{1}{k}\iint \frac{d\psi_1}{dx}\,\omega d\sigma. \qquad (3)$$

Переходимъ къ предположенію, что площадь нормальнаго сѣченія вихреваго шнура исчезающе мала, а напряженіе вихря k конечно.

Такъ какъ функція ψ_1 зависитъ только отъ граничныхъ условій и вліянія вихревыхъ площадокъ, кромѣ разсматриваемой, то она вмѣстѣ съ своими производными остается непрерывной и конечной вблизи первой площадки и при вступленіи внутрь ея. Мы можемъ въ форм. (3) вынести производныя ψ_1 за знаки интеграловъ и приписать имъ значенія, соотвѣтствующія точкѣ, лежащей внѣ площадки на разстояніи весьма близкомъ отъ ея центра. Получимъ:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{d\psi_1}{dy}, \quad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{d\psi_1}{dx}. \qquad (4)$$

Опредѣлимъ ψ_1 по формулѣ (2), предполагая, что размѣры площадки сравнительно съ разстояніемъ отъ центра площадки точки, для которой опредѣляется ψ_1 суть малыя величины высшаго порядка.

Въ этомъ предположеніи R можно считать за разстояніе центра тяжести площадки отъ разсматриваемой точки и вынести lgR въ формулѣ (2) за знакъ интеграла:

$$\psi_1 = \psi - \frac{k}{\pi} lgR. \qquad (5)$$

Подставляя въ уравненіи (4), найдемъ для скоростей центра тяжести площадки, который мы будемъ звать *центромъ вихря*, формулы:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{d}{dy}\left(\psi - \frac{k}{\pi} lg\, R\right),$$
$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{d}{dx}\left(\psi - \frac{k}{\pi} lg\, R\right). \qquad (6)$$

Digitized by Google

Здѣсь надо во вторыхъ частяхъ сначала взять производныя по y и x, а потомъ положить $x=x_1$, $y=y_1$. Предположимъ теперь, что разсматриваемое теченіе жидкости въ двухъ измѣреніяхъ, содержащее безконечно малыя вихревыя площадки, изъ которыхъ одна имѣетъ координаты x_1, y_1, характеризуется функціею мнимаго перемѣннаго $z=x+yi$, которую мы разбиваемъ на дѣйствительную и мнимую часть:

$$F(x+yi)=\varphi+\psi i.$$

Умножаемъ второе уравненіе (6) на i и вычитаемъ изъ перваго:

$$\frac{d}{dt}(x_1-y_1 i)=\Big/^{z=z_1}\left\{\frac{d\psi}{dy}+\frac{d\psi}{dx}\,i-\frac{k}{\pi}\left(\frac{d\lg R}{dy}+\frac{d\lg R}{dx}i\right)\right\}, \quad (7)$$

гдѣ подстановка показываетъ, что послѣ взятія производныхъ надо вездѣ z замѣнить на z_1, т.-е. x и y на x_1 и y_1.

На основаніи извѣстныхъ свойствъ дѣйствительной и мнимой части функціи мнимаго перемѣннаго имѣемъ:

$$\frac{d\psi}{dy}=\frac{d\varphi}{dx},$$

$$\frac{d\lg R}{dy}=\frac{d}{dy}\lg\sqrt{(x-x_1)^2+(y-x_1)^2}=\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}\frac{y-y_1}{x-x_1},$$

Вслѣдствіе этого уравненіе (7) преобразуется въ слѣдующую основную формулу для опредѣленія движенія центра вихря:

$$\frac{d}{dt}(x_1-y_1 i)=\Big/^{z=z_1}\frac{d}{dz}\left(F-\frac{k}{\pi}\lg(z-z_1)\right). \quad (8)$$

§ 3. Приложимъ формулу (8) къ двумъ простымъ примѣрамъ, которые лягутъ въ основаніе разрѣшенія интересующей насъ задачи.

Пусть дано:

$$F=\frac{ki}{\pi}\lg\frac{z-z_1}{z-z_2}, \quad (9)$$

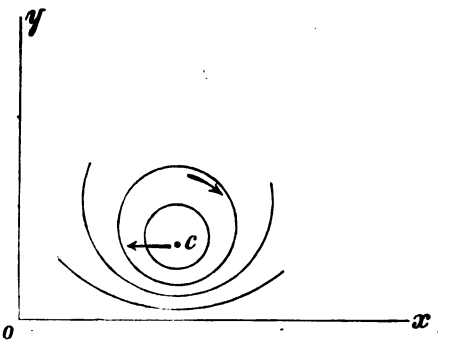
Digitized by Google

гдѣ

$$z_1 = x_1 + y_1 i\,,$$

$$z_2 = x_1 - y_1 i\,.$$

Точки (z_1) и (z_2) являются центрами двухъ вихревыхъ площадокъ, имѣющихъ напряженія вихря, равныя k и $-k$. Ось ox есть одна изъ линій тока, такъ что она можетъ быть принята за неподвижную границу и все теченіе можетъ быть разсматриваемо на полуплоскости. Линіи токовъ этого теченія будутъ (фиг. 1) окружности, охватывающія центръ вихря C (точку z_1) и приближающіяся, расширяясь, къ прямой ox. Скорость во всякой точкѣ теченія на основаніи уравненія (1) находится по формулѣ:



Фиг. 1.

$$u - vi = \frac{d\psi}{dy} + \frac{d\psi}{dx} i = \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\psi}{dx} i$$

или

$$u - vi = \frac{dF}{dz}\,. \qquad (10)$$

Для нашего случая эта формула даетъ:

$$u - vi = \frac{ki}{\pi}\left(\frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_2}\right)$$

и показываетъ, что при $z = \infty$ скорость равна нулю; всѣ точки на конечномъ разстояніи отъ C имѣютъ скорости неравныя нулю.

Подставляя значеніе F изъ формулы (9) въ формулу (8), находимъ для движенія центра вихря уравненіе:

$$\frac{d}{dt}\,[x_1 - y_1 i] = -\frac{k}{2\pi y_1}\,,$$

Digitized by Google

откуда

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{k}{2\pi y_1}, \quad \frac{dy_1}{dt} = 0. \tag{11}$$

Такимъ образомъ центръ вихря C будетъ двигаться параллельно оси ox съ постоянною скоростью, которая направлена отъ x къ o, если вращеніе вихря совершается по солнцу.

Для втораго примѣра возьмемъ:

$$F = wz + \frac{ki}{\pi} lg \frac{z-z_1}{z-z_2}. \tag{12}$$

Теченіе жидкости, представляемое этою функціею, имѣетъ тѣ же вихревые центры z_1 и z_2, какъ и предыдущее теченіе, и тоже расположено симметрично относительно оси ox, такъ что эта ось можетъ быть принята за неподвижную границу и все теченіе можетъ быть разсматриваемо на полуплоскости.

Скорость въ безконечности направлена параллельно оси ox и равна w, потому что на основаніи формулъ (10) и (12):

$$u - vi = w + \frac{ki}{\pi}\left(\frac{1}{z-z_1} - \frac{1}{z-z_2}\right), \tag{13}$$

гдѣ вторая часть обращается въ w при $z=\infty$.

Въ разсматриваемомъ теченіи существуютъ двѣ критическія точки съ нулевою скоростью. Предполагая, что одна изъ этихъ точекъ лежитъ въ началѣ координатъ, мы должны обратить въ нуль вторую часть формулы (13) положеніемъ $z=0$. Это даетъ

$$w = \frac{ki}{\pi}\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right) = \frac{2ky_1}{\pi(x_1^2 + y_1^2)}. \tag{14}$$

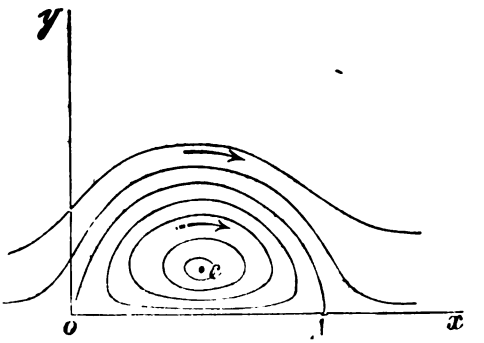
На основаніи равенства (14) формула (13) можетъ быть написана въ видѣ

$$u - vi = \frac{kzi}{\pi}\left(\frac{1}{z_1(z-z_1)} - \frac{1}{z_2(z-z_2)}\right) \tag{15}$$

Digitized by Google

гдѣ вторая часть, кромѣ $z=0$, обращается еще въ нуль при $z=2x_1$. Такимъ образомъ другая критическая точка нулевой скорости будетъ лежать на оси ox на разстояніи $2x_1$ отъ начала координатъ.

Линіи токовъ разсматриваемаго теченія расположатся, какъ представлено на фиг. (2), на которой C есть центръ вихря, а точки o и A — критическія точки нулевой скорости.



Фиг. 2.

Движеніе центра вихря C на основаніи формулъ (8) и (12) найдется изъ уравненія:

$$\frac{d}{dt}(x_1 - y_1 i) = w - \frac{k}{2\pi y_1},$$

которое дастъ:

$$\frac{dx_1}{dt} = w - \frac{k}{2\pi y_1}, \quad \frac{dy_1}{dt} = 0. \tag{16}$$

Такимъ образомъ и здѣсь центръ вихря будетъ двигаться параллельно оси ox съ постоянною скоростью. Эта скорость имѣетъ направленіе отъ o къ x, если

$$w > \frac{k}{2\pi y_1},$$

и наоборотъ.

Вмѣстѣ съ центромъ вихря C перемѣщаются по оси ox съ тою же скоростью и критическія точки o и A.

Разстояніе $2x_1$ между этими точками въ частномъ случаѣ при

$$w = \frac{2k}{\pi y_1}$$

Digitized by Google

обращается въ нуль, причемъ въ такой слившейся критической точкѣ линіи токовъ пересѣкаютъ ось ox уже не подъ прямыми углами, какъ на фиг. (2), а подъ углами въ 45°.

§ 4. Рѣшеніе поставленной нами задачи получается съ помощію конформнаго преобразованія двухъ вышеописанныхъ теченій жидкости. Поэтому, прежде нежели приступить къ этому рѣшенію, посмотримъ, какъ преобразуется формула (8), когда теченіе, опредѣляемое функціею $\Phi(\zeta)$ на плоскости мнимаго перемѣннаго $\zeta=\xi+\eta i$, преобразуется въ теченіе, опредѣленное на плоскости перемѣннаго z функціею $F(z)$, причемъ между точками первой и второй плоскости установлено соотвѣтствіе съ помощію уравненія:

$$\zeta=f(z), \tag{17}$$

вслѣдствіе чего

$$\Phi(f(z))=F(z).$$

Соотвѣтствіе (17) установлено такъ, что центры вихря второго теченія соотвѣтствуютъ центрамъ вихря перваго и что въ разсматриваемыхъ границахъ каждой точкѣ одного теченія соотвѣтствуетъ одна опредѣленная точка другого. Предполагая, что центру вихря $z_1=x_1+y_1 i$ соотвѣтствуетъ въ преобразованномъ теченіи центръ вихря $\zeta_1=\xi_1+\eta_1 i$, напишемъ для движенія этого второго центра формулу (8) въ такомъ видѣ:

$$\frac{d}{dt}(\xi_1-\eta_1 i)=\left/\frac{d}{d\zeta}\left(\Phi(\zeta)-\frac{ki}{\pi}lg(\zeta-\zeta_1)\right)\right._{\zeta=\zeta_1}.$$

Величину, стоящую во второй части въ скобкахъ, представимъ сначала въ видѣ функціи z. Для этого замѣняемъ $\Phi(\zeta)$ на $F(z)$ и полагаемъ, что

$$lg(\zeta-\zeta_1)=lg(f(z)-f(z_1)).$$

Считая въ послѣдней формулѣ z за величину близкую къ z_1, сдѣлаемъ разложеніе:

Digitized by Google

$$lg(f(z)-f(z_1))=lg\left(f'(z_1)(z-z_1)+\frac{f''(z)}{2}(z-z_1)^2+\ldots\right)$$

$$=lg\,f'(z_1)+lg\,(z-z_1)+lg\left(1+\frac{f''(z_1)}{2f'(z_1)}(z-z_1)+\ldots\right)$$

$$=lg\,f'(z_1)+lg(z-z_1)+\frac{f''(z_1)}{2f'(z_1)}(z-z_1)+\ldots$$

По подстановкѣ получаемъ:

$$\frac{d}{dt}(\xi_1-\eta_1 i)=\left/\left[\frac{d}{dz}\left(F-\frac{ki}{\pi}lg\,(z-z_1)\right)-\frac{kif''(z_1)}{\pi\,2f'(z_1)}\right]\frac{dz}{d\zeta}\right._{\zeta=\zeta_1}. \quad (18)$$

§ 5. Конформное преобразованіе, которымъ мы будемъ пользоваться, характеризуется подстановкою:

$$z=\zeta^\mu, \quad (19)$$

которая по введеніи полярныхъ координатъ

$$x=r\,cs\,\alpha, \quad \xi=\rho\,cs\,\theta,$$

$$y=r\,sn\,\alpha, \quad \eta=\rho\,sn\,\theta,$$

даетъ соотношеніе:

$$\rho=\sqrt[\mu]{r}, \quad \theta=\frac{\alpha}{\mu}. \quad (20)$$

Это показываетъ, что полярныя координаты точки плоскости $\xi\eta$ получаются изъ полярныхъ координатъ соотвѣтственной точки на плоскости xy чрезъ раздѣленіе полярнаго угла на μ и чрезъ измѣненія величины радіуса вектора посредствомъ извлеченія изъ нея корня степени μ.

Приложимъ такое преобразованіе къ теченію, представленному формулою (9), считая при этомъ $\mu>1$.

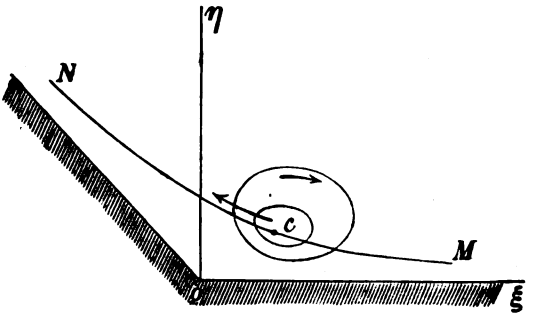
Получимъ теченіе, опредѣленное формулою:

$$\Phi=\frac{ki}{\pi}lg\frac{\zeta^\mu-\zeta_1{}^\mu}{\zeta^\mu-\zeta_2{}^\mu} \quad (21)$$

Digitized by Google

въ которомъ неподвижною границею будетъ уже не прямая стѣнка, а стороны угла меньшаго двухъ прямыхъ и равнаго $\frac{\pi}{\mu}$. Пользуясь указаннымъ правиломъ соотвѣтствія, мы можемъ изъ линій тока на фиг. (1) получить линіи тока новаго теченія, представленныя на фиг. (2). Скорость жидкости въ этомъ теченіи при вершинѣ угла и въ безконечности будетъ равна нулю, потому что производная (форм. 10)

$$\frac{dF}{d\zeta}=\frac{dF}{dz}\frac{dz}{d\zeta}=\frac{ki}{\pi}\left(\frac{1}{\zeta^{\mu}-\zeta_1^{\mu}}-\frac{1}{\zeta^{\mu}-\zeta_2^{\mu}}\right)\mu\zeta^{\mu-1} \qquad (22)$$



Фиг. 3.

обращается въ нуль при $\zeta=0$ и при $\zeta=\infty$.

Переходимъ къ изслѣдованію движенія центра вихря C, которому по форм.(21)соотвѣтствуетъ напряженіе k.

Выразимъ

$$\frac{d}{dt}(\xi_1-\eta_1 i)$$

въ полярныхъ координатахъ. Подставляя сюда

$$\xi_1=\rho_1 cs\theta_1,\ \eta_1=\rho_1 sn\theta_1,$$

находимъ, что

$$\frac{d}{dt}(\xi_1-\eta_1 i)=(cs\theta_1-i\,sn\theta_1)\left(\frac{d\rho_1}{dt}-i\rho_1\frac{d\theta_1}{dt}\right).$$

Такъ какъ

$$\zeta_2=\rho_1(cs\theta_1-i\,sn\theta_1),$$

то написанное выраженіе можно представить еще такъ:

Digitized by Google

$$\frac{d}{dt}(\xi_1 - \eta_1 i) = \zeta_2\left(\frac{1}{\rho_1}\frac{d\rho_1}{dt} - i\frac{d\theta_1}{dt}\right).$$

На основаніи этого замѣчанія и форм. (18) получаемъ:

$$\zeta_2\left(\frac{1}{\rho_1}\frac{d\rho_1}{dt} - i\frac{d\theta_1}{dt}\right) = -\frac{k\mu i}{\pi}\left\{\frac{\zeta_1^{\mu-1}}{\zeta_1^{\mu} - \zeta_2^{\mu}} + \frac{1-\mu}{2\mu}\frac{1}{\zeta_1}\right\}. \quad (23)$$

Пользуясь соотношеніемъ $\zeta_1\zeta_2 = \rho_1^2$ и замѣняя всѣ координаты на полярныя, получимъ:

$$\frac{d\rho_1}{dt} - i\rho_1\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{k}{2\pi\rho_1}\left(-\frac{\mu\, cs\mu\theta_1}{sn\mu\theta_1} - i\right).$$

Откуда слѣдуетъ, что

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d\rho_1}{dt} &= \frac{k}{2\pi\rho_1}\frac{\mu\, cs\mu\theta_1}{sn\mu\theta_1}, \\ \rho_1\frac{d\theta_1}{dt} &= \frac{k}{2\pi\rho_1}. \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Эти форм. показываютъ, что со временемъ радіусъ ρ_1 убываетъ до тѣхъ поръ, пока не достигаетъ наименьшей величины при $\theta_1 = \frac{\pi}{2\mu}$, а потомъ возрастаетъ. Что касается угла θ_1, то онъ при положительномъ k постоянно возрастаетъ.

Такимъ образомъ центръ вихря C двигается (фиг. 3) по нѣкоторой траекторіи MN въ направленіи отъ N къ M, если вращеніе вихря совершается по солнцу.

Чтобы составить уравненіе траекторіи MN умножаемъ первое изъ ур. (24) на $\rho_1 d\theta_1$, второе на $d\rho_1$ и складываемъ:

$$\frac{\mu\, cs\mu\theta_1\, d\theta_1}{sn\mu\,\theta_1} + \frac{d\rho_1}{\rho_1} = 0.$$

Интегрируя, находимъ *):

---

*) Это уравненіе получаетъ Gröbli въ сочиненіи „Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfaden“ для случая цѣлаго μ и Greenhill въ сочиненіи „Plane Vortex Motion“ (Quart. Journ. Vol. XV § 6) для случая всякаго $\mu > 1$.

Digitized by Google

$$\rho_1 sn\mu\theta_1 = \lambda, \qquad (25)$$

гдѣ λ произвольное постоянное.

Кривыя, представляемыя этимъ ур., имѣютъ асимптотами стороны угла, ограничивающаго разсматриваемое теченіе.

Чтобы установить связь между θ_1 и временемъ, представляемъ второе ур. (24) на основаніи (25) въ видѣ:

$$dt = \frac{2\pi\lambda^2}{k} \frac{d\theta_1}{sn^2\mu\theta_1}$$

и совершаемъ интегрированіе:

$$t = \tau - \frac{2\pi\lambda^2}{k\mu} ctg\, \mu\theta_1, \qquad (26)$$

гдѣ τ произвольное постоянное.

§ 6. Мы разсмотрѣли случай движенія центра вихря въ пространствѣ, ограниченномъ сторонами угла меньшаго π, но интересующая насъ задача относится къ случаю, когда уголъ заключенъ между π и 2π.

Если бы мы въ изслѣдованіи § 5 положили

$$1 > \mu > \frac{1}{2},$$

то получили бы теченіе жидкости, обтекающее клинъ, но на остріи этого клина, какъ видно изъ форм. (22), скорость была бы безконечно велика.

Для полученія теченія, ограниченнаго боками клина и дающаго при остріи критическую точку нулевой скорости, сдѣлаемъ конформное преобразованіе (19) надъ теченіемъ жидкости, представленнымъ форм. (12).

Вмѣсто ур. (22) мы получимъ въ этомъ случаѣ на основаніи форм. (15) нижеслѣдующее равенство:

$$\frac{dF}{dz}\frac{ds}{d\zeta} = \frac{k\mu i}{\pi}\left\{\frac{1}{(\zeta^\mu - \zeta_1^{\,\mu})\,\zeta_1^{\,\mu}} - \frac{1}{(\zeta^\mu - \zeta_2^{\,\mu})\zeta_2^{\,\mu}}\right\}\zeta^{2\mu-1}. \qquad (27)$$

Здѣсь вторая часть обращается въ нуль при $\zeta = 0$ вслѣд-

Digitized by Google

ствіе $\mu > \frac{1}{2}$, а также обращается въ нуль при $\zeta = \infty$ вслѣдствіе $\mu < 1$. Кромѣ этого на сторонѣ клина имѣется еще нѣкоторая критическая точка нулевой скорости, потому что вторая часть форм. (27) обращается въ нуль при

$$\zeta^{\mu} = 2\rho_1^{\mu} cs\mu\theta_1 .$$

Преобразуя линіи токовъ, изображенныя на фиг. (2), съ помощью соотвѣтствія (20), получимъ линіи токовъ, изображенныя на фиг. (4). Одна критическая точка нулевой скорости будетъ въ вершинѣ клина o, чрезъ нее пройдетъ линія тока въ направленіи биссектора угла клина.

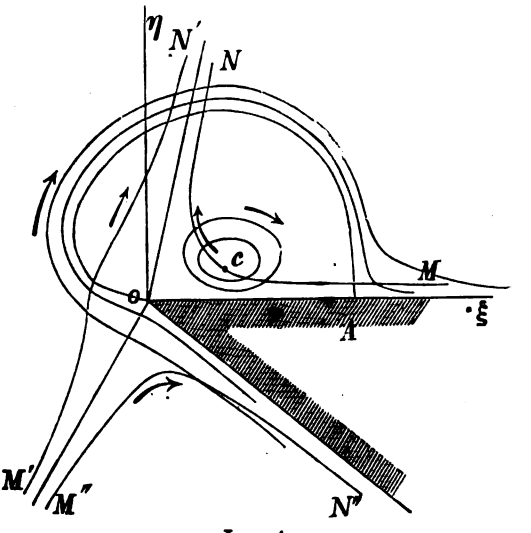
Другая критическая точка A нулевой скорости будетъ лежать на сторонѣ клина и отстоять отъ его вершины на разстояніе:

$$\delta = \rho_1 (2cs\mu\theta_1)^{\frac{1}{\mu}} . \qquad (28)$$

Здѣсь слѣдуетъ взять абсолютную величину косинуса. При этомъ, если

$$\theta_1 < \frac{\pi}{2\mu},$$

точку A надо взять на верхней сторонѣ клина, а если имѣетъ мѣсто обратное неравенство, то—на нижней.



Фиг. 4.

Обращаемся къ изслѣдованію движенія центра вихря C. Основная форм., опредѣляющая это движеніе, будетъ отличаться отъ форм. (23) добавочнымъ членомъ,

Digitized by Google

зависящимъ отъ w. Приписывая этотъ членъ и выражая w по форм. (14), найдемъ:

$$\zeta_2\left(\frac{1}{\rho_1}\frac{d\rho_1}{dt} - i\frac{d\theta_1}{dt}\right) = -\frac{k\mu i}{\pi}\left(\frac{\zeta_1^{\mu-1}}{\zeta_1^{\mu}-\zeta_2^{\mu}} + \frac{1-\mu}{2\mu}\frac{1}{\zeta_1}\right)$$

$$+\frac{k\mu i}{\pi}\zeta_1^{\mu-1}\left(\frac{1}{\zeta_1^{\mu}} - \frac{1}{\zeta_2^{\mu}}\right). \qquad (29)$$

Вводя сюда полярныя координаты и дѣлая нѣкоторыя простыя преобразованія, получаемъ:

$$\frac{d\rho_1}{dt} - i\rho_1\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{k}{2\pi\rho_1}\left\{\left(-\frac{\mu cs\mu\theta_1}{sn\mu\theta_1} + 4\mu cs\mu\theta_1\, sn\mu\theta_1\right)\right.$$

$$\left. -(1-4\mu sn^2\mu\theta_1)\,i\right\},$$

откуда:

$$-\frac{d\rho_1}{dt} = \frac{k}{2\pi\rho_1}\frac{\mu cs\mu\theta_1}{sn\mu\theta_1}(1-4\,sn^2\mu\theta_1),$$

$$\rho_1\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{k}{2\pi\rho_1}(1-4\mu sn^2\mu\theta_1). \qquad (30)$$

Послѣдняя изъ этихъ форм. показываетъ, что при положительномъ k уголъ θ_1 возрастаетъ со временемъ всякій разъ, какъ уголъ θ_1 заключенъ между 0 и β, причемъ β опредѣляется изъ уравненія:

$$sn\mu\beta = \frac{1}{2\sqrt{\mu}}.$$

Если уголъ θ_1 заключенъ между β и $\frac{\pi}{\mu} - \beta$, то онъ убываетъ со временемъ; наконецъ, если онъ заключенъ между $\frac{\pi}{\mu} - \beta$ и $\frac{\pi}{\mu}$, то онъ опять возрастаетъ со временемъ.

Умножаемъ первое ур. (30) на $\rho_1 d\theta_1$, второе на $d\rho_1$ и складываемъ:

Digitized by Google

$$\frac{d\rho_1}{\rho_1}(1-4\mu sn^2\mu\theta_1)+\frac{(1-4sn^2\mu\theta_1)dsn\mu\theta_1}{sn\mu\theta_1}=0.$$

Раздѣляемъ перемѣнныя и дѣлаемъ нѣкоторыя преобразованія:

$$\frac{d\rho_1}{\rho_1}+\frac{dsn\mu\theta_1}{sn\mu\theta_1}-\frac{4(1-\mu)sn\mu\theta_1 dsn\mu\theta_1}{1-4\mu sn^2\mu\theta_1}=0.$$

Интегрируя, получаемъ:

$$\rho_1 sn\mu\theta_1(1-4\mu sn^2\mu\theta_1)^{\frac{1-\mu}{2\mu}}=\lambda, \tag{31}$$

гдѣ λ произвольное постоянное.

Ур. (31) показываетъ намъ, что радіусъ ρ_1 убываетъ отъ ∞ и потомъ опять возрастаетъ до ∞ три раза: на промежуткѣ измѣненія θ_1 отъ 0 до β, отъ β до $\frac{\pi}{\mu}-\beta$ и отъ $\frac{\pi}{\mu}-\beta$ до $\frac{\pi}{\mu}$. Это соотвѣтствуетъ тремъ вѣтвямъ траекторій $MN, M'N', M''N''$. Асимптомами этихъ траекторій являются стороны клина и прямыя, наклоненныя къ сторонамъ клина подъ угломъ β.

На основаніи сказаннаго выше объ измѣненіи угла θ_1 со временемъ видно, что центръ вихря, вращающагося по солнцу, движется по упомянутымъ вѣтвямъ въ направленіи указанномъ на фиг. (4) стрѣлками.

Для опредѣленія связи между угломъ θ_1 и временемъ исключаемъ ρ_1 изъ втораго ур. (30) съ помощью ур. (31):

$$dt=\frac{2\pi\lambda^2}{k}\frac{d\theta_1}{sn^2\mu\theta_1(1-4\mu sn^2\mu\theta_1)^{\frac{1}{\mu}}}.$$

Вводя новое перемѣнное

$$ctg\mu\theta_1=\gamma,$$

получаемъ:

$$t+\tau=\frac{2\pi\lambda^2}{k}\int\frac{d\gamma}{\left(1-\frac{4\mu}{1+\gamma^2}\right)^{\frac{1}{\mu}}}. \tag{32}$$

Digitized by Google

Вмѣстѣ съ перемѣщеніемъ центра вихря C будетъ перемѣщаться по сторонѣ клина критическая точка A. При этомъ мѣсто ея будетъ всякій разъ находиться по форм. (28).

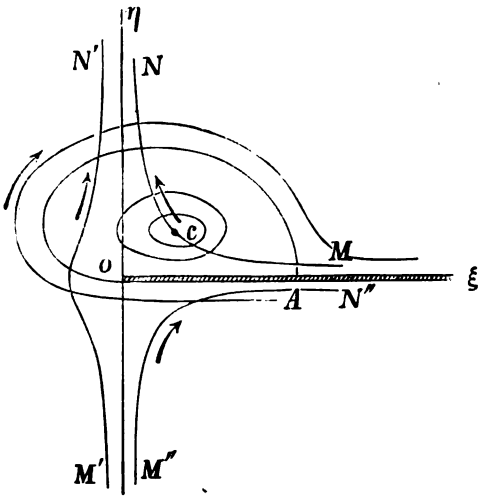
Если центръ вихря C движется по траекторіи $M'N'$, то при прохожденіи чрезъ биссекторъ клина, т. е. при $\theta_1 = \frac{\pi}{2\mu}$, величина ξ проходитъ черезъ нуль и точка A переходитъ съ одной стороны клина на другую.

Разсматривая траекторіи MN, $M'N'$, $M''N''$ центра вихря, замѣчаемъ, что вихревой шнуръ уклоняется отъ подносимаго къ нему острія клина.

§ 7. Отъ клина легко перейти къ случаю весьма тонкаго ножа. Для этого стоитъ только въ форм. предыдущаго параграфа положить $\mu = \frac{1}{2}$.

При такомъ положеніи фом. (27) принимаетъ видъ:

$$\frac{dF}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz} = \frac{ki}{2\pi}\left[\frac{1}{(\sqrt{\zeta}-\sqrt{\zeta_1})\sqrt{\zeta_1}} - \frac{1}{(\sqrt{\zeta}-\sqrt{\zeta_2})\sqrt{\zeta_2}}\right]. \qquad (33)$$



Фиг. 5.

Мы видимъ отсюда, что скорость въ безконечности и въ критической точкѣ A (фиг. 5), отстоящей отъ острія ножа на разстояніе

$$\xi = 4\rho_1 cs^2\frac{\theta_1}{2}, \qquad (34)$$

равна нулю; скорость же на остріи ножа есть конечная величина, ибо при $\zeta=0$, вторая часть форм. (33) обращается въ

$$-\frac{ksn\,\theta_1}{\pi\rho_1}.$$

Digitized by Google

Отрицательный знакъ показываетъ, что при $k>0$ и $\theta_1<\pi$ скорость жидкости въ точкѣ o направлена по оси $o\xi$ отъ ξ къ o.

Ур. (31) въ нашемъ частномъ случаѣ принимаетъ видъ:

$$\rho_1 \, sn \frac{\theta_1}{2} \sqrt{cs\theta_1} = \lambda. \qquad (35)$$

Это даетъ намъ вѣтви траекторій центра вихря: MN, $M'N'$, $M''N''$, имѣющія асимптотами оси $o\xi$ и $o\eta$.

Связь между временемъ и угломъ θ_1, выраженная форм. (32), упрощается для предѣльнаго случая такъ:

$$t+\tau = \frac{2\pi\lambda^2}{k} \int \left(\frac{\gamma^2+1}{\gamma^2-1}\right)^2 d\gamma$$

или по совершеніи интегрированія:

$$t+\tau = \frac{2\pi\lambda^2}{k} \left\{ \gamma - \frac{2\gamma}{\gamma^2-1} + lg \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right\} \qquad (36)$$

гдѣ τ произвольное постоянное, а

$$\gamma = ctg \frac{\theta_1}{2}.$$

Вмѣстѣ съ перемѣщеніемъ по плоскости точки C перемѣщается по сторонѣ ножа точка A, разстояніе которой отъ o опредѣляется во всякій моментъ времени по форм. (34). Если центръ вихря описываетъ траекторію $M'N'$, то при $\theta_1=\pi$ точка A вступаетъ на остріе ножа и потомъ переходитъ съ его нижней стороны на верхнюю. Намъ понятно теперь, почему нельзя разрѣзать ножомъ вихревой шнуръ вдоль его длины. Подношеніе острія ножа приведетъ центръ вихря въ движеніе по одной изъ трехъ траекторій MN, $M'N'$ $M''N''$, по которымъ вихрь будетъ всегда убѣгать отъ острія ножа.

Digitized by Google

ОПРЕДѢЛЕННЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПО ДѢЛИТЕЛЯМЪ.

Н. В. Бугаева.

Читано въ засѣданіи Московскаго Математическаго общества 19-го января 1893 года и Харьковскаго Математическаго Общества 11 мая 1893 года.

§ 1. Опредѣленный числовой интегралъ по дѣлителямъ. *Опредѣленнымъ числовымъ интеграломъ по дѣлителямъ мы называемъ интегралъ, распространенный на дѣлителей, заключающихся въ извѣстныхъ опредѣленныхъ предѣлахъ измѣненія.*

Согласно съ этимъ опредѣленіемъ, интегралъ

$$\sum_{a,(n)}^{b} \theta(d) \qquad (1)$$

означаетъ сумму функцій $\theta(d)$, взятую для всѣхъ дѣлителей цѣлаго числа n, заключающихся въ промежуткѣ измѣненія чиселъ a и b включительно.

Числа a и b будемъ называть предѣлами числоваго интеграла, a *нижнимъ*, b *верхнимъ* предѣломъ.

Опредѣленный числовой интегралъ мы будемъ обозначать, ставя иногда черту надъ знакомъ Σ, и изображать въ видѣ

$$\overline{\sum}_{a,(n)}^{b} \theta(d) \qquad (2)$$

Число n, на дѣлителей котораго распространяется числовой интегралъ, мы будемъ заключать въ скобки или совсѣмъ

Digitized by Google

опускать, если это не ведетъ ни къ какимъ недоразумѣніямъ. Впрочемъ, если предѣлы интеграла обозначены, можно не ставить вовсе черты надъ знакомъ Σ.

На опредѣленный полный числовой интегралъ по дѣлителямъ можно смотрѣть какъ на опредѣленный интегралъ, у котораго предѣлами являются числа 1 и n и слѣдовательно

$$\sum_n \theta(d) = \sum_{1,(n)}^{n} \theta(d) = \sum_{1,(n)}^{\infty} \theta(d) \qquad (3)$$

Можно вовсе не писать верхняго предѣла или замѣнить его безконечностію. Отъ этого по смыслу самаго интеграла не измѣнится его величина. Интегралъ по всѣмъ дѣлителямъ мы будемъ иногда называть *полнымъ*, а по нѣкоторымъ дѣлителямъ, заключающимся въ опредѣленныхъ предѣлахъ, *частнымъ опредѣленнымъ интеграломъ*. Въ томъ случаѣ, когда нѣтъ нижняго предѣла, мы подразумѣваемъ его равнымъ единицѣ.

§ 2. **Связь между интеграломъ по натуральнымъ числамъ и интеграломъ по дѣлителямъ.**

Между числовыми интегралами по дѣлителямъ и по натуральнымъ числамъ существуетъ очень простая связь. Эта связь легко обнаруживается при помощи введенной въ 1883 году нами *) функціи $\overline{p}\,(u)$. Эта функція обращается въ единицу для всѣхъцѣлыхъ чиселъ кратныхъ p и въ нуль для остальныхъ чиселъ.

Функція $\overline{p}\,(u)$ удовлетворяетъ условіямъ:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{p}\,(pu)=1 \\ &\overline{p}\,(pu+1)=0 \\ &\overline{p}\,(pu+2)=0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\overline{p}\,(pu+p-1)=0 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

*) *Бугаевъ.* Нѣкоторыя приложенія теоріи эллиптическихъ функцій къ теоріи функцій прерывныхъ. Мат. Сб. Т. XI стр. 201.

