ТРУДЫ

ТОПОГРАФО-ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ КОММИССІИ.

ВЫПУСКЪ VIII.

Изданъ подъ редакціей члена Коммиссіи И. А. Иверонова.

МОСКВА
ПЕЧАТНЯ А. И. СНЕГИРЕВОЙ
ОСТОЖЕНКА, САВЕЛОВСКІЙ ПЕР., СОБ. Д.

1898

Разстоянія, азимуты и треугольники на трехосномъ эллипсоидѣ, мало отличающемся отъ сферы.

Настоящая работа, предлагаемая мною вниманію Т. Г. Коммкссіи, представляетъ собою распространеніе изслѣдованій, изложенныхъ въ 5-й главѣ геодезіп Кларка, на случай трехоснаго эллипсоида, весьма мало отличающагося отъ сферы.

5-я глава упомянутаго сочиненія Кларка, озаглавленная „Разстоянія азимуты и треугольники на сфероидѣ,“ содержитъ въ себѣ изложеніе самыхъ важныхъ для практическихъ цѣлей и при томъ оригинальныхъ изслѣдованій этого ученаго, а именно: способы вычисленія длинъ нормальныхъ сѣченій, кривыхъ провѣшиванія, меридіановъ и параллелей на сфероидѣ, взаимныхъ азимутовъ и зенитныхъ разстояній концовъ нормальныхъ сѣченій и линій провѣшиванія, а такъ-же и вычисленіе угловъ и треугольнковъ, образуемыхъ этими линіями на сфероидѣ.

Для случая трехоснаго эллипсоида эти изслѣдованія оказываются нѣсколько болѣе сложными, хотя и не настолько, насколько это можно было бы ожидать на первый взглядъ.

При выводѣ формулъ, дающихъ зависимость между упомянутыми выше величинами, я старался, по возможности, дальше проводить вычисленія для всякой поверхности вообще, не ограничиваясь поверхностью эллипсоида, затѣмъ уже спеціализировалъ формулы для поверхности трехоснаго эллипсоида и наконецъ для сфероида. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ получаются, понятно, формулы Кларка.

Переходя къ приближеннымъ формуламъ, я ограничивался вообще величинами порядка четвертой степени эксцентрицитета полярнаго и вторыми степенями эксцентрицитета экваторіальнаго.

Изслѣдуя относительное положеніе кривой провѣшиванія и нормальныхъ сѣченій, я принималъ порядокъ экваторіальнаго эксцентрицитета равнымъ порядку эксцентрицитета полярнаго для того, чтобы рѣзче обнаружить вліяніе перваго изъ нихъ.

Хотя въ комментируемой мною главѣ геодезіи Кларка и не разсматривается вопросъ о длинѣ геодезической кривой и азимутѣ ея, тѣмъ не менѣе я изслѣдовалъ въ предлагаемой статьѣ и этотъ вопросъ, и пришелъ къ слѣдующему интересному результату:

Если полуоси эллипсоида суть a, b и c,

при чемъ

$$a=\rho\sqrt{1+q^2e^4},\quad b=\rho\sqrt{1-q^2e^4}\ \text{и}\ c=\rho\sqrt{1-e^2},$$

то, означая длину геодезической кривой между двумя точками, положеніе которыхъ на эллипсоидѣ опредѣлено астрономическимъ путемъ, черезъ s, а черезъ s_0 длину геодезической кривой между точками, опредѣленными тѣми-же астрономическими элементами на сфероидѣ, т. е. для случая $q=0$,

$$s-s_0=qe^2s'+q^2e^4s''+\ \ldots,$$

т. е. поправка s_0 на трехосный эллипсоидъ будетъ порядка e^2. Къ подобному-же результату мы приходимъ для азимутовъ геодезической кривой.

Изъ этого слѣдуетъ, что длина и азимуты геодезической кривой представляютъ весьма чувствительный критерій для обнаруженія существованія экваторіальнаго эксцентрицитета нашей планеты, критерій, болѣе чувствительный, чѣмъ измѣреніе параллелей, которымъ для этой цѣли пользовался Кларкъ.

