ТРУДЫ

ТОПОГРАФО-ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ КОММИССІИ.

ВЫПУСКЪ V.

МОСКВА
ПЕЧАТНЯ А. И. СНЕГИРЕВОЙ
ОСТОЖЕНКА, САВЕЛОВСКІЙ ПЕР., СОБ. Д.

1896

Геометрическія основанія геодезіи на трехъосномъ элипсоидѣ, весьма мало отличающемся отъ сфероида.

Задача о раскрытіи фигуры земли рѣшается обыкновенно или путемъ градусныхъ измѣреній въ предположеніи, что искомая фигура есть планетарный эллипсоидъ вращенія, или-же въ томъ смыслѣ, что для данной, покрытой тригонометрическою сѣтью страны или для нѣсколькихъ странъ подыскивается такой эллипсоидъ вращенія, размѣры котораго отличались-бы весьма мало отъ размѣровъ, данныхъ Бесселемъ для земного сфероида, и поверхность котораго возможно близко совпадала-бы съ поверхностью упомянутыхъ странъ.

Нѣтъ сомнѣнія въ томъ, что задачу эту можно рѣшить болѣе точно, если отказаться отъ того условія, что искомый эллипсоидъ долженъ быть поверхностью вращенія, ось которой совпадаетъ съ осью міра, ибо въ этомъ случаѣ мы будемъ имѣть въ нашемъ распоряженіи большее число постоянныхъ величинъ.

Насколько мнѣ извѣстно, попытки въ этомъ направленіи были сдѣланы съ одной стороны академикомъ Шубертомъ въ 1859 году и Кларкомъ въ 1878 году и съ другой стороны Фергола въ 1874 году.

Первые два изъ упомянутыхъ ученыхъ опредѣляли фигуру земли, предполагая ее трехъ-оснымъ эллипсоидомъ, меньшая ось котораго совпадаетъ съ осью міра. Размѣры и положеніе осей, найденные Клеркомъ, воспользовавшимся для этой цѣли измѣреніями Индѣйской параллели, слѣдующіе:

размѣръ большой экваторіальной полуоси 6.378.378 метровъ и долгота ея къ западу отъ Гринвича $8^0 15'$;
размѣръ меньшей экваторіальной полуоси 6.377.915 метровъ и долгота ея къ востоку отъ Гринвича $81^0 45'$;
размѣръ полярной полуоси 6.356.387 метровъ.

Фрегола предположилъ въ своихъ изысканіяхъ, что фигура земли есть планетарный эллипсоидъ, полярная ось котораго не совпадаетъ съ осью міра. Изысканія, предпринятыя имъ съ цѣлью опредѣлить уголъ наклоненія оси планетарнаго эллипсоида, представляющаго собою фигуру земли, съ осью міра, не привели его къ удовлетворительнымъ результатамъ.

Въ предлагаемой благосклонному вниманію Топографо-Геодезической Коммиссіи статьѣ моей я имѣлъ въ виду сопоставить формулы, дающія возможность опредѣлить фигуру земли какъ изъ градусныхъ измѣреній, въ томъ предположеніи, что искомая фигура есть трехъ-осный эллипсоидъ, меньшая ось котораго наклонена къ оси міра, такъ и путемъ описанія трехъ-оснаго эллипсоида, поверхность котораго совпадала бы возможно близко съ поверхностью данныхъ, покрытыхъ тріангуляціонною сѣтью странъ.

Ограниченія, которыя я ввожу при рѣшеніи этой задачи, будутъ слѣдующія:

1) Квадраты полуосей искомаго эллипсоида могутъ отличаться отъ квадратовъ полуосей Бесселевскаго сфероида на величины порядка $a^2 e^4$, гдѣ a есть длина экваторіальной полуоси сфероида Бесселя, а e его эксцентрицитетъ.
2) Уголъ, образуемый меньшей осью искомаго эллипсоида съ осью міра, долженъ быть величиною, порядокъ которой не ниже, чѣмъ e^2.

Въ началѣ статьи я вывожу формулы, дающія прямоугольныя координаты точки эллипсоида въ системѣ, одна изъ осей которой параллельна оси міра, въ функціи угловъ φ и λ, которые образуютъ: нормаль, проведенная къ эллипсоиду въ этой точкѣ, съ осью міра и плоскость, проходящая черезъ эту нормаль и параллельная оси міра, съ произвольною постоянною плоскостью также параллельною оси міра и проходящей черезъ нормаль другой

опредѣленной точки эллипсоида. Затѣмъ я вывожу формулы, выражающія въ функціи тѣхъ-же угловъ радіусъ кривизны произвольнаго сѣченія эллипсоида и мѣру кривизны поверхности этого эллипсоида. Полученныя общія формулы я преобразую, вводя упомянутыя выше ограниченія и отбрасывая при вычисленіи члены, порядокъ которыхъ выше e^4. Далѣе я перехожу къ вычисленію длины дугъ нѣкоторыхъ замѣчательныхъ кривыхъ на эллипсоидѣ, а именно длины дугъ кривыхъ $\lambda=\text{const}$, $\varphi=\text{const}$ и кривыхъ геодезическихъ и излагаю рѣшеніе задачи о перенесеніи широты, долготы и азимута вдоль геодезической кривой. Формулы, полученныя для длины дугъ $\lambda=\text{const}$ и $\varphi=\text{const}$, даютъ намъ возможность по даннымъ градусныхъ измѣреній опредѣлить длину осей земного эллипсоида и положеніе этихъ осей. Статья заканчивается выводомъ формулъ, дающихъ возможность найти такой трехъ-осный эллипсоидъ, поверхность котораго совпадала-бы возможно близко съ поверхностью данной страны.

Весьма было-бы желательно примѣнить формулы, полученныя мною, къ вычисленію самыхъ размѣровъ земли, примѣняя ихъ къ даннымъ существующихъ градусныхъ измѣреній, но недостатокъ опытности въ сложныхъ вычисленіяхъ, а также и времени препятствуетъ мнѣ самому взяться за эту работу.

---

§ 1. Пусть

$$\frac{\xi^2}{A^2}+\frac{\eta^2}{B^2}+\frac{\zeta^2}{C^2}=1 \tag{1}$$

— уравненіе эллипсоида, отнесеннаго къ осямъ ξ, η и ζ прямоугольной Декартовой системы, образующимъ съ осями x, y и z таковой же системы углы, косинусы которыхъ даны слѣдующей таблицей:

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline \xi & p_1 & q_1 & r_1 \\ \eta & p_2 & q_2 & r_2 \\ \zeta & p_3 & q_3 & r_3 \end{array} \tag{2}$$

и пусть α, β и γ координаты начала системы x, y, z въ системѣ ξ, η, ζ, такъ что

$$\begin{aligned} \xi &= p_1 x + q_1 y + r_1 z + \alpha, \\ \eta &= p_2 x + q_2 y + r_2 z + \beta, \\ \zeta &= p_3 x + q_3 y + r_3 z + \gamma. \end{aligned} \tag{3}$$

Если чрезъ λ, μ и ν мы обозначимъ косинусы угловъ, образуемыхъ нормалью N къ эллипсоиду (1) въ точкѣ i (ξ, η, ζ), съ осями ξ, η и ζ, то координаты точки i могутъ быть выражены слѣдующими формулами:

$$\xi = \frac{d\Delta}{d\lambda}, \quad \eta = \frac{d\Delta}{d\mu}, \quad \zeta = \frac{d\Delta}{d\nu},$$

гдѣ (4)

$$\Delta = \sqrt{A^2 \lambda^2 + B^2 \mu^2 + C^2 \nu^2}.$$

§ 2. Положимъ для краткости письма

$$P = \frac{p_1^2}{A^2} + \frac{p_2^2}{B^2} + \frac{p_3^2}{C^2}, \quad Q = \frac{q_1^2}{A^2} + \frac{q_2^2}{B^2} + \frac{q_3^2}{C^2}, \quad R = \frac{r_1^2}{A^2} + \frac{r_2^2}{B^2} + \frac{r_3^2}{C^2},$$

$$p = \frac{q_1 r_1}{A^2} + \frac{q_2 r_2}{B^2} + \frac{q_3 r_3}{C^2}, \quad q = \frac{r_1 p_1}{A^2} + \frac{r_2 p_2}{B^2} + \frac{r_3 p_3}{C^2}, \quad r = \frac{p_1 q_1}{A^2} + \frac{p_2 q_2}{B^2} + \frac{p_3 q_3}{C^2},$$

$$\pi = \frac{p_1 \alpha}{A^2} + \frac{p_2 \beta}{B^2} + \frac{p_3 \gamma}{C^2}, \quad \chi = \frac{q_1 \alpha}{A^2} + \frac{q_2 \beta}{B^2} + \frac{q_3 \gamma}{C^2}, \quad \rho = \frac{r_1 \alpha}{A^2} + \frac{r_2 \beta}{B^2} + \frac{r_3 \gamma}{C^2},$$

$$\omega = \frac{\alpha^2}{A^2} + \frac{\beta^2}{B^2} + \frac{\gamma^2}{C^2},$$

$$\begin{aligned} 2E(a, b, c) &= Pa^2 + Qb^2 + Rc^2 + 2\,pbc + 2\,qca + 2\,rab, \\ \varepsilon(a, b, c) &= \pi a + \chi b + \rho c, \end{aligned} \tag{5}$$

тогда уравненіе эллипсоида (1) въ координатной системѣ (x, y, z) будетъ

$$2F(x, y, z) = 2E(x, y, z) + 2\varepsilon(x, y, z) + \omega = 1. \tag{6}$$

§ 3. Введемъ далѣе обозначенія:

$$\begin{aligned} P' &= A^2 p_1^2 + B^2 p_2^2 + C^2 p_3^2, & p' &= A^2 q_1 r_1 + B^2 q_2 r_2 + C^2 q_3 r_3, \\ Q' &= A^2 q_1^2 + B^2 q_2^2 + C^2 q_3^2, & q' &= A^2 r_1 p_1 + B^2 r_2 p_2 + C^2 r_3 p_3, \\ R' &= A^2 r_1^2 + B^2 r_2^2 + C^2 r_3^2, & r' &= A^2 p_1 q_1 + B^2 p_2 q_2 + C^2 p_3 q_3, \end{aligned}$$

$$2E'(a, b, c) = P'a^2 + Q'b^2 + R'c^2 + 2p'bc + 2q'ca + 2r'ab, \tag{7}$$

и замѣтивъ, что косинусы l, m, n, угловъ, образуемыхъ нормалью N съ осями x, y и z, выражаются формулами:

$$l = p_1\lambda + p_2\mu + p_3\nu, \quad m = q_1\lambda + q_2\mu + q_3\nu, \quad n = r_1\lambda + r_2\mu + r_3\nu, \tag{8}$$