Digitized by Google

Для всѣхъ цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ эта функція можетъ быть выражена формулою:

$$\overline{p}(u) = E\frac{u}{p} - E\frac{u-1}{p}$$

Не трудно видѣть, что сумма

$$S_{u=1}^{u=n} \theta(u)\overline{u}(n)$$

зависящая отъ функціи $\overline{u}(n)$, обращается въ $\Sigma_n \theta(d)$, слѣдовательно

$$S_{u=1}^{u=n} \theta(u)\overline{u}(n) = \sum_n \theta(d) = \sum_1^{\overline{n}} \theta(d) \qquad (5)$$

$$S_{u=1}^{u=m} \theta(u)\overline{u}(n) = \sum_{1,(n)}^{\overline{m}} \theta(d) = \sum_{1,(n)}^{m} \theta(d) \qquad (6)$$

Введеніе функціи $\overline{u}(n)$ значительно облегчаетъ вопросъ объ изученіи опредѣленныхъ числовыхъ интеграловъ по дѣлителямъ.

§ 3. **Числовой законъ, вытекающій изъ разсмотрѣнія числоваго интеграла:**

$$\sum_u \theta(d).\overline{d}(n) \qquad (7)$$

Взявъ числовой интегралъ по натуральнымъ числамъ выраженія (7) находимъ:

$$S_{u=1}^{u=n} \sum_u \theta(d).\overline{d}(n) = \theta(1)\overline{1}(n)E\frac{n}{1} + \theta(2)\overline{2}(n)E\frac{n}{2} +$$

$$+ \ldots \theta(\mu)\overline{\mu}(n)E\frac{n}{\mu} + \ldots =$$

$$= S_1^n \theta(u)\overline{u}(n) + S_1^{E\frac{n}{2}} \theta(u)\overline{u}(n) + \ldots + \qquad (8)$$

Digitized by Google

Не трудно видѣть, что функція $\bar{u}(n)$ обращается въ 1 только для дѣлителей числа n.

Выраженіе (8) на основаніи соотношенія (6) даетъ

Общій числовой законъ:

$$\sum_n \delta\theta(d) = \sum_1^n \theta(d) + \sum_1^{E\frac{n}{2}} \theta(d) + \sum_1^{E\frac{n}{3}} \theta(d) + \ldots \qquad (I)$$

Здѣсь числа $E\frac{n}{1}, E\frac{n}{2}, \ldots E\frac{n}{k}$ можно замѣнить числами $\frac{n}{1}, \frac{n}{2}$ и т. д.

Примѣры: Полагая $\theta(n)=1$, имѣемъ

$$\int(n) = \rho(n) + \bar{\rho}\left(\frac{n}{2}\right) + \bar{\rho}\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots \qquad (9)$$

Здѣсь $\bar{\rho}(k)$ означаетъ число дѣлителей цѣлаго числа n, не превосходящихъ k. Для означенія подобныхъ функцій мы будемъ сверху надъ знакомъ функціи ставить иногда черту. Такъ какъ функція $\bar{\rho}(k)$ зависитъ отъ двухъ аргументовъ n и k, то мы ее будемъ также обозначать въ видѣ $\bar{\rho}(k) = \rho(k,n)$.

Второй аргументъ n слѣдуетъ обозначать въ томъ случаѣ, когда онъ измѣняется или когда это указаніе необходимо.

2. Для $\theta(n)=n$ имѣемъ

$$n\rho(n) = \int(n) + \bar{\int}\left(\frac{n}{2}\right) + \bar{\int}\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots \qquad (10)$$

гдѣ $\bar{\int}(k)$ означаетъ сумму цѣлыхъ дѣлителей цѣлаго числа n, не превосходящихъ k.

Здѣсь

$$\bar{\int}(k) = \int(k,n)$$

Полагая въ послѣдней формулѣ $n=10$, имѣемъ:

Digitized by Google

$$10\rho(10)=\overline{f}(10)+\overline{f}(5)+\overline{f}(3)+2\overline{f}(2)+5\overline{f}(1)$$

Здѣсь

$$\overline{f}(10)=18,\ \overline{f}(5)=8,\ \overline{f}(3)=3,\ \overline{f}(2)=3,\ \overline{f}(1)=1$$

слѣдовательно

$$10.4=18+8+3+2.3+5.1=40.$$

§ 4. **Числовые законы, вытекающіе изъ разсмотрѣнія числоваго интеграла:**

$$F(n)=\mathbf{S}_{u=1}^{u=n}\sum_u \psi(d)\,\overline{d}\,(m) \qquad (11)$$

Для $m<n$ выраженіе (11) даетъ

$$F(n)=\psi(1)\,\overline{1}\,(m)\,E\frac{n}{1}\ \psi(2)\,\overline{2}\,(m)\,E\,\frac{n}{2}+\psi(3)\,\overline{3}\,(m)\,E\frac{n}{3}+\ldots.$$

$$=\mathbf{S}_1^n\,\psi(u)\,\overline{u}\,(m)+\mathbf{S}_1^{E\frac{n}{2}}\psi(u)\,\overline{u}\,(m)+\ldots \qquad (12)$$

Не трудно видѣть, что сумма членовъ первой строки даетъ выраженіе

$$\psi(d')E\left(\frac{n}{d'}\right)+\psi(d'')E\left(\frac{n}{d''}\right)+\ldots,$$

гдѣ d', d'' дѣлители цѣлаго числа m.

Такимъ образомъ первая строка даетъ выраженіе полнаго числоваго интеграла, взятаго для всѣхъ дѣлителей числа m вида

$$\sum_m \psi(d)E\frac{n}{d} \qquad (13)$$

Во второй суммѣ равенства (12) будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{S}_1^n\,\psi(u)\,\overline{u}\,(m)&=\sum_{(m)}^{n}\psi(d)\\ \mathbf{S}_1^{E\frac{n}{2}}\psi(u)\,\overline{u}(m)&=\sum_{(m)}^{E\frac{n}{2}}\psi(d)\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

слѣдовательно равенство (12) даетъ

Digitized by Google

Общій числовой законъ

$$\sum_{(m)} \psi(d) E\frac{n}{d} = \sum_{(m)}^{n} \psi(d) + \sum_{(m)}^{E\frac{n}{2}} \psi(d) + \sum_{(m)}^{E\frac{n}{3}} \psi(d) + \ldots \quad \text{(II)}$$

Выраженіе $\sum_{(m)}^{k} \psi(d)$ означаетъ сумму функцій $\psi(d)$, взятую для всѣхъ дѣлителей числа m, не превосходящихъ k.

Если положимъ $m=n$, то формула (II) обращается въ формулу (I).

§ 5. **Преобразованіе закона II.**

Законъ (II) можно легко преобразовать, опредѣляя выраженіе

$$Q(n) = \xi(1)F(n) + \xi(2)F\left(\frac{n}{2}\right) + \xi(3)F\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots \quad (15)$$

Допустивъ, что

$$\sum_{u} \xi(d) = \theta(u) \quad (16)$$

имѣемъ на основаніи уравненія (16)

$$\xi(1)E\frac{n}{1} + \xi(2)E\frac{n}{2} + \ldots = \mathrm{S}_{u=1}^{n} \theta(u) \quad (17$$

Формула (15) даетъ тождество

$$\sum_{m} \psi(d) \mathrm{S}_{1}^{E\frac{n}{d}} \theta(u) = \theta(1) \sum_{(m)}^{n} \psi(d) + \theta(2) \sum_{(m)}^{E\frac{n}{2}} \psi(d) +$$

$$+ \theta(3) \sum_{m}^{E\frac{n}{3}} \psi(d) + \ldots \quad \text{(III)}$$

или законъ

$$\sum_{m} \psi(d) \mathrm{S}_{1}^{E\frac{n}{d}} \theta(u) = \mathrm{S}_{1}^{n} \theta(u) \sum_{(m)}^{E\frac{n}{u}} \psi(d) \quad \text{(III')}$$

Digitized by Google

Справедливость этого закона вытекаетъ на основаніи слѣдующихъ соображеній.

Съ одной стороны имѣемъ:

$$Q(n)=\xi(1)F(n)+\xi(2)F\left(\frac{n}{2}\right)+\ldots.$$

$$=\xi(1)\sum_{(m)}\psi(d)E\frac{n}{d}+\xi(2)\sum_{(m)}\psi(d)E\frac{n}{2d}+\xi(3)\sum_{(m)}\psi(d)E\frac{n}{3d}+$$

$$+\xi(4)\sum_{m}\psi(d)E\frac{n}{4d}+\ldots$$

$$=\xi(1)\left[\sum_{(m)}^{n}\psi(d)+\sum_{(m)}^{E\frac{n}{2}}\psi(d)+\sum_{(m)}^{E\frac{n}{3}}\psi(d)+\ldots\right]$$

$$+\xi(2)\left[\sum_{(m)}^{E\frac{n}{2}}\psi(d)+\sum_{(m)}^{E\frac{n}{4}}\psi(d)+\ldots\right]$$

$$+\xi(3)\left[\sum_{(m)}^{E\frac{n}{3}}\psi(d)+\sum_{(m)}^{E\frac{n}{6}}\psi(d)+\ldots\right]$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Разсматривая это выраженіе, мы видимъ, что въ него входятъ функціи $\psi(d')$, $\psi(d'')\ldots$ гдѣ d', $d''\ldots$ суть дѣлители числа m. Отбирая этихъ множителей, мы находимъ, что

$$Q(n)=\psi 1\left[\xi 1E\frac{n}{1}+\xi(2)E\frac{n}{2}+\ldots\right]$$

$$+\psi(d')\left[\xi(1)E\frac{n}{d'}+\xi(2)E\frac{n}{2d'}+\ldots\right]$$

$$+\psi(d'')\left[\xi(1)E\frac{n}{d''}+\xi(2)E\frac{n}{2d''}+\ldots\right]$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

или по формулѣ (17)

Digitized by Google

$$Q(n)=\psi(1)\mathbf{S}_1^{n}\theta(u)+\psi(d')\,\mathbf{S}_1^{E\frac{n}{d'}}\theta(u)+\ldots$$

или

$$Q(n)=\sum_{(m)}\psi(d)\,\mathbf{S}_1^{E\frac{n}{d}}\theta(u) \qquad (a)$$

Съ другой стороны

$$Q(n)=\xi(1)\Big[\sum_{(m)}^{n}\psi(d)+\sum_{(m)}^{E\frac{n}{2}}\psi(d)+\sum_{(m)}^{E\frac{n}{3}}\psi(d)+\ldots\Big]$$

$$+\xi(2)\Big[\sum_{(m)}^{E\frac{n}{2}}\psi(d)+\sum_{(m)}^{E\frac{n}{4}}\psi(d)+\ldots\Big]$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

или

$$Q(n)=\xi(1)\sum_{(m)}^{n}\psi(d)+(\xi(1)+\xi(2))\sum_{(m)}^{E\frac{n}{2}}\psi(d)+$$

$$+\Big(\xi(1)+\xi(3)\Big)\sum_{m}^{E\frac{n}{3}}\psi(d)+\ldots$$

или

$$Q(n)=\theta(1)\sum_{(m)}^{n}\psi(d)+\theta(2)\sum_{(m)}^{E\frac{n}{2}}\psi(d)+\ldots \qquad (b)$$

Сравнивая два выраженія (a) и (b) для $Q(n)$, находимъ числовой законъ (III′).

Формула (III′), завися отъ двухъ произвольныхъ функцій $\theta(u)$ и $\psi(d)$, даетъ безчисленное множество частныхъ числовыхъ законовъ.

Частные числовые законы:

1. Полагая $\theta(u)=1$, $\psi(d)=1$, имѣемъ:

$$\sum_{(m)}E\frac{n}{d}=\mathbf{S}_1^{n}\sum_{(m)}^{E\frac{n}{u}}1$$

Digitized by Google

Означивъ черезъ $\rho(k, m)$ число дѣлителей цѣлаго числа m, не превосходящихъ k, имѣемъ:

$$\sum_m E\frac{n}{d} = \rho\left(E\frac{n}{1}, m\right) + \rho\left(E\frac{n}{2}, m\right) + \rho\left(E\frac{n}{3}, m\right) + \ldots (17)$$

Примѣръ. Для $m=6$, $n=10$, формула (17) даетъ

$$\sum_6 E\frac{10}{d} = \rho(10, 6) + \rho(5, 6) + \rho(3, 6) + 2\rho(2, 6) + 5\rho(1, 6)$$

или

$$\sum_6 E\frac{10}{d} = E\frac{10}{1} + E\frac{10}{2} + E\frac{10}{3} + E\frac{10}{6} = 19$$

$\rho(10, 6)=4$, $\rho(5, 6)=3$, $\rho(3, 6)=3$, $\rho(2, 6)=2$, $\rho(1, 6)=1$.

слѣдовательно

$$\rho(10, 6) + \rho(5, 6) + \rho(3, 6) + 2\rho(2, 6) + 5\rho(1, 6) =$$

$$= 4 + 3 + 3 + 2.2 + 5.1 = 19.$$

§ 6. **Различныя слѣдствія закона III.**

Полагая въ формулѣ (III)

$$\theta(u) = E\sqrt{u} - E\sqrt{u-1}.$$

имѣемъ:

$$\sum_m \psi(d) E\sqrt{\frac{n}{d}} = \sum_{(m)}^{E\sqrt{n}} \psi(d) + \sum_{(m)}^{E\frac{n}{2^2}} \psi(d) + \sum_{(m)}^{E\frac{n}{3^2}} \psi(d) + \ldots (IV)$$

Полагая въ формулѣ (III′) $m=n$, получаемъ

Общій числовой законъ:

$$\sum_n \mathfrak{S}_1^d \theta(u) = \mathfrak{S}_1^n \theta(u) \sum_n^{E\frac{n}{u}} 1$$

или

$$\sum_n \mathfrak{S}_1^d \theta(u) = \theta(1)\rho(n\ n) + \theta(2)\rho\left(E\frac{n}{2}\ n\right) + \theta(3)\rho\left(E\frac{n}{3}, n\right) + \ldots (V)$$

Digitized by Google

Законъ (V) можетъ быть прямо полученъ изъ разсмотрѣнія интеграла

$$\int_1^n \sum_u \theta(d)d(n), \tag{18}$$

Мы не останавливаемся на этомъ выводѣ, полагая, что онъ не представляетъ никакихъ затрудненій.

Уже въ простой формѣ законъ (V) даетъ множество частныхъ числовыхъ законовъ.

Приведемъ нѣсколько частныхъ видовъ закона (V).

1. Полагая въ формулѣ (V)

$$\theta(u)=E\sqrt{u}-E\sqrt{u-1}$$

имѣемъ

$$\sum_n E\sqrt{d}=\rho(n,n)+\rho\left(E\frac{n}{2^2},n\right)+\rho\left(E\frac{n}{3^2},n\right)+\ldots \tag{17}$$

2. Полагая $\theta(u)=E\sqrt[3]{u}-E\sqrt[3]{u-1}$, имѣемъ

$$\sum_n E\sqrt[3]{d}=\rho(n,n)+\rho\left(E\frac{n}{2^3},n\right)+\rho\left(E\frac{n}{3^3},n\right)+\ldots \tag{20}$$

Функція $\rho(k,n)$ означаетъ число дѣлителей цѣлаго числа n, не превосходящихъ k.

3. Для $\theta(u)=2(u)$, $3(u)$, $4(u)\ldots$ и т. д. имѣемъ законы

$$\sum_n E\frac{d}{2}=\rho\left(E\frac{n}{2},n\right)+\rho\left(E\frac{n}{4},n\right)+\rho\left(E\frac{n}{6},n\right)+\ldots$$

$$\sum_n E\frac{d}{3}=\rho\left(E\frac{n}{3},n\right)+\rho\left(E\frac{n}{6},n\right)+\rho\left(E\frac{n}{9},n\right)+\ldots \tag{21}$$

4. Для функціи $\theta(n)$, выражающей число простыхъ чиселъ, не превосходящихъ n, имѣемъ:

$$\sum_n \theta(d)=\rho\left(E\frac{n}{2},n\right)+\rho\left(E\frac{n}{3},n\right)+\rho\left(E\frac{n}{5},n\right)+\ldots \tag{22}$$

5. Полагая въ формулѣ (V)
$\theta(u)=l(u)$, имѣемъ:

Digitized by Google

$$\sum_n l\Pi(d)=l(1)\left(E\frac{n}{1},n\right)+l(2)\rho\left(E\frac{n}{2},n\right)+\ldots,$$

Откуда, переходя отъ логариѳмовъ къ числамъ, получаемъ

$$\Pi_n\left[\Pi(d)\right]=2^{\rho\left(E\frac{n}{2},n\right)}\cdot 3^{\rho\left(E\frac{n}{3},n\right)}\cdot 4^{\rho\left(E\frac{n}{4},n\right)}\ldots \quad (24)$$

Здѣсь $\Pi(d)=1.2.3\ldots d$, а знакъ $\Pi_n(\theta d)$ означаетъ, что берется произведеніе функцій $\theta(d)$ для всѣхъ дѣлителей цѣлаго числа n, такъ что напр.

$$\Pi_6\theta(d)=\theta(1)\ \theta(2)\ \theta(3)\ \theta(6)$$

Сравнивая показателей простаго числа 2 въ равенствѣ (24), получимъ

$$\sum_n E\frac{d}{2}+\sum_n E\frac{d}{2^2}+\sum_n E\frac{d}{3^2}+\ldots=$$

$$=\rho\left(E\frac{n}{2},n\right)+2\rho\left(E\frac{n}{4},n\right)+\rho\left(E\frac{n}{6},n\right)+\ldots$$

или

$$\sum_n E\frac{d}{2}+\sum_n E\frac{d}{2^2}+\sum_n E\frac{d}{2^3}+\ldots.$$

$$=O_2(2)\rho\left(E\frac{n}{2},n\right)+O_2(4)\rho\left(E\frac{n}{4},n\right)+\ldots=$$

$$=\mathbf{S}_{u=1}O_2(u)\rho\left(E\frac{n}{u},n\right) \quad (25)$$

гдѣ $O_2(u)$ означаетъ порядокъ простаго числа 2 въ разложеніи числа u на первоначальныхъ множителей, такъ что

$$O_2(2^\mu a^\alpha b^\beta)=\mu.$$

Такъ какъ

$$E\frac{d}{2}+E\frac{d}{2^2}+E\frac{d}{2^3}+\ldots=E\frac{Lg(d)}{Lg(2)}$$

то равенство (25) даетъ

Digitized by Google

$$\sum_n E\frac{Lgd}{Lg2}=\sum_{u=1}^{u=n} O_2(u)\rho\left(E\frac{n}{u},n\right) \qquad (25')$$

Примѣръ. Для $n=10$, формула (25) даетъ

$$\sum_{10} E\frac{d}{2}+\sum_{10} E\frac{d}{2^2}+\ldots=\rho(5,10)+2\rho(2,10)+$$
$$+\rho(1,10)+3\rho(1,10)+\rho(1,10).$$

Здѣсь

$$\sum_{10} E\frac{d}{2}=E\frac{10}{2}+E\frac{5}{2}+E\frac{2}{2}+E\frac{1}{2}=8$$
$$\sum_{10} E\frac{d}{4}=E\frac{10}{4}+E\frac{5}{4}+E\frac{2}{4}+E\frac{1}{4}=3$$
$$\sum_{10} E\frac{d}{8}=1.$$
$$\rho(5,10)=3,\ \rho(2,10)=2,\ \rho(1,10)=1.$$

слѣдовательно

$$8+3+1=3+2.2+1+3+1=12.$$

Сравнивая порядокъ или сумму показателей обѣихъ частей равенства (24), имѣемъ

$$\sum_n E\frac{Lgd}{Lg2}+\sum_n E\frac{Lgd}{Lg3}+\sum_n E\frac{Lgd}{Lg5}+\ldots=$$
$$=\rho\left(E\frac{n}{2},n\right)+\rho\left(E\frac{n}{3},n\right)+2\rho\left(E\frac{n}{4},n\right)+\ldots$$
$$=O(2)\rho\left(E\frac{n}{2},n\right)+O(3)\rho\left(E\frac{n}{3},n\right)+\ldots$$

или

$$\sum_n E\frac{Lgd}{Lg2}+\sum_n E\frac{Lgd}{Lg3}+\sum_n E\frac{Lgd}{Lg5}+\ldots$$
$$=\sum_n\left[\theta(d)+\theta(\sqrt{d})+\theta\sqrt[3]{d}+\ldots\right]=$$
$$=\sum_{u=1} O(u)\rho\left(E\frac{n}{u},n\right) \qquad (26)$$

Digitized by Google

гдѣ $O(u)$ означаетъ порядокъ числа u, такъ что

$$O(a^\alpha b^\beta c^\gamma)=\alpha+\beta+\gamma,$$

Уравненіе (24) можетъ быть также представлено въ видѣ

$$\begin{matrix} \Sigma E\frac{Lgd}{Lg2} & \Sigma E\frac{Lgd}{Lg3} & \Sigma E\frac{Lgd}{Lg5} \\ 2 \quad . & 3 \quad . & 5 \quad \ldots . = \end{matrix}$$

$$= 2^{\rho\left(E\frac{n}{2},\, n\right)} \cdot 3^{\rho\left(E\frac{n}{3},\, n\right)} \cdot 4^{\rho\left(E\frac{n}{4},\, n\right)} \ldots . \qquad (27)$$

Совершая надъ уравненіемъ (27) операцію прерывнаго логариѳмированія *), получимъ для совершенно произвольной функціи $\varphi(n)$

Общій числовой законъ (28)

$$\varphi(2)\sum_n E\frac{Lgd}{Lg2}+\varphi(3)\sum_n E\frac{Lgd}{Lg3}+\varphi(5)\sum_n E\frac{Lgd}{Lg5}+\ldots$$

$$=\varphi(2)\rho\left(E\frac{n}{2},n\right)+\varphi(3)\rho\left(E\frac{n}{3},n\right)+$$

$$+2\varphi(2)\rho\left(E\frac{n}{4},n\right)+\varphi(5)\rho\left(E\frac{n}{5},n\right)+$$

$$+\left(\varphi(2)+\varphi(3)\right)\rho\left(E\frac{n}{6},n\right)+\ldots \qquad (28)$$

или

$$\varphi(2)\sum_n E\frac{Lgd}{Lg2}+\varphi(3)\sum E\frac{Lgd}{Lg3}+\varphi(5)\sum E\frac{Lgd}{Lg5}+$$

$$=\mathfrak{S}_{u=2}\, L_\varphi(u)\rho\left(E\frac{n}{u},u\right) \qquad (28')$$

гдѣ функція $L_\varphi(u)$ для числа $u=a^\alpha b^\beta c^\gamma$ имѣетъ видъ:

$$L_\varphi(a^\alpha b^\beta c^\gamma)=\alpha\varphi(a)+\beta\varphi(b)+\gamma\varphi(c). \qquad (29)$$

---

*) *Бугаевъ.* Свойства одного числоваго интеграла по дѣлителямъ и его различныя примѣненія. Логариѳмическія числовыя функціи. Мат. Сб. Т. XIII. стр. 775.

Digitized by Google

§ 7. Другая форма закона (V).
Полагая въ формулѣ (V)

$$S_1^n \theta(u) = \psi(n),$$ находимъ:

$$\theta(1) = \psi(1)$$
$$\theta(2) = \psi(2) - \psi(1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\theta(n) = \psi(n) - \psi(n-1)$$

Законъ (V) приметъ видъ:

$$\sum_n \psi(d) = \psi(1)\rho(n, n) + \left(\psi(2) - \psi(1)\right)\rho\left(E\frac{n}{2}, n\right) + \ldots$$
$$\ldots + \left(\psi(k) - \psi(k-1)\right)\rho\left(E\frac{n}{k}, n\right) + \ldots \qquad (Va)$$

Замѣняя въ формулѣ (Va) функцію $\psi(d)$ функціей $\psi(E\sqrt{n})$, будемъ имѣть законъ:

$$\sum_n \psi(E\sqrt{d}) = \psi(1)\rho(n, n) + \left(\psi(2) - \psi 1\right)\rho\left(E\frac{n}{2^2}, n\right) +$$
$$+ \left(\psi(3) - \psi(2)\right)\rho\left(E\frac{n}{3^2}, n\right) + \ldots \qquad (Vb)$$

Точно также найдемъ законъ

$$\sum_n \psi(E\sqrt[3]{d}) = \psi(1)\rho(n, n) + \left(\psi(2) - \psi(1)\right)\rho\left(E\frac{n}{2^3}, n\right) + \ldots \quad (Vc)$$

Если положимъ въ формулѣ (Vb) $\psi(n) = \theta(n)$ гдѣ $\theta(n)$ означаетъ число простыхъ чиселъ, не превосходящихъ n, найдемъ законъ:

$$\sum_n \theta(E\sqrt{d}) = \rho\left(E\frac{n}{2^2}, n\right) + \rho\left(E\frac{n}{3^2}, n\right) + \rho\left(E\frac{n}{5^2}, n\right) + \ldots \quad (Vd)$$

Digitized by Google

§ 8. **Числовой законъ вытекающій изъ разсмотрѣнія выраженія**

$$\mathbf{S}_{u=1}^{u=n}\sum_{u}\psi(\delta)\,\overline{d}(m) \tag{30}$$

Выражая сумму (30), получаемъ

$$\psi(1)\mathbf{S}_{1}^{n}\overline{u}(m)+\psi(2)\mathbf{S}_{1}^{E\frac{n}{2}}\overline{u}(m)+\psi(3)\mathbf{S}_{1}^{E\frac{n}{3}}\overline{u}(m)+\ldots$$

$$=\overline{1}(m)\mathbf{S}_{1}^{n}\psi(u)+\overline{2}(m)\mathbf{S}_{1}^{E\frac{n}{2}}\psi(u)+\ldots$$

или

$$\psi(1)\rho(n,m)+\psi(2)\rho\left(E\frac{n}{2},m\right)+\psi(3)\rho\left(E\frac{n}{3},m\right)+\ldots=$$

$$=\sum_{(m)}\mathbf{S}_{1}^{E\frac{n}{d}}\psi(u) \tag{VI}$$

Полагая

$$\mathbf{S}_{1}^{n}\psi(u)=F(u),$$

мы можемъ законъ (VI) представить въ видѣ

$$\sum_{n}F\left(E\frac{n}{d}\right)=F(1)\rho(n,m)+$$

$$+\left(F(2)-F(1)\right)\rho\left(E\frac{n}{2},m\right)+\ldots \tag{VIa}$$

§ 9. **Числовой законъ, вытекающій изъ разсмотрѣнія числовой суммы:**

$$\mathbf{S}_{u=1}^{n}\sum_{u}\theta(\delta)\psi(d)\overline{d}(m) \tag{31}$$

выразится въ видѣ

Digitized by Google

$$\sum_m \psi(d) \mathbf{S}_1^{E\frac{n}{d}} \theta(d) = \mathbf{S}_{u=1}^{u=n} \theta(u) \sum_{(m)}^{E\frac{n}{u}} \psi(d) \qquad \text{(III}$$

Это оказывается тотъ же самый законъ, который мы уже получили въ формулѣ (III′).

Законъ (III′) для произвольной функціи $F(n)$ можетъ быть представленъ въ видѣ

$$\sum_m \psi(d) F\left(E\frac{n}{d}\right) = F(1)\sum_{(m)}^{n} \psi(d) + \left(F(2) - F[1]\sum_{(m)}^{E\frac{n}{2}} \psi d + \right.$$

$$+ \left(F(3) - F(2)\right)\sum_{(m)}^{E\frac{n}{3}} \psi(d) + \ldots \qquad \text{(III″)}$$

§ 10. **Числовой законъ, вытекающій изъ разсмотрѣнія суммы:**

$$\mathbf{S}_{u=1}^{u=n} \sum_u \theta(\delta)\psi(d)\overline{d}(n) \qquad (32)$$

Выражая двумя способами эту сумму, находимъ:

$$\mathbf{S}_{u=1}^{n} \sum_u \theta(\delta)\psi(d)\overline{d}(n) =$$

$$= \theta(1)\mathbf{S}_1^{E\frac{n}{1}} \psi(u)\overline{u}(n) + \theta(2)\mathbf{S}_1^{E\frac{n}{2}} \psi(u)\overline{u}(n) + \ldots$$

$$= \psi(1)\overline{1}(n)\mathbf{S}_1^{E\frac{n}{1}} \theta(u) + \psi(2)\overline{2}(n)\mathbf{S}_1^{E\frac{n}{2}} \theta(u) + \ldots$$

или

$$\theta(1)\sum_{(n)}^{n} \psi(d) + \theta(2)\sum_{(n)}^{E\frac{n}{2}} \psi(d) + \theta(3)\sum_{(n)}^{E\frac{n}{3}} \psi(d) + \ldots =$$

$$= \sum_n \psi(d)\mathbf{S}_1^{E\frac{n}{d}} \theta(u)$$

Digitized by Google

Такъ какъ $\frac{n}{d}=\delta$ и такъ какъ δ и d два дополнительныхъ дѣлителя, то послѣдній законъ окончательно можетъ быть выраженъ въ видѣ

$$\sum_n \psi(\delta) \mathop{\mathrm{S}}_{u=1}^{u=d} \theta(u) = \mathop{\mathrm{S}}_{u=1}^{u=n} \theta(u) \sum_{(n)}^{E\frac{n}{u}} \psi(d) \qquad \text{(VII)}$$

Не трудно видѣть, что эта формула прямо получается изъ формулы (III), если въ ней положимъ $m=n$.

Полагая $\mathop{\mathrm{S}}_{1}^{n} \theta(u)=F(u)$ и принимая во вниманіе, что δ и d дополнительные дѣлители, мы можемъ законъ (VII) получить въ видѣ:

$$\sum_n \psi(\delta)F(d)=F(1)\sum_{(n)}^{E\frac{n}{1}}\psi(d)+\Big(F(2)-F(1)\Big)\sum_{(n)}^{E\frac{n}{2}}\psi(d)+\ldots$$

$$=\psi 1\sum_{(n)}^{E\frac{n}{1}}F(d)+\Big(\psi(2)-\psi(1)\Big)\sum_{(n)}^{E\frac{n}{2}}F(d)+\ldots \qquad \text{(VIII)}$$

Положивъ $\psi(n)=n, F(n)=E\sqrt{n}$, имѣемъ законъ

$$\sum_n \delta E(\sqrt{d})=\sum_{(n)}^{n} d+\sum_{(n)}^{E\frac{n}{2^2}} d+\sum_{(n)}^{E\frac{n}{3^2}}(d)+\ldots$$

$$=\sum_{(n)}^{n} E\sqrt{d}+\sum_{(n)}^{E\frac{n}{2}} E\sqrt{d}+\sum_{(n)}^{E\frac{n}{3}} E\sqrt{d}\ldots. \qquad \text{(33)}$$

Означая черезъ $\int(k,n)$ сумму дѣлителей цѣлаго числа n, не превосходящихъ k, получаемъ законъ:

$$\sum \delta E\sqrt{d}=\int(n,n)+\int\left(E\frac{n}{2^2},n\right)+\int\left(E\frac{n}{3^2},n\right)+\ldots$$

$$=\sum_{(n)}^{n} E\sqrt{d}+\sum_{(n)}^{E\frac{n}{2}} E\sqrt{d}+\sum_{(n)}^{E\frac{n}{3}} E\sqrt{d}+\ldots \qquad \text{(34)}$$

Digitized by Google

Примѣръ. Полагая въ формулѣ (34) $n=10$, имѣемъ

$$\sum_{10} \delta E\sqrt{d}=1E\sqrt{10}+2E\sqrt{5}+5E\sqrt{2}+10E\sqrt{1}=22$$

$$\int(10, 10)=1+2+5+10=18$$

$$\int\left(E\frac{10}{2^2}, 10\right)=\int(2, 10)=1+2=3.$$

$$\int\left(E\frac{10}{3^2}, 10\right)=\int(1, 10)=1.$$

слѣдовательно

$$\int(10, 10)+\int\left(E\frac{10}{2^2}, 10\right)+\int\left(E\frac{10}{3^2}, 10\right)=22.$$

Точно также

$$\sum_{(10)}^{10} E\sqrt{d}=E\sqrt{1}+E\sqrt{2}+E\sqrt{5}+E\sqrt{10}=7.$$

$$\sum_{(10)}^{E\frac{10}{2}} E\sqrt{d}=E\sqrt{1}+E\sqrt{2}+E\sqrt{5}=4.$$

$$\sum_{(10)}^{E\frac{10}{3}} E\sqrt{d}=E\sqrt{1}+E\sqrt{2}=2.$$

$$\sum_{(10)}^{E\frac{10}{4}} E\sqrt{d}=2, \quad \sum_{10}^{E\frac{10}{5}} E\sqrt{d}=2.$$

и такимъ образомъ

$$S_{u=1}^{10} \sum_{(10)}^{E\frac{10}{u}} E\sqrt{d}=22.$$

Полагая въ формулѣ (VII)

$$\psi(\delta)=1.$$

Digitized by Google

получимъ формулу

$$\sum_n \mathbb{S}_{u=1}^{d} \theta(u) = \mathbb{S}_1^n \theta(u) \sum_{(n)}^{E\frac{n}{u}} 1$$

Такъ какъ

$$\sum_n^{E\frac{n}{u}} 1 = \rho\left(E\frac{n}{u}, n\right)$$

то

$$\sum_n \mathbb{S}_1^d \theta(u) = \theta(1)\rho\left(\frac{n}{1}, n\right) + \theta(2)\rho\left(E\frac{n}{2}, n\right) + \ldots$$

Полагая

$$\theta(u) = \psi(E\sqrt{u}) - \psi(E\sqrt{u-1}) \text{ и } \psi(0) = 0$$

будемъ имѣть

$$\sum_n \mathbb{S}_1^{E\sqrt{d}} \psi(u) = \psi(1)\rho\left(\frac{n}{1}, n\right) + \psi(2)\rho\left(E\frac{n}{2^2}, n\right) +$$

$$+ \psi(3)\rho\left(E\frac{n}{3^2}, n\right) + \ldots$$

Полагая

$$\mathbb{S}_1^u \psi(u) = F(u),$$

находимъ

$$\sum_n F(E\sqrt{d}) = F(1)\rho\left(E\frac{n}{1}, n\right) + \left(F(2) - F1\right)\rho\left(E\frac{n}{2^2}, n\right) +$$

$$+ \left(F(3) - F(2)\right)\rho\left(E\frac{n}{3^2}, n\right) + \ldots \qquad \text{(A)}$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ:

Digitized by Google

$$\sum_n F(E\sqrt[3]{\bar{d}}) = F(1)\rho\left(E\frac{n}{1}, n\right) +$$

$$+\left(F(2) - F(1)\right)\rho\left(E\frac{n}{2^3}, n\right) + \ldots$$

или

$$\sum_n F(E\sqrt[3]{\bar{d}}) = F(1)\rho\left(E\frac{n}{1}, n\right) +$$

$$+\mathop{\mathrm{S}}_{u=2}^{E\sqrt[3]{n}}\left(F(u) - F(u-1)\right)\rho\left(E\frac{n}{u^3}, n\right). \qquad (B)$$

Если $F(n) = \theta(n)$, гдѣ $\theta(n)$ означаетъ число простыхъ чиселъ, не превосходящихъ n, формула (A) принимаетъ видъ

$$\sum_n \theta(E\sqrt{\bar{d}}) = \rho\left(E\frac{n}{2^2}, n\right) + \rho\left(E\frac{n}{3^2}, n\right) + \rho\left(E\frac{n}{5^2}, n\right) + \ldots \quad (C)$$

или

$$\sum_n \theta(E\sqrt{\bar{d}}) = \sum \rho\left(E\frac{n}{a^2}, n\right)$$

гдѣ сумма во второй части равенства распространяется на всѣ простыя числа a, начиная съ 2.