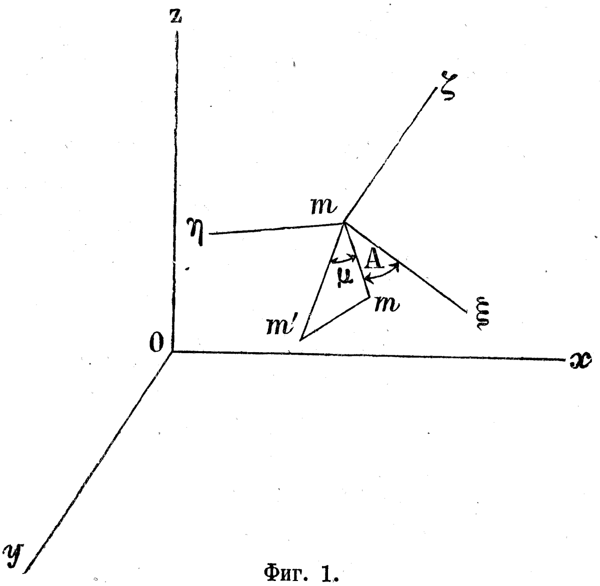
---

§. 1 Пусть

$$x=F_1(u,v),\ \ y=F_2(u,v)\ \ \text{и}\ \ z=F_3(u,v,) \tag{1}$$

представляютъ собой прямолинейныя и прямоугольныя координаты, опредѣляющія положеніе въ пространствѣ нѣкоторой точки поверхности S, а u и v криволинейныя координаты, опредѣляющія положеніе той же точки на самой поверхности.

Исключая изъ уравненій (1) u и v, мы получимъ зависимость между x, y и z, представляющую собою уравненіе поверхности S, такъ что система (1) эквивалентна уравненію поверхности.



Фиг. 1.

Обозначивъ черезъ L, M и N косинусы угловъ, образуемыхъ нормалью въ точкѣ m (x,y,z) къ поверхности S, и замѣтивъ, что косинусы угловъ, образуемыхъ касательною въ точкѣ m къ такой кривой линіи, проведенной на поверхности S, для точекъ которой v остается постояннымъ, будутъ соотвѣтственно:

$$\frac{1}{Q}\frac{dx}{du},\ \frac{1}{Q}\frac{dy}{du}\ \text{и}\ \frac{1}{Q}\frac{dz}{du}\ ,\ \text{гдѣ}\ Q=\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2+\left(\frac{dz}{du}\right)^2},$$

мы можемъ написать уравненіе

$$L\frac{dx}{du}+M\frac{dy}{du}+N\frac{dz}{du}=0, \tag{2}$$

выражающее условіе перпендикулярности нормали поверхности S къ упомянутой касательной кривой линіи. Разсуждая точно также относительно касательной линіи къ кривой, для точекъ которой u остается постояннымъ, мы получимъ

$$L\frac{dx}{dv}+M\frac{dy}{dv}+N\frac{dz}{dv}=0. \tag{3}$$

Опредѣливъ изъ уравненій 2 и 3 отношенія $\frac{M}{L}$ и $\frac{N}{L}$, получимъ

$$\frac{L}{\alpha}=\frac{M}{\beta}=\frac{N}{\gamma}=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}, \tag{4}$$

гдѣ

$$\alpha=\frac{dy}{du}\frac{dz}{dv}-\frac{dy}{dv}\frac{dz}{du},\ \beta=\frac{dz}{du}\frac{dx}{dv}-\frac{dz}{dv}\frac{dx}{du}\ \text{и}\ \gamma=\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}.$$

Вообразимъ систему прямолинейныхъ и прямоугольныхъ осей координатъ ξ, η, ζ, начало которой лежитъ въ точкѣ m (x,y,z), ось ζ направлена по нормали къ поверхности S и ось η перпендикулярна къ линіямъ $m\zeta$ и oz, тогда мы будемъ имѣть слѣдующія два равенства

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cos}(\eta x).0+\mathrm{Cos}(\eta y).0+\mathrm{Cos}(\eta z).1=0,\\&\mathrm{Cos}(\eta x).L+\mathrm{Cos}(\eta y).M+\mathrm{Cos}(\eta z).N=0,\end{aligned}\qquad(5)$$

выражающія собою условіе перпендикулярности линіи $m\eta$ къ линіямъ oz и $m\zeta$. Изъ этихъ равенствъ получимъ

$$\mathrm{Cos}(\eta x)=\frac{-M}{\sqrt{1-N^2}},\ \mathrm{Cos}(\eta y)=\frac{L}{\sqrt{1-N^2}},\ \mathrm{Cos}(\eta z)=0.\qquad(6)$$