получимъ

$$\Delta^2 = 2\,E'(l, m, n). \tag{9}$$

При помощи формулъ (8) легко найти выраженія производныхъ Δ по λ, μ, ν черезъ производныя этой функціи по l, m и n. Эти выраженія будутъ слѣдующія:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta}{d\lambda} &= \frac{d\Delta}{dl}\cdot\frac{dl}{d\lambda} + \frac{d\Delta}{dm}\cdot\frac{dm}{d\lambda} + \frac{d\Delta}{dn}\cdot\frac{dn}{d\lambda} = p_1\frac{d\Delta}{dl} + q_1\frac{d\Delta}{dm} + r_1\frac{d\Delta}{dn},\\
\frac{d\Delta}{d\mu} &= \frac{d\Delta}{dl}\cdot\frac{dl}{d\mu} + \frac{d\Delta}{dm}\cdot\frac{dm}{d\mu} + \frac{d\Delta}{dn}\cdot\frac{dn}{d\mu} = p_2\frac{d\Delta}{dl} + q_2\frac{d\Delta}{dm} + r_2\frac{d\Delta}{dn},\\
\frac{d\Delta}{d\nu} &= \frac{d\Delta}{dl}\cdot\frac{dl}{d\nu} + \frac{d\Delta}{dm}\cdot\frac{dm}{d\nu} + \frac{d\Delta}{dn}\cdot\frac{dn}{d\nu} = p_3\frac{d\Delta}{dl} + q_3\frac{d\Delta}{dm} + r_3\frac{d\Delta}{dn}.
\end{aligned} \tag{10}$$

§ 4. Выраженія для координатъ x, y, z точки i черезъ ξ, η и ζ будутъ:

$$\begin{aligned}
x &= p_1\xi + p_2\eta + p_3\zeta - (p_1\alpha + p_2\beta + p_3\gamma),\\
y &= q_1\xi + q_2\eta + q_3\zeta - (q_1\alpha + q_2\beta + q_3\gamma),\\
z &= r_1\xi + r_2\eta + r_3\zeta - (r_1\alpha + r_2\beta + r_3\gamma).
\end{aligned} \tag{11}$$

Воспользовавшись формулами (4), (9) и (10), а также извѣстными соотношеніями между косинусами $p_1, q_1 \ldots r_3$, получимъ

$$\begin{aligned}
x &= \frac{d}{dl}\sqrt{2\,E'(l, m, n)} - \mathrm{a},\\
y &= \frac{d}{dm}\sqrt{2\,E'(l, m, n)} - \mathrm{b},\\
z &= \frac{d}{dn}\sqrt{2\,E'(l, m, n)} - \mathrm{c},
\end{aligned} \tag{12}$$

гдѣ

$$\begin{aligned}
\mathrm{a} &= p_1\alpha + p_2\beta + p_3\gamma,\\
\mathrm{b} &= q_1\alpha + q_2\beta + q_3\gamma,\\
\mathrm{c} &= r_1\alpha + r_2\beta + r_3\gamma.
\end{aligned}$$

§ 5. Выраженіе для радіуса кривизны въ точкѣ $i\,(x, y, z)$ кривой s, лежащей на поверхности, уравненіе которой

$$F(x, y, z) = \mathrm{const}, \tag{13}$$

легко получить въ пригодной для насъ формѣ слѣдующимъ образомъ.

Пусть N — нормаль къ поверхности (13); углы этой нормали съ осями координатъ выражаются формулами

$$\cos(N,x)=\frac{1}{D}\frac{dF}{dx},\quad \cos(N,y)=\frac{1}{D}\frac{dF}{dy},\quad \cos(N,z)=\frac{1}{D}\frac{dF}{dz},$$

$$D=\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2}. \tag{14}$$

Положимъ далѣе, что n есть главная нормаль къ кривой s въ точкѣ i, а k — касательная къ s въ той-же точкѣ.

Вообразимъ себѣ точку, движущуюся равномѣрно со скоростью v по кривой s, и пусть x, y и z — координаты ея въ данный моментъ t, тогда

$$\frac{dx}{dt}=x'=v\cos(k,x),\ \frac{dy}{dt}=y'=v\cos(k,y),\ \frac{dz}{dt}=z'=v\cos(k,z), \tag{15}$$

и

$$x'\frac{dF}{dx}+y'\frac{dF}{dy}+z'\frac{dF}{dz}=D\,.\,v\,.\cos(N,k)=0. \tag{16}$$

Дифференцируя (16) по t, получимъ

$$x''\frac{dF}{dx}+y''\frac{dF}{dy}+z''\frac{dF}{dz}+$$
$$x'\left(\frac{d^2F}{dx^2}x'+\frac{d^2F}{dydx}y'+\frac{d^2F}{dzdx}\right)+y'\left(\frac{d^2F}{dxdy}x'+\frac{d^2F}{dy^2}y'+\frac{d^2F}{dzdy}z'\right)$$
$$+z'\left(\frac{d^2F}{dxdz}x'+\frac{d^2F}{dydz}y'+\frac{d^2F}{dz^2}z'\right)=0. \tag{17}$$

Мы знаемъ, что въ случаѣ равномѣрнаго движенія точки по кривой линіи, ускореніе g этой точки въ моментъ t равно по величинѣ квадрату скорости, дѣленному на радіусъ кривизны траекторіи въ той ея точкѣ (x, y, z), гдѣ находится движущаяся точка въ моментъ t. Направлено это ускореніе по главной нормали n въ сторону центра кривизны, а потому, означая черезъ $\varkappa$ кривизну, будемъ имѣть

$$x''=\varkappa v^2\cos(nx),\quad y''=\varkappa v^2\cos(ny),\quad z''=\varkappa v^2\cos(nz) \tag{18}$$

и слѣдовательно:

$$x''\frac{dF}{dx}+y''\frac{dF}{dy}+z''\frac{dF}{dz}=-D\varkappa v^2\cos(N,n). \tag{19}$$

Принимая во вниманіе (15) и (19) и полагая для сокращенія письма

$$\cos(kx) = L, \quad \cos(ky) = M \quad \text{и} \quad \cos(kz) = N,$$

найдемъ по формулѣ (17)

$$\varkappa = \frac{\frac{d^2F}{dx^2}L^2 + \frac{d^2F}{dy^2}M^2 + \frac{d^2F}{dz^2}N^2 + 2\frac{d^2F}{dydz}MN + 2\frac{d^2F}{dzdx}NL + 2\frac{d^2F}{dxdy}LM}{\cos(N, n)\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}. \quad (20)$$

§ 6. Въ частномъ случаѣ нашего эллипсоида формула (20) дастъ слѣдующее выраженіе для кривизны

$$\varkappa\cos(N, n) = \frac{2E(L, M, N)}{\sqrt{(Px+ry+qz+\pi)^2+(rx+Qy+pz+\chi)^2+(qx+py+Rz+\rho)^2}}. \quad (21)$$

Послѣдняя формула можетъ быть значительно упрощена. Дѣйствительно изъ (12) имѣемъ:

$$Px + ry + qz + \pi = \left(P\frac{d}{dl} + r\frac{d}{dm} + q\frac{d}{dn}\right)\sqrt{2E'(l, m, n)}, \quad (22)$$

ибо

$$P\mathfrak{a} + r\mathfrak{b} + q\mathfrak{c} = \frac{p_1\alpha}{A^2} + \frac{p_2\beta}{B^2} + \frac{p_3\gamma}{C^2} = \pi. \quad (23)$$

Замѣтимъ далѣе, что

$$P\frac{d}{dl} + r\frac{d}{dm} + q\frac{d}{dn} = \frac{p_1}{A^2}\frac{d}{d\lambda} + \frac{p_2}{B^2}\frac{d}{d\mu} + \frac{p_3}{C^2}\frac{d}{d\nu} \quad (24)$$

и что

$$\Delta = \sqrt{2E'(l, m, n)} = \sqrt{A^2\lambda^2 + B^2\mu^2 + C^2\nu^2},$$

получимъ

$$Px + ry + qz + \pi = \frac{p_1\lambda + p_2\mu + p_3\nu}{\sqrt{A^2\lambda^2 + B^2\mu^2 + C^2\nu^2}} = \frac{l}{\sqrt{2E'(l, m, n)}}. \quad (25)$$

Такимъ-же образомъ найдемъ, что

$$rx + Qy + pr + \chi = \frac{m}{\sqrt{2E'(l, m, n)}},$$

$$qx + py + Rz + \rho = \frac{n}{\sqrt{2E'(l, m, n)}},$$

вслѣдствіе чего формула (21) принимаетъ видъ:

$$\varkappa \cos(N, n) = 2E(L, M, N)\sqrt{2E'(l, m, n)}. \tag{26}$$

Эта формула можетъ быть также представлена въ другомъ видѣ, если въ нее ввести длину такого центральнаго радіуса вектора R эллипсоида

$$2E(x, y, z) = 1, \tag{27}$$

направленіе котораго опредѣляется косинусами L, M и N и параллельнаго, слѣдовательно, касательной линіи k, проведенной къ кривой s въ точкѣ (x, y, z). Дѣйствительно тогда

$$\frac{1}{R^2} = 2E(L, M, N) \tag{28}$$

и слѣдовательно

$$\varkappa = \frac{\sqrt{2E'(l, m, n)}}{R^2 \cos(N, n)}, \tag{29}$$

а для нормальнаго сѣченія

$$\varkappa = \frac{\sqrt{2E'(l, m, n)}}{R^2}. \tag{30}$$

Изъ послѣдней формулы ясно, что кривизна нормальнаго сѣченія будетъ наибольшей или наименьшей въ томъ случаѣ, когда направленіе k параллельно одной изъ осей центральнаго сѣченія эллипсоида (27) плоскостью, перпендикулярной нормали $N(l, m, n)$.

Длина R, полуоси такого сѣченія, какъ извѣстно (Salmon-Fiedler „Analytische Geometrie des Raumes“ I Th., Kap. VI, Art. 101), удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{1}{R^4} - \frac{1}{R^2}\left(\frac{1-\lambda^2}{A^2} + \frac{1-\mu^2}{B^2} + \frac{1-\nu^2}{C^2}\right) + \frac{\lambda^2}{B^2C^2} + \frac{\mu^2}{C^2A^2} + \frac{\nu^2}{A^2B^2} = 0, \tag{31}$$

гдѣ A, B и C суть длины полуосей эллипсоида.