§ 11. **Числовые законы, вытекающіе изъ разсмотрѣнія суммы:**

$$S(n) = \mathop{\mathrm{S}}_{u=1}^{u=n}\sum \bar{\sigma}(n)\theta(\delta).\bar{d}(n)\psi(d)$$

Не трудно видѣть, что

$$S(n) = \bar{1}(n)\theta(1)\mathop{\mathrm{S}}_{1}^{E\frac{n}{1}}\psi(u)\bar{u}(n) + \bar{2}(n)\theta(2)\mathop{\mathrm{S}}_{1}^{E\frac{n}{2}}\psi(u)\bar{u}(n) + \ldots.$$

$$= \bar{1}(n)\psi(1)\mathop{\mathrm{S}}_{1}^{E\frac{n}{1}}\theta(u)\bar{u}(n) + \bar{2}(n)\psi(2)\mathop{\mathrm{S}}_{1}^{E\frac{n}{2}}\theta(u)\bar{u}(n) + \ldots.$$

откуда получается

Digitized by Google

Общій числовой законъ:

$$\sum_{(n)} \theta(\delta) \sum_{(n)}^{d} \psi(d) = \sum_{(n)} \psi(\delta) \sum_{(n)}^{d} \theta(d) \qquad (IX)$$

Для $\theta(n)=n$, $\psi(n)=n^2$, имѣемъ

$$\sum_{(n)} \delta \sum_{(n)}^{d} d^2 = \sum_{n} \delta^2 \sum_{(n)}^{d} d \qquad (35)$$

Означивъ черезъ $\xi_1(k, n)$, $\xi_2(k, n)$ функціи, выражающія сумму дѣлителей и сумму квадратовъ дѣлитетей цѣлаго числа n, не превосходящихъ k, мы получимъ законъ (35) въ видѣ:

$$\sum_{(n)} \delta \xi_2(d, n) = \sum_{(n)} \delta^2 \xi_1(d, n)$$

Примѣръ. Для $n=6$ имѣемъ:

$$\Sigma_6 \delta \xi_2(d, 6) = 1\xi_2(6, 6) + 2\xi_2(3, 6) + 3\xi_2(2, 6) +$$

$$+ 6\xi_2(1, 6) = 1[1^2 + 2^2 + 3^2 + 6^2] + 2[1^2 + 2^2 + 3^2) +$$

$$+ 3(1 + 2^2) + 6 . 1 = 99.$$

$$\Sigma_6 \delta^2 \xi_1(d, 6) = 1^2 \xi_1(6, 6) + 2^2 \xi_1(3, 6) + 3^2 \xi_1(2, 6) +$$

$$+ 6^2 \xi_1(1, 6) = 1^2[1 + 2 + 3 + 6] + 2^2[1 + 2 + 3] +$$

$$+ 3^2[1 + 2] + 6^2 = 99.$$

§ 12. **Числовые законы, вытекающіе изъ разсмотрѣнія суммъ, зависящихъ отъ функцій $\overline{u}$ (n) болѣе сложнаго вида.**

Можно при разсмотрѣніи суммъ замѣнять функцію $\overline{u}$ (n) функціей болѣе сложнаго вида, то есть такой функціей, которая содержитъ элементы u и n въ болѣе сложномъ видѣ.

Общее выраженіе такой функціи можетъ быть въ видѣ $\overline{\xi(u)}(f(n))$, гдѣ въ функціи $\overline{u}(n)$ вмѣсто элемента u входитъ $\xi(u)$ и элемента n функція $f(n)$. Чтобы остановить вниманіе на болѣе простомъ случаѣ, разсмотримъ законъ, вытекающій изъ разсмотрѣнія суммы

Digitized by Google

$$F(n)=\mathbf{S}_{u=1}^{u=n}\sum_{n}\theta(d)\,\overline{(d+1)}\,(n) \qquad (36)$$

Положимъ, что $\theta(d)=\chi(d+1)$ и разсмотримъ сумму

$$F(n)=\mathbf{S}_{1}^{n}\sum_{n}\chi(d+1)\,\overline{(d+1)}\,(n) \qquad (36)$$

Сумма (37) даетъ:

$$F(n)=\chi(2)\,\overline{2}\,(n)\,E\frac{n}{1}+\chi(3).\overline{3}(n)E\frac{n}{2}+\ldots.$$

$$=\mathbf{S}_{u=1}^{n}\chi(u+1)\,\overline{(u+1)}\,(n)+\mathbf{S}_{1}^{E\frac{n}{2}}\chi(u+1)\overline{(u+1)}\,(n)+\ldots \qquad (38)$$

Не трудно видѣть, что первая часть равенства даетъ

$$\overline{\sum}_{2,(n)}^{n}\chi(d)\,E\frac{n}{d-1} \qquad (39)$$

гдѣ въ нижнемъ предѣлѣ входитъ 2, а въ верхнемъ n. Предѣлы указываютъ, что сумма по дѣлителямъ числа n распространяется на всѣхъ дѣлителей числа n, заключающагося въ промежуткѣ между 2 и n.

Для вычисленія второй части равенства (38) замѣтимъ, что вообще

$$\mathbf{S}_{1}^{k}\chi(u+1)\overline{(u+1)}(n)=\chi(2)\,\overline{2}\,(n)+\chi(3).\,\overline{3}\,(n)+$$

$$+\ldots+\chi(k+1)\overline{(k+1)}(n)=\overline{\sum}_{2}^{1+k}\chi(d)=$$

$$\sum_{1}^{1+k}\chi(d)-\chi(1). \qquad (40)$$

Замѣняя всѣ члены второй части суммы (38) выраженіями (40), найдемъ

Digitized by Google

Общій числовой законъ:

$$\sum_{2}^{n+1}\chi(d)E\frac{n}{d-1}+n\chi(1)=$$

$$=\sum_{1}^{n+1}\chi(d)+\sum_{1}^{1+E\frac{n}{2}}\chi(d)+\sum_{1}^{1+E\frac{n}{3}}\chi(d)+\ldots$$

или

$$\sum_{2}^{n}\chi(d)E\frac{n}{d-1}+n\chi(1)=\mathbf{S}_{u=1}^{u=n}\sum_{1}^{1+E\frac{n}{u}}\chi(d) \qquad (X)$$

Для $\chi(d)=d$; имѣемъ:

$$\sum_{2}^{n}dE\frac{n}{d-1}+n=\mathbf{S}_{1}^{n}\sum_{1}^{E\frac{n}{u}+1}d \qquad (41)$$

или

$$\sum_{,}^{n}dE\frac{n}{d-1}+n=\int(1+n,n)+\int\left(1+E\frac{n}{2},n\right)+$$

$$+\int\left(1+E\frac{n}{3},n\right)+\ldots+\int\left(1+E\frac{n}{n},n\right) \qquad (42)$$

Для $n=10$ имѣемъ:

$$\sum_{2,(10)}^{10}dE\frac{10}{d-1}+n=2E\frac{10}{1}+5E\frac{10}{4}+10E\frac{10}{9}+10=50.$$

Вторая часть равенства даетъ:

$$\int(11,10)+\int(6,10)+\int(4,10)+\int(3,10)+\int(3,10)+5\int(2,10)=$$

$$=(1+2+5+10)+(1+2+5)+3(1+2)+5(1+2)=$$

$$=18+8+9+15=50.$$

13. Числовые законы, вытекающіе изъ разсмотрѣнія суммы

$$\Phi(n)=\mathbf{S}_{u=1}^{u=n}\sum_{u}\theta(\delta)\overline{(d+1)}(n) \qquad (43)$$

Digitized by Google

Замѣняя $\psi(n)$ функціею $\chi(n+1)$ и развертывая сумму

$$\Phi(n)=\sum_1^n \chi(\delta+1)\,\overline{(d+1)}(n) \qquad (44)$$

имѣемъ:

$$\Phi(n)=\overline{2}(n)\sum_1^n \chi(u+1)+\overline{3}(n)\sum_1^{E\frac{n}{2}} \chi(u+1)+\ldots. \qquad (45)$$

$$=\chi(2)\sum_1^n \overline{(u+1)}(n)+\chi(3)\sum_1^{E\frac{n}{2}} \overline{(u+1)}(n)+$$

$$+\ldots\chi(n+1)\sum_1^{E\frac{n}{n}} \overline{(u+1)}(n)$$

Первая сумма даетъ:

$$\sum_{2,(n)}^n \sum_{u=1}^{u=E\frac{n}{d-1}} \chi(u+1) \qquad (45)$$

Если принять во вниманіе, что

$$\sum_1^{E\frac{n}{k}} \overline{(u+1)}(n)=\overline{2}(n)+\overline{3}(n)+\ldots+\left(\overline{E\,\frac{n}{k}+1}\right)(n)=$$

$$=\sum_{(n)}^{1+E\frac{n}{k}} 1-\overline{1}(n)=\varrho\left(1+E\frac{n}{k},\,n\right)-1.$$

то будемъ имѣть на основаніи уравненія (45)

$$F(n)=\sum_{2,(n)}^n \sum_{u=1}^{u=E\frac{n}{d-1}} \chi(u+1)=$$

$$=\chi(2)\varrho(1+n,\,n)+\chi(3)\varrho\left(1+E\frac{n}{2},\,n\right)+\ldots$$

$$-[\chi(2)+\chi(3)+\ldots+\chi(n+1)]$$

Digitized by Google

Замѣняя $\chi(n+1)$ черезъ $\theta(n)$, получимъ окончательно

Общій числовой законъ:

$$\sum_{2,(n)}^{n} \mathbf{S}_{1}^{E\frac{n}{d-1}} \theta(u) + \mathbf{S}_{1}^{n} \theta(u) =$$

$$= \theta(1)\rho\left(1+E\frac{n}{1}, n\right) + \theta(2)\rho\left(1+E\frac{n}{2}, n\right) +$$

$$+ \theta(3)\rho\left(1+E\frac{n}{3}, n\right) + \ldots + \theta(n)\rho\left(1+E\frac{n}{n}, n\right).$$

Полагая $\mathbf{S}_{1}^{n} \theta(u) = F(n)$, имѣемъ числовой законъ въ видѣ

$$\sum_{2,(n)}^{n} F\left(E\frac{n}{d-1}\right) + F(n) = F(1)\rho(1+n, n) +$$

$$\left(F(2)-F(1)\right)\rho\left(1+E\frac{n}{2}, n\right) + \left(F(3)-F(2)\right)\rho\left(1+E\frac{n}{3}, n\right) +$$

$$\ldots + \left(F(n)-F(n-1)\right)\rho\left(1+E\frac{n}{u}, n\right) \qquad (XI)$$

Положивъ $F(n) = E\sqrt{n}$, получимъ числовой законъ

$$\sum_{2}^{n} E\sqrt{\frac{n}{d-1}} + E\sqrt{n} = \rho(1+n, n) + \rho\left(1+E\frac{n}{2^2}, n\right) +$$

$$+ \rho\left(1+E\frac{n}{3^2}, n\right) + \ldots + \rho\left(1+E\frac{n}{(E\sqrt{n})^2}, n\right) \qquad (46)$$

Примѣръ. Для $n=10$ имѣемъ:

$$\sum_{2}^{n} E\sqrt{\frac{n}{d-1}} + E\sqrt{n} = E\sqrt{\frac{10}{1}} + E\sqrt{\frac{10}{4}} + E\sqrt{\frac{10}{9}} + E\sqrt{10} =$$

$$= 3+1+1+3 = 8.$$

Вторая часть даетъ

Digitized by Google

$$\rho(1+n, n)+\rho\left(1+E\frac{n}{2^2}, n\right)+\ldots=$$

$$=\rho(11, 10)+\rho(3, 10)+\rho(2, 10)=4+2+2=8.$$

Мы такимъ образомъ видимъ, что изученіемъ общихъ выраженій, зависящихъ отъ функцій $\overline{u}(n)$ открывается обширное поле для изслѣдованій опредѣленныхъ числовыхъ интеграловъ по дѣлителямъ.

§ 14, **Числовой законъ, вытекающій изъ разсмотрѣнія суммы**

$$\Phi(n)=\mathbf{S}_{u=1}^{u=n}\sum_{n}\psi(d)d^2(n). \qquad (47)$$

Съ одной стороны функція $\Phi(n)$ выражается равенствомъ:

$$\Phi(n)=\psi(1)\overline{1}^2(n)E\frac{n}{1}+\psi(2)\overline{2}^2(n)E\frac{n}{2}+\ldots$$

Не трудно видѣть, что въ этой суммѣ появятся члены только тогда, когда въ рядѣ чиселъ

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ldots n^2 \qquad (49)$$

появятся дѣлители числа n.

Чтобъ судить о числѣ этихъ членовъ, разложимъ число n на двухъ множителей вида

$$n=a^\alpha b^\beta c^\gamma=\left(a^{E\frac{\alpha}{2}}\ b^{E\frac{\beta}{2}}\ c^{E\frac{\gamma}{2}}\right)^2 a^{\alpha-2E\frac{\alpha}{2}}\ b^{\beta-2E\frac{\beta}{2}}\ c^{\gamma-2E\frac{\gamma}{2}}$$

и означимъ чрезъ n_2' число $a^{E\frac{\alpha}{2}}\ b^{E\frac{\beta}{2}}\ c^{E\frac{\gamma}{2}}$,

такъ что

$$n=n_2'^2\ r_2(n) \qquad (50)$$

гдѣ $r_2(n)=a^{\alpha-2E\frac{\alpha}{2}}\ b^{\beta-2E\frac{\beta}{2}}\ c^{\gamma-2E\frac{\gamma}{2}}$

Digitized by Google

Не трудно видѣть, что въ рядѣ (49) появится столько дѣлителей числа n, сколько дѣлителей у числа n_2' и слѣдовательно сумма (47) выразится въ видѣ

$$\Phi(n)=\sum_{n_2'}\psi(d^2)E\frac{n}{d^2}$$

гдѣ сумма распространяется на всѣхъ дѣлителей цѣлаго числа n_2'.

Съ другой стороны функція $\Phi(n)$ можетъ быть выражена въ видѣ

$$\Phi(n)=\mathrm{S}\psi(u)\overline{u}^2(n)+\mathrm{S}_1^{E\frac{n}{2}}\psi(u)\overline{u}^2(n)+\ldots$$

Очевидно, что

$$\mathrm{S}_1^{k}\psi(u)\overline{u}^2(n)=\sum_{(n_2')}^{E\sqrt{k}}\psi(d^2)$$

Такимъ образомъ

$$\Phi(n)=\sum_{(n_2')}^{E\sqrt{n}}\psi(d^2)+\sum_{(n_2)}^{E\sqrt{\frac{n}{2}}}\psi(d^2)+\ldots \qquad (52)$$

Сравнивая выраженія (51) и (52) получаемъ,

Общій числовой законъ: (XII)

$$\sum_{(n_2')}\psi(d^2)E\frac{n}{d^2}=\sum_{(n_2')}^{E\sqrt{n}}\psi(d^2)+\sum_{(n_2')}^{E\sqrt{\frac{n}{2}}}\psi(d^2)+\ldots$$

или

$$\sum_{(n_2')}\psi(d^2)F\frac{n}{d^2}=\mathrm{S}_{u=1}^{n}\sum_{(n_2')}^{E\sqrt{\frac{n}{u}}}\psi(d^2) \qquad (XII)$$

Digitized by Google

Замѣняя $\psi(d^2)$ черезъ $\theta(d)$ имѣемъ

$$\sum_{n_2'} \theta(d) E\frac{n}{d^2} = \mathbf{S}_1^n \sum_{(n_2')}^{E\sqrt{\frac{n}{u}}} \theta(d)$$

Примѣръ. Для $\theta(d)=d$, $n=12$, имѣемъ

$$n_2'=12_2'=2,$$

слѣдовательно

$$\sum_{n_2'} \theta(d) E\frac{n}{d^2} = \sum_2 dE\frac{12}{d} = 1E\frac{12}{1}+2E\frac{12}{2^2}=18.$$

$$\mathbf{S}_1^n \sum_{(n_2')}^{E\sqrt{\frac{n}{u}}} \theta(d) = \int(3,2)+\int(2,2)+\int(2,2)+9\int(1,2)=$$

$$=3+3+3+9=18.$$

$\int(k, n)$ означаетъ сумму дѣлителей цѣлаго числа n, не превосходящихъ k.

Законъ (XII) можетъ быть выраженъ въ другой формѣ.

Полагая

$$n'_2=m,\ n=m^2h_1,$$

гдѣ h_1 любое первичное число, имѣемъ

$$\sum_{n_2'} \theta(d) E\frac{n}{d^2} = \sum_m \theta(d) E\frac{h_1 m^2}{d} =$$

$$=\sum_m \theta(d) h_1 \delta^2 = h_1 \sum_m \delta^2\theta(d)$$

Законъ (XII) приметъ видъ:

$$h_1 \sum_m \delta^2\theta(d) = \mathbf{S}_{u=1}^{u=h_1 m} \sum_{(m)}^{E\sqrt{\frac{h_1 m^2}{u}}} \theta(d) \qquad (XII')$$

Digitized by Google

Для $h_1=1$, имѣемъ:

$$\sum_n \varepsilon^2\theta(d)=\mathbf{S}_1^{n^2}\sum_{(n)}^{E\frac{n}{\sqrt{u}}}\theta(d) \qquad (\text{XII}'')$$

§ 15. **Числовой законъ, вытекающій изъ разсмотрѣнія суммы:**

$$F(n)=\mathbf{S}_{u=1}^{u=n}\sum_n \psi(d)\,\bar{d}^2(n)$$

Съ одной стороны

$$F(n)=\psi(1)\bar{1}^2(n)\,E\frac{n}{1}+\psi(2)\,\bar{2}^2(n)\,E\frac{n}{2}+\ldots \qquad (53)$$

Не трудно видѣть, что въ этой суммѣ появляются только члены тогда, когда въ рядѣ чиселъ

$$1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ldots n^3 \qquad (54)$$

появляются дѣлители числа n.

Чтобы судить о числѣ этихъ чиселъ, разложимъ число n на два множителя вида:

$$n=a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots=(a^{E\frac{\alpha}{3}}\,b^{E\frac{\beta}{3}}\,c^{E\frac{\gamma}{3}})^3\,a^{\alpha-3E\frac{\alpha}{3}}\ldots.$$

и означимъ чрезъ n_3' число $a^{E\frac{\alpha}{3}}\,b^{E\frac{\beta}{3}}\,c^{E\frac{\gamma}{3}}\ldots.$

такъ что

$$n=n_3'^3.r_3(n)$$

гдѣ

$$r_3(n)=a^{\alpha-3E\frac{\alpha}{3}}\,b^{\beta-3E\frac{\beta}{3}}\,c^{\gamma-3E\frac{\gamma}{3}}$$

Очевидно, что число $r_3(n)$ есть вторичное число, то есть число, не дѣлящееся на кубъ.

Не трудно видѣть, что въ рядѣ (54) появится столько дѣлителей числа n, сколько дѣлителей у числа n'_3 и слѣдовательно равенство (53) выразится въ видѣ:

Digitized by Google

$$F(n)=\sum_{n_3'}\psi(d^3)\,E\frac{n}{d^3} \qquad (55)$$

Съ другой стороны функція $F(n)$ можетъ быть выражена въ видѣ

$$F(n)=\mathbf{S}_1^{n}\psi(u)\bar{u}^3(n)+\mathbf{S}_1^{E\frac{n}{2}}\psi(u)\,\bar{u}^3(n)+\ldots$$

Такъ какъ

$$\mathbf{S}_1^{k}\psi(u)\bar{u}^3(n)=\sum_{(n_3')}^{E\sqrt[3]{k}}\psi(d^3) \qquad (56)$$

то

$$F(n)=\sum_{(n_3')}^{E\sqrt[3]{n}}\psi(d^3)+\sum_{(n_3')}^{E\sqrt[3]{\frac{n}{2}}}\psi(d^3)+\ldots \qquad (57)$$

Сравнивая равенства (55) и (57), получаемъ числовой законъ:

$$\sum_{(n_3')}\psi(d^3)\,E\frac{n}{d^3}=\mathbf{S}_1^{n}\sum_{(n_3')}^{E\sqrt[3]{\frac{n}{u}}}\psi(d^3) \qquad (\text{XIII})$$

Законъ этотъ пріемами, изложенными въ предыдущемъ параграфѣ, можетъ быть для всякаго числа n и для всякаго вторичнаго числа h_2 приведемъ къ виду:

$$h_2\sum\delta^3\theta(d)=\mathbf{S}_{u=1}^{h_2n^3}\sum_{(n)}^{E\sqrt[3]{\frac{h_2n^3}{u}}}\theta(d) \qquad (\text{XIII}')$$

Для $h_2=1$ законъ принимаетъ видъ:

$$\sum\delta^3\theta(d)=\mathbf{S}_{u=1}^{n^3}\sum_{(n)}^{E\sqrt[3]{\frac{n^3}{u}}}\theta(d) \qquad (\text{XIII}'')$$

Digitized by Google

§ 16. **Числовой законъ, вытекающій изъ разсмотрѣнія суммы:**

$$F(n)=\mathbf{S}_{u=1}^{n}\sum_{u}\overline{\sqrt{d}}\,(n) \tag{58}$$

Замѣтимъ, что функція $\overline{u}\,(n)$ для ирраціональнаго числа u обращается въ нуль.

Сумма (58) даетъ съ одной стороны

$$F(n)=\mathbf{S}_{1}^{n}\overline{\sqrt{u}}(n)+\mathbf{S}_{1}^{E\frac{n}{2}}\overline{\sqrt{u}}(n)+\ldots=$$

$$\rho(E\sqrt{n},n)+\rho\left(E\sqrt{\frac{n}{2}},\,n\right)+\ldots \tag{59}$$

Съ другой стороны

$$F(n)=\sum_{n}E\frac{n}{d^2} \tag{60}$$

Сравнивая формулы (59) и (60), получимъ числовой законъ

$$\sum_{n}E\frac{n}{d^2}=\mathbf{S}_{u=1}^{n}\rho\left(E\sqrt{\frac{n}{u}},n\right)$$

Для $n=10$ будемъ имѣть:

$$E\frac{10}{1}+E\frac{10}{2^2}=\rho(3,\,10)+\rho(2,\,10)+8=12.$$

§ 17. **Числовой законъ, вытекающій изъ разсмотрѣнія суммы**

$$F(n)=\mathbf{S}_{u=1}^{u=n}\sum_{u}\overline{u}\,(E\sqrt{n})\theta(d) \tag{62}$$

Вычисляя двумя способами сумму (62), мы получимъ законъ

$$\sum_{n}\psi(d)E\left(\frac{n^2+a}{d}\right)=\sum_{(n)}^{E\frac{n^2+a}{1}}\psi(d)+\sum_{(n)}^{E\frac{n^2+a}{2}}\psi(d)+\ldots \tag{XIV}$$

Digitized by Google

гдѣ число a есть постоянное количество, удовлетворяющее условію

$$a \leqq 2E\sqrt{n}$$

Для случая $a=0$, имѣемъ:

$$\sum_n \psi d\, E\left(\frac{n^2}{d}\right) = \sum_n \psi(d)\delta^2 d = n\sum_n \delta\psi(d)$$

Такимъ образомъ законъ (XIV) принимаетъ видъ:

$$n\sum_{(n)} \delta\theta(d) = \sum_{(n)}^{E\frac{n^2}{1}} \theta(d) + \sum_{(n)}^{E\frac{n^2}{2}} \theta(d) + \sum_{(n)}^{E\frac{n^2}{3}} \theta d + \ldots$$

или

$$n\sum_{(n)} \delta\theta(d) = \mathbf{S}_{u=1}^{u=n^2} \sum_{(n)}^{E\frac{n^2}{u}} \theta(d) \qquad \text{(XIV')}$$

Для $\theta(d)=1$, имѣемъ

$$n\int(n) = \rho\left(E\frac{n^2}{1}, n\right) + \rho\left(E\frac{n^2}{2}, n\right) + \rho\left(E\frac{n^2}{3}, n\right) + \ldots$$

или

$$n\int(n) = \mathbf{S}_{u=1}^{u=n} \rho\left(E\frac{n^2}{u}, n\right) \qquad (63)$$

Составляя формулы (I) и (XIV'), получаемъ:

$$\mathbf{S}_{u=1}^{u=n} \sum_{(n)}^{E\frac{n^2}{u}} \theta(d) = n\, \mathbf{S}_{u=1}^{u=n} \sum_{(n)}^{E\frac{n}{u}} \theta(d). \qquad \text{(XV)}$$

§ 18. **Числовой законъ, вытекающій изъ разсмотрѣнія суммы:**

$$F(n) = \mathbf{S}_1^n \sum_u \overline{\delta}(M)\varphi(\delta)\overline{d}(N)\theta(d) \qquad (63)$$

1) Съ одной стороны

$$F(n) = \overline{1}(M)\varphi(1)\mathbf{S}_1^{E\frac{n}{1}} \overline{u}(N)\theta(u) + \overline{2}(M)\varphi(2)\mathbf{S}_1^{E\frac{n}{2}} \overline{u}(N)\theta(u) + \ldots$$

Digitized by Google

находимъ, что

$$F(n) = \sum_{(M)} \varphi(d) \sum_{1}^{E\frac{n}{d}} \bar{u}(N)\theta(u) \qquad (64)$$

или

$$F(n) = \sum_{(M)} \varphi(d) \sum_{1,(N)}^{E\frac{n}{d}} \theta(D) \qquad (65)$$

2) Съ другой стороны

$$F(n) = \sum_{(N)} \theta(d) \sum_{1,(M)}^{E\frac{n}{d}} \varphi(D) \qquad (66)$$

Сравнивая формулы (65) и (66) получимъ

Общій числовой законъ (XVI):

$$\sum_{(M)} \varphi(d) \sum_{1(N)}^{E\frac{n}{d}} \theta(D) = \sum_{(N)} \theta(d) \sum_{1,(M)}^{E\frac{n}{d}} \varphi(D) \qquad (XVI)$$

Полагая

$$\varphi(d) = 1, \quad \theta(d) = d$$

получимъ частный числовой законъ.

$$\sum_{(M)} \int\left(E\frac{n}{d}, N\right) = \sum_{(N)} d\xi\left(E\frac{n}{d}, M\right) \qquad (67)$$

Здѣсь $\xi(n)$ есть функція, выражающая число дѣлителей, т.е. та функція, которую мы обозначили черезъ $\rho(n)$.

Примѣръ. Для $n=12$, $M=10$, $N=8$ числовой законъ (67) даетъ:

$$\sum_{1,0} \int\left(E\frac{12}{d}, 8\right) = \sum_{6} d\xi\left(E\frac{12}{d}, 10\right)$$

или

Digitized by Google

$$\int\left(E\frac{12}{1},8\right)+\int\left(E\frac{12}{2},8\right)+\int\left(E\frac{12}{5},8\right)+\int\left(E\frac{12}{10},8\right)=$$

$$=1\xi\left(E\frac{12}{1},10\right)+2\xi\left(E\frac{12}{2},10\right)+4\xi\left(E\frac{12}{4},10\right)+$$

$$+8\xi\left(E\frac{12}{8},10\right)$$

или

$$\int(12,8)+\int(6,8)+\int(2,8)+\int(1,8)=$$

$$=1\xi(12,10)+2\xi(6,10)+4\xi(3,10)+8\xi(1,10)$$

или

$$15+7+3+1=1.4+2.4+4.2+8=26.$$

§ 19. Числовые законы, вытекающіе изъ разсмотрѣнія суммы:

$$F(n)=\sum_1^n\sum_{(n)}(\sqrt{d})(n)\theta(\delta)\psi(d). \qquad (68)$$

1) Съ одной стороны

$$(F(n=A=\theta(1)\sum_1^{E\frac{n}{1}}\sqrt{u}\,(n).\psi(u)+\theta(2)\sum_1^{E\sqrt{\frac{n}{2}}}\sqrt{u}(n)\psi(u)+\ldots$$

Не трудно видѣть, что

$$A=\theta(1)\sum_1^{E\sqrt{\frac{n}{1}}}\overline{u}(n)\psi(u^2)+\theta(2)\sum_1^{E\sqrt{\frac{n}{2}}}\overline{u}(n)\psi(u^2)+\ldots$$

или

$$A=\theta(1)\sum_{(n)}^{E\sqrt{\frac{n}{1}}}\psi(d^2)+\theta(2)\sum_{(n)}^{E\sqrt{\frac{n}{2}}}\psi(d^2)+\ldots$$

Выраженіе A можетъ быть представлено въ видѣ

$$A=F(n)=\sum_1^n\theta(u)\sum_{(n)}^{E\sqrt{\frac{n}{u}}}\psi(d^2) \qquad (69)$$

Digitized by Google

2) Съ другой стороны

$$F(n)=B=\overline{1}(n)\psi(1)\sum_1^{E\frac{n}{1}}\theta(u)+\overline{\sqrt{2}}(n)\psi(2)\sum_1^{E\frac{n}{2}}\theta(u)+\ldots$$

откуда

$$F(n)=B=\overline{1}(n)\psi(1)\sum_1^{E\frac{n}{1}}\theta(u)+\overline{2}(n)\psi(2^2)\sum_1^{E\frac{n}{2^2}}\theta(u)+\ldots$$

Не трудно видѣть, что члены выраженія B будутъ имѣть значенія только для дѣлителей числа n, слѣдовательно

$$F(n)=B=\sum_n\psi(d^2)\sum_1^{E\frac{n}{d^2}}\theta(u) \qquad (70)$$

Сравнивая величины A и B, получаемъ послѣ замѣны функціи $\psi(d^2)$ функціей $\chi(d)$ числовой законъ

$$\sum_{(n)}\chi(d)\sum_1^{E\frac{n}{d^2}}\theta(u)=\sum_1^n\theta(u)\sum_{(n)}^{E\sqrt{\frac{n}{u}}}\chi(d) \qquad (\text{XVII})$$

Полагая $\theta(u)=1$, получаемъ числовой законъ

$$\sum_n\chi(d)E\frac{n}{d^2}=\sum_1^n\sum_{(n)}^{E\sqrt{\frac{n}{u}}}\chi(d) \qquad (\text{XVIIa})$$

Полагая $\chi(d)=d$, имѣемъ:

$$\sum_n dE\frac{n}{d^2}=\sum_1^n\int\left(E\sqrt{\frac{n}{u}},n\right) \qquad (71)$$

Замѣняя въ формулѣ (XVII) функцію $\theta(u)$ функціей $\theta(u)\overline{u}(n)$ получимъ общій числовой законъ:

$$\sum_{(n)}\left[\chi(d)\sum_{(n)}^{E\frac{n}{d^2}}\theta(D)\right]=\sum_{(n)}\left[\theta(d)\sum_{(n)}^{E\sqrt{\delta}}\chi(d)\right] \qquad (\text{XVIII})$$

Digitized by Google

Послѣдній законъ для функцій

$$\theta(u)=u,\quad \chi(u)=1$$

даетъ законъ:

$$\sum_n \int\left(E\frac{n}{d^2}, n\right)=\sum_n d\xi(E\sqrt{\delta}, n) \tag{72}$$

Для $n=6$ имѣемъ:

$$\int\left(E\frac{6}{1^2}, 6\right)+\int\left(E\frac{6}{2^2}, 6\right)=1\xi(E\sqrt{6}, 6)+2\xi(E\sqrt{3}, 6)$$

$$+3\xi(E\sqrt{2}, 6)+6\xi(E\sqrt{1}, 6)$$

откуда

$$\int(6, 6)+\int(1, 6)=1\xi(2, 6)+2\xi(1, 6)+3\xi(1, 6)+6\xi(1, 6)$$

или

$$1+2+3+6+1=1.2+2.1+3.1+6.1=13.$$

§ 20. Числовой законъ, вытекающій изъ разсмотрѣнія суммы:

$$F(n)=\mathop{\mathrm{S}}_1^n \sum_u \overline{(\delta+\sqrt{d})}\theta(\delta)\psi(d) \tag{73}$$

а) Съ одной стороны

$$F(n)=A=\theta(1)\mathop{\mathrm{S}}_1^{E\sqrt{\frac{n}{1}}}\overline{(1+\sqrt{u})}(n)\psi(u)+$$

$$+\theta(2)\mathop{\mathrm{S}}_1^{E\sqrt{\frac{n}{2}}}\overline{(2+\sqrt{u})}(n)\psi(u)+\ldots.$$

откуда

$$A=\theta(1)\mathop{\mathrm{S}}_1^{E\sqrt{\frac{n}{1}}}\overline{(1+u)}(n)\psi(u^2)+\theta 2\mathop{\mathrm{S}}_1^{E\sqrt{\frac{n}{2}}}\overline{(2+u)}(n)\psi(u^2)+.$$

или

Digitized by Google

$$A = \theta(1) \sum_{2(n)}^{1+E\frac{n}{1}} \psi(d-1)^2 + \theta(2) \sum_{3}^{2+E\frac{n}{2}} \psi((d-2)^2) + \ldots$$

Количество A можетъ быть выражено суммой

$$A = \mathbf{S}_1^n \theta(u) \sum_{u+1}^{u+E\sqrt{\frac{n}{u}}} \psi((d-u)^2) \qquad (74)$$

b) Съ другой стороны

$$F(n) = B = \psi(1) \mathbf{S}_1^n \overline{(u+\sqrt{1})}(n)\theta(u) + \psi(2) \mathbf{S}_1^{E\frac{n}{2}} \overline{(u+\sqrt{2})}(n)\theta(u) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

откуда

$$B = \psi 1 \mathbf{S}_1^n \overline{(u+1)}(n)\theta(u) + \psi(4) \mathbf{S}_1^{E\frac{n}{2^2}} \overline{(u+2)}(n)\theta(u) + \ldots$$

или

$$B = \psi(1) \sum_{2,(n)}^{n+1} \theta(d-1) + \psi(2^2) \sum_{3,(n)}^{2+E\frac{n}{2^2}} \theta(d-2) + \ldots$$

Величина B можетъ выражена суммою

$$B = \mathbf{S}_1^{E\sqrt{n}} \psi(u^2) \sum_{u+1,(n)}^{u+E\frac{n}{u^2}} \theta(d-u) \qquad (75)$$

Сравнивая выраженія A и B и замѣняя функцію $\psi(u^2)$ функціей $\chi(\sqrt{u})$, получимъ общій числовой законъ (XIX)

$$\mathbf{S}_1^n \theta(u) \sum_{u+1,(n)}^{u+E\sqrt{\frac{n}{u}}} \chi(d-u) = \mathbf{S}_1^{E\sqrt{n}} \chi(u) \sum_{u+1}^{u+E\frac{n}{u^2}} \theta(d-u) \qquad (XIX)$$

Digitized by Google

Полагая въ этой формулѣ $\theta(u)=1$, $\chi(u)=1$, получаемъ частный числовой законъ:

$$S_1^n \sum_{u+1(n)}^{u+E\sqrt{\frac{n}{u}}} = S_1^{E\sqrt{n}} \sum_{u+1}^{u+E\frac{n}{u}} 1 \qquad (76)$$

Такъ какъ

$$\sum_{u+1,(n)}^{u+E\sqrt{\frac{n}{u}}} 1 = \sum_{(n)}^{u+E\sqrt{\frac{n}{u}}} 1 - \sum_{(n)}^{u} 1 =$$

$$= \xi\left(u+E\sqrt{\frac{n}{u}}, n\right) - \xi(u, n)$$

то формула (76) даетъ

$$S_1^n \xi\left(u+E\sqrt{\frac{n}{u}}, n\right) - S_1^n \xi(u, n) =$$

$$= S_1^{E\sqrt{n}} E\left(u+E\frac{n}{u^2}, n\right) - S_1^{E\sqrt{n}} \xi(u, n) \qquad (77)$$

Мы еще прежде вывели теорему *)

$$S_1^n S_1^u \theta(u) = (n+1) S_1^n \theta(u) - S_1^n u\theta(u)$$

Замѣняя въ этой формулѣ $\theta(u)$ функціей $\theta(u)\bar{u}(n)$, получимъ соотношеніе

$$S_1^n \sum_{(n)}^u 1 = (n+1)\sum_{(n)}^n 1 - \sum_{(n)}^n d$$

или

$$S_1^n \xi(u, n) = (n+1)\xi(n) - \int(n)$$

---

*) *Буняк.* Числовыя тождества, находящіяся въ связи съ свойствами символа *E*. Мат. Сб. Т. I, стр. 67.