Выражая далѣе условіе перпендикулярности ξ къ η и ζ, получимъ

$$\mathrm{Cos}(\xi x).\frac{-M}{\sqrt{1-N^2}}+\mathrm{Cos}(\xi y).\frac{L}{\sqrt{1-N^2}}+\mathrm{Cos}(\xi z).0=0\qquad(7)$$

$$\mathrm{Cos}(\xi x).L+\mathrm{Cos}(\xi y).M+\mathrm{Cos}(\xi z).N=0,\qquad(8)$$

откуда найдемъ

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cos}(\xi x)=\frac{LN}{\sqrt{1-N^2}},\ \mathrm{Cos}(\xi y)=\frac{MN}{\sqrt{1-N^2}}\ \text{и}\\&\mathrm{Cos}(\xi z)=-\frac{1-N^2}{\sqrt{1-N^2}}.\end{aligned}\qquad(9)$$

§ 2. Примѣнимъ эти формулы къ вычисленію длины D, хорды, соединяющей точку m поверхности съ точкой m′, угла μ, образуемаго этой хордою съ касательной плоскостью къ поверхности S въ точкѣ m и угла A, образуемаго плоскостью $m'm\zeta$ съ плоскостью ξ и ζ. Уголъ $90^0+\mu$ будемъ называть зенитнымъ разстояніемъ точки m' относительно точки m, а уголъ $180^\circ + A$ азимутомъ точки m' относительно точки m. Для этой цѣли замѣчаемъ, что проекціи линіи D на оси ox, oy и oz будутъ соотвѣтственно

$$x'-x,\ y'-y \text{ и } z'-z$$

такъ, что

$$\mathrm{Cos}(Dx)=\frac{x'-x}{D},\ \mathrm{Cos}(Dy)=\frac{y'-y}{D} \text{ и } \mathrm{Cos}(Dz)=\frac{z'-z}{D}.$$

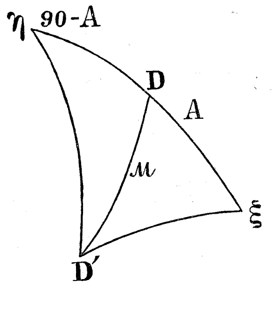
Съ другой стороны

$$-\mathrm{Sin}\mu=\mathrm{Cos}(D\zeta)=\mathrm{Cos}(Dx)\mathrm{Cos}(\zeta x)+\mathrm{Cos}(Dy)\mathrm{Cos}(\zeta y)+$$
$$+\mathrm{Cos}(Dz)\mathrm{Cos}(\zeta z)=\frac{x'-x}{D}L+\frac{y'-y}{D}M+\frac{z'-z}{D}N,$$

откуда

$$-D\mathrm{Sin}\mu=(x'-x)L+(y'-y)M+(z'-z)N. \qquad (10)$$

Далѣе замѣчаемъ, что изъ сферическихъ треугольниковъ $DD'\eta$ и $DD'\xi$, прямоугольныхъ при D.



$$\mathrm{Cos}\mu.\mathrm{Sin}A=\mathrm{Cos}(D\eta)=\mathrm{Cos}(Dx)\mathrm{Cos}(\eta x)+$$
$$+\mathrm{Cos}(Dy)\mathrm{Cos}(\eta y)+\mathrm{Cos}(Dz).\mathrm{Cos}(\eta z)=$$
$$=\frac{x'-x}{D}\cdot\frac{-M}{\sqrt{1-N^2}}+\frac{y'-y}{D}\cdot\frac{L}{\sqrt{1-N^2}}+$$
$$+\frac{z'-z}{D}.\,0$$

и что

$$\mathrm{Cos}\mu.\mathrm{Cos}A=\mathrm{Cos}(D\xi)=$$

$$\mathrm{Cos}(Dx).\mathrm{Cos}(\xi x)+\mathrm{Cos}(Dy)\mathrm{Cos}(\xi y)+\mathrm{Cos}(Dz)\mathrm{Cos}(\xi z)=$$

$$\frac{x'-x}{D}\cdot\frac{LN}{\sqrt{1-N^2}}+\frac{y'-y}{D}\cdot\frac{MN}{\sqrt{1-N^2}}+\frac{z'-z}{D}\ \frac{1-N^2}{\sqrt{1-N^2}};$$