Если назавемъ чрезъ R_1^2 и R_2^2 корни этого уравненія, то наибольшая и наименьшая кривизны нормальныхъ сѣченій въ точкѣ x, y, z поверхности эллипсоида

$$2E(x, y, z) + 2E(x, y, z) + \omega = 1 \tag{32}$$

будутъ выражаться формулами

$$\varkappa_1 = \frac{\sqrt{2E'(l, m, n)}}{R_1^2} \quad \text{и} \quad \varkappa_2 = \frac{\sqrt{2E'(l, m, n)}}{R_2^2}, \tag{33}$$

а средняя кривизна K будетъ

$$K=\sqrt{\varkappa_1\varkappa_2}=\frac{\sqrt{2E'(l,m,n)}}{R_1R_2}. \tag{34}$$

Изъ уравненія (31) слѣдуетъ, что

$$\frac{1}{R_1^2R_1^2}=\frac{A^2\lambda^2+B^2\mu^2+C^2\gamma^2}{A^2B^2C^2}=\frac{2E'(l,m,n)}{A^2B^2C^2};$$

принявъ это во вниманіе, получимъ

$$K=\frac{2E'(l,m,n)}{ABC}. \tag{35}$$

§ 7. Обратимся теперь къ изслѣдованію нѣкоторыхъ нужныхъ для насъ въ послѣдствіи свойствъ геодезическихъ кривыхъ на трехъосномъ эллипсоидѣ, уравненіе котораго

$$\frac{\xi^2}{A^2}+\frac{\eta^2}{B^2}+\frac{\zeta^2}{C^2}=1. \tag{36}$$

Слѣдуя означеніямъ Якоби (Vorlesungen über Dynamik; 28. Vorl.), выразимъ прямоугольныя координаты ξ, η и ζ въ функціи эллиптическихъ координатъ λ_1, λ_2 и λ_3, удовлетворяющихъ условіямъ

$$\lambda_1>-C^2>\lambda_2>-B^2>\lambda_3>-A^2, \tag{37}$$

формулами

$$\xi=\sqrt{\frac{(A^2+\lambda_1)(A^2+\lambda_2)(A^2+\lambda_3)}{(A^2-B^2)(A^2-C^2)}},\ \eta=\sqrt{\frac{(B^2+\lambda_1)(B^2+\lambda_2)(B^2+\lambda_3)}{(B^2-C^2)(B^2-A^2)}},$$
$$\zeta=\sqrt{\frac{(C^2+\lambda_1)(C^2+\lambda_2)(C^2+\lambda_3)}{(C^2-A^2)(C^2-B^3)}}. \tag{38}$$

Уравненіе нашего эллипсоида будетъ $\lambda_1=0$, а координаты точекъ, на немъ лежащихъ, выразятся формулами

$$\xi=A\sqrt{\frac{(A^2+\lambda_2)(A^2+\lambda_3)}{(A^2-C^2)(A^2-B^2)}},\ \eta=B\sqrt{\frac{(B^2+\lambda_2)(B^2+\lambda_3)}{(B^2-C^2)(B^2-A^2)}},$$
$$\zeta=C\sqrt{\frac{(C^2+\lambda_2)(C^2+\lambda_3)}{(C^2-B^2)(C^2-A^2)}}. \tag{39}$$

Полагая въ этихъ формулахъ

$$\lambda_2=-C^2-(B^2-C^2)\sin^2\tilde{\omega},$$
$$\lambda_3=-B^2-(A^2-B^2)\sin^2\omega, \tag{40}$$

получимъ

$$\xi = A\cos\tilde{\omega}\cos\omega\sqrt{\frac{1+\frac{A^2-B^2}{B^2-C^2}\sec^2\tilde{\omega}}{1+\frac{A^2-B^2}{B^2-C^2}}},$$

$$\eta = B\cos\tilde{\omega}\sin\omega, \tag{41}$$

$$\zeta = C\sin\tilde{\omega}\sqrt{\frac{1+\frac{A^2-B^2}{B^2-C^2}\sin^2\omega}{1+\frac{A^2-B^2}{B^2-C^2}}}.$$

Изъ этихъ формулъ мы видимъ, что перемѣнныя $\tilde{\omega}$ и ω, въ случаѣ $A=B$ представляютъ собою приведенную широту и долготу точки ξ, η, ζ эллипсоида.

Уравненіе геодезической линіи въ эллиптическихъ координатахъ представляется формулой

$$\int\frac{d\lambda_2}{\sqrt{\beta+\lambda_2}}\sqrt{\frac{\lambda_2}{(A^2+\lambda_2)(B^2+\lambda_2)(C^2+\lambda_2)}}+$$
$$+\int\frac{d\lambda_3}{\sqrt{\beta+\lambda_3}}\sqrt{\frac{\lambda_3}{(A^2+\lambda_3)(B^2+\lambda_3)(C^2+\lambda_3)}}=\gamma, \tag{42}$$

гдѣ β и γ суть двѣ постоянныя величины, характеризующія данную геодезическую кривую.

Полагая въ этомъ уравненіи

$$\beta = C^2+(B^2-C^2)\sin^2\tilde{\omega}_0, \tag{43}$$

то есть разсматривая случай, когда

$$C^2<\beta<B^2,$$

и полагая далѣе

$$A^2=B^2(1+xq^2) \quad \text{и} \quad C^2=B^2(1-q^2), \tag{44}$$

мы можемъ представить уравненіе геодезической линіи подъ видомъ

$$\int_{\tilde{\omega}}^{\tilde{\omega}_0} d\tilde{\omega} \sqrt{\frac{1 - q^2 \cos^2 \tilde{\omega}}{(\sin^2 \tilde{\omega}_0 - \sin \tilde{\omega})(x + \cos^2 \tilde{\omega})}} +$$

$$+ \int_{\omega}^{\omega_0} d\omega \sqrt{\frac{1 + q^2 x \sin^2 \omega}{(\cos^2 \tilde{\omega}_0 + x \sin^2 \omega)(1 + x \sin^2 \omega)}} = 0. \tag{45}$$

Изъ этого уравненія мы видимъ, что геодезическая кривая касается кривой $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0$.

Еслибы мы положили

$$\beta = B^2 + (A^2 - B^2) \sin^2 \omega_0, \tag{46}$$

то есть разсматривали-бы случай, когда

$$B^2 < \beta < A^2,$$

то получили бы уравненіе другого рода геодезическихъ кривыхъ, которыя касаются кривыхъ $\omega = \omega_0$.

Постоянная $\tilde{\omega}_0$ опредѣляется для геодезической кривой, проходящей черезъ точки $(\tilde{\omega}_1, \omega_1)$ и $(\tilde{\omega}_2, \omega_2)$ изъ уравненія

$$\int_{\tilde{\omega}_1}^{\tilde{\omega}_2} d\tilde{\omega} \sqrt{\frac{1 - q^2 \cos^2 \tilde{\omega}}{(\sin^2 \tilde{\omega}_0 - \sin^2 \tilde{\omega})(x + \cos^2 \tilde{\omega})}} +$$

$$+ \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \sqrt{\frac{1 + q^2 x \sin^2 \omega}{(\cos^2 \tilde{\omega}_0 + x \sin^2 \omega)(1 + x \sin^2 \omega)}} = 0. \tag{47}$$

Длина дуги геодезической кривой выражается въ эллиптическихъ координатахъ формулой:

$$\int ds = \frac{1}{2} \int d\lambda_2 \sqrt{\frac{\lambda_2 . (\beta + \lambda_2)}{(A^2 + \lambda_2)(B^2 + \lambda_2)(C^2 + \lambda_2)}} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int d\lambda_3 \sqrt{\frac{\lambda_3 . (\beta + \lambda_3)}{(A^2 + \lambda_3)(B^2 + \lambda_3)(C^2 + \lambda_3)}} \tag{48}$$

или, согласно принятымъ нами означеніямъ,

$$\int ds = \int_{\tilde{\omega}_1}^{\tilde{\omega}_2} M d\tilde{\omega} + \int_{\omega_1}^{\omega_2} N d\omega, \tag{49}$$

гдѣ

$$M = B\sqrt{\frac{(1 - q^2\cos^2\tilde{\omega})(\sin^2\tilde{\omega}_0 - \sin^2\tilde{\omega})}{x + \cos^2\tilde{\omega}}}$$

и

$$N = B\sqrt{\frac{(1 + xq^2\sin^2\omega)(\cos^2\tilde{\omega}_0 + x\sin^2\omega)}{1 + x\sin^2\omega}}. \tag{50}$$

Означимъ черезъ ds_2 и ds_3 дифференціалы дугъ кривыхъ $\lambda_3 = \text{const}$ и $\lambda_2 = \text{const}$, а черезъ Λ_2 и Λ_3 дифференціальные параметры координатъ λ_2 и λ_3; тогда

$$ds_2 = \frac{d\lambda_2}{\Lambda_2} \quad \text{и} \quad ds_3 = \frac{d\lambda_3}{\Lambda_3},$$

гдѣ

$$\Lambda_2 = 2\sqrt{\frac{(A^2 + \lambda_2)(B^2 + \lambda_2)(C^2 + \lambda_2)}{(\lambda_2 - \lambda_3)\lambda_2}}$$

и

$$\Lambda_3 = 2\sqrt{\frac{(A^2 + \lambda_3)(B^2 + \lambda_3)(C^2 + \lambda_3)}{\lambda_3(\lambda_3 - \lambda_2)}}. \tag{51}$$

При помощи этихъ формулъ дифференціалъ дуги геодезической линіи можетъ быть выраженъ слѣдующимъ образомъ (48)

$$ds = ds_2\sqrt{\frac{\beta + \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3}} + ds_3\sqrt{\frac{\beta + \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2}}. \tag{52}$$

Съ другой стороны для всякихъ ds_2 и ds_3

$$ds = ds_2\cos(ds_2, ds) + ds_3\cos(ds_3, ds), \tag{53}$$

откуда

$$\cos(ds_2, ds) = \sqrt{\frac{\beta + \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3}} = \sqrt{\frac{\sin^2\tilde{\omega}_0 - \sin^2\tilde{\omega}}{\cos^2\tilde{\omega} + x\sin^2\omega}},$$

$$\cos(ds_3, ds) = \sqrt{\frac{\beta + \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2}} = \sqrt{\frac{\cos^2\tilde{\omega}_0 + x\sin^2\omega}{\cos^2\tilde{\omega} + x\sin^2\omega}}. \tag{54}$$

Для эллипсоида вращенія $x=0$ и мы будемъ имѣть извѣстное соотношеніе:

$$\cos\tilde{\omega}\,.\,\cos(ds_3, ds) = \cos\tilde{\omega}_0 = \text{const}, \tag{55}$$

а въ болѣе общемъ случаѣ трехъ-оснаго эллипсоида, ограничиваясь вторыми степенями x и четвертыми степенями q,

$$\begin{aligned}\cos\tilde{\omega}\cos(ds_3, ds) = \cos\tilde{\omega}_0 \Big\{ 1 + \frac{1}{2}\sin^2\omega\,.\,(\text{séc}^2\tilde{\omega}_0 - \sec^2\tilde{\omega})\,x - \\ - \frac{1}{8}\sin^4\omega\,.\,\left[(\text{sèc}^2\tilde{\omega}_0 + \text{sèc}^2\tilde{\omega})^2 - 4\,\text{sèc}^4\tilde{\omega}\right]x^2 \Big\}.\end{aligned} \tag{56}$$

Перенесеніе координатъ $\tilde{\omega}$ и ω, а также и азимута $\alpha = (ds, ds_2)$ вдоль геодезической кривой можно произвести слѣдующимъ образомъ:

Изъ второй формулы (54) имѣемъ

$$\cos^2\tilde{\omega}_0 = \sin^3\alpha_1\,.\,\cos^2\tilde{\omega}_1 - x\cos^2\alpha_1\sin^2\omega_1, \tag{57}$$

гдѣ $\tilde{\omega}_1$, ω_1 и α_1 суть координаты начальной точки и начальный азимутъ геодезической кривой.