Digitized by Google

Точно также

$$\mathbf{S}_1^m \xi(u, n) = (m+1)\xi(m, n) - \int(m, n)$$

Полагая $m = E\sqrt{n}$, имѣемъ:

$$\mathbf{S}_1^{E\sqrt{n}} \xi(u, n) = (1+E\sqrt{n})\xi(E\sqrt{n}, n) - \int(E\sqrt{n}, n)$$

Замѣняя въ формулѣ (77)

$$\mathbf{S}_1^n \xi(u, n) \text{ и } \mathbf{S}_1^{E\sqrt{n}} \xi(u, n)$$

ихъ выраженіями, получимъ частный числовой законъ:

$$\mathbf{S}_1^n \xi\left(u+E\sqrt{\frac{n}{n}}, n\right) + (1+E\sqrt{n})\xi(E\sqrt{n}, n) - \int(E\sqrt{n}, n) =$$

$$= \mathbf{S}_1^{E\sqrt{n}} \xi\left(u+E\frac{n}{u}, n\right) + (n+1)\xi(n) - \int(n). \qquad (78)$$

Примѣръ. Для $n=10$ имѣемъ:

$$\xi(1+3, 10)+\xi(4, 10)+\xi(4, 10)+\xi(5, 10)+\xi(6, 10)+\xi(7, 10)+$$
$$+\xi(8, 10)+\xi(9, 10)+\xi(10, 10)+\xi(11, 10)+(1+3)\xi(3, 10)-$$
$$-\int(3, 10) = \xi(11, 10)+\xi(4, 10)+\xi(4, 10)+11\xi(10)-\int(10)$$

или

$$2+2+2+3+3+3+3+3+4+4+4.2-3=$$
$$=4+2+2+11.4-18=34.$$

Для насъ имѣетъ значеніе тотъ методъ, при помощи котораго открываются новыя соотношенія между опредѣленными числовыми интегралами.

Digitized by Google

ЗАМѢТКА ОБЪ ИНТЕГРИРОВАНІИ ЛИНЕЙНАГО УРАВНЕНІЯ СЪ ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ 2-го ПОРЯДКА.

А. І. Круковскаго.

(Сообщено въ засѣданіи Математическаго Общества 26 апрѣля 1894 г.)

Интегрированіе линейнаго уравненія съ частными производными 2-го порядка

$$\frac{d^2Z}{dxdy} + P\frac{dZ}{dx} + Q\frac{dZ}{dy} = lZ,$$

гдѣ Z есть искомая функція, x и y независимыя перемѣнныя, а P, Q и l какія-либо функціи x и y, издавна, какъ извѣстно, служило предметомъ многихъ изслѣдованій; еще въ прошломъ столѣтіи въ мемуарахъ Парижской Академіи за 1779-й годъ встрѣчается статья Лапласа, въ которой онъ даетъ общій видъ интеграла этого уравненія въ формѣ

$$\int_0^x \Gamma(x-u)\varphi(u)du + \int_0^y \Pi(y-u)\psi(u)du, \quad *)$$

гдѣ $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ суть произвольныя функціи аргумента u, по которому совершается интегрированіе, а функціи $\Gamma(x-u)$ и $\Pi(y-u)$ соотвѣтственно представляются рядами:

*) Въ текстѣ цитируемой статьи перемѣнныя x, y, Z и u соотвѣтственно обозначены буквами s, s', u и z.

Digitized by Google

$$A + A^{(1)}\frac{(x-u)}{1} + A^{(2)}\frac{(x-u)^2}{1.2} + A^{(3)}\frac{(x-u)^3}{1.2.3} + \ldots \text{ и } B + B^{(1)}\frac{(y-u)}{1}$$

$$+ B^{(2)}\frac{(y-u)^2}{1.2} + B^{(3)}\frac{(y-u)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

коэффиціенты же A, $A^{(1)}$, $A^{(2)}, \ldots, B, B^{(1)}$, $B^{(2)}, \ldots$ удовлетворяютъ уравненіямъ съ частными производными:

$$\frac{dA}{dy} + PA = 0; \frac{dA^{(1)}}{dy} + PA^{(1)} + \frac{d^2A}{dxdy} + P\frac{dA}{dx} +$$

$$+ Q\frac{dA}{dy} - lA = 0, \frac{dA^{(2)}}{dy} + PA^{(1)} +$$

$$\frac{d^2A^{(1)}}{dxdy} + P\frac{dA^{(1)}}{dx} + Q\frac{dA^{(1)}}{dy} - lA^{(1)} = 0, \ldots, \frac{dB}{dx} +$$

$$+ QB = 0, \frac{dB^{(1)}}{dx} + QB^{(1)} + \frac{d^2B}{dxdy} +$$

$$P\frac{dB}{dx} + Q\frac{dB}{dy} - lB = 0, \frac{dB^{(2)}}{dx} + QB^{(2)} + \frac{d^2B^{(1)}}{dxdy} +$$

$$+ P\frac{dB^{(2)}}{dx} + Q\frac{dB^{(1)}}{dy} - lB^{(1)} = 0, \ldots.$$

Эта формула, сохраняя и до настоящаго времени свое важное значеніе ведетъ однако къ опредѣленію интеграла въ конечномъ видѣ только въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ, такъ какъ опредѣленіе функцій Г и П вообще бываетъ сопряжено съ большими затрудненіями, что замѣтилъ и самъ Лаплассъ, говоря объ этомъ въ своей статьѣ: «c'est qui paroit tres difficile en général». Но при помощи разложенія искомаго интеграла въ рядъ по теоремѣ Тейлора можно убѣдиться, что этотъ интегралъ представляется еще и въ такомъ видѣ:

Digitized by Google

$$Z = e^{-\int P dy} \varphi(x) +$$

$$e^{-\int P dy} \int e^{\int P dy - \int Q dx} dy \int e^{-\int P dy + \int Q dx} \left(1 + PQ + \frac{dP}{dx} \right) \varphi(x) dx$$

$$+ e^{-\int P dy} \int e^{\int P dy - \int Q dx} dy \int e^{-\int P dy + \int Q dx} \left(1 + PQ + \frac{dP}{dx} \right) dx \int e^{\int P dy - \int Q dx} dy \int e^{-\int P dy + \int Q dx} \left(1 + PQ + \frac{dP}{dx} \right) \varphi(x) dx + \ldots + e^{-\int Q dx} \downarrow(y) +$$

$$e^{-\int Q dx} \int e^{-\int P dy + \int Q dx} dx \int e^{\int P dy - \int Q dx} \left(1 + PQ + \frac{dQ}{dy} \right) \psi(y) dy$$

$$+ e^{-\int Q dx} \int e^{-\int P dy + \int Q dx} dx \int e^{\int P dy - \int Q dx} \left(1 + PQ + \frac{dQ}{dy} \right) dy \int e^{-\int P dy + \int Q dx} dx \int e^{\int P dy - \int Q dx} \left(1 + PQ + \frac{dQ}{dy} \right) \psi(y) dy + \ldots .$$

Здѣсь мы имѣемъ сумму двухъ рядовъ, изъ которыхъ первый содержитъ произвольную функцію отъ x, $\varphi(x)$, а второй— произвольную функцію отъ y, $\downarrow(y)$; законъ составленія членовъ этихъ рядовъ очевиденъ, чего нельзя сказать о формулѣ Лапласа. Чтобы найти, какое отношеніе имѣетъ полученное выраженіе для Z къ формулѣ Лапласа, стоитъ только допустить, что функціи $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ соотвѣтственно равны произвольнымъ постояннымъ a и b и что въ первомъ ряду всѣ интегрированія по x совершаются между предѣлами u и x

Digitized by Google

а во второмъ ряду всѣ интегрированія по y—между предѣлами u и y, при чемъ u считается занѣкоторое произвольное постоянное, тогда можно показать, что первый рядъ обратится въ

$$A+A^{(1)}\frac{(x-u)}{1}+A^{(2)}\frac{(x-u)^2}{1.2}+\ldots,$$

т. е. въ функцію $\Gamma(x-u)$, а второй—въ

$$B+B^{(1)}\frac{(y-u)}{1}+B^{(2)}\frac{(y-u)^2}{1.2}+\ldots,$$

т. е. въ функцію $\Pi(y-u)$. По этой формулѣ можно также опредѣлить интегралъ въ конечномъ видѣ въ тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ таковой интегралъ получался по формулѣ Лапласа.

Покажемъ примѣненіе нашей формулы на слѣдующихъ двухъ примѣрахъ. Возьмемъ во первыхъ уравненіе

$$\frac{d^2Z}{dx\,dy}+P\frac{dZ}{dx}=f(x)f_1(y)Z,$$

гдѣ P есть функція только одного перемѣннаго y, $f(x)$ и $f_1(y)$ суть какія либо функціи, одна перемѣннаго x, а другая перемѣннаго y; это уравненіе посредствомъ простыхъ преобразованій приводится къ уравненію съ другими перемѣнными u и v $\frac{d^2Z_1}{du\,dv}=Z_1$, котораго интегралъ не трудно опредѣлить по формулѣ Лапласа, пользуясь же предложенною формулою, мы получаемъ прямо выраженіе для Z:

$$Z=e^{-\int Pdy}\varphi(x)+e^{-\int Pdy}\int dy\int f(x)f_1(y)\varphi(x)dx+$$

$$e^{-\int Pdy}\int dy\int f(x)f_1(y)dx\int dy\int f(x)f_1(y)\varphi(x)dx+\ldots+$$

$$e^{-\int Pdy}\psi(y)+e^{-\int Pdy}\int dx\int f(x)f_1(y)\psi(y)dy+$$

$$e^{-\int Pdy}\int dx\int f(x)f_1(y)dy\int dx\int f(x)f_1(y)\psi(y)dy+\ldots,$$

Digitized by Google

гдѣ во второмъ ряду функція $\psi(y)$ замѣнена для симметріи функціею

$$-\int Pdy \\ e \qquad \psi(y);$$

суммируя эти ряды помощію опредѣленныхъ интеграловъ, найдемъ:

$$Z = \frac{e}{2\pi} \int_h^x \int_0^{2\pi} e^{-\int Pdy} \cdot e^{[\int_s^x f(s)ds + \int_k^y f_1(y)dy]\cos u} \cos\left[\left(\int_s^x f(s)ds - \int_k^y f_1(y)dy\right)\sin u\right] \varphi(s)\,ds\,du +$$

$$+ \frac{e}{2\pi} \int_k^y \int_0^{2\pi} e^{-\int Pdy} \cdot e^{[\int_s^y f_1(s)ds + \int_h^x f(x)dx]\cos u} \cos\left[\left(\int_s^y f_1(s)ds - \int_h^x f(x)dx\right)\sin u\right] \psi(s)\,ds;$$

этому выраженію можно дать и другой видъ:

$$Z = \frac{e}{2\pi} \int_h^x \int_0^{2\pi} e^{-\int Pdy} \cdot e^{2\sqrt{(\int_s^x f(s)ds)(\int_k^y f_1(y)dy)}\cos u} \varphi(s)\,ds\,du +$$

$$+ \frac{e}{2\pi} \int_k^y \int_0^{2\pi} e^{-\int Pdy} \cdot e^{2\sqrt{(\int_s^y f_1(s)ds)(\int_h^x f(x)dx)}\cdot\cos u} \psi(s)\,ds\,du,$$

такъ какъ интегралъ

$$\int_0^{2\pi} e^{[F(x)+F_1(y)]\cos u} \cos[(F(x)-F_1(y))\sin u]du$$

тождественъ съ интеграломъ

$$\int_0^{2\pi} e^{\sqrt{F(x).F_1(y)}.\cos u} du,$$

въ чемъ можно убѣдиться, разлагая въ ряды подъинтегральныя функціи этихъ интеграловъ. Такимъ же образомъ найдемъ интегралъ и уравненія

$$\frac{d^2Z}{dx\,dy} + Q\frac{dZ}{dy} = f(x)f_1(y)Z,$$

принимая, что Q есть функція только одного перемѣннаго x, а $f(x)$ и $f_1(y)$ имѣютъ прежнее значеніе.

Во вторыхъ возьмемъ уравненіе

$$\frac{d^2Z}{dx\,dy} = (ax+by+c)^n . Z,$$

гдѣ n есть какое нибудь положительное, цѣлое или дробное число; это уравненіе не интегрируется ни однимъ изъ существующихъ способовъ и мы можемъ получить интегралъ его не съ произвольными функціями, а только съ двумя произвольными постоянными; дѣйствительно, полагая въ нашей формулѣ сперва, что $\varphi(x)$=произвол. постоян. A и $\psi(y)=0$, получимъ для Z рядъ

$$A\left[1+\frac{(ax+by+c)^{n+2}}{ab(n+1)(n+2)}+\frac{(ax+by+c)^{2n+4}}{a^2b^2(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)}+\right.$$
$$\left.\frac{(ax+by+c)^{3n+6}}{a^3b^3(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)(3n+5)(3n+6)}+\cdots\right],$$

затѣмъ, полагая, что $\varphi(x)=Bax$, а $\psi(y)=B(by+c)$, найдемъ для Z другой рядъ:

Digitized by Google

$$B\left[(ax+by+c)+\frac{(ax+by+c)^{n+3}}{ab(n+2)(n+3)}+\right.$$

$$\frac{(ax+by+c)^{2n+3}}{a^2b^2(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)}+$$

$$\left.\frac{(ax+by+c)^{3n+7}}{a^3b^3(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)(3n+6)(3n+7)}+\ldots\right];$$

суммируя эти ряды, находимъ:

$$Z=A\left[1+\frac{\sqrt{(ax+by+c)^{n+2}}}{2\pi\sqrt{ab}}\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{\frac{2\cos u}{n+2}\sqrt{\frac{(ax+by+c)^{n+2}}{ab}}(1-t^{n+2})}\frac{t^n\cos u}{\sqrt{1-t^{n+2}}}dt\,du\right]+$$

$$+B\frac{(ax+by+c)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{\frac{2\cos u}{n+2}\sqrt{\frac{(ax+by+c)^{n+2}}{ab}}(1-t^{n+2}}dtdu$$

Здѣсь кстати замѣтить, что интегрированіе этого уравненія имѣетъ близкую связь съ интегрированіемъ преобразованнаго уравненія Риккати $\frac{d^2Z}{dx^2}=\alpha x^nZ$, при n положительномъ числѣ; въ самомъ дѣлѣ, если въ двухъ предъидущихъ рядахъ замѣнимъ $ax+by+c$ чрезъ x, а ab чрезъ $\frac{1}{\alpha}$, то получимъ ряды, которыми выражается интегралъ предъидущаго уравненія; поэтому чтобы получить этотъ интегралъ въ конечномъ видѣ достаточно только въ предъидущемъ выраженіи для Z сдѣлать такую же замѣну и тогда найдемъ:

$$Z=A\left[1+\frac{\sqrt{\alpha x}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{\frac{2\cos u}{n+2}\sqrt{\alpha x^{n+2}(1-t^{n+2})}}\frac{\cos u}{\sqrt{1-t^{n+2}}}dt\,du\right]$$

$$+B\left[\frac{x}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{\frac{2\cos u}{n+2}\sqrt{\alpha x^{n+2}(1-t^{n+2})}}dt.\,du.\right.$$

Digitized by Google

По поводу интегрированія разсматриваемаго уравненія съ частными производными остается еще сказать, что въ послѣднее время появились въ C. R., CX и въ Journal des mathem. Liouville, T. VI, 1890 г., статьи E. Picard, въ которыхъ онъ предлагаетъ для интегрированія уравненій съ частными производными, подобныхъ вышеупомянутому, способъ послѣдовательныхъ приближеній; но этотъ способъ едва ли можетъ дать интегралъ въ болѣе простомъ видѣ, чѣмъ формула Лапласа или вышеприведенная.

Digitized by Google

ОБЪ ОДНОМЪ КОНКРЕТНОМЪ ИСТОЛКОВАНІИ ПЛАНИМЕТРІИ ЛОБАЧЕВСКАГО.

Л. К. Лахтина.

Введеніе.

Геометрія Лобачевскаго, въ началѣ почти не замѣченная математиками, въ послѣднее время стала получать все болѣе и болѣе широкое распространеніе и примѣненіе.

Эти примѣненія не ограничиваются вопросами чисто геометрическими, а касаются областей анализа по видимому даже весьма удаленныхъ отъ вопроса о геометрическихъ аксіомахъ.

Работы Лобачевскаго, бросая яркій свѣтъ на философію геометріи, въ то же время знакомятъ насъ съ такими протяженіями, гдѣ имѣютъ мѣсто всѣ аксіомы Евклидовой геометріи за исключеніемъ 11-ой его аксіомы.

Распространенію новыхъ идей долго мѣшала привычка, пріобрѣтаемая нами съ раннихъ лѣтъ, мыслить въ геометрическихъ разсужденіяхъ по законамъ геометріи Евклида. Вслѣдствіе этого теоремы и въ особенности чертежи геометріи Лобачевскаго кажутся парадоксальными.

Хотя Лобачевскій показалъ, что на чертежахъ такихъ малыхъ размѣровъ, какими мы пользуемся, различіе его геометріи отъ Евклидовой не можетъ быть замѣчено, тѣмъ не менѣе кажущаяся несообразность чертежей сильно мѣшаетъ нашему воображенію ясно ихъ себѣ представить.

Digitized by Google

Отсюда возникли стремленія геометровъ найти конкретное истолкованіе формулъ и теоремъ неевклидовой геометріи, т. е. найти такое конкретное протяженіе, въ которомъ теоремы геометріи Лобачевскаго были бы справедливы, а чертежи возможно проще понимались бы нашимъ умомъ.

Въ сущности всѣ эти истолкованія сводятся къ одному принципу, получающему только различныя внѣшнія выраженія. Дѣло въ томъ, что въ геометріи Лобачевскаго дифференціалъ дуги кривой выражается иначе, чѣмъ въ Евклидовой геометріи. Если мы условимся въ нашихъ вычисленіяхъ вводить это новое выраженіе дифференціала дуги, то вычисленія непремѣнно приведутъ насъ къ формуламъ и теоремамъ Лобачевскаго. При этомъ, понятно, разстояніе между двумя точками будетъ выражаться иначе, чѣмъ въ геометріи Евклида; кратчайшее разстояніе между двумя точками будетъ такъ называемая геодезическая линія, а не та линія, которую мы привыкли называть прямою; мѣсто прямолинейныхъ многоугольниковъ займутъ многоугольники, ограниченные геодезическими линіями, и т. д.

Бельтрами показалъ, что если мы возьмемъ кривую не на плоскости, а на поверхности съ постоянной отрицательной кривизной — на псевдосферѣ — то дифференціалъ дуги этой кривой получитъ такое выраженіе, какъ у Лобачевскаго. Поэтому, строя чертежи на псевдосферѣ, мы конкретно осуществимъ чертежи геометріи Лобачевскаго, не напрягая особенно сильно наше воображеніе.

Это истолкованіе, безспорно, весьма интересное, освѣтило многія трудно понимаемыя особенности геометріи Лобачевскаго; но оно не получило какихъ-либо важныхъ примѣненій въ другихъ областяхъ математики. Къ тому же оно не способно уяснить смыслъ теоремъ Лобачевскаго, касающихся геометріи въ пространствѣ.

Кели, Клейнъ, Пуанкаре и другіе математики, отказавшись отъ этихъ кривыхъ поверхностей, предложили только измѣнить формулу выраженія дифференціала дуги, оставивъ кривую на нашей обыкновенной плоскости. Тогда необхо-

Digitized by Google

димо условиться считать за кратчайшее разстояніе между двумя точками не прямую линію въ Евклидовомъ смыслѣ, а геодезическую линію, видъ которой вполнѣ опредѣлится, когда дана формула дифференціала дуги.

Это истолкованіе, какъ оказалось, находится въ тѣсной связи съ теоремами проэктивной геометріи и можетъ быть обобщено на геометрію въ пространствѣ. Кромѣ того, оно получило важныя примѣненія въ области чистаго анализа при изученіи свойствъ тѣхъ функцій, которыя Пуанкаре назвалъ Фуксовыми, а Клейнъ — аутоморфными. Эти функціи суть обобщеніе періодическихъ и въ послѣднее время привлекли къ себѣ вниманіе выдающихся математиковъ.

Еще Лобачевскій замѣтилъ, что для аналиста не имѣетъ никакого значенія споръ о томъ, какая геометрія—истинная: Евклидова или неевклидова. Въ анализѣ важно только то, что та и другая геометрическая система не заключаетъ внутри себя никакого логическаго противорѣчія. Поэтому, рѣшая какую-либо задачу анализа, мы можемъ по своему выбору пользоваться, какъ пособіемъ, той или другой геометріей, смотря по особенностямъ рѣшаемой нами задачи.

Геометрія Лобачевскаго создала особаго рода символическій языкъ, сильно упрощающій иногда разсужденія, и въ то же время безусловно точный.

Это—могучее орудіе при рѣшеніи многихъ вопросовъ теоріи функцій.

Въ настоящей статьѣ я имѣю въ виду изложить въ короткихъ чертахъ сущность конкретнаго истолкованія планиметріи Лобачевскаго въ той именно формѣ, въ какой оно получило главнѣйшее приложеніе къ теоріи функцій.

---

§ 1. **Длина кривой.**

Возьмемъ систему прямоугольныхъ Декартовыхъ осей координатъ и будемъ разсматривать фигуры, лежащія въ *верхней* полуплоскости, т. е. кверху отъ оси x.

Digitized by Google

Условимся считать дифференціалъ дуги кривой на этой полуплоскости равнымъ

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} . \qquad (1)$$

Выраженіе дифференціала дуги, какъ мы уже замѣтили во введеніи, опредѣляетъ собою всѣ свойства протяженія.

Займемся раскрытіемъ свойствъ того протяженія, которое опредѣляется формулою (1) дифференціала дуги.

Длина s дуги, укладывающейся въ верхней полуплоскости, выразится интеграломъ отъ функціи (1), взятымъ по этой дугѣ:

$$s = \int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} = \int \frac{1}{y} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx. \qquad (2)$$

Интегралъ (2) обладаетъ свойствами, которыя должно имѣть выраженіе длины дуги: 1) длина суммы двухъ дугъ равна суммѣ длинъ этихъ дугъ, 2) дуги, откладываемыя въ противоположныя стороны, противоположны по знаку. Изъ выраженія (2) видно, что длина всякой линіи, укладывающейся въ верхней полуплоскости, конечна, если она удовлетворяетъ двумъ условіямъ: 1) если она конечна съ точки зрѣнія Евклидовой геометріи, 2) если она не достигаетъ оси x.

Выраженіе (2) обращается въ безконечность всякій разъ, когда одно изъ этихъ условій нарушено.

Отсюда слѣдуетъ, что безконечно удаленными точками изучаемаго нами протяженія служатъ:

1) безконечно удаленныя точки въ смыслѣ геометріи Евклида,

2) всѣ точки оси x.

По другую сторону отъ оси x, т. е. въ нижнюю полуплоскость, изучаемое протяженіе не распространяется. Ось x служитъ его границей.

§ 2. **Геодезическая линія.**

Даны двѣ точки: (x_0, y_0) и (x_1, y_1). Ищется кратчайшее разстояніе между ними въ изучаемомъ протяженіи.

Digitized by Google

Пусть искомое разстояніе таково:

$$s=\int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{y}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx. \qquad (3)$$

Если оно кратчайшее, то варьяція его равна нулю:

$$\delta s=-\int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{1}{y^2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}+\frac{d}{dx}\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\right]\right\}\delta y\,dx=0.$$

Отсюда:

$$\frac{1}{y^2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}+\frac{d}{dx}\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\right]=0.$$

Интегрируя это уравненіе, находимъ:

$$a(x^2+y^2)+2b\sqrt{a}\,x=1-b^2. \qquad (4)$$

Произвольныя постоянныя интеграціи a и b опредѣлятся изъ условій прохожденія кривой черезъ данныя точки: (x_0,y_0) и (x_1, y_1). Кривая (4) есть окружность съ центромъ на оси x. Отсюда:

Теорема I. *Геодезическая линія въ изучаемомъ протяженіи съ точки зрѣнія Евклидовой геометріи есть окружность съ центромъ на оси x.*

Между всякими двумя точками протяженія проходитъ одна опредѣленная геодезическая линія.

Длину этой геодезической линіи мы и будемъ принимать за разстояніе между данными точками.

§ 3. Разстояніе между двумя точками.

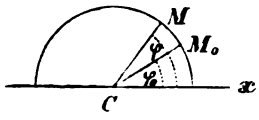
Найдемъ разстояніе между двумя точками $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x,y)$.

Проведемъ чрезъ эти двѣ точки геодезическую линію.

Съ точки зрѣнія Евклидовой геометріи это будетъ окружность съ центромъ на оси x. Пусть ея центръ есть C, углы

Digitized by Google

наклоненія радіусовъ CM_0 и CM къ x пусть будутъ φ_0 и φ.



Черт. 1.

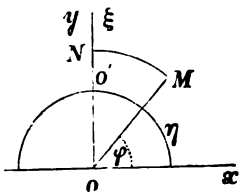
Разстояніе между точками M_0 и M, т. е. длина геодезической M_0M, вычисленная по формулѣ (2), выразится такъ:

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \log \frac{tg\frac{\varphi}{2}}{tg\frac{\varphi_0}{2}}, \qquad (5)$$

гдѣ *log* означаетъ логариѳмъ Непера.

§ 4. **Геодезическія координаты. Выраженіе дифференціала дуги въ геодезическихъ координатахъ.**

Возьмемъ двѣ взаимно перпендикулярныя геодезическія линіи, изъ которыхъ одна съ точки зрѣнія Евклидовой геометріи есть окружность радіуса равнаго единицѣ и имѣетъ центръ въ началѣ координатъ, а другая служитъ осью y. Примемъ эти двѣ геодезическія за оси геодезическихъ координатъ въ изучаемомъ протяженіи. Первую назовемъ осью η, а вторую—осью ξ; точку ихъ пересѣченія O' назовемъ началомъ геодезическихъ координатъ. Для опредѣленія положенія точки $M(x, y)$ въ геодезическихъ координатахъ проведемъ черезъ эту точку геодезическую MN, перпендикулярную къ оси ξ (окружность съ центромъ въ O—съ точки зрѣнія Евклидовой геометріи). Длину отрѣзка $O'N$ примемъ за координату ξ, а длину отрѣзка MN — за координату η. Координаты ξ и η вполнѣ опредѣляютъ положеніе точки M.



Черт. 2.

Найдемъ соотношеніе между координатами x, y и ξ, η.

Изъ формулъ (2) и (5) заключаемъ, что:

$$\xi = \log\sqrt{x^2+y^2}, \quad \eta = -\log tg\frac{\varphi}{2}, \qquad (6)$$

гдѣ φ есть уголъ наклоненія радіуса OM къ оси x и опредѣляется уравненіемъ:

Digitized by Google

$$tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

Изъ равенствъ (6) слѣдуетъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= e^{\xi}\, tghyp\, \eta, \\ y &= e^{\xi}\, \frac{1}{cos\, hyp\, \eta}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Формулы (7) суть искомыя формулы преобразованія координатъ.

Пользуясь этими формулами, мы можемъ выразить дифференціалъ дуги

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} \qquad (1)$$

въ геодезическихъ координатахъ:

$$ds = \sqrt{cos^2 hyp\, \eta\; d\xi^2 + d\eta^2}. \qquad (8)$$

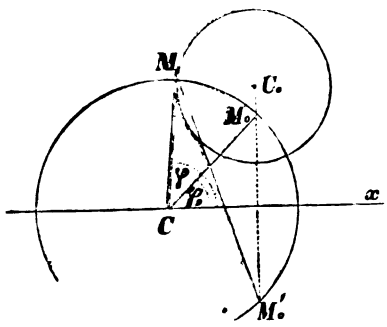
Эта формула разнится только обозначеніями отъ формулы дифференціала дуги, найденной Лобачевскимъ. (См. полное собраніе сочиненій по геометріи Н.И.Лобачевскаго. Казань 1883г. стр. 521). Такъ какъ выраженіе дифференціала дуги опредѣляетъ собою всѣ свойства протяженія, то изучаемое нами протяженіе, необходимо, будетъ имѣть всѣ свойства, какія имѣетъ плоскость въ геометріи Лобачевскаго. Поэтому мы можемъ его назвать плоскостью Лобачевскаго. Теоремы, которыя мы докажемъ для этого протяженія, будутъ теоремами планиметріи Лобачевскаго, а чертежи будутъ служить конкретнымъ истолкованіемъ этихъ теоремъ.

§ 5. **Геодезическая окружность.**

Геодезическою окружностью мы будемъ называть геометрическое мѣсто точекъ нашего протяженія, разстояніе которыхъ отъ одной данной точки одинаково. Это разстояніе мы будемъ называть геодезическимъ радіусомъ окружности.

Digitized by Google

Пусть центръ геодезической окружности есть $M_0(x_0, y_0)$, а геодезическій радіусъ равенъ R. Найдемъ ея уравненіе.



Черт. 3.

Возьмемъ какую нибудь точку $M(x, y)$, лежащую на геодезической окружности. Соединимъ ее съ центромъ M_0 геодезической линіей MM_0. Съ точки зрѣнія Евклидовой геометріи MM_0 есть дуга окружности съ центромъ на оси x. Пусть этотъ центръ есть C. Обозначимъ углы наклоненія радіусовъ CM_0 и CM къ оси x буквами φ_0 и φ.

Въ такомъ случаѣ геодезическій радіусъ R выразится такъ

$$R = log \frac{tg \frac{\varphi}{2}}{tg \frac{\varphi_0}{2}}.$$

Отсюда:

$$\frac{tg \frac{\varphi}{2}}{tg \frac{\varphi_0}{2}} = e^n.$$

Далѣе:

$$\frac{sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2}}{sin \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} = tg\, hyp \frac{R}{2}. \qquad (9)$$

Пусть M_0' есть точка симметричная съ M_0 относительно оси x. Координаты ея суть: $x_0, -y_0$. Изъ черт. 3 видно, что прямыя M_0M*) и $M_0'M$ (въ Евклидовомъ смыслѣ)выражаются такъ:

$$\left.\begin{aligned} M_0M &= 2M_0C\, sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2}, \\ M_0'M &= 2M_0C\, sin \frac{\varphi + \varphi_0}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

*) Прямая M_0M на черт. 3 опущена для избѣжанія сложности чертежа.

Digitized by Google

Изъ формулъ (9) и (10) слѣдуетъ, что:

$$\frac{M_0M}{M_0'M} = tg\,hyp\,\frac{R}{2},$$

или:

$$\sqrt{\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}} = tg\,hyp\,\frac{R}{2}.$$

По освобожденіи уравненія отъ радикала, находимъ:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0\cos hyp R)^2=y_0^2\sin^2 hyp\,R. \qquad (11)$$

Это—искомое уравненіе геодезической окружности радіуса R съ центромъ въ (x_0, y_0).

Съ точки зрѣнія Евклидовой геометріи это — окружность радіуса $y_0 sin hyp R$ съ центромъ въ точкѣ $C_0(x_0, y_0 cos hyp R)$.

Такъ какъ при конечныхъ значеніяхъ R:

$$sin\,hyp\,R < cos hyp\,R,$$

то окружность (11) всѣми своими точками лежитъ въ верхней полуплоскости. Она коснется оси x только тогда, когда геодезическій радіусъ R безконечно великъ; только при $R=\infty$ имѣетъ мѣсто равенство:

$$sin hyp\,R = cos hyp\,R.$$

Это и понятно: ось x есть совокупность безконечно удаленныхъ точекъ протяженія; если геодезическая окружность касается оси x, т. е. имѣетъ безконечно удаленную точку, то радіусъ ея необходимо долженъ быть безконечно великъ.

Если $R=\infty$, а y_0 отлично отъ 0, то геодезическая окружность всѣми своими точками лежитъ въ безконечности.

Если $R=\infty$ и въ то же время $y_0=0$, то выраженія

$$y_0 cos hyp\,R \text{ и } y_0 sin hyp R, \qquad (12)$$

ординаты центра C_0 и радіуса окружности (11), получаютъ неопредѣленный видъ: $0.\infty$. Мы можемъ выбрать R такъ, чтобы предѣлъ одной изъ нихъ равнялся произвольно взятой конеч-

Digitized by Google

ной положительной величинѣ ρ. Предѣлы обѣихъ величинъ (12) одинаковы:

$$\lim y_0 \cos hyp R = \lim y_0 \sin hyp R = \rho. \qquad (13)$$

Въ такомъ случаѣ уравненіе (11) приметъ видъ:

$$(x - x_0)^2 + (y - \rho)^2 = \rho^2. \qquad (14)$$

Таково уравненіе геодезической окружности, имѣющей безконечно удаленный центръ и безконечно большой радіусъ. По терминологіи Лобачевскаго это—*предѣльная окружность*. Какъ и должно быть на плоскости Лобачевскаго,—предѣльная окружность не есть геодезическая линія этого протяженія. Въ этомъ геометрія Лобачевскаго существенно разнится отъ Евклидовой: въ геометріи Евклида окружность безконечно большаго радіуса есть прямая линія.

Уравненіе (14) предѣльной окружности нашего протяженія съ точки зрѣнія Евклидовой геометріи изображаетъ окружность, касающуюся оси x въ точкѣ $(x_0, 0)$.

Не лишена интереса слѣдующая особенность предѣльной окружности (14). Координаты геодезическаго центра этой окружности x_0, 0 удовлетворяютъ ея уравненію: *предѣльная окружность проходитъ черезъ свой центръ*. На эту особенность ея обратилъ вниманіе Бельтрами.

§ 6. **Длина геодезической окружности.**

Изъ уравненія (11) геодезической окружности слѣдуетъ, что длина ея такова:

$$s = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{tg\, hyp\, R \,.\, d\varphi}{1 - tg^2 hyp R . \sin^2 \varphi} = 2\pi \sin hyp R. \qquad (15)$$

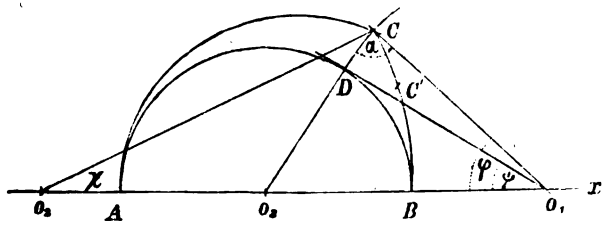
Это выраженіе тождественно съ тѣмъ, которое дано Лобачевскимъ (полное собраніе сочиненій стр. 522).

Понятно, что длина всей предѣльной окружности безконечно велика.

Digitized by Google

§ 7. **О параллельныхъ линіяхъ.**

Пусть дана геодезическая *ADB* и точка *C* внѣ ея. Ясно,



Черт. 4.