откуда получаемъ

$$D\operatorname{Cos}\mu\operatorname{Sin}A=(x'-x)\ \frac{-M}{\sqrt{1-N^2}}\ +(y'-y)\ \frac{L}{\sqrt{1-N^2}} \qquad (11)$$

$$D\operatorname{Cos}\mu\operatorname{Cos}A=(x'-x)\ \frac{LN}{\sqrt{1-N^2}}\ +(y'-y)\ \frac{MN}{\sqrt{1-N^2}}$$

$$-(z'-z)\cdot\frac{1-N^2}{\sqrt{1-N^2}}\ . \qquad (12)$$

Наконецъ, для вычисленія D имѣемъ

$$D^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2, \qquad (13)$$

§ 3. Примѣнимъ формулы 10, 11, 12 и 13 къ эллипсоиду, уравненіе котораго

$$x=a\operatorname{Cos}u\operatorname{Cos}v,\ y=b\operatorname{Cos}u\operatorname{Sin}v \text{ и } z=c\operatorname{Sin}u. \qquad (14)$$

Мы получимъ

$$\frac{dx}{du}=-a\operatorname{Sin}u\operatorname{Cos}v,\quad \frac{dy}{du}=-b\operatorname{Sin}u\operatorname{Sin}v,\quad \frac{dz}{du}=c\operatorname{Cos}u,$$

$$\frac{dx}{dv}=-a\operatorname{Cos}u\operatorname{Sin}v,\quad \frac{dy}{dv}=b\operatorname{Cos}u\operatorname{Cos}v,\quad \frac{dz}{dv}=0$$

и слѣдовательно

$$\alpha=-bc\operatorname{Cos}^2u\operatorname{Cos}v,\ \beta=-ca\operatorname{Cos}^2u\operatorname{Sin}v,$$
$$\gamma=-ab\operatorname{Sin}u\operatorname{Cos}u, \qquad (15)$$

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}=$$
$$\operatorname{Cos}u\sqrt{b^2c^2\operatorname{Cos}^2u\operatorname{Cos}^2v+c^2a^2\operatorname{Cos}^2u\operatorname{Sin}^2v+a^2b^2\operatorname{Sin}^2u}\cdot \qquad (16)$$

Полагая здѣсь

$$a^2=\rho^2(1+i),\ b^2=\rho^2(1-i) \text{ и } c^2=\rho^2(1-e^2),$$

получимъ

$$L=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}=\frac{\sqrt{1-i}\sqrt{1-e^2}}{\Omega}\operatorname{Cos}u\operatorname{Cos}v,$$

$$M=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}=\frac{\sqrt{1+i}\sqrt{1-e^2}}{\Omega}\operatorname{Cos}u\operatorname{Sin}v,$$

$$N=\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}=\frac{\sqrt{1+i}\sqrt{1-i}}{\Omega}\operatorname{Sin}u, \qquad (17)$$

гдѣ

$$\rho^2\Omega=\sqrt{b^2c^2\operatorname{Cos}^2u\operatorname{Cos}^2v+c^2a^2\operatorname{Cos}^2u\operatorname{Sin}^2v+a^2b^2\operatorname{Sin}^2u}$$

или, если подставить вмѣсто a^2, b^2 и c^2 соотвѣтственно $\rho^2(1+i)$, $\rho^2(1-i)$ и $\rho^2(1-e^2)$

$$\Omega=\sqrt{1-\operatorname{Cos}^2u\,[e^2+i(1-e^2)\operatorname{Cos}2v]-i^2\operatorname{Sin}^2u}\ . \qquad (17)\text{ bis}$$