Уравненіе (47) и (48) могутъ быть представлены подъ видомъ

$$\begin{aligned} Q_0 + Q_2 + Q_4 = 0, \\ S_0 + S_2 + S_4 = S, \end{aligned} \tag{58}$$

гдѣ S длина геодезической кривой и

$$\begin{aligned} Q_0 &= \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{d\psi}{1 - \sin^2\tilde{\omega}_0\sin^2\psi} + \frac{1}{\cos\tilde{\omega}_0}(\omega_2 - \omega_1), \\ S_0 &= B\sin^2\tilde{\omega}_0 \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{\cos^2\psi\,d\psi}{1 - \sin^2\tilde{\omega}_0\sin^2\psi} + B\cos\tilde{\omega}_0(\omega_2 - \omega_1), \\ Q_2 &= -\frac{1}{2}q^2(\psi_2 - \psi_1) - \frac{1}{2}x\Big[\int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{d\psi}{(1 - \sin^2\tilde{\omega}_0\sin^2\psi)^2} + \\ &\quad + \frac{1}{\cos\tilde{\omega}_0}\left(1 + \frac{1}{\cos^2\tilde{\omega}_0}\right)\int_{\omega_1}^{\omega_2} \sin^2\omega\,d\omega\Big], \end{aligned} \tag{59}$$

$$S_2 = -\frac{1}{2} q^2 B \sin^2\tilde{\omega}_0 \int_{\psi_1}^{\psi_2} \cos^2\psi \, d\psi -$$

$$-\frac{1}{2} xB \left[\sin^2\tilde{\omega}_0 \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{\cos^2\psi \, d\psi}{(1 - \sin^2\tilde{\omega}_0 \sin^2\psi} - \cos\tilde{\omega}_0 \operatorname{tg}^2\tilde{\omega}_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sin^2\omega \, d\omega \right],$$

$$Q_4 = -\frac{1}{8} q^4 \left[\psi_2 - \psi_1 - \sin^2\tilde{\omega}_0 \int_{\psi_1}^{\psi_2} \sin^2\psi \, d\psi \right] +$$

$$+ \frac{1}{4} q^2 x \left[\int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{d\psi}{1 - \sin^2\tilde{\omega}_0 \sin^2\psi} + \frac{2}{\cos\tilde{\omega}_0} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sin^2\omega \, d\omega \right] +$$

$$+ \frac{1}{8} x^2 \left[3 \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{d\psi}{(1 - \sin^2\tilde{\omega}_0 \sin^2\psi)^3} + \right. \tag{59}$$

$$\left. + \frac{1}{\cos\tilde{\omega}_0} \left(\frac{3}{\cos^4\tilde{\omega}_0} + \frac{2}{\cos^2\tilde{\omega}_0} + 3 \right) \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sin^4\omega \, d\omega \right].$$

$$S_4 = -\frac{1}{8} q^4 B \left[\sin^2\tilde{\omega}_0 \int_{\psi_1}^{\psi_2} \cos^2\psi \, d\psi - \sin^4\tilde{\omega}_0 \int_{\psi_1}^{\psi_2} \cos^2\psi \sin^2\psi \, d\psi \right] +$$

$$+ \frac{1}{4} q^2 xB \left[\sin^2\tilde{\omega}_0 \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{\cos^2\psi \, d\psi}{1 - \sin^2\tilde{\omega}_0 \sin^2\psi} + 2 \cos\tilde{\omega}_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sin^2\omega \, d\omega \right]$$

$$+ \frac{1}{8} x^2 B \left[3 \sin^2\tilde{\omega}_0 \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{\cos^2\psi \, d\psi}{(1 - \sin^2\tilde{\omega}_0 \sin^2\psi)^3} \right.$$

$$-\cos\tilde{\omega}_0\left(\frac{1}{\cos^4\tilde{\omega}_0}+\frac{2}{\cos^2\tilde{\omega}_0}-3\right)\int_{\omega_1}^{\omega_2}\sin^4\omega\,d\omega\Big], \tag{59}$$

а $\sin\psi = \operatorname{cosec}\tilde{\omega}_0 \,.\, \sin\tilde{\omega}$.

Изъ уравненій (58) получимъ слѣдующія два уравненія:

$$\frac{1}{\cos\tilde{\omega}_0}\left[arc\operatorname{tg}\left(\frac{\cos\tilde{\omega}_0\sin\tilde{\omega}_2}{\sqrt{\cos^2\tilde{\omega}_2-\cos^2\tilde{\omega}_0}}\right)+\omega_2\right]=$$

$$=\frac{1}{\cos\tilde{\omega}_0}\left[arc\operatorname{tg}\left(\frac{\cos\tilde{\omega}_0\sin\tilde{\omega}_1}{\sqrt{\cos^2\tilde{\omega}_1-\cos^2\tilde{\omega}_0}}\right)+\omega_1\right]-Q_2-Q_4,$$

$$\frac{B}{\sin^2\tilde{\omega}_0}\,arc\operatorname{tg}\frac{\sin\tilde{\omega}_2}{\sqrt{\cos^2\tilde{\omega}_2-\cos^2\tilde{\omega}_0}} \tag{60}$$

$$-\frac{B}{\operatorname{tg}^2\tilde{\omega}_0\cos\tilde{\omega}_0}\,arc\operatorname{tg}\frac{\cos\tilde{\omega}_0\sin\tilde{\omega}_2}{\sqrt{\cos^2\tilde{\omega}_2-\cos^2\tilde{\omega}_0}}+B\cos\tilde{\omega}_0\,.\,\omega_2=$$

$$=\frac{B}{\sin^2\tilde{\omega}_0}\,arc\operatorname{tg}\frac{\sin\tilde{\omega}_1}{\sqrt{\cos^2\tilde{\omega}_1-\cos^2\tilde{\omega}_0}}-\frac{B}{\operatorname{tg}^2\tilde{\omega}_0\cos\tilde{\omega}_0}\,arc\operatorname{tg}\frac{\cos\tilde{\omega}_0\sin\tilde{\omega}_0}{\sqrt{\cos^2\tilde{\omega}_1-\cos^2\tilde{\omega}_0}}+$$

$$+B\cos\omega_0\,.\,\omega_1-S_2-S_4+S.$$

Во вторыхъ частяхъ этихъ уравненій можно для перваго приближенія подставить вмѣсто $\tilde{\omega}_2$ и ω_2 приближенныя ихъ величины.

Вычисленіе интеграловъ вида

$$\int\frac{d\psi}{(1-\sin^2\tilde{\omega}_0\sin^2\psi)^m} \quad \text{и} \quad \int\frac{\cos^2\psi\,d\psi}{(1-\sin^2\tilde{\omega}_0\sin^2\psi)^m} \tag{61}$$

можно подстановкой

$$w=\operatorname{tg}\psi,\qquad d\psi=\cos^2\psi\,dw=(1+w^2)^{-1}dw$$

привести къ вычисленію интеграловъ вида

$$\int\frac{(1+w^2)^{m-1}dw}{(1+\cos^2\tilde{\omega}_0\,w_2)^m}=\frac{1}{\cos\tilde{\omega}_0}\int\frac{[1+\sec^2\tilde{\omega}_0(\cos\tilde{\omega}_0.w)^2]^{m-1}d(\cos\tilde{\omega}_0 w.)}{[1+(\cos\tilde{\omega}_0.\,w)^2]^m}=$$

$$=\frac{1}{\cos\tilde{\omega}_0}\sum_{k=1}^{k=m}A_k\int\frac{d(\cos\tilde{\omega}_0\,.\,w)}{[1+(\cos\tilde{\omega}_0\,.w)^2]^k}= \tag{62}$$

$$=\frac{1}{\cos\tilde{\omega}_0}\sum_{k=1}^{k=m}\frac{(-1)A_k}{(k-1)!}\cdot\left\{\frac{d^{k-1}}{d\alpha^{k-1}}\left[\alpha^{-\frac{1}{2}}\,arctg\left(\alpha^{-\frac{1}{2}}\cdot\cos\tilde{\omega}_0\cdot w\right)\right]\right\}_{\alpha=1},$$

гдѣ коэффиціенты A_k вычисляются изъ уравненій:

$$\cos^{2s}\cdot\tilde{\omega}_0\sum_{k=1}^{k=m}A_k C^s_{m-k}=C^s_{m-1},\ (s=1,2,\ldots\ldots,m,)$$

или же къ вычисленію интеграловъ вида

$$\int\frac{(1+w^2)^{m-2}\,dw}{(1+\cos^2\tilde{\omega}_0\cdot w^2)^m},$$

которые, въ случаѣ $m=$ или >2 вычисляются по тому-же способу, какъ и интегралы (62), а въ случаѣ $m=1$ приводятся къ суммѣ интеграловъ

$$\frac{1}{\sin^2\tilde{\omega}_0}\int\frac{dw}{1+w^2}-\frac{1}{tg^2\tilde{\omega}_0}\int\frac{dw}{1+\cos^2\tilde{\omega}_0\cdot w^2}=$$
$$=\frac{1}{\sin^2\tilde{\omega}_0}arc\,tg\,w-\frac{1}{tg^2\tilde{\omega}_0\cos\tilde{\omega}_0}arc\,tg(\cos\tilde{\omega}_0\cdot w). \tag{63}$$