что геодезическія *CA* и *CB* пересѣкаютъ ее въ безконечно удаленныхъ точкахъ: первая въ *A*, а вторая—въ *B*. Геодезическія *CA* и *CB* параллельны *ADB*: первая—слѣва, а вторая справа. Отсюда:

Теорема 2. *Черезъ всякую точку C, лежащую внѣ геодезической ADB можно провести двѣ параллельныя геодезическія CA и CB. Уголъ ACB между этими параллельными отличенъ отъ* π. Эта теорема заступаетъ мѣсто XI аксіомы въ геометріи Лобачевскаго.

Изъ чертежа 4 мы можемъ непосредственно усмотрѣть всѣ главнѣйшія свойства параллельныхъ на плоскости Лобачевскаго. Изъ нихъ мы укажемъ на слѣдующія.

Параллельныя *CA* и *CB* дѣлятъ плоскость на двѣ части: всякая геодезическая, проходящая черезъ точку *C* внутри угла *ACB*, пересѣкаетъ геодезическую *ADB*; всякая геодезическая, проходящая черезъ точку *C* внѣ угла *ACB*, не пересѣкаетъ *ADB*. Параллельныя *CA* и *CB* суть крайнія геодезическія, пересѣкающія *ADB*.

Параллельность есть свойство взаимное для двухъ геодезическихъ.

Двѣ параллельныя геодезическія обладаютъ этимъ свойствомъ на всемъ своемъ протяженіи, т. е. если черезъ какую нибудь точку *C'* геодезической *CB* провести параллельную линіи *ADB* справа, то эта параллельная совпадетъ съ *CB*.

Двѣ геодезическія, параллельныя третьей съ одной и той же стороны, параллельны между собою.

Digitized by Google

§ 8. **Уголъ параллельности.**

Проведемъ черезъ точку C (черт. 4) геодезическую ортогональную къ ADB (черезъ всякую точку плоскости можно провести только одну геодезическую ортогональную къ ADB). Отрѣзокъ CD этой линіи есть геодезическій перпендикуляръ, опущенный изъ точки C на ADB. Уголъ $DCB=\alpha$ мы назовемъ, слѣдуя Лобачевскому, *угломъ параллельности*. Найдемъ выраженіе угла α въ видѣ функціи длины геодезическаго перпендикуляра $CD=p$.

Пусть центрами дугъ окружностей CD, CB и DB въ Евклидовомъ смыслѣ служатъ точки: O_1, O_2, O_3. Длины радіусовъ этихъ окружностей и отрѣзка O_2O_1 обозначимъ соотвѣтственно буквами R_1, R_2, R_3 и δ. Углы наклоненія прямыхъ O_1C, O_1D и O_2C къ оси x обозначимъ черезъ φ, ψ, γ.

Уголъ параллельности α равенъ $\varphi+\gamma$:

$$\alpha=\varphi+\gamma. \tag{16}$$

Изъ черт. 4 находимъ:

$$R_1=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\delta,\quad R_2=\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}\delta,\quad R_3=\frac{R_1^2-(\delta-R_2)^2}{2(\delta-R_2)}. \tag{17}$$

Далѣе, изъ прямоугольнаго треугольника O_3DO_1 находимъ:

$$\cos\psi=\frac{R_1}{\delta-R_2+R_3}=\frac{2R_1(\delta-R_2)}{R_1^2+(\delta-R_2)^2},$$

откуда:

$$tg\frac{\psi}{2}=\frac{R_1+R_2-\delta}{R_1-R_2+\delta}. \tag{18}$$

Изъ формулъ (17) и (18) находимъ:

$$tg\frac{\psi}{2}=\frac{\sin\gamma+\sin\varphi-\sin\alpha}{\sin\gamma-\sin\varphi+\sin\alpha}.$$

Принявъ во вниманіе равенство (16), имѣемъ:

$$tg\frac{\psi}{2}=tg\frac{\varphi}{2}tg\frac{\alpha}{2},$$

Digitized by Google

откуда:

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{tg\frac{\psi}{2}}{tg\frac{\varphi}{2}}. \qquad (19)$$

Припомнивъ формулу (5) длины отрѣзка геодезической линіи, мы найдемъ, что длина геодезическаго перпендикуляра $CD=p$ выражается такъ:

$$p = log\frac{ctg\frac{\psi}{2}}{ctg\frac{\varphi}{2}},$$

или, на основаніи равенства (19):

$$p = log\, ctg\frac{\alpha}{2}. \qquad (20)$$

Изъ равенства (20) слѣдуетъ:

$$sin\alpha = \frac{1}{cos\, hyp(p)},\ cos\alpha = tg\, hyp(p),\ tg\alpha = \frac{1}{sin\, hyp(p)}. \qquad (21)$$

Таковы формулы, опредѣляющія уголъ параллельности α по данной величинѣ p. Онѣ тождественны съ формулами Лобачевскаго (полное собраніе сочиненій стр. 505).

Изъ формулъ (21) видно, что при $p=0$ уголъ $\alpha=\frac{\pi}{2}$; при $p=\infty$ уголъ $\alpha=0$. Величина угла параллельности измѣняется отъ $\frac{\pi}{2}$ до 0. Въ геометріи Евклида она постоянна и равна $\frac{\pi}{2}$.

Примѣняя тѣ же формулы (21) къ геодезической CA, параллельной ADB слѣва, найдемъ, что углы параллельности ACD и BCD одинаковы. Геодезическій перпендикуляръ CD дѣлитъ уголъ ACB пополамъ.

Digitized by Google

§ 9. **Площадь фигуры.**

Выдѣлимъ на плоскости какую-либо площадь σ безконечно малыхъ размѣровъ, лежащую кверху отъ оси x на конечномъ разстояніи отъ нея. Будемъ разсматривать свойства безконечно малыхъ фигуръ, помѣщающихся внутри площади σ. Свойства ихъ будутъ совершенно такія, какъ и въ геометріи Евклида. Въ самомъ дѣлѣ, дифференціалъ дуги въ изучаемомъ нами протяженіи выражается формулою:

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}. \qquad (1)$$

Пока мы не выходимъ за предѣлы безконечно-малой площади σ, величину y мы въ правѣ считать постоянною. Но въ такомъ случаѣ дифференціалъ дуги (1) будетъ разниться только постояннымъ множителемъ $\frac{1}{y}$ отъ выраженія дифференціала дуги въ Евклидовой геометріи:

$$\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Такъ какъ выраженіе дифференціала дуги опредѣляетъ собою всѣ свойства протяженія, то мы заключаемъ, что, дѣйствительно, къ фигурамъ, помѣщающимся внутри безконечно малой площади σ, можно примѣнять формулы Евклидовой геометріи.

Выдѣлимъ внутри σ прямоугольникъ, стороны котораго параллельны осямъ координатъ и въ Евклидовомъ смыслѣ по длинѣ равны dx и dy.

Въ нашемъ протяженіи длины ихъ будутъ:

$$\frac{dx}{y} \text{ и } \frac{dy}{y}.$$

Примѣняя формулу площади прямоугольника въ Евклидовой геометріи, найдемъ, что площадь безконечно-малаго прямоугольника въ нашемъ протяженіи выразится такъ:

$$\frac{dx\,dy}{y^2} \qquad (22)$$

Digitized by Google

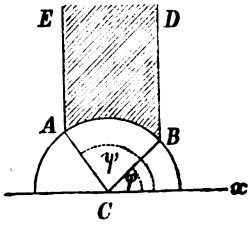
Площадь конечныхъ размѣровъ въ нашемъ протяженіи представится въ видѣ двукратнаго интеграла:

$$S = \int\int \frac{dx\,dy}{y^2}, \tag{23}$$

распространеннаго на эту площадь.

§ 10. **Площадь треугольника.**

Возьмемъ площадь, ограниченную дугою AB окружности радіуса R съ центромъ въ C на оси x (въ Евклидовомъ смыслѣ) и двумя прямыми AE и BD, параллельными оси y.



Черт. 5.

Въ нашемъ протяженіи всѣ три линіи: AB, AE и BD суть геодезическія линіи, а взятая фигура — треугольникъ $AB\infty$, у котораго двѣ вершины: A и B, лежатъ въ конечной части протяженія, а третья — въ безконечности. Хотя размѣры этого треугольника безконечно велики, тѣмъ не менѣе площадь его S, какъ мы увидимъ, конечна. Займемся ея опредѣленіемъ.

Обозначивъ углы наклоненія радіусовъ CB и CA къ оси x черезъ φ и ψ, имѣемъ:

$$S = \int_{R\cos\psi}^{R\cos\varphi} dx \int_{\sqrt{R^2-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{} = \int_{-R}^{R\cos\varphi} \frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}} = \psi - \varphi. \tag{24}$$

Внутренніе углы треугольника $AB\infty$ при A и при B конечны — ихъ мы обозначимъ буквами: A и B. Уголъ, лежащій въ безконечности, равенъ нулю.

Такъ какъ:

$$A = \pi - \psi,\quad B = \varphi,$$

то формула (24) принимаетъ видъ:

$$S = \pi - A - B. \tag{25}$$

Сумма внутреннихъ угловъ треугольника $AB\infty$:

Digitized by Google

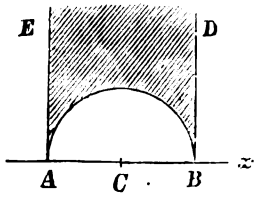
$$A+B+0$$

меньше π. Разность между π и суммою внутреннихъ угловъ треугольника мы назовемъ дефектомъ.

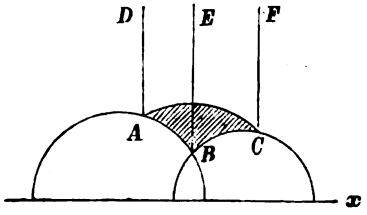
Формула (25) показываетъ. что площадь треугольника $AB\infty$ равна его дефекту.

Въ томъ случаѣ, когда точки A и B лежатъ на оси x (черт. 6), всѣ три внутреннихъ угла его равны нулю, дефектъ, а слѣдовательно и площадь треугольника S, равны π. Это—самая большая величина, которую можетъ имѣть площадь треугольника въ планиметріи Лобачевскаго. Всѣ три вершины такого треугольника лежатъ въ безконечности.

Возьмемъ произвольный треугольникъ ABC, образованный тремя дугами геодезическихъ линій. Внутренніе углы его обозначимъ буквами A,B,C. Площадь S треугольника ABC (черт. 7) легко выразить при посредствѣ площадей S_1, S_2, S_3



Черт. 6.



Черт. 7.

трехъ треугольниковъ предшествующаго типа, при чемъ:

S_1 — площадь треугольника $AC\infty$,

S_2 » » $AB\infty$,

S_3 » » $BC\infty$.

Площадь S равна:

$$S=S_2+S_3-S_1. \qquad (26)$$

Площади S_1, S_2, S_3 могутъ быть вычислены по формулѣ (25):

Digitized by Google

$$S_1 = \pi - \angle DAC - \angle FCA,$$

$$S_2 = \pi - \angle DAB - \angle EBA,$$

$$S_3 = \pi - \angle EBC - \angle FCB.$$

Вставивъ эти выраженія въ формулу (26), находимъ:

$$S = \pi - A - B - C. \tag{27}$$

Отсюда:

Теорема 3. *Площадь всякаго треугольника, образованнаго тремя геодезическими линіями, равна его дефекту.*

Это—основное свойство треугольника въ геометріи Лобачевскаго.

Изъ него, между прочимъ, слѣдуетъ, что подобныхъ фигуръ въ геометріи Лобачевскаго не существуетъ.

§ 11. **Площадь геодезическаго круга.**

Геодезическая окружность, какъ мы знаемъ, изображается уравненіемъ:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0 \cos hyp R)^2 = y_0^2 \sin^2 hyp\, R. \tag{11}$$

Распространивъ интегралъ:

$$S = \int\int \frac{dx\,dy}{y^2} \tag{23}$$

на площадь этой окружности, находимъ:

$$S = 4\pi \sin^2 hyp \frac{R}{2}. \tag{28}$$

Такова формула площади геодезическаго круга радіуса R.

Она тождественна съ найденной Лобачевскимъ (полное собраніе сочиненій стр. 527).

§ 12. **Объ эквивалентности фигуръ.**

Если фигуру перемѣстить въ ея плоскости, то съ точки зрѣнія изучаемаго нами протяженія площадь ея измѣнится Это видно изъ формулы площади:

Digitized by Google

$$S = \iint \frac{dx\,dy}{y^2}. \qquad (23)$$

Такимъ образомъ перемѣщеніе фигуры въ нашемъ протяженіи невозможно безъ измѣненія ея площади. Равныхъ фигуръ въ нашемъ протяженіи не существуетъ. То мѣсто, которое въ геометріи Евклида занимаетъ равенство фигуръ, у насъ будетъ занимать эквивалентность.

Будемъ обозначать комплексное количество:

$$z = x + yi$$

точкою съ координатами x и y и будемъ эту точку сокращенно называть точкою z, какъ это принято въ теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго. Условимся называть точки z и z' *эквивалентными*, если онѣ связаны между собою линейнымъ соотношеніемъ:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad (29)$$

гдѣ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ суть числа дѣйствительныя и удовлетворяющія соотношенію:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = +1. \qquad (30)$$

Если точка z есть точка верхней полуплоскости, то и z' есть точка той же полуплоскости.

Если z дѣйствительно, то и z' дѣйствительно. Когда точка z опишетъ какую-либо фигуру, то точка z', связанная съ нею соотношеніемъ (29), опишетъ другую фигуру, подобную первой въ безконечно малыхъ частяхъ. Такія фигуры мы условимся называть *эквивалентными*.

Изъ теоріи функцій извѣстно, что если точка z опишетъ окружность, то и точка z', связанная съ нею соотношеніемъ (29), тоже опишетъ окружность. Эти окружности эквивалентны.

Если данная окружность имѣла центръ на оси x, то и всѣ эквивалентныя ей окружности будутъ имѣть центры на оси x.

Digitized by Google

Слѣдовательно *въ изучаемомъ нами протяженіи всякая линія, эквивалентная геодезической, есть тоже геодезическая.*

Если $z=x+yi$ и $z'=x'+y'i$, то изъ равенствъ (29) и (30) слѣдуетъ:

$$x'=\frac{\alpha\gamma(x^2+y^2)+(\alpha\delta+\beta\gamma)x+\beta\delta}{(\gamma x+\delta)^2+\gamma^2y^2},\quad y'=\frac{y}{(\gamma x+\delta)^2+\gamma^2y^2}. \tag{31}$$

Формулы (31) выражаютъ зависимость между координатами двухъ эквивалентныхъ точекъ.

Изъ тѣхъ же соотношеній (29) и (30) находимъ:

$$dz'=\frac{dz}{(\gamma z+\delta)^2}, \tag{32}$$

гдѣ:

$$dz'=dx'+i\,dy',\ dz=dx+i\,dy. \tag{33}$$

Посмотримъ, какое произойдетъ измѣненіе въ формулѣ дифференціала дуги:

$$ds=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}, \tag{1}$$

если замѣнимъ координаты x и y координатами эквивалентной точки: x' и y'.

Послѣ замѣны получимъ:

$$ds'=\frac{\sqrt{dx'^2+dy'^2}}{y'}. \tag{1'}$$

Изъ формулъ (33) имѣемъ:

$$\mathrm{mod}.dz'=\sqrt{dx'^2+dy'^2},\quad \mathrm{mod}.dz=\sqrt{dx^2+dy^2}, \tag{34}$$

а изъ равенства (32):

$$\mathrm{mod}.dz'=\frac{\mathrm{mod}.dz}{(\gamma x+\delta)^2+\gamma^2y^2},$$

или на основаніи второй формулы (31):

$$\frac{\mathrm{mod}.dz'}{y'}=\frac{\mathrm{mod}.dz}{y}.$$

Digitized by Google

Отсюда, принявъ во вниманіе равенства (34), (1) и (1′):

$$ds' = ds. \qquad (35)$$

Полученный результатъ показываетъ, что *въ нашемъ протяженіи дифференціалы эквивалентныхъ дугъ равны между собою.*

Въ такомъ случаѣ мы въ правѣ утверждать, что въ изучаемомъ нами протяженіи

1) эквивалентныя дуги равны,

2) углы, составленные эквивалентными дугами, равны,

3) эквивалентныя фигуры равновелики.

Такъ какъ безконечно удаленныя точки нашего протяженія эквивалентны только безконечно удаленнымъ, то мы находимъ, что всякія двѣ геодезическія, эквивалентныя двумъ параллельнымъ между собою геодезическимъ, тоже между собою параллельны.

Мы видимъ, что дѣйствительно эквивалентность вполнѣ заступаетъ мѣсто равенства въ геометріи Евклида, а преобразованія чертежа формулами (31) — мѣсто передвиженія чертежа въ его плоскости.

Разсмотрѣнныя нами особенности взятаго протяженія совершенно конкретно уясняютъ смыслъ всѣхъ основныхъ теоремъ планиметріи Лобачевскаго. Остальныя теоремы планиметріи Лобачевскаго и вся его тригонометрія вытекаютъ изъ этихъ основныхъ положеній, какъ слѣдствіе; поэтому на нихъ останавливаться мы не будемъ.

§ 18. **Преобразованіе полуплоскости въ площадь круга.**

Въ нѣкоторыхъ аналитическихъ приложеніяхъ неевклидовой геометріи оказывается болѣе удобнымъ вмѣсто полуплоскости избрать иную площадь для конкретнаго истолкованія теоремъ планиметріи Лобачевскаго. За такую площадь принимаютъ площадь круга произвольнаго радіуса; чаще всего— площадь круга, описаннаго около начала координатъ радіусомъ, равнымъ единицѣ. При этомъ оказывается возможнымъ выбрать такое выраженіе дифференціала дуги, чтобы грани-

Digitized by Google

цею протяженія служила взятая окружность и чтобы протяженіе имѣло всѣ свойства плоскости Лобачевскаго.

Формулы для такого протяженія всего проще мы можемъ получить, преобразуя протяженіе, разсмотрѣнное въ предшествующихъ параграфахъ, подстановкою:

$$z = \frac{z' + i}{1 + iz'}, \tag{36}$$

гдѣ $z = x + yi$ есть точка прежняго протяженія, а $z' = x' + y'i$ —новаго протяженія.

По сравненіи дѣйствительной и мнимой части въ обѣихъ частяхъ равенства (36), находимъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2x'}{1 - 2y' + x'^2 + y'^2}, \\ y &= \frac{1 - x'^2 - y'^2}{1 - 2y' + x'^2 + y'^2}. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Эти формулы выражаютъ зависимость между координатами точки прежняго протяженія и соотвѣтствующей точки новаго.

Изъ формулъ (37) видно, что границею новаго протяженія служитъ окружность, описанная около начала координатъ радіусомъ равнымъ единицѣ. Дѣйствительно, положивъ во второй формулѣ (37) $y = 0$, находимъ:

$$x'^2 + y'^2 = 1. \tag{38}$$

Такъ какъ при $x' = 0$, $y' = 0$ формулы (37) даютъ $x = 0$, $y = 1$, то новое протяженіе расположено *внутри* окружности (38).

Для нахожденія формулы дифференціала ds' дуги въ новомъ протяженіи, преобразуемъ формулу:

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} \tag{1}$$

подстановкою (37) или, что то же, (36).

Изъ формулы (36) слѣдуетъ:

Digitized by Google

$$dz = \frac{2dz'}{(1+iz')^2},$$

откуда:

$$\mathrm{mod}.dz = \frac{2\,\mathrm{mod}.dz'}{1-2y'+x'^2+y'^2},$$

или:

$$\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{2\sqrt{dx'^2+dy'^2}}{1-2y'+x'^2+y'^2}$$

Принявъ во вниманіе вторую формулу (37), находимъ:

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y} = \frac{2\sqrt{dx'^2+dy'^2}}{1-x'^2-y'^2}.$$

Дифференціалъ дуги въ нашемъ новомъ протяженіи выражается такъ:

$$ds' = \frac{2\sqrt{dx'^2+dy'^2}}{1-x'^2-y'^2}. \qquad (39)$$

Въ полярныхъ координатахъ это выраженіе приметъ видъ

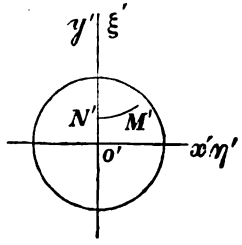
$$ds' = \frac{2\sqrt{d\rho'^2+\rho'^2 d\psi'^2}}{1-\rho'^2}. \qquad (40)$$

Изъ теоріи функцій извѣстно, что линейная подстановка преобразуетъ окружность въ окружность и даетъ отображеніе всюду въ безконечно-малыхъ частяхъ подобное отображаемой фигурѣ. Поэтому *геодезическими линіями въ новомъ протяженіи будутъ служить дуги окружностей ортогональныя къ границѣ* (38). Такъ какъ $ds=ds'$, то длины всякихъ соотвѣтственныхъ дугъ въ нашихъ двухъ протяженіяхъ—одинаковы.

Для построенія геодезическихъ координатъ въ новомъ протяженіи, преобразуемъ фигуру, представленную на чертежѣ 2, помощью формулъ (37). Ось x преобра-

Digitized by Google

зуется въ окружность (38), описанную около начала координатъ O' радіусомъ, равнымъ единицѣ. Ее мы будемъ называть сокращенно окружностью O'. Геодезическія линіи, служащія осями ξ и η, — преобразуются въ прямыя линіи ξ' и η', совпадающія съ осями координатъ y' и x'. Дуга NM геодезической преобразуется въ дугу $N'M'$ геодезической новаго протяженія: съ точки зрѣнія геометріи Евклида — это дуга окружности съ центромъ на оси y' и ортогональной къ окружности O'.



Черт. 8.

Длины геодезическихъ $O'N' = \xi'$ и $N'M' = \eta'$ новаго протяженія суть геодезическія координаты точки M'. Такъ какъ ξ и ξ', η и η' суть соотвѣтственныя дуги стараго и новаго протяженія, то онѣ равны между собою: $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$. Дифференціалъ дуги новаго протяженія въ геодезическихъ координатахъ выражается той же формулой (8) только съ замѣной ξ и η черезъ ξ' и η'. Новое протяженіе обладаетъ поэтому всѣми свойствами плоскости Лобачевскаго.

Такъ какъ въ прежнемъ протяженіи геодезическая окружность помѣщалась вся въ верхней полуплоскости и имѣла видъ окружности съ Евклидовой точки зрѣнія, то въ новомъ протяженіи геодезическою окружностью будетъ служить окружность, всѣми точками помѣщающаяся внутри круга O'. Предѣльная окружность будетъ касаться изнутри окружности O', и точка касанія будетъ служить геодезическимъ центромъ этой предѣльной окружности. Длина геодезической окружности будетъ выражаться тою же формулою (15), какъ и въ предшествующемъ протяженіи.

Свойства параллельныхъ въ новомъ протяженіи будутъ тѣ же самыя, какъ и въ прежнемъ, т. е. одинаковы со свойствами параллельныхъ въ геометріи Лобачевскаго.

Повторяя разсужденія, приведенныя въ § 9, находимъ, что элементъ площади выражается формулою:

Digitized by Google

$$\frac{4dx'dy'}{(1-x'^2-y'^2)^2}, \tag{41}$$

или, въ полярныхъ координатахъ:

$$\frac{4\rho'd\rho'd\theta'}{(1-\rho'^2)^2}. \tag{42}$$

Площади геодезическаго круга и треугольника выразятся тѣми же формулами (28) и (27), какъ и въ предшествующемъ протяженіи, т. е. тѣми формулами, которыя были найдены Лобачевскимъ.

Digitized by Google

О ДВИЖЕНІИ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ ТЯЖЕЛАГО ТВЕРДАГО ТѢЛА, ВРАЩАЮЩАГОСЯ ОКОЛО НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ.

Ѳ. А. Слудскаго.

П. А. Некрасовымъ обнаружено было аналитически *), а Н. Е. Жуковскимъ—геометрически**), что при вращеніи тяжелаго твердаго тѣла около неподвижной точки, въ случаѣ Гесса, центръ тяжести движется какъ сферическій маятникъ съ нѣкоторою приведенною напряженностью тяжести. Это свойство движенія тѣла представляетъ большой интересъ, и въ настоящей замѣткѣ мы займемся разысканіемъ другихъ случаевъ, гдѣ оно имѣетъ мѣсто.

Возьмемъ систему неподвижныхъ осей координатъ x, y, z, съ началомъ въ неподвижной точкѣ тѣла и съ осью z направленной по вертикали внизъ. Вообразимъ затѣмъ систему подвижныхъ осей ξ, η, ζ, идущихъ по главнымъ осямъ инерціи для неподвижной точки. Координатамъ центра тяжести будемъ приписывать указатель нуль.

---

*) *Къ задачѣ о движеніи тяжелаго твердаго тѣла около неподвижной точки* (Мат. Сб., т. XVI) и *О движеніи тяжелаго твердаго тѣла около неподвижной точки* (Труды Отдѣленія физическихъ наукъ О. Л. Е., т. V, вып. 2).

**) *Локсодромическій маятникъ Гесса* (Труды Отдѣленія физическихъ наукъ О. Л. Е., т. V, вып. 2).

Digitized by Google

Чтобы центръ тяжести двигался какъ сферическій маятникъ съ нѣкоторою приведенною напряженностью тяжести ng,—должны удовлетвориться уравненія:

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = Nx_0;\ \frac{d^2y_0}{dt^2} = Ny_0;\ \frac{d^2z_0}{dt^2} = ng + Nz_0; \qquad (1)$$

N—величина пропорціональная сопротивленію.

Означивъ чрезъ γ, γ' и γ'' косинусы угловъ наклоненія оси z къ осямъ ξ, η и ζ, изъ уравненій (1) легко получимъ мы для проложеній ускоренія центра тяжести на оси ξ, η и ζ слѣдующія выраженія:

$$N\xi_0 + ng\gamma;\ N\eta_0 + ng\gamma':\ N\zeta_0 + ng\gamma''. \qquad (2)$$

Припомнимъ выраженія проложеній на оси ξ, η, ζ ускоренія всякой точки тѣла въ разсматриваемой задачѣ. Примѣнивъ эти выраженія къ центру тяжести и сравнивъ результаты съ выраженіями (2) найдемъ:

$$\zeta_0 \frac{dq}{dt} - \eta_0 \frac{dr}{dt} + p(\eta_0 q + \zeta_0 r) - (q^2 + r^2)\xi_0 = N\xi_0 + ng\gamma;$$

$$\xi_0 \frac{dr}{dt} - \zeta_0 \frac{dp}{dt} + q(\zeta_0 r + \xi_0 p) - (r^2 + p^2)\eta_0 = N\eta_0 + ng\gamma'; \qquad (3)$$

$$\eta_0 \frac{dp}{dt} - \xi_0 \frac{dq}{dt} + r(\xi_0 p + \eta_0 q) - (p^2 + q^2)\zeta_0 = N\zeta_0 + ng\gamma'';$$

p, q и r суть проложенія на оси ξ, η и ζ скорости вращенія.

Дифференціальныя уравненія настоящей задачи таковы:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{(B-C)}{A} qr + \frac{Mg}{A}(\eta_0\gamma'' - \xi_0\gamma');$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{(C-A)}{B} rp + \frac{Mg}{B}(\xi_0\gamma - \xi_0\gamma'') \qquad (4)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{(A-B)}{C} pq + \frac{Mg}{C}(\xi_0\gamma' - \eta_0\gamma);$$

Digitized by Google

M—масса тѣла; A, B и C — моменты инерціи его относительно осей ξ, η и ζ.

Замѣняя въ уравненіяхъ (3) dp/dt, dq/dt и dr/dt ихъ выраженіями (4), находимъ:

$$\begin{aligned}
&(B+C-A)\left(\frac{\zeta_0}{B}rp+\frac{\eta_0}{C}pq\right)+Mg\gamma\left(\frac{\zeta_0^2}{B}+\frac{\eta_0^2}{C}\right)-\\
&-Mg\xi_0\left(\frac{\zeta_0}{B}\gamma''+\frac{\eta_0}{C}\gamma'\right)-(q^2+r^2)\xi_0=N\xi_0+ng\gamma;\\
&(A+C-B)\left(\frac{\xi_0}{C}pq+\frac{\zeta_0}{A}qr\right)+Mg\gamma'\left(\frac{\xi_0^2}{C}+\frac{\zeta_0^2}{A}\right)-\\
&-Mg\eta_0\left(\frac{\xi_0}{C}\gamma+\frac{\zeta_0}{A}\gamma''\right)-(p^2+r^2)\eta_0=N\eta_0+ng\gamma';\\
&(A+B-C)\left(\frac{\eta_0}{A}qr+\frac{\xi_0}{B}rp\right)+Mg\gamma''\left(\frac{\eta_0^2}{A}+\frac{\xi_0^2}{B}\right)-\\
&-Mg\zeta_0\left(\frac{\eta_0}{A}\gamma'+\frac{\xi_0}{B}\gamma\right)-(p^2+q^2)\zeta_0=N\zeta_0+ng\gamma''.
\end{aligned}\tag{5}$$

По исключеніи изъ этихъ уравненій величины N, получимъ мы два условія, при выполненіи которыхъ центръ тяжести будетъ двигаться какъ сферическій маятникъ съ приведенною напряженностью тяжести ng.

Задача о вращеніи тяжелаго твердаго тѣла около неподвижной точки, во всей ея общности, до сихъ поръ еще не рѣшена. Изслѣдованными частными случаями должны мы ограничить, естественно, и наши изысканія.

Разсмотримъ сперва простѣйшій случай, когда $A=B=C$. Мы можемъ взять и возьмемъ систему подвижныхъ осей такъ, чтобы центръ тяжести лежалъ на оси ζ. Будемъ имѣть: $\xi_0=\eta_0=0$. Интегрированіе уравненій (4) дастъ въ настоящемъ случаѣ:

$$p^2+q^2=\frac{2Mg\zeta_0}{A}\gamma''+h;\quad \gamma p+\gamma' q+\gamma'' r=\alpha;\quad r=k;\tag{6}$$

Digitized by Google

h, α и k—произвольныя постоянныя. Изъ уравненій (5) найдемъ:

$$\zeta_0 rp + \frac{Mg\zeta_0^2}{A}\gamma = ng\gamma;$$

$$\zeta_0 qr + \frac{Mg\zeta_0^2}{A}\gamma' = ng\gamma'; \qquad (7)$$

$$-(p^2+q^2)\zeta_0^2 = N\zeta_0 + ng\gamma''.$$

Первымъ двумъ изъ этихъ уравненій можно удовлетворить лишь положивши $p = \beta\gamma$ и $q = \beta\gamma'$, при β постоянномъ, или же $r=0$. Въ первомъ случаѣ, какъ показываютъ уравненія (6), косинусъ γ'' долженъ быть постояннымъ, т. е. центръ тяжести долженъ двигаться по прямому круглому конусу; коэффиціентъ n приведенія напряженности тяжести опредѣлится уравненіемъ

$$\zeta_0 k\beta + \frac{Mg\zeta_0^2}{A} = ng;$$

Во второмъ случаѣ центръ тяжести будетъ двигаться какъ сферическій маятникъ съ коэффиціентомъ приведенія n равнымъ $M\zeta_0^2/A$.

Обратимся къ болѣе общему случаю разсматриваемой задачи, когда $\xi_0 = \eta_0 = 0$, $A=B$, а C отлично отъ A и B. Интегрированіе уравненій (4) дастъ теперь:

$$p^2+q^2 = \frac{2Mg\zeta_0}{A}\gamma'' + h; \quad A(p\gamma+q\gamma') + Cr\gamma'' = \alpha; \quad Cr = k.$$

Изъ уравненій (5) найдемъ:

$$\frac{C}{A}\zeta_0 rp + \frac{Mg\zeta_0^2}{A}\gamma = ng\gamma; \quad \frac{C}{A}\zeta_0 qr + \frac{Mg\zeta_0^2}{A}\gamma' = ng\gamma';$$

$$-(p^2+q^2)\zeta_0 = N\zeta_0 + ng\gamma''.$$

Отсюда получаются такія же заключенія, какъ изъ уравненій (7). Прибавляется лишь одно новое рѣшеніе: $C = 0$. Центръ тяжести движется какъ сферическій маятникъ и тогда,

Digitized by Google

когда тѣло представляетъ собою прямую линію, укрѣпленную неподвижно въ одной изъ своихъ точекъ.

Въ случаѣ Гесса:

$$A>B>C;\ \eta_0=0;\ A(B-C)\xi_0^2=C(A-B)\zeta_0^2;$$

сверхъ того допускается существованіе нижеслѣдующаго частнаго интеграла дифференціальныхъ уравненій движенія:

$$A\xi_0 p+C\zeta_0 r=0.$$

Уравненія (5) удовлетворяются; коэффиціентъ приведенія n оказывается равнымъ Ml^2/B, гдѣ l есть разстояніе центра тяжести отъ неподвижной точки.

Остается еще одинъ изслѣдованный частный случай задачи: случай С. В. Ковалевской. Въ этомъ случаѣ:

$$A=B=2C;\ \eta_0=\zeta_0=0.$$

Положимъ, для краткости, $2Mg\xi_0/A=c_0$. Уравненія (4) принимаютъ видъ:

$$2\frac{dp}{dt}=qr;\ 2\frac{dq}{dt}=-rp-c_0\gamma'';\ \frac{dr}{dt}=c_0\gamma'$$

Для нихъ имѣемъ мы слѣдующіе интегралы:

$$2(p^2+q^2)+r^2=2c_0\gamma+h;\ 2(p\gamma+q\gamma')+r\gamma''=\alpha;$$

$$(p^2-q^2+c_0\gamma)^2+(2pq+c_0\gamma')^2=k^2.$$

Изъ уравненій (5) получаемъ:

$$-(q^2+r^2)\xi_0=N\xi_0+ng;\ \xi_0(pq+c_0\gamma')=ng\gamma';$$

$$\xi_0(3rp+c_0\gamma'')=2ng\gamma''.$$

Послѣднія два уравненія, говоря вообще, не удовлетворяются. Въ случаѣ С. В. Ковалевской движеніе центра тяжести интересующимъ насъ свойствомъ вообще, поэтому, не обладаетъ. На случаяхъ болѣе частныхъ останавливаться не будемъ.

Не трудно рѣшить нашу задачу и при болѣе широкой ея

Digitized by Google

постановкѣ: найти условія, при выполненіи которыхъ одна какая-нибудь точка тѣла движется какъ сферическій маятникъ съ привсденною напряженностью тяжести ng. Называя координаты означенной точки относительно подвижныхъ осей чрезъ ξ, η, ζ, и разсуждая по предыдущему, получимъ мы вмѣсто уравненій (5) нижеслѣдующую систему уравненій:

$$(C+B-A)\left(\frac{\zeta}{B}rp+\frac{\eta}{C}pq\right)+Mg\gamma\left(\frac{\zeta\zeta_0}{B}+\frac{\eta\eta_0}{C}\right)-$$

$$-Mg\xi_0\left(\frac{\zeta}{B}\gamma'+\frac{\eta}{C}\gamma'\right)-(q^2+r^2)\xi=N\xi+ng\gamma\ ;$$

$$(A+C-B)\left(\frac{\xi}{C}pq+\frac{\zeta}{A}qr\right)+Mg\gamma'\left(\frac{\xi\xi_0}{C}+\frac{\zeta\zeta_0}{A}\right)-$$

$$-Mg\eta_0\left(\frac{\xi}{C}\gamma+\frac{\zeta}{A}\gamma''\right)-(r^2+p^2)\eta=N\eta+ng\gamma'\ ;$$

$$(B+A-C)\left(\frac{\eta}{A}qr+\frac{\zeta}{B}rp\right)+Mg\gamma''\left(\frac{\eta\eta_0}{A}+\frac{\xi\xi_0}{B}\right)-$$

$$-Mg\zeta_0\left(\frac{\eta}{A}\gamma'+\frac{\xi}{B}\gamma\right)-(p^2+q^2)\zeta=N\zeta+ng\gamma''.$$

Примѣненіемъ этихъ уравненій къ частнымъ случаямъ и соотвѣтственными дальнѣйшими изслѣдованіями мы позволимъ себѣ пока не заниматься.