Далѣе имѣемъ:

$$\sqrt{1-N^2}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{\Omega}.\operatorname{Cos}u\sqrt{1-i\operatorname{Cos}2v},$$

$$\operatorname{Cos}(\eta x)=-\frac{M}{\sqrt{1-N^2}}=\frac{-\sqrt{1+i}\operatorname{Sin}v}{\sqrt{1-i\operatorname{Cos}2v}},$$

$$\operatorname{Cos}(\eta y)=\frac{L}{\sqrt{1-N^2}}=\frac{\sqrt{1-i}\operatorname{Cos}v}{\sqrt{1-i\operatorname{Cos}2v}},$$

$$\operatorname{Cos}(\eta z)=0 \qquad (18)$$

$$\mathrm{Cos}(\xi x) = \frac{L.\,N}{\sqrt{1-N^2}} = \frac{(1-i)\sqrt{1+i}\,\mathrm{Sin}u\mathrm{Cos}v}{\Omega\sqrt{1-i\,\mathrm{Cos}2v}},$$

$$\mathrm{Cos}(\xi y) = \frac{M.\,N}{\sqrt{1-N^2}} = \frac{(1+i)\sqrt{1-i}\,\mathrm{Sin}u\mathrm{Sin}v}{\Omega\sqrt{1-i\,\mathrm{Cos}2v}},$$

$$\mathrm{Cos}(\xi z) = -\frac{1-N^2}{\sqrt{1-N^2}} = -\frac{\sqrt{1-e^2}(1-i\,\mathrm{Cos}2v)\,\mathrm{Cos}u}{\Omega\sqrt{1-i\,\mathrm{Cos}2v}};$$

и

$$\begin{aligned} x'-x &= \rho\sqrt{1+i}\,(\mathrm{Cos}u'\mathrm{Cos}v' - \mathrm{Cos}u\mathrm{Cos}v), \\ y'-y &= \rho\sqrt{1-i}\,(\mathrm{Cos}\,u'\,\mathrm{Sin}\,v' - \mathrm{Cos}u\mathrm{Sin}v), \\ z'-z &= \rho\sqrt{1-e^2}\,(\mathrm{Sin}\,u' - \mathrm{Sin}u). \end{aligned} \tag{19}$$

Воспользовавшись формулами (18) и (19), получимъ:

$$D\mathrm{Sin}\mu = \rho\frac{\sqrt{1+i}\,\sqrt{1-i}\,\sqrt{1-e^2}}{D}\{1 - \mathrm{Sin}u\mathrm{Sin}u' - \mathrm{Cos}u\mathrm{Cos}u'\mathrm{Cos}(v'-v)\}$$

$$D\mathrm{Cos}\mu\mathrm{Sin}A = -\rho\frac{1}{\sqrt{1-i\,\mathrm{Cos}\,2\,v}}\{\mathrm{Cos}u'\,\mathrm{Sin}\,(v'-v) - i\,[\mathrm{Cos}\,u'\,\mathrm{Sin}\,(v'+v) - \mathrm{Cos}\,u\,\mathrm{Sin}2v]\}$$

$$D\mathrm{Cos}\mu\mathrm{Cos}A = -\rho\frac{1-i^2}{\Omega\sqrt{1-i\,\mathrm{Cos}2v}}\Big\{\mathrm{Sin}u'\mathrm{Cos}u - \mathrm{Cos}u'\mathrm{Sin}u\mathrm{Cos}\,(v'-v) - \frac{e^2-i\,[i-(1-e^2)\,\mathrm{Cos}2v]}{1-i^2}\,\mathrm{Cos}u(\mathrm{Sin}u' - \mathrm{Sin}u)\Big\} \tag{20}$$

и $$D^2 = 2\rho^2\Big\{1 - \mathrm{Sin}u\,\mathrm{Sin}u' - \mathrm{Cos}\,u\,\mathrm{Cos}u'\,\mathrm{Cos}\,(v'-v) + \frac{i}{2}\Big[\mathrm{Cos}^2u'\mathrm{Cos}2v' - 2\,\mathrm{Cos}u\,\mathrm{Cos}u'\,\mathrm{Cos}\,(v'+v) + \mathrm{Cos}^2u\mathrm{Cos}2v\Big] - \frac{e^2}{2}\Big[\mathrm{Sin}u - \mathrm{Sin}u'\Big]^2\Big\}.$$

§ 4. Займемся преобразованіемъ формулъ (20) къ логариѳмическому виду. Начнемъ съ формулы для D^2; напишемъ ее подъ видомъ

$$D^2=2\rho^2\left\{2\operatorname{Sin}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)+\frac{i}{2}\left(\operatorname{Sin}u_x-\operatorname{Sin}u_x'\right)^2-\frac{i}{2}\left(\operatorname{Sin}u_y-\operatorname{Sin}u_y'\right)^2-\right.$$

$$\left.-\frac{e^2}{2}\left(\operatorname{Sin}u-\operatorname{Sin}u\right)^2\right\},$$