Проще можно вычислить интегралы (61), разлагая ихъ въ строки, расположенныя по косинусамъ кратныхъ отъ 2ψ. Для этой цѣли замѣтимъ, что

$$1-\sin^2\tilde{\omega}_0\sin^2\psi=\left(\cos^2\frac{\tilde{\omega}_0}{2}+\sin^2\frac{\tilde{\omega}_0}{2}E^{2i\psi}\right)\times$$
$$\times\left(\cos^2\frac{\tilde{\omega}_0}{2}+\sin^2\frac{\tilde{\omega}_0}{2}E^{-2i\psi}\right),$$

откуда

$$\int\frac{d\psi}{(1-\sin^2\tilde{\omega}_0\sin^2\psi)^m}=\sec^{2m}\frac{\tilde{\omega}_0}{2}\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k\frac{\sin 2k\psi}{2k}S_k$$

и

$$\int\frac{\cos^2\psi\,d\psi}{(1-\sin^2\tilde{\omega}_0\sin^2\psi)^m}=\frac{1}{2}\sec^{2m}\frac{\tilde{\omega}_0}{2}\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k\left(\frac{\sin 2(k+1)\psi}{2(k+1)}+\right. \tag{64}$$
$$\left.+2\frac{\sin 2k\psi}{2k}+\frac{\sin 2(k-1)}{2(k-1)}\right)S_k,$$

гдѣ

$$S_k=\sum_{l=0}^{l=\infty}\frac{m(m+1)\ldots(m+l-1)}{1\,2\ldots l}\cdot\frac{m(m+1)\ldots(m+l+k-1)}{1\,2\ldots l}\cdot tg^{2(2l+k)}\frac{\tilde{\omega}_0}{2}.$$

Исключивъ изъ уравненій (60) ω_2, получимъ уравненіе вида

$$P\,arc\,\mathrm{tg}\,w_2 + P'\,arc\,\mathrm{tg}(\cos\tilde{\omega}_0 . w_2) = \sigma_0 s + \sigma_1 x + \sigma_2 x^2,$$

$$w_2 = \frac{\sin\tilde{\omega}_2}{\sqrt{\cos^2\tilde{\omega}_2 - \cos^2\tilde{\omega}_0}}. \tag{65}$$

Полагая въ этомъ уравненіи

$$w_2 = (w_2)_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$

гдѣ $(w_2)_0$ есть значеніе w_2 для случая $x = 0$, то есть для случая эллипсоида вращенія, получимъ

$$P\,arc\,\mathrm{tg}(w_2)_0 + P'\,arc\,\mathrm{tg}\,(\cos\tilde{\omega}_0 . (w_2)_0) + \left(P\frac{1}{1+(w^2{}_2)_0} + \right.$$

$$\left. + P'\frac{\cos\tilde{\omega}_0}{1+\cos^2\tilde{\omega}_0\,(w_2{}^2)_0}\right) a_1 x + \left[\left(P\frac{1}{1+(w_2{}^2)_0} + P'\frac{\cos^2\tilde{\omega}_0}{1+\cos^2\tilde{\omega}_0 . (w^2{}_2)_0}\right) a_2 - \right.$$

$$\left. - 2\left(P\frac{w_0}{(1+(w_2{}^2)_0)^2} + P'\frac{\cos^3\tilde{\omega}_0\, w_0}{(1+\cos^2\tilde{\omega}_0\,(w_2{}^2)_0)^2}\right) a_1{}^2\right] x^2 =$$

$$= \sigma_0 s + \sigma_1 x + \left\{ \sigma_2 + a_1 \left(\frac{d\sigma_1}{dw_2}\right)_0 \right\} x^2.$$

Такъ какъ это равенство справедливо для всякаго малаго x, то мы получимъ изъ него слѣдующія два уравненія для опредѣленія a_1 и a_2

$$\left(P\frac{1}{1+(w_2{}^2)_0} + P'\frac{\cos\tilde{\omega}_0}{1+\cos^2\tilde{\omega}_0 . (w_2{}^2)}\right) a_1 = \sigma_1,$$

$$- 2\left[P\frac{w_0}{(1+(w_2{}^2)_0)^2} + P'\frac{\cos^3\tilde{\omega}_0\, w_0}{(1+\cos^2\tilde{\omega}_0\,(w_2{}^2)_0)^2}\right] a_1{}^2 + \tag{66}$$

$$+ \left[P\frac{1}{1+(\omega_2{}^2)_0} + P'\frac{\cos^2\tilde{\omega}_0 . \omega_0{}^2}{1+\cos^2\tilde{\omega}_0 . (\omega_2{}^2)_0}\right] a_2 = \sigma_1 + \left(\frac{d\sigma_1}{d\omega_2}\right)_0 a_1 .$$

Найдя значеніе w, а слѣдовательно и $\tilde{\omega}_2$, найдемъ ω_2. Исправленными значеніями $\tilde{\omega}_2$ и ω_2 воспользуемся для того, чтобы вычислить σ_1 и σ_2 и затѣмъ вновь вычислить болѣе точныя значенія $\tilde{\omega}_2$ и ω_2.

§ 8. Гораздо проще, чѣмъ длина дуги геодезической линіи, можетъ быть вычислена длина s_2 кривой $\omega = \mathrm{const.}$ или длина s_3 кривой $\tilde{\omega} = \mathrm{const.}$ Мы можемъ воспользоваться для этого формулами (60), изъ которыхъ получимъ

$$ds_2 = \frac{d\lambda}{\Lambda_2} = B\sqrt{\frac{(1-q^2\cos^2\tilde{\omega})(\cos^2\tilde{\omega}+x\sin^2\omega)}{\cos^2\tilde{\omega}+x}}\,d\tilde{\omega} =$$

$$= B\sqrt{1-q^2\cos^2\tilde{\omega}}\left\{1-\frac{1}{2}\sec^2\tilde{\omega}\cos^2\omega\,.\,x - \right. \tag{67}$$

$$\left. -\frac{1}{4}\sec^4\tilde{\omega}\,(1+\sin^2\omega)^2\,x^2\right\}d\tilde{\omega}.$$

и

$$ds_3 = \frac{d\lambda_3}{\Lambda_3} = B\sqrt{\frac{(\cos^2\tilde{\omega}+x\sin^2\omega)(1+xq^2\sin^2\omega)}{1+x\sin^2\omega}}\,d\omega =$$

$$= B\cos\tilde{\omega}\left\{1+\frac{1}{2}\sin^2\omega\,(q^2+\operatorname{tg}^2\tilde{\omega})\,x - \right. \tag{68}$$

$$\left. -\frac{1}{4}\sin^4\omega\operatorname{tg}^2\tilde{\omega}\,(4+\operatorname{tg}^2\tilde{\omega})\,x^2\right\}d\omega.$$

На этомъ и покончимъ наши общія изслѣдованія о кривыхъ линіяхъ на трехъ-осномъ эллипсоидѣ.

§ 9. Выразимъ косинусы угловъ, опредѣляющихъ положеніе осей ξ, η и ζ относительно осей x, y и z, въ функціи Эйлеровыхъ угловъ: угла J оси ζ съ осью z, угла Ω, образуемаго линіей сѣченія плоскостей $\xi\eta$ и xy съ осью x и угла θ оси ξ съ линіей сѣченія плоскостей $\xi\eta$ и xy.

Примѣняя основную формулу тригонометріи

$$\cos c = \cos a\,\cos b + \sin a\sin b\cos C,$$

получимъ

$$\begin{aligned}
p_1 &= \cos\Omega\cos\theta - \sin\Omega\sin\theta\cos J,\\
q_1 &= \sin\Omega\cos\theta + \cos\Omega\sin\theta\cos J,\\
r_1 &= \sin\theta\sin J,\\
p_2 &= -\cos\Omega\sin\theta - \sin\Omega\cos\theta\cos J,\\
q_2 &= -\sin\Omega\sin\theta + \cos\Omega\cos\theta\cos J,\\
r_2 &= \cos\theta\sin J,\\
p_3 &= \sin\Omega\sin J,\\
q_3 &= -\cos\Omega\sin J,\\
r_3 &= \cos J.
\end{aligned} \tag{69}$$

§ 10. Примѣнимъ наши общія формулы къ тому частному случаю, когда выполняются условія 1 и 2 введенія, то-есть когда $A^2 = a^2(1+\varepsilon_1 e^4)$, $B^2 = a^2(1+\varepsilon_3 e^4)$ и $C^2 = a^2(1-e^2)(1+\varepsilon_3 e^4)$, гдѣ a бо̀льшая полуось и e эксцентрицитетъ земнаго сфе-

роида, ось z направлена по оси міра, плоскость zx совпадаетъ съ плоскостью перваго меридіана и уголъ J выражается формулой

$$J = i e^2.$$

Условившись пренебрегать величинами порядка, высшаго, чѣмъ e^4, получимъ

$$\sin J = i e^2, \qquad \cos J = 1 - \tfrac{1}{2} i^2 e^4 \tag{70}$$

и

$$\begin{aligned}
p_1 &= \cos(\Omega+\theta) + \tfrac{1}{2} i^2 \sin\Omega \sin\theta \,.\, e^4,\\
q^1 &= \sin(\Omega+\theta) + \tfrac{1}{2} i^2 \cos\Omega \sin\theta \,.\, e^4,\\
r_1 &= i \sin\theta \,.\, e^2,\\
p_2 &= -\sin(\Omega+\theta) + \tfrac{1}{2} i^2 \sin\Omega \cos\theta \,.\, e^4,\\
q_2 &= \cos(\Omega+\theta) - \tfrac{1}{2} i^2 \cos\Omega \cos\theta \,.\, e^4,\\
r_2 &= i \cos\theta \,.\, e^2,\\
p_3 &= i \sin\Omega . e^2,\\
q_3 &= -i \cos\Omega . e_2,\\
r_3 &= 1 \quad \tfrac{1}{2} i^2 e^4.
\end{aligned} \tag{71}$$

Изъ этихъ формулъ получимъ съ условнымъ приближеніемъ:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{p_1^2}{a^2}(1-\varepsilon_1 e^4) + \frac{p_2^2}{a^2}(1-\varepsilon_2 e^4) + \frac{p_3^2}{a^2}[1+e^2+(1-\varepsilon_3)e^4]\\
&= \frac{p_1^2+p_2^2+p_3^2}{a^2}\\
&\quad - \frac{1}{a_2}\left\{-e^2 p_3^2 + e_4\left[p_1^2\varepsilon_1 + p_2^2\varepsilon_2 + p_3^2(1-\varepsilon_3)\right]\right\}\\
&= \frac{1}{a^2}\left\{1 - \left[\varepsilon_1 \cos^2(\theta+\Omega) + \varepsilon_2 \sin^2(\theta+\Omega)\right] e^4\right\}.
\end{aligned} \tag{72}$$

Вычисляя подобнымъ-же образомъ Q, P, p, q, r, P', Q', R', p', q', r', и полагая для краткости.