Digitized by Google

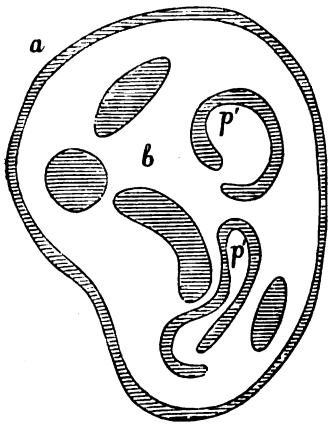
КЪ ВОПРОСУ ОБЪ ЭЛЕКТРОСТРИКЦІИ.

Н. А. Умова.

Въ статьяхъ по электрострикціи, появившихся въ послѣднее время, приводится формула упругости газа въ электрическомъ полѣ, вытекающая изъ теоріи Гельмгольтца:

$$p = const + \frac{\theta R^2}{2} \qquad (1)$$

гдѣ p есть упругость газа, R сила поля, θ нѣкоторый коэффиціентъ, обусловливаемый природою газа. Постоянное, входящее въ это выраженіе, опредѣляется какъ упругость газа внѣ поля (тамъ, гдѣ $R = o$). Такое опредѣленіе нельзя считать полнымъ, такъ какъ упругость газа въ мѣстахъ, соотвѣтствующихъ $R = o$, остается неизвѣстной. Настоящая замѣтка имѣетъ въ виду отыскать физическій смыслъ этого постояннаго.



Представимъ себѣ твердую оболочку a, замыкающую нѣкоторый объемъ. Внутри этого объема находятся твердыя тѣла, неподвижныя, съ полостями, соединящимися или не соединяющимися съ окружающимъ пространствомъ, или же безъ полостей.

Digitized by Google

Эти тѣла могутъ быть частью проводниками, частью діэлектриками и т. д.

Пространство b, лежащее между тѣлами и сообщающіяся съ нимъ полости, наполнено газомъ вездѣ равномѣрной плотности ρ_0, упругости p_0. Неизмѣняемый, въ виду наложенныхъ условій, объемъ газа означимъ черезъ v; неизмѣнную массу газа черезъ M. Соотношеніе между упругостью и плотностью газа выражается согласно закону Бойля формулой:

$$p = a\rho \qquad (2)$$

гдѣ a есть постоянное. Если бы въ пространствѣ, замыкаемомъ твердою оболочкою, произошли бы какія бы то ни было измѣненія плотности и упругости газа, они подчинялись бы слѣдующимъ условіямъ, вытекающимъ изъ неизмѣняемости массы газа и изъ условія (2):

$$\frac{1}{v}\int \rho dv = \rho_0 \quad \text{и, умножая на } a \ldots . \frac{1}{v}\int p dv = p_0 \qquad (3)$$

т. е. при всѣхъ перемѣнахъ въ упругости и плотности — средняя плотность и средняя упругость будутъ равны начальной плотности и упругости газа. Это правило и дастъ намъ возможность найти смыслъ постояннаго въ выраженіи (1). Подставляя его въ (3), находимъ:

$$const + \frac{1}{v}\int \frac{\theta R^2}{2}\, dv = p_0 .$$

Средній членъ этого выраженія представляетъ собою среднее значеніе функціи $\frac{\theta R^2}{2}$ въ объемѣ v. Обозначая его чертою, поставленною сверху и замѣняя *const.* знакомъ p', находимъ, что явленія электрострикціи въ газѣ резюмируются слѣдующими двумя формулами:

$$\left.\begin{aligned} p &= p' + \frac{\theta R^2}{2} \\ p' &= p_0 - \overline{\frac{\theta R^2}{2}} \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

Digitized by Google

Такимъ образомъ p', представляющее упругость газа въ тѣхъ частяхъ объема v, въ которыхъ сила поля равна нулю (напр. въ полостяхъ проводниковъ), есть уменьшенная на среднее значеніе $\frac{\theta R^2}{2}$, начальная упругость газа. Эти формулы показываютъ намъ, что въ тѣхъ частяхъ поля, въ коихъ

$$\frac{\theta R^2}{2} > \overline{\frac{\theta R^2}{2}}$$

будетъ

$$p > p_0$$

Въ тѣхъ же частяхъ, для которыхъ

$$\frac{\theta R^2}{2} < \overline{\frac{\theta R^2}{2}}$$

будетъ

$$p < p_0.$$

Въ тѣхъ частяхъ поля, для которыхъ $\frac{\theta R^2}{2}$ равно среднему значенію, упругость газа не измѣняется. И такъ въ однихъ частяхъ электрическаго поля упругость газа увеличивается сравнительно съ его начальною упругостью, въ другихъ — уменьшается. Къ такимъ заключеніямъ нельзя придти при прежнемъ опредѣленіи *const* въ ур. (1); мы и приходимъ къ нимъ, только принимая во вниманіе и вторую формулу изъ группы (I).

Если бы мы имѣли намѣреніе, или имѣли бы возможность судить о явленіи, происходящемъ въ электрическомъ полѣ, только по измѣненію упругости газа въ тѣхъ частяхъ поля, въ которыхъ сила $R=o$, то пришли бы къ слѣдующимъ заключеніямъ. Раздѣляя второе изъ уравненій группы (I) на a, умножая на v и припоминая опредѣленіе члена $\overline{\frac{\theta R^2}{2}}$, найдемъ:

$$m = M - \int \frac{\theta R^2}{2a}\, dv \qquad (4)$$

Digitized by Google

здѣсь m есть масса газа, которая, будучи распредѣлена равномѣрно по всему объему v, имѣла бы упругость p'; M есть дѣйствительная масса газа. И такъ мы пришли бы къ заключенію, что электрическія силы связываютъ упругость массы газа, представляемой выраженіемъ:

$$\int \frac{\theta R^2}{2a}\, dv \qquad (5)$$

Вторая изъ формулъ (I) есть правильно истолкованная формула кн. Голицына («Изслѣдованія по математической физикѣ» стр. 64, форм. I'); она дополняетъ наши представленія объ явленіяхъ электрострикціи въ газахъ, согласно съ теоріей Гельмгольтца.

Указанныя здѣсь свойства не составляютъ спеціальной принадлежности электрическаго поля. Если φ представляетъ потенціалъ силъ дѣйствующихъ на газъ, и среднее значеніе φ будетъ опредѣленно подъ условіемъ:

$$\frac{1}{v}\int e^{\frac{\varphi}{a}}\, dv = e^{\frac{\overline{\varphi}}{a}}$$

мы получимъ:

$$p = p' e^{\frac{\varphi}{a}}$$

$$p' = p_0 e^{-\frac{\overline{\varphi}}{a}}$$

Упругость газа сохраняется неизмѣнною въ тѣхъ частяхъ пола, въ которыхъ значеніе потенціала силъ равно его среднему значенію.

20 сентября 1894 г.

Digitized by Google

О ФОРМѢ РАДИКАЛЬНАГО РѢШЕНІЯ УРАВНЕНІЙ ПЕРВОНАЧАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ.

И. П. Долбни.

§ 1. Общая форма радикальнаго рѣшенія уравненій дана, безъ докавательства, Абелемъ въ неоконченномъ мемуарѣ «Sur la résolution alégbrique des équations» [1]). Относительно уравненій первоначальной степени теорема Абеля заключается въ слѣдующемъ:

Если неприводимое уравненіе первоначальной степени разрѣшимо алгебраически, то корни его должны имѣть форму:

$$x = A + \sqrt[n]{R_1} + \sqrt[n]{R_2} + \ldots + \sqrt[n]{R_{n-1}}, \qquad (1)$$

гдѣ A количество раціональное, R_1, R_2, $\ldots R_{n-1}$ суть корни уравненія $(n-1)$-й степени. Относительно этого результата справедливо замѣчаетъ Кронекеръ, что форма радикальнаго рѣшенія всетаки остается слишкомъ общей и слишкомъ мало разъясненной. «Единственный трудъ, говоритъ Кронекеръ [2]), нѣсколько освѣщающій вопросъ, есть замѣтка Абеля о корняхъ уравненія 5-й степени съ цѣлыми коефиціентами». Въ письмѣ къ Holmboe отъ 24 Октября 1826 года, Абель

[1]) Oeuvres complètes, t. 2, p. 222, 1881 г.

[2]) Serret, „Cours d'Algèbre supérieure", 1866, t. 2. p. 654.

Digitized by Google

по сему предмету выражается слѣдующимъ образомъ [3]): «Что касается до уравненія 5-й степени, то я нашелъ, что если таковыя уравненія разрѣшимы алгебраически, — ихъ корни должны заключаться въ формѣ

$$x = A + \sqrt[5]{R} + \sqrt[5]{R'} + \sqrt[5]{R''} + \sqrt[5]{R'''},$$

гдѣ R, R', R'', R''' суть корни уравненія 4-й степени, выражающіеся при помощи однихъ квадратныхъ радикаловъ». Кронекеръ, въ сообщеніи Берлинской академіи наукъ 20 іюня 1853 года, сдѣлалъ значительный шагъ впередъ въ смыслѣ разъясненія формы (1) радикальнаго рѣшенія уравненій первоначальной степени. А именно онъ показалъ, что R_1, R_2, R_3,... R_{n-1} обладаютъ спеціальнымъ свойствомъ, которое заключается въ томъ, что «не только симетрическія функціи отъ R_1 R_2,... R_{n-1} раціонально извѣстны, но также *циклическія* функціи этихъ количествъ выражаются раціонально въ коефиціентахъ даннаго уравненія; другими словами: уравненіе степени (n—1)-й, котораго корни R_1, R_2,... R_{n-1}, должно относиться къ категоріи *абелевыхъ*[4]). Теоремы Абеля, предложенныя въ вышеупомянутомъ неоконченномъ мемурѣ, впослѣдствіи были доказаны нѣсколькими авторами. Я могу указать на двѣ работы этого рода: одна работа Мальмстена, напечатанная въ XXXIV, а другая Больдта въ LXXXVII т. журнала Crelle. Основываясь на формѣ радикальнаго рѣшенія, предусмотрѣнной Абелемъ, можно, съ большою простотою, доказать теоремы *Галюа*, дающія, какъ извѣстно, точный критерій разрѣшимости алгебраическихъ уравненій первоначальной степени въ радикалахъ. Въ статьѣ «о критеріи Галюа» [5]) мною не только доказаны теоремы Галюа, но и теорема Кронекера, только что указанная; слѣдовательно существуетъ тѣсная связь между послѣдованіями Абеля, Галюа и Кронекера. Не смотря на то, что вопросъ о разрѣшимости

---

[3]) Oeuvres complètes, 1881, t. 2. p. 260.

[4]) Serret, "Cours d'algèbre supérieure" 1866, t. 2. p. 657.

[5]) Nouv. Ann. de Mathémat., Octobre, 1888.

Digitized by Google

алгебраическихъ уравненій въ радикалахъ выясненъ достаточно хорошо,—возможна, безъ сомнѣнія, дальнѣйшая его обработка. Въ настоящей статьѣ дѣлается попытка дать радикальному рѣшенію уравненій первоначальной степени форму болѣе конкретную въ сравненіи съ той, которая дана Кронекеромъ. Повидимому форма, о которой здѣсь будетъ рѣчь, еще не обращала на себя вниманія математиковъ.

§ 2. Дано неприводимое алгебраическое уравненіе

$$x^n+px^{n-2}+qx^{n-3}+\ldots\ldots+rx+s=0,$$

гдѣ n число первоначальное. Называя корни этого уравненія по примѣру Serret, черезъ

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots x_{n-1},$$

составимъ линейную ихъ функцію

$$R_1=x_0+\alpha^{n-1}x+\alpha^{n-2}x_2+\ldots\ldots\alpha^2x_{n-2}+\alpha x_{n-1},$$

гдѣ α есть одинъ изъ мнимыхъ корней двучленнаго уравненія

$$\alpha^n-1=0.$$

Будемъ измѣнять R_1 посредствомъ степеней круговой подстановки

$$S=\begin{pmatrix} x_1,x_2,x_3,\ldots x_{n-2},x_{n-1},x_0 \\ x_0,x_1,x_2,\ldots x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1} \end{pmatrix},$$

которую обозначимъ, какъ обыкновенно, черезъ

$$S=\begin{pmatrix} z+1 \\ z \end{pmatrix}.$$

Имѣемъ

$$S^k(R_1)=x_k+\alpha^{n-1}x_{k+1}+\alpha^{n-2}x_{k+2}+\ldots+\alpha^2x_{k-2}+\alpha x_{k-1},$$

или

$$S^k(R_1)=\alpha_k(\alpha^{n-k}x_k+\alpha^{n-k-1}x_{k+1}+\ldots+\alpha^{n-k-1}x_{k-1}),$$

или

$$S^k(R_1)=\alpha^kR_1.$$

Digitized by Google

Отсюда слѣдуетъ, что

$$S(R_1)=\alpha R_1,\ S^2(R_1)=\alpha^2 R_1,\ \ldots S^{n-1}(R_1)=\alpha^{n-1}R_1.$$

§ 3. Пусть ρ есть первообразный корень первоначальнаго числа n. Назовемъ

$$x_0+\alpha^{n-1}x_\rho+\alpha^{n-2}x_{2\rho}+\ldots+\alpha x_{n-\rho}=R_\rho,$$

$$x_0+\alpha^{n-1}x_{\rho^2}+\alpha^{n-2}x_{2\rho^2}+\ldots+\alpha x_{n-\rho^2}=R_{\rho^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_0+\alpha^{n-1}x_{\rho^{n-3}}+\alpha^{n-2}x_{2\rho^{n-2}}+\ldots+\alpha x_{n-\rho^{n-2}}=R_{\rho^{n-2}},$$

гдѣ вмѣсто

$$\rho,\ \rho^2,\ \rho^3,\ \ldots\rho^{n-2}$$

слѣдуетъ брать наименьшіе положительные вычеты ихъ по модулю n.

Обозначая черезъ T подстановку

$$T=\begin{pmatrix}\rho z\\ z\end{pmatrix},$$

будемъ имѣть

$$T(R_1)=R_\rho,$$

$$T^2(R_1)=T(R_\rho)=R_{\rho^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$T^{n-2}(R_1)=R_{\rho^{n-2}},$$

$$T^{n-1}(R_1)=R_{\rho^{n-1}}=R_1$$

§ 4. Принявъ эти обозначенія, вычислимъ раціональную функцію корней

$$Q=R_1R_{n-1}+R_\rho R_{n-\rho}+R_{\rho^2}R_{n-\rho^2}+\ldots+R_{\rho^{\frac{n-3}{2}}}R_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}}.$$

Имѣемъ

Digitized by Google

$$R_i = x_0 + \alpha^{n-i}x_1 + \ldots + \alpha^{n-i}x_i + \ldots \alpha^{n-k}x_k + \ldots + \alpha^2 x_{n-2} +$$

$$+ \alpha x_{n-1},$$

$$R_{n-i} = x_0 + \alpha x_i + \ldots + \alpha^i x_i + \ldots + \alpha^k x_k + \ldots + \alpha^{n-2}x_{n-2} +$$

$$+ \alpha^{n-i}x_{n-1}.$$

Если назвать, для сокращенія письма

$$(\alpha^k + \alpha^i) = (k,l),$$

то получимъ

$$R_i R_{n-i} + \sum_0^{n-1} x_i^2 + (1,n-1)x_0x_i + (2,n-2)x_0x_2 + \ldots +$$

$$+ (1,n-1)x_0x_{n-i} + \ldots + (k-i,\, i-k)\, x_ix_k + \ldots +$$

$$+ (1+n,\, n-1)\, x_{n-2}\, x_{n-i},$$

или еще проще

$$R_i R_{n-i} = \sum_0^{n-1} x_i^2 + (1,-1)x_0x_i + (2,-2)x_0x_2 + \ldots +$$

$$+ (1,-1)x_0x_{n-i} + \ldots + (k-i,\, i-k)x_ix_k + \ldots +$$

$$+ (1,-1)x_{n-2}x_{n-i}.$$

Прилагая къ этому равенству подстановку

$$T = \begin{pmatrix} \rho z \\ z \end{pmatrix}$$

послѣдовательно $\frac{n-3}{2}$ разъ, получимъ

$$R_\rho R_{n-\rho} = \sum_0^{n-1} x_i^2 + (1,-1)x_0x_\rho + (2,-2)x_0x_{2\rho} + \ldots +$$

$$+ (1,-1)x_0x_{n-\rho} + \ldots + (k-i,\, i-k)x_{i\rho}\, x_{k\rho} +$$

$$+ \ldots (1,-1)x_{n-2\rho}\, x_{n-\rho},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Digitized by Google

$$R_{\rho^l} R_{n-\rho^l} = \sum_0^{n-1} x_i^2 + (1,-1)x_0 x_{\rho^l} + (2,-2)\, x_0\, x_{2\rho^l} +$$

$$+ \ldots + (1,-1)x_0 x_{n-\rho^l} + \ldots + (k-i,\, i-k)x_{i\rho^l}\, x_{k\rho^l} +$$

$$+ \ldots + (1,-1)x_{n-2\rho^l}\, x_{n-\rho^l},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$R_{\rho^j} R_{n-\rho^j} = \sum_0^{n-1} x_i^2 + (1,-1)x_0 x_{\rho^j} + \ldots$$

$$+ \ldots + (1,-1)x_0 x_{n-\rho^j} + \ldots + (k-i,\, i-k)x_{i\rho^j}\, x_{k\rho^j} + \ldots$$

$$+ \ldots + (1,-1)x_{n-2\rho^j}\, x_{n-\rho^j},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$R_{\rho^{\frac{n-3}{2}}} R_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}} = \sum_0^{n-1} x_i^2 + (1,-1)x_0 x_{\rho^{\frac{n-3}{2}}} + \ldots$$

$$+ \ldots (1,-1)x_0 x_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}} + \ldots + (k-i,\, i-k)x_{i\rho^{\frac{n-3}{2}}}\, x_{k\rho^{\frac{n-3}{2}}} + \ldots$$

$$+ \ldots + (1,-1)x_{n-2\rho^{\frac{n-3}{2}}}\, x_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}}.$$

Послѣ сложенія этихъ равенствъ окажется, что подобные члены не могутъ имѣть одинаковыхъ коеффиціентовъ. Докажемъ справедливость этого свойства для членовъ вида

$$x_0 x_r, \quad r \leq n-1,$$

и для членовъ вида

$$x_i x_k, \quad i,k \leq n-1.$$

Въ выраженіи

$$R_{\rho^l} R_{n-\rho^l}.$$

имѣемъ членъ

Digitized by Google

$$(m,—m)x_0 x_{m\rho^l};$$

въ выраженіи

$$R_{\rho^j} R_{n—\rho^j}$$

имѣемъ членъ

$$(m,—m)x_0 x_{m\rho^j}.$$

Если бы оказалось, что эти члены, имѣя равные коэффиціенты, были-бы одинаковы по буквенному составу, то пришлось бы заключить, что

$$\rho^l \equiv \rho^j \ (mod.\ n)$$

т. е.

$$\rho^{j-l} \equiv 1 \ (mod.\ n),$$

чего не можетъ быть, ибо

$$l \leq \frac{n—3}{2}, j \leq \frac{n—3}{2},$$

а ρ есть первообразный корень числа n.

Положимъ теперь вообще

$$(k—i, i—k)x_{i\rho^l} x_{k\rho^l} = (k—i, i—k)x_{(i+m)\rho^j} x_{(k+m)\rho^j},$$

гдѣ m можемъ быть равно нулю, положительному или отрицательному числу. Написанное рявенство ведетъ къ двумъ слѣдующимъ предположеніемъ:

1) Существуютъ совмѣстно два сравненія:

$$i\rho^l \equiv i\rho^j + m\rho^j,$$

$$k\rho^l \equiv k\rho^j + m\rho^j;$$

откуда

$$(i—k)\rho^l \equiv (i—k)\rho^j,$$

или

$$\rho^l \equiv \rho^j,$$

чего не можетъ быть по предыдущему.

Digitized by Google

2) Существуютъ совмѣстно два сравненія:

$$i\rho^l \equiv k\rho^j + m\rho^j,$$

$$k\rho^l \equiv i\rho^j + m\rho^j,$$

т. е.

$$\rho^l + \rho^j \equiv 0 \ (mod.\ n).$$

или

$$\rho^l \equiv -\rho^j;$$

этого также не можетъ быть по самому опредѣленію Q.

Итакъ коэффиціенты при подобныхъ членахъ всѣ различны; а потому, послѣ сложенія, коэффиціентъ передъ каждымъ членомъ вида

$$x_i\, x_k,\ (i,k=0,1,2,\ldots n-1),$$

будетъ

$$(1,-1) + (2,-2) + \ldots + \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right) = -1.$$

Слѣдовательно

$$Q = R_1 R_{n-1} + R_\rho R_{n-\rho} + \ldots + R_{\rho^{\frac{n-3}{2}}} R_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}} =$$

$$= \frac{n-1}{2} \sum_0^{n-1} x_i^2 - \Sigma x_i x_k = -np.$$

§ 5. Посмотримъ теперь какое измѣненіе воспослѣдуетъ, если къ функціи

$$R_{\rho^g} = x_0 + \alpha^{n-1} x_{\rho^g} + \alpha^{n-2} x_{2\rho^g} + \ldots + \alpha\, x_{n-\rho^g}$$

приложить подстановку

$$S = \left(\frac{z+1}{z}\right).$$

Положимъ

$$\alpha^{n-1} = \alpha^{-1} = \alpha^{\pi\rho^g};$$

тогда необходимо

Digitized by Google

$$\pi\rho^g \equiv -1 \pmod{n},$$

слѣдовательно

$$\pi = \rho^{\frac{n-1}{2}-g};$$

полагая

$$\alpha^\pi = \beta,$$

имѣемъ

$$\alpha^{n-1} = \beta^{\rho^g},$$

$$\beta = \alpha^{\rho^{\frac{n-1-2g}{2}}};$$

а потому

$$R_{\rho^g} = x_0 + \beta^{\rho^g} x_{\rho^g} + \beta^{2\rho^g} x_{2\rho^g} + \beta^{3\rho^g} x_{3\rho^g} + \ldots$$

Такъ такъ

$$S(R_{\rho^g}) = x_1 + \beta^{\rho^g} x_{\rho^g} + 1 + \beta^{2\rho^g} x_{2\rho^g+1} + \ldots,$$

слѣдовательно

$$S(R_{\rho^g}) = \beta^{-1} R_{\rho^g},$$

$$S(R_{\rho^g}) = (\alpha^{-1})^{\rho^{\frac{n-1-2g}{2}}} R_{\rho^g}.$$

Подобнымъ же образомъ

$$S(R_{\rho^h}) = (\alpha^{-1})^{\rho^{\frac{n-1-2h}{2}}} R_{\rho^h};$$

слѣдовательно

$$S(R_{\rho^g} R_{\rho^h}) = (\alpha^{-1})^{\rho^{\frac{n-1-2g}{2}} + \rho^{\frac{n-1-2h}{2}}} R_{\rho^g} R_{\rho^h}$$

Но

$$\rho^{\frac{n-1-2g}{2}} \equiv -\rho^{n+g} \pmod{n},$$

Digitized by Google

$$\rho^{\frac{n-1-2h}{2}} \equiv -\rho^{n-1-h},$$

слѣдовательно

$$(\alpha^{-1})^{\rho^{\frac{n-1-2g}{2}}+\rho^{\frac{n-1-2h}{2}}} = \alpha^{\rho^{n-1-g}+\rho^{n-1-h}}$$

Теперь положимъ, что

$$\rho^g + \rho^h \equiv 0 \pmod{n},$$

т. е.

$$\rho^g \equiv -\rho^h \pmod{n},$$

$$g - h = \frac{n-1}{2},$$

тогда и

$$\rho^{n-1-g} + \rho^{n-1-h} \equiv 0 \pmod{n},$$

а потому

$$(\alpha^{-1})^{\rho^{\frac{n-1-2g}{2}}} \cdot (\alpha^{-1})^{\rho^{\frac{n-1-2h}{2}}} = 1,$$

а тогда

$$S(R_{\rho^g} R_{\rho^h}) = R_{\rho^g} R_{\rho^h};$$

а слѣдовательно

$$S(R_{\rho^g} R_{n-\rho^g}) = R_{\rho^g} R_{n-\rho^g}$$

Отсюда ясно, что подстановка

$$S = \begin{pmatrix} z+1 \\ z \end{pmatrix}$$

не измѣняетъ функціи

$$Q = R_1 R_{n-1} + R_\rho R_{n-\rho} + \ldots + R_{\rho^{\frac{n-3}{2}}} R_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}}.$$

Очень легко удостовѣриться, что и подстановка

$$T = \begin{pmatrix} \rho z \\ z \end{pmatrix}$$

не измѣняетъ Q.

Digitized by Google

Въ самомъ дѣлѣ

$$TQ = R_\rho R_{n-\rho} + R_{\rho^2} R_{n-\rho^2} + \ldots + R_{\rho^{\frac{n-1}{2}}} R_{n-\rho^{\frac{n-1}{2}}}$$

Такъ какъ

$$\rho^{\frac{n-1}{2}} \equiv -1 \equiv n-1 \ (mod.\ n),$$

то

$$n-\rho^{\frac{n-1}{2}} \equiv 1,$$

а потому

$$T(Q) = Q.$$

§ 6. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что Q не измѣняется отъ подстановокъ группы

$$\begin{pmatrix} az+b \\ z \end{pmatrix},$$

гдѣ a и b цѣлыя числа.

Существуетъ безчисленное множество функцій корней, составленныхъ подобно Q и выразимыхъ раціональнно въ коеффиціентахъ даннаго уравненія. Мы могли бы поименовать, для примѣра, нѣсколько такихъ функцій, но такъ какъ для нашей непосредственной цѣли это не нужно, то мы обойдемъ теперь этотъ предметъ молчаніемъ. Для насъ важно убѣдиться въ существованіи такихъ функцій для всякаго неприводимаго уравненія, разрѣшимаго или неразрѣшимаго въ радикалахъ. По теоріи Галюа разрѣшимы въ радикахъ только тѣ уравнеія первоначальной степени, для которыхъ всѣ функціи, не измѣняющіяся отъ подстановокъ группы

$$\begin{pmatrix} az+b \\ z \end{pmatrix},$$

раціонально извѣстны. Независимо отъ теоріи Галюа можно доказать, что если данное уравненіе (неприводимое и первоначальной степени) таково, что всѣ функціи корней, не измѣняющіяся отъ подстановокъ группы

Digitized by Google

$$\begin{pmatrix} az+b \\ z \end{pmatrix},$$

выражаются раціонально при помощи извѣстныхъ, то уравненіе разрѣшимо въ радикалахъ, и можно найти точную форму радикальнаго рѣшенія для таковыхъ уравненій. Составимъ функцію корней

$$\left(R_1 R_{n-1} + \omega R_\rho R_{n-\rho} + \omega^2 R_{\rho^2} R_{n-\rho^2} + \right.$$

$$\left. + \ldots + \omega^{\frac{n-3}{2}} R_{\rho^{\frac{n-3}{2}}} R_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}} \right)^{\frac{n-1}{2}} = \mathfrak{A}_1,$$

гдѣ ω есть одинъ изъ первообразныхъ корней дручленнаго уравненія

$$\omega^{\frac{n-1}{2}} - 1 = 0.$$

Легко доказать, что $\mathfrak{A}_1$ не измѣняется подстановками группы

$$\begin{pmatrix} az+b \\ z \end{pmatrix}.$$

Во первыхъ очевидно, что $\mathfrak{A}_1$ не измѣняется подстановками группы

$$\begin{pmatrix} z+k \\ z \end{pmatrix};$$

во вторыхъ, приложимъ къ $\mathfrak{A}_1$ подстановку

$$T = \begin{pmatrix} \rho z \\ z \end{pmatrix};$$

тогда получимъ

$$T(\mathfrak{A}_1) = \left(R_\rho R_{n-\rho} + \omega R_{\rho^2} R_{n-\rho^2} + \omega^2 R_{\rho^3} R_{n-\rho^3} \right.$$

$$\left. + \ldots + \omega^{\frac{n-3}{2}} R_{\rho^{\frac{n-1}{2}}} R_{n-\rho^{\frac{n-1}{2}}} \right)^{\frac{n-1}{2}}, \text{ или}$$

Digitized by Google

$$T(\mathfrak{A}_i)=\Big(R_\rho R_{n-\rho} + \omega R_\rho{}^2 R_{n-\rho}{}^2 + \ldots + \omega^{\frac{n-1}{2}} R_i R_{n-i}\Big)^{\frac{n-1}{2}} = \mathfrak{A}_i$$

На этомъ основаніи, по условію, $\mathfrak{A}_i$ вы ражается раціо нально въ коэфиціентахъ даннаго уравненія. Кромѣ того функція

$$\Big(R_i R_{n-i} + \omega R_\rho R_{n-\rho} + \omega^2 R_\rho^{\,2} R_{n-\rho}{}^2 + \ldots + \omega^{\frac{n-3}{2}} R_{\rho}^{\frac{n-3}{2}} R_{n-\rho}^{\frac{n-3}{2}}\Big)^{\frac{n-1}{2}}$$

выразится раціонально чрезъ извѣстныя величины и въ томъ случаѣ, если вмѣсто ω подставить послѣдовательно

$$\omega^2, \omega^3, \ldots \omega^{\frac{n-3}{2}}.$$

Поэтому имѣемъ рядъ линейныхъ уравненій

$$R_i R_{n-i} + R_\rho R_{n-\rho} + R_{\rho^2} R_{n-\rho^2} + \ldots + R_{\rho}^{\frac{n-3}{2}} R_{n-\rho}^{\frac{n-3}{2}} = -np,$$

$$R_i R_{n-i} + \omega R_\rho R_{n-\rho} + \omega^2 R_{\rho^2} R_{n-\rho^2} + \ldots + \omega^{\frac{n-3}{2}} R_{\rho}^{\frac{n-3}{2}} R_{n-\rho}^{\frac{n-3}{2}} = \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_1},$$

$$R_i R_{n-i} + \omega^2 R_\rho R_{n-\rho} + \omega^4 R_{\rho_2} R_{n-\rho_2} + \ldots + \omega^{\frac{n-5}{2}} R_{\rho}^{\frac{n-3}{2}} R_{n-\rho}^{\frac{n-3}{2}} = \sqrt[\frac{n-3}{2}]{\mathfrak{A}_2},$$

. . . . . .

. . . . . .

Digitized by Google

$$R_1 R_{n-1} + \omega^{\frac{n-3}{2}} R_\rho R_{n-\rho} +$$

$$+ \ldots_2 + \omega R_{\rho}^{\frac{n-3}{2}} R_{n-\rho}^{\frac{n-3}{2}} = \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_{\frac{n-3}{2}}}$$

Изъ этихъ уравненій получимъ послѣдовательно

$$R_1 R_{n-1} = \frac{2}{n-1}\left(-np + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_1} + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_2} + \right.$$

$$\left. + \ldots + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_{\frac{n-1}{2}}}\right),$$

$$R_\rho R_{n-\rho} = \frac{2}{n-1}\left(-np + \omega^{\frac{n-3}{2}} \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_1} + \right.$$

$$\left. + \omega^{\frac{n-5}{2}} \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_2} + \ldots + \omega \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_{\frac{n-1}{2}}}\right),$$

. . . . . .

$$R_{\rho}^{\frac{n-3}{2}} R_{n-\rho}^{\frac{n-3}{2}} = \frac{2}{n-1}\left(-np + \omega \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_1} + \right.$$

$$\left. + \ldots + \omega^{\frac{n-3}{2}} \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_{\frac{n-3}{2}}}\right),$$

гдѣ $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_{\frac{n-3}{2}}$ выражаются раціонально въ коеффиціентахъ уравненія.

§ 7. Составимъ раціональную функцію корней

$$(R_1^n + R^n_{n-1}) + (R_\rho^n + R^n_{n-\rho}) +$$

$$+ \ldots + \left(R^n_{\rho}^{\frac{n-3}{2}} + R^n_{n-\rho}^{\frac{n-3}{2}}\right) = \mathfrak{B}_0.$$

Digitized by Google

Функція эта не измѣняясь отъ подстановокъ группы

$$\begin{pmatrix} az+b \\ z \end{pmatrix},$$

по условію, раціонально извѣстна.

Функція корней

$$\left[(R^n_1+R^n_{n-1})+\omega(R^n_\rho+R^n_{n-\rho})+\right.$$

$$\left.+\ldots+\omega^{\frac{n-3}{2}}\left(R^n_{\rho^{\frac{n-3}{2}}}+R^n_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}}\right)\right]^{\frac{n-3}{2}}=\mathfrak{B}_1$$

также не измѣняется отъ подстановокъ группы

$$\begin{pmatrix} az+b \\ z \end{pmatrix},$$

а потому, разсуждая по предыдущему, найдемъ послѣдовательно:

$$R^n_1+R^n_{n-1}=\frac{2}{n-1}\left(\mathfrak{B}_0+\sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{B}_1}+\sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{B}_2}+\right.$$

$$\left.+\ldots+\sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{B}_{\frac{n-3}{2}}}\right),$$

$$R^n_\rho+R^n_{n-\rho}=\frac{2}{n-1}\left(\mathfrak{B}_0+\omega^{\frac{n-3}{2}}\sqrt[\frac{n-3}{2}]{\mathfrak{B}_1}+\right.$$

$$\left.+\ldots+\omega\sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{B}_{\frac{n-1}{2}}}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$R^n_{\rho^{\frac{n-3}{2}}}+R^n_{n-\rho^{\frac{n-3}{2}}}=\frac{2}{n-1}\left(\mathfrak{B}_0+\omega\sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{B}_1}+\right.$$

$$\left.+\ldots+\omega^{\frac{n-3}{2}}\sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{B}_{\frac{n-3}{2}}}\right).$$

Digitized by Google

Такимъ образомъ имѣемъ, для нахожденія R_1^n и $R^n{}_{n-1}$; два уравненія

$$R^n_1 R^n{}_{n-1} = \left(\frac{2}{n-1}\right)^n \left(-np + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_1} + \right.$$

$$\left. + \ldots + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_{\frac{n-3}{2}}}\right)^n,$$

$$R^n_1 + R^n{}_{n-1} = \frac{2}{n-1}\left(\mathfrak{B}_0 + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{B}_1} + \ldots + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{B}_{\frac{n-3}{2}}}\right)$$

Слѣдовательно R^n_1 и $R^n{}_{n-1}$ суть корни полнаго квадратнаго уравненія

$$t^2 - \frac{2}{n-1}\left(\mathfrak{B}_0 + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{B}_1} + \ldots + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{B}_{\frac{n-3}{2}}}\right) t +$$

$$+ \left(\frac{2}{n-1}\right)^n \left(-np + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_1} + \ldots + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_{\frac{n-3}{2}}}\right)^n = 0.$$

Рѣшая это уравненіе, находимъ

$$R_1^n = U - \sqrt{U - V^n},$$

$$R^n{}_{n-1} = U - \sqrt{U^2 - V^n},$$

$$U = \frac{\left(\mathfrak{B}_0 + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{B}_1} + \ldots + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{B}_{\frac{n-3}{2}}}\right)}{n+1},$$

$$V = \frac{2}{n-1}\left(-np + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_1} + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_2} + \ldots + \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_{\frac{n-3}{2}}}\right).$$

Подобнымъ же образомъ найдутся попарно: $R^n{}_\rho$ и $R^n{}_{n-\rho}$ $R^n_{\rho^2}$ и $R^n_{n-\rho}$,... Имѣемъ, напримѣръ,

$$R^n{}_\rho = U_1 + \sqrt{U_1{}^2 - V_1{}^n},$$

$$R^n{}_{n-\rho} = U_1 - \sqrt{U_1{}^2 - V_1{}^n},$$

Digitized by Google

гдѣ

$$U_1=\frac{1}{n-1}\left(\mathfrak{B}_0+\omega^{\frac{n-3}{2}}\sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{B}_1}+\ldots+\omega\sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{B}_{\frac{n-3}{2}}}\right)$$

$$V_1=\frac{2}{n-1}\left(-np+\omega^{\frac{n-3}{2}}\sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_1}+\ldots+\omega\sqrt[\frac{n-1}{2}]{\mathfrak{A}_{\frac{n-3}{2}}}\right).$$

§ 8. Для уравненія 3-й степени

$$x^3+px+q=0$$

имѣемъ, по общей формулѣ

$$R_1\,R_2=-3p,$$

Кромѣ того

$$R_1^3+R_2^3=(R_1+R_2)(R_1^2+R_2^2-R_1R_2)=-27q;$$

слѣдовательно

$$R_1^3=\frac{-27q}{2}+\sqrt{\frac{27^2q^2}{4}+27p^3},\quad R_2^3=-\frac{27q}{2}-\sqrt{\frac{27^2q^2}{4}+27p^3},$$

$$\frac{1}{3}R_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}};\quad \frac{1}{4}R_2=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

§ 9. Для уравненія 5-й степени

$$x^5+px^3+qx^2+rx+s=0$$

$$R_1=\sqrt[5]{\frac{B_0+\sqrt{B_1}}{4}+\sqrt{\left(\frac{B_0+\sqrt{B_1}}{4}\right)^2-\left(\frac{-5p+\sqrt{A_1}}{2}\right)^5}},$$

$$R_4=\sqrt[5]{\frac{B_0+\sqrt{B_1}}{4}-\sqrt{\left(\frac{B_0+\sqrt{B_1}}{4}\right)^2-\left(\frac{-5p+\sqrt{A_1}}{2}\right)^5}},$$

$$R_2=\sqrt[5]{\frac{B_0-\sqrt{B_1}}{4}\sqrt{\left(\frac{B_0-\sqrt{B_1}}{4}\right)^2\left(\frac{-5p-\sqrt{A_1}}{2}\right)^5}},$$

Digitized by Google

$$R_3=\sqrt[5]{\frac{B_0-\sqrt{B_1}}{4}-\sqrt{\left(\frac{B_0-\sqrt{B_1}}{4}\right)^2-\left(\frac{-5p-\sqrt{A_1}}{2}\right)^5}}.$$

Эти результаты согласуются съ формой предусмотрѣнной Абелемъ.