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= \varepsilon_1 \cos^2(\theta+\Omega) + \varepsilon_2 \sin^2(\theta+\Omega),\\
\chi_2 &= \varepsilon_1 \sin^2(\theta+\Omega) + \varepsilon_2 \cos^2(\theta+\Omega),\\
\chi_3 &= \varepsilon_3,\\
\tau_1 &= -i \cos\Omega,\\
\tau_2 &= i \sin\Omega,\\
\tau_3 &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\sin 2(\theta+\Omega),
\end{aligned} \tag{73}$$

$2\,\mathrm{E}\,(a, b, c) = \chi_1\, a^2 + \chi_2\, b^2 + \chi_3\, c^2 - 2\,\tau_1\, bc - 2\,\tau_2\, ca - 2\,\tau_3\, ab,$
получимъ:

$$P = \frac{1}{a^2}(1 - \chi_1 e^4), \qquad P' = a^2(1 + \chi_1 e^4),$$

$$Q = \frac{1}{a^2}(1 - \chi_2 e^4), \qquad Q' = a^2(1 + \chi_2 e^4),$$

$$R = \frac{1}{a^2(1-e^2)}(1 - \chi_3 e^4), \qquad R' = a^2(1-e^2)(1 + \chi_3 e^4),$$

$$p = \frac{\tau_1}{a^2} e^4, \qquad p' = -a^2 \tau_1 e^4, \tag{74}$$

$$q = \frac{\tau_2}{a^2} e^4, \qquad q' = -a\ \tau_2 e_4,$$

$$r = \frac{\tau_3}{a^2} e^4, \qquad r' = -a^2 \tau_3 e^4.$$

Пользуясь этими формулами, а также и формулами (5) и (7), получимъ:

$$2\,E\,(L, M, N) = \frac{1}{a^2(1-e^2)}\left[1 - e^2(1-N^2) - 2\,\mathrm{E}\,(L, M, N) e^4\right] \tag{75}$$

и

$$\sqrt{2\,E'\,(l, m, n)} = a\sqrt{l^2 + m^2 + (1-e^2)\,n^2 + \mathrm{E}\,(l, m, n)\,e^4}, \tag{76}$$

откуда:

$$\frac{d}{dl}\sqrt{2\,E'\,(l, m, n)} = \frac{a\left(l + \frac{d\mathrm{E}}{dl} e^4\right)}{\sqrt{1 - e^2 n^2 + 2\,\mathrm{E} e^4}} =$$

$$= \frac{a\,l}{\sqrt{1 - e^2 n^2}}\left\{1 - \left(\mathrm{E} - \frac{1}{l}\frac{d\mathrm{E}}{dl}\right) e^4\right\},$$

$$\frac{d}{dm}\sqrt{2\,E'\,(l, m, n)} = \frac{a\left(m + \frac{d\mathrm{E}}{dm} e^4\right)}{\sqrt{1 - e^2 n^2 + 2\,\mathrm{E} e^4}} =$$

$$= \frac{a\,m}{\sqrt{1 - e^2 n^2}}\left\{1 - \left(\mathrm{E} - \frac{1}{m}\frac{d\mathrm{E}}{dm}\right) e^4\right\}, \tag{77}$$

$$\frac{d}{dn}\sqrt{2\,E'\,(l, m, n)} = \frac{a\left(n + \frac{d\mathrm{E}}{dn} e^4\right)(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 n^2 + 2\,\mathrm{E} e^4}} =$$

$$=\frac{a(1-e^2)n}{\sqrt{1-e^2n^2}}\left\{1-\left(\mathrm{E}-\frac{1}{n}\frac{d\mathrm{E}}{dn}\right)e^4\right\}.$$

§ 11. При помощи формулъ (75), (76) и (77) мы можемъ составить выраженія для x, y и z и χ. $\cos(\mathrm{N}, \mathrm{n})$ въ функціи l, m, n, L, M и N.

Обозначая черезъ (x), (y), (z) и (χ) координаты и кривизну для случая

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=i=0,$$

мы будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} x&=(x)\left[1-\left(\mathrm{E}-\frac{1}{e}\frac{d\mathrm{E}}{dl}\right)e^4\right]-\mathrm{A}\,,\\ y&=(y)\left[1-\left(\mathrm{E}-\frac{1}{m}\frac{d\mathrm{E}}{dm}\right)e^4\right]-\mathrm{B}\,,\\ z&=(z)\left[1-\left(\mathrm{E}-\frac{1}{n}\frac{d\mathrm{E}}{dn}\right)e^4\right]-\mathrm{C}\,, \end{aligned} \tag{78}$$

$$\chi\cos(\mathrm{N}, \mathrm{n})=$$

$$=(\chi)\cos(\mathrm{N}, \mathrm{n})\left\{1+\left[\mathrm{E}(l, m, n)-2\,\mathrm{E}\,(L, M, N)\right]e^4\right\}, \tag{79}$$

гдѣ

$$(x)=\frac{al}{\sqrt{1-e^2n^2}}\,,\quad (y)=\frac{am}{\sqrt{1-e^2n^2}}\,,\quad (z)=\frac{a(1-e^2)n}{\sqrt{1-e^2n^2}}\,; \tag{80}$$

$$(\chi)\cos(\mathrm{N}, \mathrm{n})=\frac{\sqrt{1-e^2n^2}\,\left[1-e^2(1-N^2)\right]}{a(1-e^2)}\,, \tag{81}$$

и A, B и C координаты центра эллипсоида (1) относительно осей x, y, z.

§ 12. Выразимъ косинусы l, m, n, L, M, N, въ функціи геодезическихъ широты и долготы φ и λ точки (x, y, z) и азимута a кривой s въ этой точкѣ.

Для этой цѣли мы имѣемъ:

$$l=\cos\varphi\cos\lambda\,,\quad m=\cos\varphi\sin\lambda \text{ и } n=\sin\varphi\,. \tag{82}$$

Для нахожденія выраженій L, M и N введемъ двѣ прямыхъ v и w, изъ которыхъ первая перпендикулярна къ отвѣсу въ точкѣ (x, y, z) и къ оси міра, а вторая перпендикулярна къ упомянутому отвѣсу и линіи v. Легко убѣдиться тогда, что направленіе v опредѣляется формулами:

$$\cos(v, x)=\sin\lambda\,,\quad \cos(v, y)=-\cos\lambda,\quad \cos(v, z)=0, \tag{83}$$

а на основаніи этихъ формулъ найдемъ:

$$\cos(w,x)=\sin\varphi\cos\lambda\,,\ \cos(w,y)=\sin\varphi\sin\lambda\,,\ \cos(w,z)=-\cos\varphi. \quad (84)$$

Прямую w примемъ за направленіе меридіана въ данной точкѣ $(x,\ y,\ z)$; тогда L, M, N, какъ косинусы угловъ, образуемыхъ съ осями координатъ прямой k, перпендикулярной къ отвѣсу и образующей съ меридіаномъ уголъ α (азимутъ), выразятся формулами:

$$\begin{aligned}\cos(k,x)&=L=\sin\varphi\cos\lambda\cos\alpha+\sin\lambda\sin\alpha\,,\\ \cos(k,y)&=M=\sin\varphi\sin\lambda\cos\alpha-\cos\lambda\sin\alpha\,,\\ \cos(k,z)&=N=-\cos\varphi\cos\alpha\,.\end{aligned} \quad (85)$$

§ 13. Пользуясь формулами, полученными въ предыдущихъ параграфахъ, мы можемъ опредѣлить теперь длины дугъ нѣкоторыхъ кривыхъ на поверхности эллипсоида. Проще другихъ опредѣляются длины кривыхъ $\varphi=\text{const.}$ и $\lambda=\text{const.}$

Вычисленіе длины дуги кривой $\lambda=\text{const}$ можно произвести слѣдующимъ образомъ:

Означивъ черезъ $((x))$, $((y))$ и $((z))$ выраженія

$$a\cos\varphi\cos\lambda\,,\ a\cos\varphi\sin\lambda \text{ и } a\sin\varphi\,, \quad (86)$$

мы можемъ написать формулы (78) слѣдуюшимъ образомъ

$$\begin{aligned}x&=(x)-((x))\left[\mathrm{E}-\frac{1}{l}\frac{d\mathrm{E}}{dl}\right]e^4-\mathrm{A}\,,\\ y&=(y)-((y))\left[\mathrm{E}-\frac{1}{m}\frac{d\mathrm{E}}{dm}\right]e^4-\mathrm{B}\,,\\ z&=(z)-((z))\left[\mathrm{E}-\frac{1}{n}\frac{d\mathrm{E}}{dn}\right]e^4-\mathrm{C}\,.\end{aligned} \quad (87)$$

Изъ этихъ формулъ получимъ, принимая $\lambda=\text{const.}$,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\varphi}&=\frac{d(x)}{d\varphi}-\frac{d((x))}{d\varphi}\left(\mathrm{E}-\frac{1}{l}\frac{d\mathrm{E}}{dl}\right)e^4+((x))\left\{\frac{d\mathrm{E}}{d\varphi}-\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{l}\frac{d\mathrm{E}}{dl}\right)\right\}e^4,\\ \frac{dy}{d\varphi}&=\frac{d(y)}{d\varphi}-\frac{d((y))}{d\varphi}\left(\mathrm{E}-\frac{1}{m}\frac{d\mathrm{E}}{dm}\right)e^4+((y))\left\{\frac{d\mathrm{E}}{d\varphi}-\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{m}\frac{d\mathrm{E}}{dm}\right)\right\}e^4,\\ \frac{dz}{d\varphi}&=\frac{d(z)}{d\varphi}-\frac{d((z))}{d\varphi}\left(\mathrm{E}-\frac{1}{n}\frac{d\mathrm{E}}{dn}\right)e^4+((z))\left\{\frac{d\mathrm{E}}{d\varphi}-\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{n}\frac{d\mathrm{E}}{dn}\right)\right\}e^4,\end{aligned} \quad (88)$$

откуда, замѣняя въ произведеніи первыхъ членовъ на слѣдующіе

$$\frac{d(x)}{d\varphi},\ \frac{d(y)}{d\varphi},\ \frac{d(z)}{d\varphi},\ \text{черезъ}\ \frac{d((x))}{d\varphi},\ \frac{d((y))}{d\varphi},\ \frac{d((z))}{d\varphi}, \tag{89}$$

получимъ:

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2=\left[\frac{d(x)}{d\varphi}\right]^2-2\left\{\left[\frac{d((x))}{d\varphi}\right]^2\left(\mathrm{E}-\frac{1}{l}\frac{d\mathrm{E}}{dl}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\frac{d((x))^2}{d\varphi}\left[\frac{d\mathrm{E}}{d\varphi}-\frac{d}{d\varphi}\frac{1}{l}\frac{d\mathrm{E}}{dl}\right]\right\}e^4,$$

$$\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2=\left[\frac{d(y)}{d\varphi}\right]^2-2\left\{\left[\frac{d((y))}{d\varphi}\right]^2\left(\mathrm{E}-\frac{1}{m}\frac{d\mathrm{E}}{dm}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\frac{d((y))^2}{d\varphi}\left[\frac{d\mathrm{E}}{d\psi}-\frac{d}{d\varphi}\frac{1}{m}\frac{d\mathrm{E}}{dm}\right]\right\}e^4,$$

$$\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2=\left[\frac{d(z)}{\alpha\varphi}\right]^2-2\left\{\left[\frac{d((z))}{d\varphi}\right]^2\left(\mathrm{E}-\frac{1}{n}\frac{d\mathrm{E}}{dn}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\frac{d((z))^2}{d\varphi}\left[\frac{d\mathrm{E}}{d\varphi}-\frac{d}{d\varphi}\frac{1}{n}\frac{d\mathrm{E}}{dn}\right]\right\}e^4.$$

Полагая здѣсь

$$\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2=\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2,$$

$$\left(\frac{d(s)}{d\varphi}\right)^2=\left(\frac{d(x)}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{d(y)}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{d(z)}{d\varphi}\right)^2,$$

$$\left(\frac{d((s))}{d\varphi}\right)^2=\left(\frac{d((x))}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{d((y))}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{d((z))}{d\varphi}\right)^2,$$

получимъ

$$\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2=\left(\frac{d(s)}{d\varphi}\right)^2-$$

$$-2\left\{\left[\frac{d((s))}{d\varphi}\right]^2\mathrm{E}-\left[\left(\frac{d((x))}{d\varphi}\right)^2\frac{1}{l}\frac{d\mathrm{E}}{dl}+\right.\right.$$

$$\left.+\left(\frac{d((y))}{d\varphi}\right)^2\frac{1}{m}\frac{d\mathrm{E}}{dm}+\left(\frac{d((z))}{d\varphi}\right)^2\frac{1}{n}\frac{d\mathrm{E}}{dn}\right]-$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left[\frac{d((x))^2}{d\varphi}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{l}\frac{d\mathrm{E}}{dl}\right)+\frac{d((y))^2}{d\varphi}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{m}\frac{d\mathrm{E}}{dm}\right)+\frac{d((z))}{d\varphi}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{n}\frac{d\mathrm{E}}{dn}\right)\right]\right\}e^4.$$

Эту формулу легко можно преобразовать въ слѣдующую:

$$\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{d(s)}{d\varphi}\right)^2 -$$

$$-2\left[\left(\frac{d((s))}{d\varphi}\right)^2 \mathrm{E} - \frac{d((x))}{d\varphi}\frac{d\,d\mathrm{E}}{d\varphi\,dl} - \frac{d((y))}{d\varphi}\frac{d\,d\mathrm{E}}{d\varphi\,dm} - \frac{d((z))}{d\varphi}\frac{d\,d\mathrm{E}}{d\varphi\,dn}\right]e^4 \quad (91)$$

$$= \left(\frac{d(s)}{d\varphi}\right)^2 - 2\left[\frac{d((s))}{d\varphi}\mathrm{E}(l, m, n) - 2a\mathrm{E}\left(\frac{dl}{d\varphi}, \frac{dm}{d\varphi}, \frac{dn}{d\varphi}\right)\right]e^4.$$

Подставляя въ послѣднюю формулу значенія частныхъ производныхъ E по l, m и n, производныхъ $\frac{d((x))}{d\varphi}$, $\frac{d((y))}{d\varphi}$ и $\frac{d((z))}{d\varphi}$, а также и значенія косинусовъ l m и n въ функціи φ и λ, получимъ

$$\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = \left[\frac{d(s)}{d\varphi}\right]^2 - 2a^2e^4\Big\{\mathrm{E} - [\chi_1 \sin^2\varphi\cos^2\lambda + \chi_2 \sin^2\varphi\sin^2\lambda +$$

$$+ \chi_3\cos^2\varphi + 2\tau_1 \sin\lambda\sin\varphi\cos\varphi + 2\tau_2\cos\lambda\cos\varphi\sin\varphi$$

$$- 2\tau_3 \sin\lambda\cos\lambda\sin^2\varphi]\Big\}, \quad (92)$$

откуда дифференціалъ дуги кривой $\lambda = \mathrm{const}$ выразится формулой

$$ds = d(s) - e^4a\Big\{\mathrm{E} - (\chi_1\cos^2\lambda\sin^2\varphi + \chi_2\sin^2\lambda\sin^2\varphi + \chi_3\cos^2\varphi +$$

$$+ 2\tau_1\sin\lambda\sin\varphi\cos\varphi + 2\tau_2\cos\lambda\cos\varphi\sin\varphi \quad 2\tau_3\sin\lambda\cos\lambda\sin^2\varphi)\Big\}d\varphi \quad (93)$$

Интегрируя это выраженіе, получимъ

$$s = (s) - e^4a\Big\{\frac{1}{2}\chi_1\cos^2\lambda\left[\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + \frac{1}{4}(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\chi_2\sin^2\lambda\left[\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + \frac{1}{4}(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1)\right]$$

$$- \frac{1}{2}\chi_3\left[\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} - \frac{1}{4}(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1)\right]$$

$$+ \frac{1}{4}\tau_1\sin\lambda(\cos 2\varphi_2 - \cos 2\varphi_1)$$

$$+ \frac{1}{4}\tau_2\cos\lambda(\cos 2\varphi_2 - \cos 2\varphi_1)$$

$$- \tau_3\left[\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + \frac{1}{4}(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1)\right]\sin\lambda\cos\lambda \quad (94)$$

$$- \chi_1\cos^2\lambda\left[\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} - \frac{1}{4}(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1)\right]$$

$$-\chi_2 \sin^2\lambda\left[\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}-\frac{1}{4}(\sin 2\varphi_2-\sin 2\varphi_1)\right]$$

$$-\chi_3\left[\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}+\frac{1}{4}(\sin 2\varphi_2-\sin 2\varphi_1)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\tau_1 \sin\lambda(\cos 2\varphi_2-\cos 2\varphi_1)$$

$$+\frac{1}{2}\tau_2 \cos\lambda(\cos 2\varphi_2-\cos 2\varphi_1)$$

$$+2\tau_3\left[\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}-\frac{1}{4}(\sin 2\varphi_2-\sin 2\varphi_1)\right]\sin\lambda\cos\lambda\Big\}$$

или, вводя обозначенія

$$\varphi_2-\varphi_1=\Delta\varphi \text{ и } \varphi_2+\varphi_1=\Phi, \tag{95}$$

$$s=(s)-\frac{1}{2}ae^4\Big\{(\Delta\varphi+\sin\Delta\varphi\cos\Phi)\left[\frac{1}{2}\chi_1\cos^2\lambda+\frac{1}{2}\chi_2\sin^2\lambda-\chi_3-\frac{1}{2}\tau_3\sin 2\lambda\right]$$

$$+(\Delta\varphi-\sin\Delta\varphi\cos\Phi)\left[-\chi_1\cos^2\lambda-\chi_2\sin^2\lambda+\frac{1}{2}\chi_3+\tau_3\sin 2\lambda\right]$$

$$-3\sin\Phi\cos\Delta\varphi\,(\tau_1\sin\lambda+\tau_2\cos\lambda)\Big\}. \tag{96}$$

Подобнымъ-же образомъ, замѣняя въ формулахъ (88), (89) и т. д. производныя φ производными по λ, получимъ для дифференціала дуги кривой $\varphi=\text{const}$ слѣдующее выраженіе:

$$ds=(ds)-e^4a\cos\varphi\left[E-\chi_2\cos^2\lambda-\chi_1\sin^2\lambda-\tau_3\sin 2\lambda\right]. \tag{97}$$

Интегрируя это выраженіе, получимъ

$$s=(s)+e^4a.\cos\varphi\Big[\left(\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}+\frac{1}{4}(\sin 2\lambda_2-\sin 2\lambda_1)\right)\left(\chi_2-\frac{1}{2}\chi_1\cos^2\varphi\right)$$

$$+\left(\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}-\frac{1}{4}(\sin 2\lambda_2-\sin 2\lambda_1)\right)\left(\chi_1-\frac{1}{2}\chi_2\cos^2\varphi\right)$$

$$-\left(\cos 2\lambda_1-\cos 2\lambda_2\right)\frac{\tau_3}{2}\left(1+\frac{1}{2}\cos^2\varphi\right)$$

$$-\frac{1}{2}(\lambda_2-\lambda_1)\chi_3\sin^2\varphi-(\cos 2\lambda_2-\cos 2\lambda_1)\frac{\tau_1}{2}\sin 2\varphi$$

$$+(\sin 2\lambda_2-\sin 2\lambda_3)\frac{\tau_2}{2}\sin 2\varphi\Big],$$

или, полагая

$$\lambda_2-\lambda_1=\Delta\lambda \text{ и } \lambda_2+\lambda_1=\Lambda, \tag{98}$$

$$s=(s)+e^4a.\cos\varphi\Big[(\Delta\lambda+\sin\Delta\lambda\cos\Lambda)\left(\chi_2-\frac{1}{2}\chi_1\cos^2\varphi\right)$$

$$+(\Delta\lambda - \sin\Delta\lambda\cos\Lambda)(\chi_1 - \tfrac{1}{2}\chi_2\cos^2\varphi)$$

$$-\Delta\lambda.\chi_3\sin^2\varphi$$

$$+2\sin\Delta\lambda\sin\Lambda\,.\,\tau_3\,(1+\tfrac{1}{2}\cos^2\varphi) \qquad (99)$$

$$+2\sin\frac{\Delta\lambda}{2}\sin\frac{\Lambda}{2}\,.\,\tau_1\sin 2\varphi$$

$$+2\sin\frac{\Delta\lambda}{2}\cos\frac{\Lambda}{2}\,.\,\tau_2.\sin 2\varphi\Big].$$

Изъ послѣдней формулы получается, какъ частный случай, формула Кларка для длины дуги параллели. Что касается до длины дуги меридіана, выраженной формулой 96, то, насколько мнѣ извѣстно, Кларкъ ее не вычислялъ.