§ 10. Намъ остается теперь выразить корни уравненія

$$x_0\ x_1\ x_2,\ldots x_{n-1}$$

въ зависимости отъ

$$R_1,\ R_2,\ldots R_{n-1}.$$

Имѣемъ

$$R_1=x_1+\alpha^{n-1}x_1+\alpha^{n-2}x_2+\ldots+\alpha^{n-k}x_k+\ldots+\alpha^2x_{n-2}+\alpha x_{n-1}$$

отсюда

$$R_2=x_0+\alpha^{n-1}x_2+\alpha^{n-2}x_4+\ldots+\alpha^{n-k}x_{2k}+\ldots+\alpha^2x_{n-4}+$$
$$+\alpha x_{n-2}.$$

Если

$$2k\equiv 1\ (mod.\ n),\ \text{то}$$

$$R_2=x_0+\alpha^{n-k}x_1+\alpha^{n-2k}x_2+\alpha^{n-3k}x_3+\ldots+\alpha^kx_{n-1}$$

Если

$$3l\equiv 1\ (mod.\ n),\ \text{то}$$

$$R_3=x_0+\alpha^{n-l}x_1+\alpha^{n-2l}+x_2+\ldots+\alpha^lx_{n-1},$$

$$R_4=x_0+\alpha^{n-m}x_1+\alpha^{n-2m}x_2+\ldots+\alpha^mx_{n-1},$$

гдѣ m опредѣляется сравненіемъ

$$4m\equiv 1\ (mod.\ n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$R_{n-1}=x_0+\alpha x_1+\alpha^2x_2+\ldots+\alpha^{n-1}x_{n-1}$$

Отсюда получимъ послѣдовательно:

$$x_0=\frac{1}{n}\left(R_1+R_2+R_3+\ldots+R_{n-1}\right),$$

Digitized by Google

$$x_1 = \frac{1}{n}\left(R\alpha_1 + \alpha^k R_2 + \alpha^l R_3 + \ldots + \alpha^{n-1} R_{n-1} \right),$$

$$x_2 = \frac{1}{n}\left(\alpha^2 R_1 + \alpha^{2k} R_2 + \alpha^{2l} R_3 + \ldots + \alpha^{n-2} R_{n-1} \right),$$

$$x_3 = \frac{1}{n}\left(\alpha^3 R_1 + \alpha^{3k} R_2 + \alpha^{3l} R_3 + \ldots + \alpha^{n-3} R_{n-1} \right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{n-1} = \frac{1}{n}\left(\alpha^{n-1} R_1 + \alpha^{n-k} R_2 + \alpha^{nl} R_3 + \ldots + \alpha R_{n-1} \right),$$

гдѣ

$$k, l, \ldots\ldots$$

опредѣляется вышеупомянутыми сравненіями.

25-го Марта 1894 г.
Нижній-Новгородъ.

Digitized by Google

ИЗВЛЕЧЕНІЕ ИЗЪ ПРОТОКОЛОВЪ ЗАСѢДАНІЙ МОСКОВСКАГО МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

Засѣданіе 18 мая 1893 года.

Въ засѣданіи присутствовали: П. А. Некрасовъ, Е. Ѳ. Сабининъ, Ѳ. А. Слудскій, В. Г. Алексѣевъ, А. П. Мининъ, Н. Е. Жуковскій, А. І. Круковскій, П. В. Преображенскій, Г. Н. Шебуевъ, а также членъ Общества профессоръ С.-Петербургскаго Университета Ю. В. Сохоцкій.

По предложенію П. А. Некрасова, собраніе просило Ю. В. Сохоцкаго быть почетнымъ предсѣдателемъ въ настоящемъ засѣданіи.

Было сдѣлано сообщеніе:

1. *Б. К. Млодзѣевскій.* Геометрическій выводъ условій существованія періодическихъ движеній въ задачѣ Гесса.

Обществу доставлены слѣдующія изданія:

1. Кіевскія Университетскія Извѣстія, Кіевъ 1893. № 2, 3. Февраль—Мартъ.

2. Записки Императорскаго Харьковскаго Университета, книга 1. Харьковъ 1893.

3. Извѣстія Физико-Математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ. Вторая серія, томъ II № 4, томъ III № 1. Казань 1893.

4. Рѣчь и отчетъ, читанные въ торжественномъ собраніи Императорскаго Московскаго Университета 12 января 1893 года.

5. Нижегородскій кружокъ любителей физики и астрономіи. Сообщеніе А. Михайлова. Москва 1893.

6. *Бугаевъ.* Основы эволюціонной монадологіи. Москва 1893.

7. *Богуславскій.* Алгебра плоскости и пространства, или исчисленіе положенія.

8. *Букрѣевъ.* О разложеніи трансцендентныхъ функцій на частныя дроби. Кіевъ 1887.

9. *Букрѣевъ.* Къ теоріи функціи гамма. 1889.

Digitized by Google

10. *Букрѣевъ*. Gesammelte mathematische Abhandlungen von H. A. Schwarz. Кіевъ 1891.

11. *Букрѣевъ*. Traité d'analyse de M. Laurent. Кіевъ 1890.

12. *Букрѣевъ*. Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen von Königsberger. Кіевъ 1890.

13. *Букрѣевъ*. Новости математической литературы. Кіевъ 1892.

14. *Букрѣевъ*. О нѣкоторыхъ приложеніяхъ теоремы г. Миттагъ-Леффлера. Кіевъ 1886.

15. *Букрѣевъ*. Объ одномъ свойствѣ системы параллельныхъ кривыхъ. Кіевъ 1891.

16. *Букрѣевъ*. О фуксовыхъ функціяхъ нулеваго ранга съ симметрическимъ основнымъ полигономъ. Кіевъ 1889.

17. *Покровскій*. Къ элементарной теоріи уравненій 3-й и 4-й степени. Кіевъ 1893.

18. *Сохоцкій*. Начало общаго наибольшаго дѣлителя въ примѣненіи къ теоріи дѣлимости алгебраическихъ чиселъ. С.-Петербургъ 1893.

19. Bulletin de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou. Année 1892 № 4.

20. Acta Mathematica 16: 4. 1893.

21. Bulletin de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. Nouvelle série III. XXXV, № 1.

22. Mathematische Annalen. Bd. 42, Heft 2, 1893.

23. Bulletin de la Société mathématique de France. Tome XXI № 3.

24. Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo G. Teixeira Vol. XI № 3. Coimbra 1893.

25. *Сенигов*. Новое ученіе о параллельныхъ линіяхъ. Москва 1893.

26. *Lemoine* Application d'une méthode d'évaluation de la simplicité des constructions à la comparaison de quelques solutions des problèmes d'Apollonius.

27. *Lemoine*. Résultats et théorèmes divers concernant la géométrie du triangle.

28. *Lemoine*. Application de la géométrie à l'examen de diverses solutions d'un même problème.

29. Кіевскія Университетскія Извѣстія 1893. № 4 апрѣль.

30. Записки Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей. Томъ XVII вып. 3.

31. Краткія астрономическія вѣсти. Май 1893. Печатано по распоряженію Правленія Нижегородскаго Кружка Любителей физики и астрономіи.

32. *Некрасовъ*. Дополненія къ статьѣ: „О движеніи тяжелаго твердаго тѣла около неподвижной точки".

33. *Фонъ-Гельмгольцъ*. Счетъ и измѣреніе. *Л. Кронекеръ*. Понятіе о числѣ. Казань 1893.

34. Rendiconti del circolo matematico di Palermo. Tomo VII, anno 1893 fasc. 1e 2.

Digitized by Google

35. Index du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques, publié par la commission permanente du Répertoire.

36. *Mehmke.* Untersuchungen über die auf die Krümmung von Curven und Flächen bezüglichen Eigenschaften der Berührungstransformationen.

37. *Thomas Band Sprague.* A new algebra by means of which permutations can be transformated a variety of ways and their properties investigated Edinburg 1893.

Засѣданіе 21 сентября 1893 года.

Въ засѣданіи присутствовали: Н. В. Бугаевъ, П. А. Некрасовъ, Ѳ. А. Слудскій, Е. Ѳ. Сабининъ, Н. Е. Жуковскій, Н. А. Умовъ, Б. К. Млодзѣевскій, А. П. Мининъ, П. В. Преображенскій, А. И. Богуславскій, В. В. Бобынинъ, А. І. Круковскій, Г. Г. Апшельротъ.

Секретарь доложилъ письмо профессора Schoute, редактора журнала „Revue semestrielle des publications mathématiques“ съ просьбою выслать заглавіе и содержаніе статей, помѣщенныхъ въ Математическомъ Сборникѣ съ 1892 г., а также и самый журналъ. *Опредѣлено*: выслать г. Schoute заглавія статей и журналъ и просить авторовъ, присылающихъ свои статьи для напечатанія въ Математическомъ Сборникѣ, прилагать краткое изложеніе содержанія статей.

Секретарь доложилъ предложеніе объ обмѣнѣ изданіями отъ Чешской Академіи Императора Франца Іосифа. *Опредѣлено*: вступить въ обмѣнъ и высылать Академіи Математическій Сборникъ, начиная съ 17-го тома.

Въ виду наступающаго 22 октября столѣтія со дня рожденія знаменитаго русскаго математика Лобачевскаго опредѣлено перенести слѣдующее засѣданіе Общества съ 19 на 22 октября и посвятить памяти Лобачевскаго всѣ сообщенія и статьи, имѣющія быть прочитанными въ этомъ засѣданіи. Вмѣстѣ съ тѣмъ Общество постановило просить В. Я. Цингера и Б. К. Млодзѣевскаго составить адресъ Императорскому Казанскому Университету съ привѣтствіемъ отъ Московскаго Математическаго Общества, а также просить Л. К. Лахтина передать для напечатанія въ Математическомъ Сборникѣ приготовляемую имъ лекцію о Лобачевскомъ.

Въ виду предполагаемаго празднованія 25-ти лѣтія Общества опредѣлено войти въ Комитетъ IX Съѣзда Естествоиспытателей и Врачей съ просьбою указать день и мѣсто для соединеннаго засѣданія Математическаго Общества и секціи Математики и Астрономіи.

П. В. Преображенскій сообщилъ, что приготовленъ къ печати списокъ статей, напечатанныхъ въ первыхъ пятнадцати томахъ Математическаго Сборника, составленный на русскомъ и французскомъ языкахъ. *Опредѣлено*: напечатать означенный списокъ въ 1200 экземплярахъ и назначить его цѣну въ 75 коп.

Digitized by Google

П. А. Некрасовъ заявилъ, что, по порученію Общества, онъ, насколько это было возможно, возстановилъ сообщеніе, сдѣланное В. Г. Имшенецкимъ 19 мая 1892 года, пользуясь тетрадью В. Г. Имшенецкаго, переданной К. А. Андреевымъ, а также указаніями А. В. Имшенецкой и своими воспоминаніями о сообщеніи В. Г. Имшенецкаго. Вмѣстѣ съ тѣмъ П. А. Некрасовъ представилъ Обществу тетрадь В. Г. Имшенецкаго. *Опредѣлено*: благодарить П. А. Некрасова за исполненіе порученія Общества и передать тетрадь В. Г. Имшенецкаго для храненія при дѣлахъ Общества.

По предложенію Н. Е. Жуковскаго и Б. К. Млодзѣевскаго единогласно избранъ въ члены Общества Профессоръ Walther Dyck въ Мюнхенѣ.

Были сдѣланы сообщенія:

1. *П. А. Некрасовъ*. О способѣ В. Г. Имшенецкаго для нахожденія раціональныхъ рѣшеній линейныхъ дифференціальныхъ уравненій.

2. *Б. К. Млодзѣевскій*. Объ изслѣдованіяхъ проф. Schönfliess о дѣленіи пространства на конгруэнтныя части.

Обществу доставлены слѣдующія изданія:

1. Записки Императорской Академіи Наукъ. Томы 70-й, 69-й (книжка I и II), 68-й, 67-й.

2. Краткія астрономическія вѣсти. Сент. 1893.

3. Краткія астрономическія вѣсти. Іюнь 1893. Яркія планеты.

4. Планета Сатурнъ. (2, 3, 4, печатаны по распоряженію Нижегородскаго Кружка Любителей Физики и Астрономіи).

5. Извѣстія Физико-Математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ. Вторая серія. Томъ III № 2, № 3, 1893.

6. Кіевскія Университетскія Извѣстія № 5, № 6, 1893. Кіевъ.

7. Электромагнитная теорія свѣта. Явленіе Керра и магнитное вращеніе поляризаціи свѣта. *Д. Гольдгаммера*. Казань 1893.

8. *Д. Гольдгаммеръ*. Еще о нашихъ свѣдѣніяхъ объ эфирѣ. Казань 1893.

9. *П. А. Некрасовъ*. Способъ В. Г. Имшенецкаго для нахожденія алгебраическихъ раціональныхъ дробныхъ рѣшеній линейнаго дифференціальнаго уравненія. Москва 1893.

10. *П. А. Некрасовъ*. О сообщеніи академика В. Г. Имшенецкаго, сдѣланномъ въ засѣданіи Московскаго Математическаго Общества 19 мая 1892. (Составлено по порученію Московскаго Математическаго Общества).

11. *Б. Я. Букрѣевъ*. О нѣкоторыхъ соотношеніяхъ въ теоріи эллиптическихъ функцій Вейерштрасса. Кіевъ 1893.

12. *П. М. Покровскій*. Объ алгебраическихъ уравненіяхъ въ связи съ эллиптическими функціями Вейерштрасса. Москва 1893.

13. Физико Математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ, томъ 10, годъ 7-й 1891 г. №№ 3 и 4 Москва 1891.

14. Idem—томъ 11, годъ 8, 1892, № 2. Москва 1892.

15. Idem—томъ 12, годъ 9, 1893, № 1. Москва 1893.

Digitized by Google

16. *Пароменскій.* Дифференціальное и интегральное исчисленіе съ приложеніями къ анализу и геометріи. С.-Петербургъ 1893.

17. *В. Малининъ.* О столкновеніи небесныхъ тѣлъ. Краткія астрономическія вѣсти. Августъ 1893: I яркія планеты, II звѣздное небо—С. Щ. Ш. Сообщенія и замѣтки объ Юпитерѣ и его спутникахъ. П. Радковскаго.

18. Галилео Галилей. Чествованіе его памяти по случаю трехсотлѣтія вступленія на каѳедру математики въ Падуанскомъ Университетѣ. Протоколъ публичнаго засѣданія Варшавскаго Общества Естествоиспытателей 1 февраля 1893.

19. *Д. Селивановъ.* Курсъ дифференціальнаго исчисленія, часть первая (литограф. въ двухъ выпускахъ).

20. Idem—часть вторая (литогр. въ двухъ выпускахъ).

21. *Д. Селивановъ.* Курсъ высшей алгебры (литограф.).

22. Сообщенія Харьковскаго Математическаго Общества, вторая серія томъ III, № 6.

23. *Фабриціусъ.* Начало Джибса и его примѣненіе къ теоретической астрономіи.

24. Mathematische Annalen 43 Bd. 1 Heft. 1893.

25. Mathematische Annalen 42 Bd. 4 Heft. Leipzig 1893.

26. Idem—42 Bd. 3 Heft. Leipzig 1893.

27. Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Math.—Naturwissenschaftliche Classe. Abtheilung II a Bd. C. I und II Heft 1892, III Heft 1892, IV und V Heft 1892, C. Bd. VIII Heft 1891, IX und X Heft 1891.

28. Sitzungsberichte der Naturforscher — Gesellschaft bei der Universität Dorpat. Zehnter Band. Erstes Heft. 1892.

29. Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften mathem — naturwissensch. Classe. CI Band VI Heft. Jahrgang 1892 — Juni Abtheilung II a. Wien 1892.

30. Idem—CI Bd. VII Heft Jahrgang 1892—Juli.

31. Idem—CI Bd. VIII Heft Jahrgang 1892—October.

32. Idem—CI Bd. IX Heft Jahrgang 1892—November.

33. Idem—CI Bd. X Heft Jahrgang 1892—December.

34. Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Band XXII Jahrgang 1890, Heft 2. Berlin 1893.

55. Кіевскія Университетскія Извѣстія, 1893, № 7—іюль.

36. Bulletin de la Société Mathématique de France. Tome XXI № 4. Paris 1893.

37. Idem—Tome XXI № 5.

38. Observations publiées par l'Institut météorologique central de la Société de Sciences de Finlande, vol. IX-e, 1-e livraison—observations météorologiques faites à Helsingfors en 1890.

Digitized by Google

39. Idem—volume X-e, 1-e livraison, observations météorologiques faites à Helsingfors en 1891.

40. Idem – vol. III-e, IV-e et V-e 1 res livraisons, observations météorologiques faites à Helsingfors en 1884, 1885 et 1886.

41. Bulletin de la Société Impériale de Naturalistes de Moscou année 1893, № 1 Moscou 1893.

42. Bulletin de l'Académie Impériale des sciences de St-Pétersbourg, nouvelle série III (XXXV), № 2.

43. Idem—nouvelle série III, № 3.

44. Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 4-e série, tome I 1893.

45. Idem—tome III, 1-er cahier 1893.

46. Observations pluviométriques et thermométriques, faites dans le département de la Gironde de juin 1891 à mai 1892.—Note de M. G. Royet. Bordeaux 1892.

47. *Tikhomandritzky.* Esquisse d'une méthode pour détérminer le genre et les courbes adjointes d'une courbe algébrique donnée au moyen des opérations rationnelles. (Annales scientifiques de l'école normale supérieure).

48. Acta mathematica 17: 1 et 2, 1893.

49. Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo Dr. F. G. Teixeira. vol XI № 4. Coimbra 1893.

50. Časopis pro pěstováni mathematiky a fysiky. Ročnik XXII V Praze 1893, Číslo III, IV).

51) Časopis pro pěstováni mathematiky a fysiky, Ročnik XXII, číslo V, v Praze 1893.

52. Rozpravy České Akademie Cisaře Františka Iosefa pro vědy, slovesnost a umeční v Praze. Řída II Ročnik I Číslo. 3, 4, 5, 6, 10, 19, 21, 24, 25, 27, 28, 30, 32, 33, 35, 38, 43.

53. *Lerch.* Zobecněni vzorce frullaniova и другіе статьи того-же автора.

54, Ljetopis jugoslavenske akademie znatnosti i umjetnosti za godinu 1892 Sedmi svezak 1892. U Zagrebu.

55. Rad jugoslavenske akademije znatnosti i umjetnosti. Knjiga CXI. Razred matematičko—prirodoslovni. XV U Zagrebu 1892.

56. Katalog mathematischer und mathematisch — physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente. (Deutsche Math. Vereinigung) München 1892.

Засѣданіе 22 октября 1893 года.

Въ засѣданіи присутствовали: Н. В. Бугаевъ, Ѳ. А. Слудскій, Н. А. Умовъ, Н. Е. Жуковскій, Г. Н. Шебуевъ, В. К. Цераскій, В. В. Бобынинъ, В. С. Щегляевъ, А. П. Мининъ, Г. Г. Аппельротъ, П. В. Преображенскій, Б. К. Млодзѣевскій.

Digitized by Google

Н. В. Бугаевъ заявилъ, что сегодня исполнилось сто лѣтъ со дня рожденія знаменитаго русскаго геометра Лобачевскаго. Желая почтить столь памятный въ исторіи русской науки день, Московское Математическое Общество посвящаетъ памяти Лобачевскаго какъ настоящее засѣданіе, такъ и всѣ сообщенія, которыя имѣютъ быть въ немъ сдѣланы. Вмѣстѣ съ симъ Н. В. Бугаевъ заявилъ, что, согласно постановленію Общества, отъ Общества посланъ Совѣту Императорскаго Казанскаго Университета привѣтственный адресъ.

Секретарь прочелъ текстъ адреса, составленный В. Я. Цингеромъ и Б. К. Млодзѣевскимъ.

Секретарь доложилъ, что отъ Совѣта Императорскаго Казанскаго Университета получено приглашеніе къ участію въ празднованіи столѣтія со дня рожденія Лобачевскаго.

Секретарь доложилъ, что Л. К. Лахтинъ выразилъ согласіе на напечатаніе въ Математическомъ Сборникѣ составленной имъ лекціи о Лобачевскомъ.

По предложенію Н. В. Бугаева и Б. К. Млодзѣевскаго избранъ единогласно въ члены Общества магистрантъ Дмитрій Ѳедоровичъ Егоровъ въ Москвѣ.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1. *Б. К. Млодзѣевскій.* Научныя заслуги Лобачевскаго.

2. *П. В. Преображенскій.* Замѣтка объ одномъ недосмотрѣ въ сочиненіи Клебша по теоріи упругости.

3. *В. А. Татариновъ.* О поверхностяхъ ортогональныхъ къ данной и объ образуемыхъ на ней линіяхъ.

4. *А. П. Мининъ.* О числахъ, для которыхъ число дѣлителей равно числу чиселъ первыхъ съ ними и меньшихъ ихъ.

Обществу доставлены слѣдующія изданія:

1. Записки Математическаго Отдѣленія Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей т. XV Одесса 1893.

2. Нижегородскій кружокъ Любителей физики и астрономіи. Москва 1892, 1893.

3. Годичный отчетъ Императорскаго Общества Испытателей Природы за 1892—1893 годъ. Москва 1893.

4. Кіевскія Университетскія Извѣстія № 8 августъ 1893, № 9 сентябрь 1893.

5. *Ціолковскій.* Аэростатъ металлическій управляемый, выпускъ 2, Калуга 1893.

6. Отчетъ за время съ 1-го сентября 1892 по 1 сентября 1893 года, представленный Комитету Николаевской Главной Астрономической Обсерваторіи ея директоромъ. С.-Петербургъ, 1893.

7. *Кастеринъ.* Объ измѣненіи сцѣпленія жидкостей съ температурой. Москва, 1892.

Digitized by Google

8. *Кастеринъ.* Изъ Физической Лабораторіи Московскаго Университета. Опредѣленіе постоянной капиллярности и угла соприкосновенія по размѣрамъ капли. Москва 1893.

9. *Гольдгаммеръ.* Профессоръ Слугиновъ и „Электромагнитная теорія свѣта.“ Казань 1893 года.

10. *Гонести.* Аналитическое и графико-аналитическое опредѣленіе разсчетныхъ моментовъ отъ подвижной системы грузовъ въ разрѣзныхъ балкахъ. С.-Петербургъ 1893.

11. Mathematische Annalen 42: 2, 3.

12. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo tomo VII anno 1893 fasc. III IV, V.

13. Bulletin de la Société Mathématique de France, tome XXI № 6.

14. Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik XXII: 3, Jahrgang 1890. Berlin 1893.

Засѣданіе 16 ноября 1893 года.

Въ засѣданіи присутствовали: Н. В. Бугаевъ, П. А. Некрасовъ, Ѳ. А. Слудскій, Н. А. Умовъ, Н. Е. Жуковскій, А. І. Круковскій, Г. Н. Шебуевъ, А. П. Мининъ, В. В. Бобынинъ, Б. К. Млодзѣевскій, Г. Г. Аппельротъ, Д. Ѳ. Егоровъ.

Н. Е. Жуковскій заявилъ, что имъ получено отъ профессора Walther Dyck письмо съ просьбою выразить отъ его имени благодарность за избраніе его въ члены Московскаго Математическаго Общества.

Н. В. Бугаевъ предложилъ, въ виду предстоящаго засѣданія въ память исполнившагося двадцатипятилѣтія Общества, избрать въ дополненіе къ бюро нѣсколько лицъ, которыя приняли бы участіе въ организаціи засѣданія. Избраны были: Н. Е. Жуковскій, В. В. Бобынинъ, П. В. Преображенскій, Г. Г. Апельротъ и Д. Ѳ. Егоровъ.

Г. Г. Аппельротъ доложилъ Обществу о числѣ наличныхъ экземпляровъ „Математическаго Сборника“, причемъ заявилъ, что не оказалось 3-го выпуска XI тома. *Опредѣлено*: просить г. Аппельрота еще разъ провѣрить „Математическій Сборникъ“, чтобы окончательно выяснить вопросъ о наличности вышеупомянутаго выпуска.

Были сдѣланы сообщенія:

1. *Б. К. Млодзѣевскій.* О минимальныхъ поверхностяхъ (съ демонстраціей моделей).

2. *І. И. Чистяковъ.* Обобщеніе числовой функціи Гаусса и его слѣдствія.

3. *Н. В. Берви.* О коническомъ конденсаторѣ.

4. *Н. В. Берви.* Объ одномъ случаѣ аналитическаго продолженія.

Обществу доставлены слѣдующія изданія:

1. Записки Московскаго Отдѣленія Императорскаго Русскаго Техническаго Общества. Годъ VIII 1893. Выпуски 5 и 6.

Digitized by Google

2. Университетскія Извѣстія. Кіевъ 1893. № 10.

3. Извѣстія Физико-Математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ. Вторая серія томъ III № 4 1893.

4. Сообщеніе Харьковскаго Математическаго Общества. Вторая серія. Томъ IV № 1 и 2 1893.

5. Изъ Сборника Нижегородскаго кружка Любителей Физики и Астрономіи. Выпускъ 4.

6. Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo Dr Teixeira Vol. XI № 5. 1893.

Засѣданіе 21 декабря 1893 г.

Въ засѣданіи присутствовали: Н. В. Бугаевъ, Н. Е. Жуковскій, Ѳ. А. Слудскій, В. В. Бобынинъ, Н. А. Умовъ, А. И. Богуславскій, А. І. Крыловскій, Г. Г. Аппельротъ, Б. К. Млодзѣевскій.

Н. В. Бугаевъ заявилъ, что, по соглашенію съ Распорядительнымъ Комитетомъ IX Съѣзда Русскихъ Естествоиспытателей и Врачей соединенное засѣданіе Общества и Съѣзда, посвященное воспоминаніямъ объ исполнившемся двадцатипятилѣтіи дѣятельности Общества, назначено на 9 января 1894 года.

Были сдѣланы сообщенія:

1. *Б. К. Млодзѣевскій.* По поводу замѣчанія Н. В. Бугаева о доказательствѣ существованія интеграловъ дифференціальныхъ уравненій.

2. *Н. В. Бугаевъ.* Къ задачѣ Эйлера о взвѣшиваніи.

Обществу доставлены слѣдующія изданія:

1. Физико-математическія науки, т. 12, № 2. 1893.

2. Труды Варшавскаго Общества Естествоиспытателей, годъ 4-й, 1892—1893. Протоколы отдѣленій: физики, химіи и біологіи.

3. Сборникъ Нижегородскаго кружка Любителей физики и астрономіи, вып. 4-ый

4. Ученыя Записки Императорскаго Юрьевскаго Университета № 1, 2, 3. Юрьевъ. 1893.

5. *Бугаевъ.* Основы эволюціонной монадологіи. Москва. 1893.

6. *Дубяго.* Объ ученыхъ заслугахъ Сэра Джорджа Биддэллэра. Казань. 1892.

7. *А. Ковалевскій.* Графическій способъ опредѣленія азимута и высоты полярной звѣзды профессора М. А. Ковалевскаго. Казань. 1884.

8. *Дубяго.* О научныхъ заслугахъ академика О. В. Струве. Казань. 1887.

9. *Корнухъ-Троицкій.* Наблюденіе съ Казанской Обсерваторіи метеорнаго потока „Персеидъ“ 10 августа 1890.

10. Систематическій каталогъ книгъ по метеорологіи и геодезіи, принадлежащихъ Императорскому Казанскому Университету. Казань. 1890. Первое прибавленіе 1891, второе прибавленіе 1893.

Digitized by Google

11. Вычисленіе частныхъ возмущеній въ движеніи малой планеты Діаны, произведенныхъ Юпитеромъ и Сатурномъ. Казань. 1889.

12. *Богоявленскій.* Наблюденія перемѣнныхъ звѣздъ типа Алголя въ 1891—92 г. Казань. 1893.

13. Нивеллирное соединеніе астрономической обсерваторіи Императорскаго Казанскаго Университета съ репером водомѣрнаго поста въ селѣ В. Челолѣ на правомъ берегу Волги противъ Казани въ 1893 г.

14. *Ковальскій.* Наблюденія на пассажномъ инструментѣ въ первомъ вертикалѣ и каталогъ склоненій 202 звѣздъ, лежащихъ между 50°30′ и 55°47′ сѣвернаго склоненія. Труды астрономической обсерваторіи Императорскаго Казанскаго Университета. Казань. 1893

15. *Бугаевъ.* Алгебраическіе частные интегралы дифференціальныхъ уравненій. Москва. 1893.

16. Отчетъ мѣстнаго распорядительнаго комитета, организованнаго Физико-Математическомъ Обществомъ для составленія капитала имени Н. И Лобачевскаго. № 4. Казань. 1893.

17. L'intermédiaire des mathématiciens. T. I. № 1. Janvier. 1894.

18. Mathematische Annalen. 43: 4, 1893.

19. Bulletin de la Société mathématique de France. XXI: 7.

20. Bulletin de la Société Impériale des naturalistes de Moscou. 1893. № 2, 3.

21. Journal de l'Ecole Polytechnique 63-me cahier. 1893.

22. *Janeček.* Obča teoretička i fizykalna lička. I knjiga. U Zagrebu 1890.

23. Nachtrag zum Katalog mathematischer und mathematisch—physikalischer Modelle. München. 1893.

24. Vorläufiger Bericht von der Russischen Gradmessung ausgeführt von Dr. W. Struve. Dorpat. 1827.

25. *H. Struve.* Ueber den Einfluss der Diffraction an Fernröhren auf Lichtscheiben. St. Petersburg. 1882.

26 *Wittram.* Allgemeine Jupiter—Störungen des Encke'schen Cometen. St.-Petersburg. 1883.

27. Imperialis Speculae astronomicae Pulcoviensi a. d. VII id. Aug. a. MDCCCLXIV quintum lustrum. Dorpati Livonorum. 1864.

28. Guilielmi Struvii diem semisaecularem. XVIII m. Octobris celebrandum indicit Universitas Dorpatensis. Dorpati Livonorum. 1863.

29. *Kotelnikow.* Exponuntur formulae analyticae quibus perturbatio motus terrae determinatur. Dorpati Livonorum.

30. *Schwarz.* Das vom Sinus der doppelter Zenithdistanz abhängige Glied der Biegung des Dorpater Meridiankreis. Dorpat. 1871.

31. *Grotenfelt.* Das Weber'sche Gesetz und die psychische Relativität Helsingfors. 1888.

Digitized by Google

32. *Rogel.* Die Entwickelung der Exponentiellen in eine unendliche Factorenfolge.

33. *Von Oettingen.* Ueber den mathematische Unterricht in der Schule. Festrede. Dorpat. 1873.

34. *Einbrodt.* Beiträge zur Atomen-Theorie. 1846.

35. *Berg.* Ueber die Bestimmung der Bahn eines Planeten aus drei vollständigen Beobachtungen. Dorpat. 1871.

36. *Brückner.* Festrede zur Feier des hundertjährigen Geburtsfestes S. A. M. K. Alexander I. Dorpat. 1878.

37. *Kopp.* Zur Theorie der Electrostriction kugelförmiger Condensatoren. Leipzig. 1890.

38. *Kadik.* Theorie der sechsstelligen Characteristiken. Dorpat. 1893

39. *Helming.* Ueber die Integration der allgemeinen Riccatischen Gleichung $\frac{dy}{dx} + y^2 = X$. Dorpat. 1879.

40. *Helming.* Anwendung der. Determinanten zur Darstellung transcendenter Functionen. Dorpat. 1876.

41. *Helming.* Untersuchungen über die allgemeine lineare Differentialgleichung der dritten Ordnung $X_0 \frac{d^3y}{dx^3} + X_1 \frac{d^2y}{dx^2} + X_2 \frac{dy}{dx} + X_3 = 0$. Dorpat. 1881.

42. *Helming.* De aequatione $X_0 \frac{d^2y}{dx^2} + X_1 \frac{dy}{dx} + X_2 = 0$. Dorpati Livonorum. 1868.

43. *Geschoeser.* Ueber die Anziehung von Massen, die gleichförmig über gerade Linien oder ebene Flächen vertheilt sind. 1891.

44. *Grofe.* Ueber die Pendelbewegung an der Erdoberfläche. Dorpat. 1888.

45. *Schwarz.* Festrede zur Jahresfeier der Stiftung der Universität Dorpat am 12 December. 1882.

46. *Gyldén.* Framställing af formler för beräkningen af en parabolisk kometbana med tillgrimdläggande af koordinater hä förda tili equatoren Helsingfors. 1862.

47. *Block.* Beiträge zur Theorie der Lichtbrechung in Prismensystemen. Dorpat. 1873.

48. *Wittram.* Zur Berechnungen der speciellen Störungen der kleinen Planeten.

49. *Kerpolla.* Zur Theorie der biquadratischen Reste. Helsingfors. 1888.

50. *Heerwagen.* Studien über die Schwingungsgesetze der Stimmgabel und über die electromagnetische Anregung. Dorpat. 1890.