§ 14. Для ближайшаго опредѣленія величинъ χ_1, χ_2, χ_3, τ_1, τ_2 и τ_3 поступаемъ слѣдующимъ образомъ:

Пусть φ_0 и λ_0 суть астрономически опредѣленныя широта и долгота центральнаго пункта страны и h_0 высота его надъ поверхностью эллипсоида; тогда прямоугольныя координаты этого птнкта будутъ

$$x_0 = (x_0)\left[1-(E_0 - \frac{1}{l_0}\frac{dE_0}{dl_0})e^4\right] - a + h_0\,l_0,$$

$$y_0 = (y_0)\left[1-(E_0 - \frac{1}{m_0}\frac{dE_0}{dm_0})e^4\right] - b + h_0 m_0, \qquad (100)$$

$$z_0 = (z_0)\left[1-(E_0 - \frac{1}{n_0}\frac{dE}{dn_0})e^4\right] - c + h_0\,n_0,$$

откуда, зная x_0, y_0, z_0 (x), (y_0), (z_0), l_0, m_0 n_0 въ функціи φ_0 и λ_0, можно опредѣлить a, b и c.

§ 15. Называя черезъ $\delta\chi_1$, $\delta\chi_2$, $\delta\chi_3$, $\delta\tau_1$, $\delta\tau_2$, $\delta\tau_3$ приращенія, получаемыя параметрами χ_1, χ_2, χ_3, τ_1, τ_2 и τ_3 при переходѣ отъ одного эллипсоида къ другому, и черезъ $\delta\varphi_i$, $\delta\lambda_i$ и δh_i измѣненіе координатъ пункта (x_i, y_i, z_i), происшедшія вслѣдствіе измѣненія параметровъ $\chi_1, \ldots, \tau_3$, легко замѣтить, что $\delta\varphi_i$, $\delta\lambda_i$ и δh_i будутъ величины четвертаго порядка отоосительно e. Поэтому, полагая

$$((x_i)) = a\cos\varphi_i\cos\lambda_i\,,\ ((y_i)) = a\cos\varphi_i\sin\lambda_i,\ ((z_i)) = a\sin\varphi_i, \qquad (101)$$

получимъ, пренебрегая величинами порядка высшаго, чѣмъ e^4, для координаты x_i

$$\frac{d((x_i))}{d\varphi_i}\delta\varphi_i+\frac{d((x_i))}{d\lambda_i}\delta\lambda_i+\frac{d((x_i))}{\delta h_i}\delta h_i-((x_i))\left[\delta E_i-\frac{1}{l_i}\frac{d\delta E_i}{dl_i}e^4\right]=0, \quad (102)$$

гдѣ

$$2\delta E_i=l_i^2\delta\chi_1+m_i^2\delta\chi_2+n_i^2\delta\chi_3-2m_in_i\delta\tau_1-2n_il_i\delta\tau_2-2l_im_i\delta\tau_3. \quad (103)$$

Разсуждая такимъ-же образомъ относительно координатъ y_i и z_i получимъ

$$\begin{aligned}
-a\sin\varphi_i\cos\lambda_i\,\delta\varphi_i-a\cos\varphi_i\sin\lambda_i\,\delta\lambda_i+\cos\varphi_i\cos\lambda_i\,\delta h_i&=A_i,\\
-a\sin\varphi_i\sin\lambda_i\,\delta\varphi_i+a\cos\varphi_i\cos\lambda_i\,\delta\lambda_i+\cos\varphi_i\sin\lambda_i\,\delta h_i&=B_i, \quad (104)\\
a\cos\varphi_i\,\delta\varphi_i+\sin\varphi_i\,\delta h_i&=C_i,
\end{aligned}$$

гдѣ

$$\begin{aligned}
A_i&=al_i\left(\delta E_i-\frac{1}{l_i}\frac{d\delta E_i}{dl_i}\right)e^4,\\
B_i&=am_i\left(\delta E_i-\frac{1}{m_i}\frac{d\delta E_i}{dm_i}\right)e^4, \quad (105)\\
C_i&=an_i\left(\delta E_i-\frac{1}{n_i}\frac{d\delta E_i}{dn_i}\right)e^4.
\end{aligned}$$

Рѣшая уравненія (105), получимъ

$$\begin{aligned}
a\,\delta\varphi_i&=-A_i\sin\varphi_i\cos\lambda_i-B_i\sin\varphi_i\sin\lambda_i+C_i\cos\varphi_i,\\
a\cos\varphi_i\,\delta\lambda_i&=-A_i\sin\lambda_i+B_i\cos\lambda_i, \quad (106)\\
\delta h_i&=A_i\cos\varphi_i\cos\lambda_i+B_i\cos\varphi_i\sin\lambda_i+C_i\cos\varphi_i,
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
\delta\varphi_i&=\left[\frac{d\delta E_i}{dl}\sin\varphi_i\cos\lambda_i+\frac{d\delta E_i}{dm_i}\sin\varphi_i\sin\lambda_i-\frac{d\delta E_i}{dn_i}\cos\varphi_i\right]e^4,\\
\cos\varphi_i\,\delta\lambda_i&=\left[\frac{d\delta E_i}{dl_i}\sin\lambda_i-\frac{d\delta E_i}{dm_i}\cos\lambda_i\right]e^4, \quad (107)\\
\delta h_i&=-a\,\delta E_i\,.\,e^4.
\end{aligned}$$

Вводя обозначенія

$$\begin{aligned}
&(i,1)=\tfrac{1}{2}\sin 2\varphi_i\cos^2\lambda_i,\ (i,2)=\tfrac{1}{2}\sin 2\varphi_i\sin^2\lambda_i,\ (i,3)=-\tfrac{1}{2}\sin 2\varphi_i,\\
&(i,4)=\cos 2\varphi_i\sin\lambda_i,\ (i,5)=\cos 2\varphi_i\cos\lambda_i,\ (i,6)=\tfrac{1}{2}\sin 2\varphi_i\sin 2\lambda_i,\\
&[i,1]=-\tfrac{1}{2}\cos\varphi_i\sin 2\lambda_i,\ [i,2]=-\tfrac{1}{2}\cos\varphi_i\cos 2\lambda_i,\ [i,3]=0\ , \quad (108)\\
&[i,4]=\sin\varphi_i\cos\lambda_i\,,\ [i,5]=-\sin\varphi_i\sin\lambda_i\,,\ [i,6]=\cos\varphi_i\cos 2\lambda_i,
\end{aligned}$$

получимъ

$$\delta\varphi_i = \left\{(i,1)\delta\chi_1 + (i,2)\delta\chi_2 + (i,3)\delta\chi_3 + (i,4)\delta\tau_1 + (i,5)\delta\tau_2 + (i,6)\delta\tau_3\right\}e^4,$$

$$\cos\varphi_i\delta\lambda_i = \left\{[i,1]\delta\chi_1 + [i,2]\delta\chi_2 + [i,3]\delta\chi_3 + [i,4]\delta\tau_1 + [i,5]\delta\tau_2 + [i,6]\delta\tau_3\right\}e^4,$$

$$\delta h_i = -a\delta E_i . e^4.$$

Пусть Φ_i и Λ_i суть опредѣленныя астрономически широта и долгота пункта i, а φ_i и λ_i широта и долгота того-же пункта, опредѣленныя гоедезически изъ центральнаго пункта страны, пользуясь приближенными значеніями χ_1, χ_2, χ_3, τ_1, τ_2 и τ_3.

Отыщемъ теперь такія значенія $\delta\chi_1, \ldots, \delta\tau_3$, которыя доставляютъ выраженію

$$S^2 = \sum_{i=0}^{i=n} \left\{(\Phi_i - \varphi_i - \delta\varphi_i)^2 + \cos^2\varphi_i\,(\Lambda_i - \lambda_i - \delta\lambda_i)^2\right\} \qquad (109)$$

наименьшее значеніе, то есть удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\frac{dS^2}{d\delta\chi_1} = 0, \frac{dS^2}{d\delta\chi_2} = 0, \frac{dS^2}{d\delta\chi_3} = 0, \frac{dS^2}{d\delta\tau_1} = 0, \frac{dS^2}{d\delta\tau_2} = 0, \frac{dS^2}{d\delta\tau_3} = 0.$$

Мы имѣемъ

$$\frac{dS^2}{d\delta\chi_1} = 2\sum_{i=0}^{i=n}\left\{(\Phi_i - \varphi_i - \delta\varphi_i)\frac{d\delta\varphi_i}{d\delta\chi_1} + \cos^2\varphi_i(\Lambda_i - \lambda_i - \delta\lambda_i)\frac{d\delta\lambda_i}{d\delta\chi_1}\right\}. \qquad (110)$$

Замѣчая, что

$$\frac{d\delta\varphi_i}{d\delta\chi_1} = (i,1)e^4, \frac{d\delta\lambda_i}{d\delta\chi_1} = [i\,1]e^4,$$

мы получимъ, означая для краткости

$$X_{k,l} = \sum_{i=0}^{i=n}\left\{(\Phi_i - \varphi_i - e^4(i,k)(i,l) + \cos^2\varphi_i(\Lambda_i - \lambda_i - e^4[i,k])[i,l]\right\}, \qquad (111)$$

$$\frac{1}{e^4}\frac{dS^2}{d\delta\chi_1} = X_{11}\delta\chi_1 + X_{21}\delta\chi_2 + X_{31}\delta\chi_3 + X_{41}\delta\tau_1 + X_{51}\delta\tau_2 + X_{61}\delta\tau_6 = 0. \qquad (112)$$

Такимъ же образомъ получимъ и остальныя пять уравненій, изъ которыхъ можно будетъ опредѣлить $\delta\chi_1, \ldots, \delta\tau_3$.

Исправивъ такимъ образомъ $\chi_1, \ldots, \tau_3$, мы получимъ по формуламъ (73) i, Ω, θ, ε_1, ε_2 и ε_3.

Само собою разумѣется, что можно за первое приближеніе взять напримѣръ Бесселевъ сфероидъ и тогда

$$\delta\chi_1 = \chi_1, \delta\chi_2 = \chi_2, \ldots\ldots, \delta\tau_3 = \tau_3.$$

Г. Шебуевъ.