51. *Genetz.* Till teoria för de Frichésko Funkltionerne. Helsingfors. 1889.

52. *Kefferstein.* Die philosophischen Grundlagen der Physik. Hamburg. 1892.

Digitized by Google

Засѣданіе 9 января 1894 года.

Соединенное засѣданіе Московскаго Математическаго Общества и IX Съѣзда Русскихъ Естествоиспытателей и врачей было посвящено воспоминаніямъ объ исполнившемся 28-го января 1892 года двадцатипятилѣтіи Общества.

Засѣданіе, происходившее подъ предсѣдательствомъ Президента Общества Члена-Основателя К. В. Бугаева, при Вице-Президентѣ П. А. Некрасовѣ и Секретарѣ Б. К. Млодзѣевскомъ, почтили своимъ присутствіемъ: Попечитель Московскаго Учебнаго Округа графъ П. А. Капнистъ, Члены-Основатели Московскаго Математическаго Общества: В. Я. Цингеръ, Ѳ. А. Слудскій, Дѣйствительные Члены Общества: В. А. Анисимовъ К. А. Андреевъ, Г. Г. Аппельротъ, В. В. Бобынинъ, А. И. Богуславскій Б. Я. Букрѣевъ, Д. А. Гольдгаммеръ, Н. Б. Делоне, Н. Е. Жуковскій, П. А. Зиловъ, Н. Н. Зининъ, А. І. Круковскій, А. М. Ляпуновъ, П. М. Покровскій, П. В. Преображенскій, И. И. Рахманиновъ, Д. Ѳ. Селивановъ, Н. П. Слугиновъ, Н. А. Умовъ, В. К. Цераскій, Н. А. Шапошниковъ, Н. Н. Шиллеръ, В. С. Щегляевъ, представители различныхъ ученыхъ учрежденій и обществъ, члены IX Съѣзда Русскихъ Естествоиспытателей и Врачей и многочисленная публика.

I. Президентъ *Н. В. Бугаевъ* привѣтствовалъ Собраніе рѣчью.

II. Московскому Математическому Обществу приносили поздравленія ученыя и учебныя учрежденія, а также русскіе и иностранные ученые.

III. Секретарь *Б. К. Млодзѣевскій* прочиталъ историческій очеркъ дѣятельности Московскаго Математическаго Общества за 25 лѣтъ.

IV. Дѣйствительный Членъ Общества *Н. Е. Жуковскій* произнесъ рѣчь: „Значеніе геометрическаго истолкованія въ теоретической механикѣ“.

Подробный протоколъ этого засѣданія будетъ напечатанъ въ началѣ слѣдующаго тома.

Засѣданіе 15 февраля 1894 года.

Въ засѣданіи присутствовали: Н. В. Бугаевъ, П. А. Некрасовъ, Ѳ. А. Слудскій, Н. Е. Жуковскій, Н. А. Умовъ, Г. Н. Шебуевъ, П. В. Преображенскій, А. П. Мининъ, В. В. Бобынинъ, В. С. Щегляевъ, А. І. Круковскій, Г. Г. Аппельротъ, Д. Ѳ. Егоровъ, Б. К. Млодзѣевскій.

Н. В. Бугаевъ заявилъ о кончинѣ члена Общества Emil Weyr, послѣдовавшей въ Прагѣ $^{13}/_{25}$ января 1894 г. Общество почтило память усопшаго вставаніемъ.

Н. В. Бугаевъ указалъ на многочисленныя привѣтствія, полученныя Московскимъ Математическимъ Обществомъ ко дню празднованія двадцатипятилѣтія Общества. *Опредѣлено*: уполномочить бюро Общества выразить привѣтствовавшимъ признательность отъ имени Общества.

Digitized by Google

Вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣлено напечатать въ Математическомъ Сборникѣ отчетъ о происходившемъ 9 января 1894 г. торжественномъ засѣданіи по случаю исполнившагося двадцатипятилѣтія Московскаго Математическаго Общества.

По предложенію Н. В. Бугаева избраны въ члены Общества: профессоръ Дмитрій Ивановичъ *Дубяго* въ Казани, профессоръ Матвѣй Александровичъ *Тихомандрицкій* въ Харьковѣ, профессоръ Валеріанъ Николаевичъ *Лигинъ* въ Одессѣ и профессоръ Петръ Александровичъ *Шифъ* въ С.-Петербургѣ.

По предложенію Н. В. Бугаева опредѣлено начиная съ XVIII тома Математическаго Общества помѣщать при заглавіяхъ статей ихъ рубрики, согласно системѣ, принятой въ „Index du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques".

Были сдѣланы сообщенія:

1. *Г. Г. Аппельротъ*. Алгебраическіе интегралы въ задачѣ о движеніи тяжелаго твердаго тѣла около точки.

2. *А. П. Минингъ* О числахъ, для которыхъ число дѣлителей равно числу чиселъ первыхъ съ ними и меньшихъ ихъ.

3. *Ѳ. А. Слудскій*. О геодезическихъ окружностяхъ на поверхности земнаго эллипсоида.

Обществу доставлены слѣдующія изданія:

1. Записки Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей, томъ XVIII, вып. I. Одесса. 1893.

2. Ученыя Записки Императорскаго Юрьевскаго Университета, № 4. Юрьевъ. 1893.

3. *Gram*—Essai sur la restitution du calcul de Léonard de Pise sur l'équation $x^3+2x^2+10x=20$ (Extrait de Bulletin de l'Académie Royale des Sciences et des lettres de Danemark) 2 экз.

4. Кіевскія Университетскія Извѣстія № 11—ноябрь—1893.

5. Bulletin de la Société Mathématique de France, tome XXI—№ 8—Paris

6. *Gram*—Rapport sur quelques calculs entrepris par M. Bertelsen et concernant les nombres premiers (Extrait des Acta mathematica) 2 экз.

7. Кіевскія Университетскія Извѣстія № 12. Декабрь. 1893 годъ.

8. Bulletin de la Société mathématique de France, tome XXI, № 9.

9. Bulletin de la Société mathématique de France, tables des vingt premiers volumes. Paris. 1894.

10. Изъ Сборника Нижегородскаго Кружка Любителей Физики и Астрономіи. Вып. 6-й.

11. Кіевскія Университетскія Извѣстія № 1. Январь. 1894.

12. Rendiconti del circolo matematico di Palermo, tomo VII, anno 1893, fasc. VI— Novembre-Dicembre.

13. *Zeuthen*—Notes sur l'histoire des mathématiques (Extrait du Bull. de l'Acad. Royale des Sciences et des Lettres de Danemark).

Digitized by Google

Засѣданіе 15 марта 1894 года.

Въ засѣданіи присутствовали: Н. В. Бугаевъ, Ѳ. А. Слудскій, Н. Е. Жуковскій, Н. А. Умовъ, А. П. Мининъ, Б. К. Млодзѣевскій, П. В. Преображенскій, Д. Ѳ. Егоровъ, А. І. Круковскій.

Секретарь доложилъ извѣщеніе Югославянской Академіи Наукъ и Искусствъ о смерти Предсѣдателя Историко Филологическаго Отдѣленія Академіи д-ра Франциска Рачкаго, послѣдовавшей $^1/_{13}$ февраля. *Опредѣлено*: Выразить Академіи соболѣзнованіе Общества.

Были сдѣланы сообщенія:

1. *Н. Е. Жуковскій.* Замѣчаніе о гироскопѣ.

2. *Н. А. Умовъ.* По поводу одного вопроса изъ термодинамики.

Обществу доставлены слѣдующія изданія:

1. *Богуславскій.* Исчисленіе положенія, краткое изложеніе алгебры плоскости и пространства.

2. Объ основаніяхъ геометріи—изданіе Физико-Математическаго Общества къ столѣтнему юбилею Н. И. Лобачевскаго (Гауссъ, Бельтрами, Риманнъ, Гельмгольцъ, Ли, Пуанкаре). Казань. 1893.

3. Труды Варшавскаго Общества Естествоиспытателей, годъ четвертый, 1892—1893, протоколы Общихъ Собраній.

4. Mathematische Annalen, 44 Band, 1 Heft Leipzig, 1894.

5. Journal de Sciencias mathematicas et astronomicas publicado pelo Dr. Gomes Teixera, vol. XI—№ 6. Coimbra. 1894.

6. Revue semestrielle des publications mathématiques redigée sous les auspices de la Société mathématique d'Amsterdam. Tome I première partie, Amsterdam, 1893.

7. Idem—tome I—deuxieme partie. Amsterdam 1893.

8. Idem—tome II—première partie. Amsterdam 1894.

9. Bulletin des publications nouvelles de la librairie Gauthier—Villars, année 1893—III-e et IV-e trimestre.

10. Кіевскія Университетскія Извѣстія, годъ XXXIV, № 2, февраль, 1894.

11. Рѣчь и отчетъ, читанные въ торжественномъ Собраніи Императорскаго Московскаго Университета, 12 января 1894 года.

12. Acta mathematica, 18 : 1.

13. *Macfarlane.* On the definitions of the trigonometric functions. Boston.

14. *Смирновъ.* Объ аксіомахъ геометріи въ связи съ ученіемъ негеометровъ о пространствахъ разныхъ формъ и многихъ измѣреній. Казань. 1894.

15. Счетъ и измѣреніе Гельмгольца. Понятіе о числѣ Кронекера. Казань. 1893.

Засѣданіе 26 апрѣля 1894 года.

Въ засѣданіи присутствовали: П. А. Некрасовъ, Ѳ. А. Слудскій, Н. А. Умовъ, Н. Е. Жуковскій, Г. Н. Шебуевъ, Б К. Млодзѣевскій, Д. Ѳ. Егоровъ, А. І. Круковскій.

Digitized by Google

П. А. Некрасовъ предложилъ, въ видахъ прекращенія на страницахъ журнала Общества дальнѣйшей полемики по поводу способа В. Г. Имшенецкаго для нахожденія раціональныхъ рѣшеній линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, не включать въ Математическій Сборникъ статьи П. А. Некрасова по этому предмету, уже выпущенной въ свѣтъ въ отдѣльныхъ оттискахъ. *Опредѣлено*: принять предложеніе П. А. Некрасова.

П. А. Некрасовъ заявилъ, что Президентъ, Вице-Президентъ и Секретарь Общества представлялись Его Императорскому Высочеству Московскому Генералъ-Губернатору Великому Князю Сергію Александровичу, причемъ Президентъ Общества Н. В. Бугаевъ имѣлъ честь представить Его Высочеству докладную записку съ ходатайствомъ объ увеличеніи пособія Обществу до трехъ тысячъ рублей. Съ такимъ же ходатайствомъ П. А. Некрасовъ по порученію бюро Общества, обращался и къ Его Императорскому Высочеству Великому Князю Константину Константиновичу, которому благоугодно было равнымъ образомъ обѣщать свое содѣйствіе Обществу въ его ходатайствѣ, а также и къ Министру Финансовъ С. Ю. Витте. Въ настоящее время Его Императорское Высочество Московскій Генералъ-Губернаторъ увѣдомляетъ Общество, что Министръ Народнаго Просвѣщенія, въ отвѣтъ на переданное ему ходатайство Московскаго Математическаго Общества, увѣдомилъ Его Высочество, что онъ вошелъ въ сношеніе съ Министромъ Финансовъ по вопросу о назначеніи Обществу постояннаго пособія въ 3000 рублей въ годъ.

Б. К. Млодзѣевскій доложилъ письмо профессора Юрьевскаго Университета Л. К. Лахтина съ предложеніемъ отъ имени Правленія Юрьевскаго Университета объ обмѣнѣ изданіями. *Опредѣлено:* вступить въ обмѣнъ изданіями съ Императорскимъ Юрьевскимъ Университетомъ.

Секретарь Б. К. Млодзѣевскій доложилъ, что Д. И. Дубяго, М. А. Тихомандрицкій, В. Н. Лигинъ и П. А. Шиффъ прислали на имя Н. В. Бугаева письма съ выраженіями благодарности за избраніе ихъ въ члены Общества.

Были сдѣланы сообщенія:

1. *Н. А. Умовъ.* Объ общемъ видѣ термодинамическаго потенціала.

2. *А. І. Круковскій.* Замѣтка объ интегрированіи линейнаго уравненія 2-го порядка.

3. *Н. В. Берви.* О дополнительныхъ функціяхъ при рѣшеніи одного вида функціональныхъ уравненій.

Обществу доставлены слѣдующія изданія:

1. Annual report of the board of regents of the Smithsonian institution. July. 189 1.

2. *Анисимовъ.* Къ теоріи кривыхъ на плоскости. Варшава. 1894.

3. Verzeichnis der seit 1850 an den Deutschen Universitäten erschienenen Doctor—Dissertationen und Habilitationsschriften aus der reinen und angewandten Mathematik. München. 1893.

Digitized by Google

4. Сообщенія Харьковскаго Математическаго Общества, 2-я серія, т. IV— № 3.

5. Stern—Ephemeriden auf das Jahr 1894 von W. Döllen. Dorpat. 1893.

6. *Слудскій.* Лекціи по высшей геодезіи. Москва. 1894.

7. Записки Московскаго Отдѣленія Императорскаго Русскаго Техническаго Общества, годъ VIII, вып. 9 и 10.

8. Mathematische Annalen, 44 Band, 2—3 Heft. Leipzig. 1894.

9. Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1894, № 1.

10. Časopis pro pestóváni mathematiky a fysiky, rocnik XXIII cislo I.

11. Idem, cislo II.

12. Bulletin de la Société mathématique de France, tome XXII, № 1, et 2.

13. Acta mathematica 17 : 3 et 4,

14. Акустика.

15. Ученыя Записки Императорскаго Юрьевскаго Университета, № 1, 1894.

16. Извѣстія С.-Петербургскаго Практическаго Технологическаго Института. 1893 годъ. 2 экз.

17. Sitzungsberichte der Kaiserlichen Academie der Wissenschaften, mathem.—naturwissenschaftlichen Classe, Abtheilung II *a*; CII Bd. I & II Heft.

18. Idem—CII *Bd.* III & IV Heft.

19. Idem—CII *Bd.* V & VI Heft.

20. Idem—CII *Bd.* VII Heft.

21. Rad jugoslavenske akademije znatnosti i umjetnosti knjiga CXIII, XVI.

22. Извѣстія Физико-Математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ, вторая серія, томъ IV—№ 1.

Засѣданіе 20 сентября 1894 года.

Въ засѣданіи присутствовали: Н. В. Бугаевъ, П. А. Некрасовъ, Ѳ. А. Слудскій, Н. А. Умовъ, Н. Е. Жуковскій, В. С. Щегляевъ, Б. К. Млодзѣевскій, В. В. Бобынинъ, Д. Ѳ. Егоровъ, А. І. Круковскій.

По предложенію Н. В. Бугаева избраны въ члены Общества: профессоръ Семенъ Петровичъ *Ярошенко* въ Одессѣ, профессоръ Иванъ Михайловичъ *Занчевскій* въ Одессѣ, профессоръ Иванъ Владиславовичъ *Слешинскій* въ Одессѣ и Иванъ Петровичъ *Долбня*, преподаватель математики въ Аракчеевскомъ Нижегородскомъ Кадетскомъ Корпусѣ.

Были сдѣланы сообщенія:

1. Ѳ. *А. Слудскій.* О движеніи центра тяжести тяжелаго твердаго тѣла, вращающагося около неподвижной точки.

2. *Н. А. Умовъ.* Къ вопросу объ электрострикціи.

3. *П. А. Некрасовъ.* Примѣненіе полиномовъ ξ, на которые распадается полиномъ σ В. Г. Имшенецкаго, непосредственно къ обыкновенной формѣ

Digitized by Google

линейнаго дифференціальнаго уравненія, при рѣшеніи задачи о нахожденіи его раціональныхъ рѣшеній.

4. *П. А. Некрасовъ.* Выводъ формулы электростатической энергіи

$$W=\frac{v}{8\pi}\int_0^{\mathfrak{H}}\left(k+2\mathfrak{H}\frac{dk}{d\mathfrak{H}}\right)d\mathfrak{H}$$

безъ посредства уравненія $\Delta\varphi=0$.

5. *Н. В. Бугаевъ.* Опредѣленные числовые интегралы по дѣлителямъ смѣшаннаго характера.

6. *П. В. Преображенскій.* По поводу новѣйшихъ изслѣдованій о числѣ простыхъ чиселъ, не превышающихъ даннаго предѣла.

Обществу доставлены слѣдующія изданія:

1. Географическія карты.
2. *Jenkins*—Tellustria. London. 1894.
3. Casopis pro pestování mathematiky a fysiky rocnik XXIII cislo III.
4. Idem—rocnik XXIII cislo IV.
5. Idem „ „ cislo V.
6. *Schiller.* Ueber eine mögliche, aus den Joule-Thomson'schen Abkühlungsversuchen herzuleitende Form der Zustandsgleichung für Gase. Leipzig. 1890.
7. *Шиллеръ.* О варіаціи выраженія электростатической энергіи и силахъ электрострикціи. Кіевъ. 1894.
8. *Андреевъ.* О розысканіи раціональныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій при помощи интегрирующаго множителя. Харьковъ. 1894.
9. Bulletin de la Société mathématique de France, tome XII, № 4. Paris.
10. Idem, tome XII, № 3. Paris.
11. Idem, tome XII, № 7. Paris.
12. *Шиллеръ.* Нѣсколько замѣчаній по поводу „Изслѣдованій по математической физикѣ", кн. Б. Голицына.
13. Bulletin de la Société mathématique de France, tome XII, № 5. Paris.
14. *Гассельблатъ.* О сокращенномъ обозначеніи мѣръ, вѣсовъ и т. п. С.-Петербургъ. 1894.
15. Bulletin de la Société Impériale des naturalistes de Moscou, année 1893. № 4. Moscou.
16. Bulletin de la Société Impériale des naturalistes de Moscou, année 1894, № 1.
17. Извѣстія Физико-Математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ, вторая серія, т. IV, № 2. Казань. 1894.
18. Изъ сборника Нижегородскаго Кружка Любителей Физики и Астрономіи, вып. 6.

Digitized by Google

19. Записки Кіевскаго Общества Естествоиспытателей, томъ XIII, вып. 1 и 2 (въ трехъ тетрадяхъ).

20. Кіевскія Университетскія Извѣстія, 1894 годъ № 3. Кіевъ, 1894.

21. Wiskundige opgasen met de Oplassingen—Les de eel 3-de Stuk. Amsterdam, 1894.

22. Revue semestrielle des publications mathématiques—tome II (deuxième partie) Amsterdam, 1894.

23. *Шиллеръ.* О нѣкоторыхъ новѣйшихъ взглядахъ на методы рѣшенія вопросовъ физики. Кіевъ 1894.

24. Празднованіе Императорскимъ Казанскимъ Университетомъ столѣтней годовщины дня рожденія Н. И. Лобачевскаго. Казань 1894.

25. Acta Societatis Scientiarum fennicae, tomus XIX. Helsingforsiae 1893.

26. Bulletin de la Société mathématique de France, tome XII, № 6 Paris.

27. Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch physikalische Klasse 1894, № 2.

28. Idem—Geschäftliche Mittheilungen 1894. № 1.

29. *Arnoux.* Essais de psychologie et de métaphysique positives. Arithmétique graphique. Les espaces arithmétiques hypermagiques. Paris 1894.

30. Rendiconti del circolo matematico di Palermo. Tomo VIII, anno 1894, fasc. 1.

31. Idem—fasc. II e III.

32. Casopis pro pestovani mathematiky a fysiky, rocnik XXIII, čislo V. 1894.

33. Кіевскія Университетскія Извѣстія 1894 года № 4.

34. Mathematische Annalen, 44 Band 4 Heft.

35. *Lemoine.* Notes de Géometrie (Assoc. franç.). Paris 1893.

36. Idem—Application au tétraèdre de la transformation continue. Paris 1893.

37. Idem—Nuevo medio de obtenar fórmulos en la géométria de triangulo-

38. Idem—Compléments de géométrographie.

39. Кіевскія Университетскія извѣстія 1894—№ 5.

40. Idem—№ 6.

41. Bulletin des publications nouvelles de la librairie Gauthier—Villars et fils, année 1894, 1-er et II-de trimestre, Paris 1894.

42. Ljetopis jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti za godinu 1893—osmi svezak. U Zagrebu, 1893.

43. Rad jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti. Knjiga CXVII, matematičko—prirodoslovni razred XVII. U Zagrebu, 1893.

44. Mathematische Annalen 45. Bd. 1 Heft 1894.

45. Idem—2 Heft.

46. Кіевскія Университетскія Извѣстія 1894—№ 8.

47. Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de S-t. Pètersbourg Nouvelle série IV—№ 1.

Digitized by Google

48. Idem—№ 2.
49. Bedrag till kännedom of Finlands natur och folk—femtiondlandra Häftet.
50. Idem—femtiondetredje Häftet.
51. Öfversigt af finska vetenskaps—societetens förhandlingar XXXV 1892—1893.
52. Ученыя Записки Императорскаго Юрьевскаго Университета. Юрьевъ 1894.
53. Кіевскія Университетскія Извѣстія 1894—№ 7.
54. Записки Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей, томъ XVII, выпускъ II, Одесса 1894.
55. Rendiconti del circolo matematico di Palermo, tomo VIII, anno 1894, fasc. IV.
56. Записки Императорской Академіи Наукъ, томъ 71. С.-Петербургъ 1893 г.
57. Idem—т. 72 кн. 1 СПб. 1893.
58. Idem—т. 72 кн. 2 СПб. 1893.
59. Idem—т. 73 кн. 1 СПб. 1893.
60. Idem—т. 73 кн. 2 СПб. 1894.
61. Idem—т. 74 СПб. 1894.
62. Acta mathematica 18: 2. 1894.

О НѢКОТОРЫХЪ РЯДАХЪ И ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЯХЪ.

Н. В. Берви.

(Приложеніе къ протоколу засѣданія 26 апрѣля 1894 года).

Имѣемъ совмѣстно такія равенства подъ условіемъ возможности операцій:

1) $$1)\quad \Sigma h_\gamma \psi(x+\alpha_\gamma)=f(x)$$

2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{zt}\varphi(t)\,.\,dt\,.\,\Sigma h_\gamma e^{-z\alpha_\gamma}=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{zt}f(t)\,.\,dt.$$

Далѣе

1) $$\int_0^x F(y)\,.\,\varphi(x-y)dy=f(x)$$

Digitized by Google

2) $$\int_0^\infty F(x).e^{-zx}dx.\int_0^\infty \varphi(x).e^{-zx}dx = \int_0^\infty f(x).e^{-zx}dx.$$

Затѣмъ

1) $$\int_a^{\frac{u}{a}} F(x).f\left(\frac{u}{x}\right).dx = \varphi(u)$$

2) $$\int_0^a x^z f(x).dx \int_0^a x^{z+1}F(x).dx = -\int_0^{a^2} x^z \varphi(x).dx$$

Затѣмъ

1) $$\int_a^b (x-y)^{p-1}f(x).dx = \varphi(y)$$

2) $$f(x) = c\frac{d}{dx}\int_b^x (x-\beta)^{-p}\varphi_1(\beta).d\beta$$

гдѣ $\varphi_1(\beta)$ есть приращеніе функціи φ при обходѣ около точки b.

Если вести пути интеграціи по плоскости комплекснаго перемѣннаго, то предыдущія равенства могутъ быть нѣсколько обобщены и освобождены отъ ограниченій.

Задача. Найти область, въ который рядъ

$$\varphi(x) = \Sigma a_n f(\alpha_n x)$$

былъ бы способенъ изобразить произвольную функцію, причемъ f есть нѣкоторая голоморфная функція, и α_n есть корень нѣкотораго трансцендентнаго уравненія $F(\alpha_n)=0$.

Положимъ, что функція f въ безконечности на дѣйствительной оси есть 0, а F или нуль или конечная величина. Тогда искомую область составятъ всѣ дѣйствительныя x, для которыхъ при a конечномъ

$$lim\int \frac{f(xy).dy}{(y-a)F(y)} = 0$$

Digitized by Google

при удаленіи замкнутаго контура l всѣми его точками въ безконечность.

Я имѣю также средство найти коэффиціенты изслѣдуемаго ряда.

Аналогичнымъ образомъ могутъ быть изслѣдованы ряды

$$\varphi(x)=\Sigma\alpha_n A(x, \alpha_n)$$

гдѣ

$$A(x, y)=\int_0^\infty f(xt).\varphi(yt).\xi(t).dt$$

и α_n есть корень трансцедентнаго уравненія.

Пусть имѣемъ

$$\varphi(x)=\Sigma a_n f(x+\alpha_n)=A(f)$$

гдѣ A есть символъ операціи. Имѣемъ.

$$A(e^{mx})=\psi(m).e^{xm}.$$

Положимъ. что намъ данъ рядъ операцій типа A именно: $A_1, A_2, \ldots$ Назовемъ соотвѣтствующія имъ функціи ψ черезъ $\psi_1, \psi_2, \ldots$, причемъ положимъ, что ψ_k есть функція голоморфная, имѣющая въ началѣ координатъ нуль порядка k. При этихъ предположеніяхъ я могу найти формально коэффиціенты ряда

$$\varphi(x)=a_1 A_1(f)+a_2 A_2(f)+a_3 A_3(f)\ldots$$

Если область сходимости этого ряда есть вся дѣйствительная ось, то во многихъ случаяхъ и имѣю дѣйствительное рѣшеніе задачи. Если намъ дано уравненіе

$$A(f)=\varphi$$

и по данной φ ищемъ f, то вообще говоря, рѣшеній будетъ нѣсколько, и возникающія такимъ образомъ дополнительныя функціи даютъ средство съ новой точки зрѣнія построить теорію рядовъ

$$\varphi(x)=\Sigma a_n e^{\alpha_n x}$$

гдѣ α_n есть корень уравненія $F(\alpha_n)=0$ и опредѣлить численную величину ряда для всѣхъ дѣйствительныхъ x при усло-

Digitized by Google

віи, чтобы въ извѣстной области рядъ изображалъ нѣкоторую наперед заданную функцію φ.

Пусть имѣемъ дифференціальное уравненіе алгебраическое

$$\sum a x^k y \cdot \frac{dy}{dx} \cdots \frac{d^p y}{dx^p} = 0,$$

которое допускаетъ интегралъ голоморфный и нуль въ безконечности. Тогда всегда возможно написать

$$y = \int_0^\infty e^{-xt} \varphi(t) \cdot dt$$

гдѣ

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_l e^{tz} y \cdot dz$$

контуръ l обхватываетъ всѣ особыя точки y. Функція φ удовлетворяетъ такому функціональному уравненію:

$$\Sigma a \int_A \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) \cdot x_2 \ldots \varphi(x_{p+1}) x^p{}_{p+1} (x_1 + x_2 + \ldots x_{p+1})^{k-1} dv = 0$$

гдѣ интеграція распространяется на область A, опредѣляемую условіемъ $x_1 + x_2 + \ldots + x_{p+1} < x$.

Если наше дифференціальное уравненіе имѣетъ всѣ особыя точки на дѣйствительной оси и не обращается въ нихъ въ безконечность порядка выше или равнаго единицѣ, то функція φ въ безконечности на мнимой оси есть 0, и, кромѣ того, для всѣхъ дѣйствительныхъ x, лежащихъ внѣ нѣкоторыхъ предѣловъ a и b, имѣемъ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{xz\sqrt{-1}} \varphi(z\sqrt{-1}) \cdot dz = 0.$$

Этихъ двухъ условій достаточно, чтобы интегралъ нашего уравненія имѣлъ особыя точки, удовлетворяющія вышеуказаннымъ условіямъ.

Голоморфная на всей плоскости функція φ всегда намъ извѣстна помощью ряда.

Digitized by Google

Если интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx\sqrt{-1}}\psi(x)dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx\sqrt{-1}}\psi_1(x)dx$$

для дѣйствительныхъ x, лежащихъ внѣ предѣловъ a и b, суть нули, то интегралъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx\sqrt{-1}}\psi(x)\psi_1(x)dx$$

для дѣйствительныхъ x, лежащихъ внѣ предѣловъ $2a$ и $2b$, есть нуль.

Дифференціальное уравненіе

$$2^4.3^5y^2=\left(12\frac{dy}{dx}+\pi^2\right)\left(12\frac{dy}{dx}-2\pi^2\right)^2$$

удовлетворяется для *всѣхъ дѣйствительныхъ* x рядомъ

$$y=-sn x+\frac{sn 2x}{2^3}-\frac{sn 3x}{3^3}+\ldots,$$

причемъ этотъ интегралъ не можетъ быть никакимъ выборомъ произвольныхъ постоянныхъ приведенъ въ совпаденіе на *всей* дѣйствительной оси съ общимъ интеграломъ, ибо этотъ послѣдній есть алгебраическая функція. На нѣкоторой же части дѣйствительной оси они численно совпадаютъ. Это уравненіе показываетъ, что при интегрированіи дифференціальныхъ уравненій помощью рядовъ типа $\Sigma a_n e^{\alpha_n x}$, гдѣ α_n вообще мнимы, недостаточно доказать, что рядъ сходится и удовлетворяетъ уравненію.

Имѣемъ слѣдующій весьма обширный классъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, интегрируемыхъ помощью опредѣленныхъ интеграловъ.

Пусть функція $v(x, y)$ удовлетворяетъ уравненію съ частными производными:

Digitized by Google

$$\sum ay^n \frac{d^m v}{dy^m} = \sum bx^n \frac{d^m v}{dx^m},$$

$$\sum cy^n \frac{d^m v}{dy^m} = \sum dx^n \frac{d^m v}{dx^m}.$$

Тогда, полагая

$$f(x) = \int \psi(y) v(x, y)\, dy,$$

гдѣ замкнутый путь интеграціи таковъ, что подъинтегральная функція въ началѣ и концѣ его имѣетъ одно и то же значеніе, имѣемъ

$$\int A(\psi) v\, dy = B(f)$$

$$\int C(\psi) v\, dy = D(f)$$

гдѣ $A(\psi)$, $C(\psi)$, $B(f)$, $D(f)$ суть результаты отъ совершенія надъ ψ, f нѣкоторыхъ дифференціальныхъ операцій.

Если теперь мы умѣемъ интегрировать уравненіе, которое символически пишется такъ:

$$\Sigma e A^n C^m \psi = 0,$$

то функція

$$f = \int \psi . v . dy$$

будетъ интеграломъ уравненія:

$$\Sigma e B^n D^m f = 0,$$

Digitized by Google

СОДЕРЖАНІЕ СЕМНАДЦАТАГО ТОМА.

Стр.

Составъ Московскаго Математическаго Общества.

Отдѣлъ первый.

Л. К. Лахтина: Алгебраическія уравненія, разрѣшимыя въ гипергеометрическихъ функціяхъ..... 1

Б. Я. Букрѣева: О распредѣленіи корней одного класса цѣлыхъ трансцендентныхъ функцій..... 217

И. В. Слешинскаго: Къ теоріи аналитическихъ функцій. 223

В. А. Циммермана: Къ вопросу о наибольшемъ и наименьшемъ значеніи опредѣленнаго интеграла..... 229

А. П. Минина: О числахъ, дѣлящихся на число своихъ дѣлителей..... 240

А. М. Ляпунова: Изслѣдованіе одного изъ особенныхъ случаевъ задачи объ устойчивости движенія..... 253

Л. К. Лахтина: По поводу мемуара M. A. Pujet «Sur la fonction résolvante de l'équation $x^m+px+q=0$», помѣщеннаго въ 91 томѣ Comptes Rendus..... 334

В. Е. Сердобинскаго: О кривой эллиптическихъ функцій перваго вида..... 337

П. А. Некрасова: Способъ В. Г. Имшенецкаго для нахожденіе алгебраическихъ раціональныхъ дробныхъ рѣшеній линейнаго дифференціальнаго уравненія..... 341

Извлеченія изъ протоколовъ засѣданій Московскаго Математическаго Общества..... 383

Приложенія къ протоколу засѣданія 20 апрѣля 1893 г.

I. Извлеченіе изъ письма проф. К. А. Поссе (отъ него лично и отъ имени проф. А. Н. Коркина и проф. Д. К. Бобылева), доложеннаго Московскому Математическому Обществу 21 апрѣля 1892 года. 386

Digitized by Google

Стр.

II. О сообщеніи академика В. Г. Имшенецкаго, сдѣланномъ въ засѣданіи Московскаго Математическаго Общества 19 мая 1892 года..... 391

Опечатки и поправки.

Н. В. Бугаева: Алгебраическіе частные интегралы дифференціальныхъ уравненій..... 399

П. А. Некрасова: Къ теоріи трехчленныхъ уравненій. 439

В. А. Анисимова: Къ теоріи кривыхъ двойной кривизны. 447

Е. В. Борисова: О критическихъ центрахъ кривыхъ 3-го порядка..... 461

Л. К. Лахтина: О жизни и научныхъ трудахъ Николая Ивановича Лобачевскаго..... 474

П. В. Преображенскаго: Къ вопросу о притяженіи пластинокъ подъ дѣйствіемъ капиллярныхъ силъ..... 494

П. А. Некрасова: Къ задачѣ объ иррегулярныхъ интегралахъ линейныхъ уравненій..... 498

В. П. Ермакова: Линейныя дифференціальныя уравненія втораго порядка съ алгебраическими интегралами..... 500

І. И. Чистякова: Обобщеніе числовой функціи Гаусса и слѣдствія его 530

А. П. Минина: О числахъ, для которыхъ число дѣлителей равно числу чиселъ первыхъ съ ними и меньшихъ ихъ..... 538

С. Н. Антаева: Объ уравненіяхъ пятой степени, разрѣшаемыхъ въ радикалахъ, и о разлагаемости уравненія $\frac{p(p-1)}{2}$-ой степени (при p простомъ) отъ симметрической функціи двухъ корней даннаго уравненія..... 544

М. Ѳ. Хандрикова: Одно изъ рѣшеній основнаго вопроса геодезіи..... 575

И. М. Занчевскаго: Нѣкоторыя теоремы изъ теоріи опредѣлителей..... 585

Князя Б. Б. Голицына: Объ электростатической энергіи. 598

П. А. Шиффа: О нѣкоторыхъ соотношеніяхъ въ теоріи опредѣленныхъ интеграловъ..... 607

Digitized by Google

Н. Гюнтера: О нахожденіи дробныхъ раціональныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій...
Н. Е. Жуковскаго: Къ вопросу о разрѣзаніи вихревыхъ шуровъ.....
Н. В. Бугаева: Опредѣленные числовые интегралы по дѣлителямъ..... 7
А. І. Круковскаго: Замѣтка объ интегрированіи линейнаго уравненія съ частными производными 2-го порядка. 7
Л. К. Лахтина: Объ одномъ конкретномъ истолкованіи планиметріи Лобачевскаго..... 7(
Ѳ. А. Слудскаго: О движеніи центра тяжести тяжелаго твердаго тѣла, вращающагося около неподвижной точки..... 79
Н. А. Умова: Къ вопросу объ электростриккіи..... 79'
И. П. Долбни: О формѣ радикальнаго рѣшенія уравненій первоначальной степени..... 801
Извлеченіе изъ протоколовъ засѣданій Московскаго Математическаго Общества..... 820
Приложеніе къ протоколу засѣданія 26 апрѣля 1894 г.:
Н. В. Берви: О нѣкоторыхъ рядахъ и дифференціальныхъ уравненіяхъ..... 838

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Deacidified using the Bookkeeper process.
Neutralizing agent: Magnesium Oxide
Treatment Date: March 2006

PreservationTechnologies
A WORLD LEADER IN PAPER PRESERVATION
111 Thomson Park Drive
Cranberry Township PA 16066
(724) 779-2111

Digitized by Google