гдѣ

$$\begin{aligned}&\operatorname{Cos}\omega=\operatorname{Sin}u'\operatorname{Sin}u+\operatorname{Cos}u'\operatorname{Cos}u\operatorname{Cos}(v'-v),\\&\operatorname{Sin}u_x=\operatorname{Cos}u\operatorname{Cos}v,\quad \operatorname{Sin}u_y=\operatorname{Cos}u\operatorname{Sin}v,\\&\operatorname{Sin}u_x'=\operatorname{Cos}u'\operatorname{Cos}v',\quad \operatorname{Sin}u_y'=\operatorname{Cos}u'\operatorname{Sin}v',\end{aligned}\tag{21}$$

полагая затѣмъ

$$\frac{i}{2}\left(\operatorname{Sin}u_x-\operatorname{Sin}u_x'\right)^2=2i\operatorname{Sin}^2\left(\frac{u_x-u_x'}{2}\right)\operatorname{Cos}^2\left(\frac{u_x+u_x'}{2}\right)=$$

$$=2\operatorname{Sin}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\operatorname{Tg}^2\theta,$$

$$\frac{i}{2}\left(\operatorname{Sin}u_y-\operatorname{Sin}u_y'\right)^2=2i\operatorname{Sin}^2\left(\frac{u_y-u_y'}{2}\right)\operatorname{Cos}^2\left(\frac{u_y+u_y'}{2}\right)=$$

$$=2\frac{\operatorname{Sin}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\operatorname{Cos}^2\theta}\operatorname{Sin}^2\psi\operatorname{Sin}^2\varphi,$$

$$\frac{e^2}{2}\left(\operatorname{Sin}u-\operatorname{Sin}u'\right)^2=2e^2\operatorname{Sin}^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\operatorname{Cos}^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)=$$

$$=2\frac{\operatorname{Sin}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\operatorname{Cos}^2\theta}\operatorname{Sin}^2\psi\operatorname{Cos}\varphi,$$

откуда

$$\mathrm{Tg}^2\theta=\frac{i}{2}\frac{\mathrm{Sin}^2\left(\frac{u_x-u_x'}{2}\right)\mathrm{Cos}^2\left(\frac{u_x+u_x'}{2}\right)}{\mathrm{Sin}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)},$$

$$\mathrm{Tg}^2\varphi=\frac{i}{e^2}\frac{\mathrm{Sin}^2\left(\frac{u_y-u_y'}{2}\right)\mathrm{Cos}^2\left(\frac{u_y+u_y'}{2}\right)}{\mathrm{Sin}^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\mathrm{Cos}^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)}, \tag{22}$$

$$\mathrm{Sin}^2\psi=e^2\mathrm{Cos}^2\theta\,\mathrm{S\grave{e}c}^2\varphi\,\mathrm{Sin}^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\mathrm{Cos}^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)\mathrm{Cos\grave{e}c}^2\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

получимъ

$$D^2=4\rho^2\mathrm{Sin}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{\mathrm{Cos}^2\psi}{\mathrm{Cos}^2\theta}. \tag{23}$$

Первую изъ формулъ (20) можно на основаніи (23) и первой изъ формулъ (21) представить подъ видомъ:

$$\mathrm{Sin}\mu=\frac{\sqrt{1+i}\,\sqrt{1-i}\,\sqrt{1-e^2}}{D}\ \mathrm{Sin}\ \frac{\omega}{2}\,\mathrm{S\grave{e}c}\,\psi\,\mathrm{Cos}\,\theta. \tag{24}$$

Вторую формулу системы (20) можно, пользуясь отношеніями (21), написать такъ:

$$\mathrm{DCos}\mu\mathrm{Sin}A=\frac{\rho}{\sqrt{1-i\,\mathrm{Cos}2v}}\Big\{\mathrm{Cos}u'\mathrm{Sin}(v'-v)+$$
$$+i[\mathrm{Sin}v(\mathrm{Sin}u_x'-\mathrm{Sin}u_x)+\mathrm{Cos}\,v\,(\mathrm{Sin}\,u_y'-\mathrm{Sin}\,u_y)]\Big\}.$$

Полагая здѣсь:

$$i(\mathrm{Sin}\,u_x'-\mathrm{Sin}\,u_x)=2\,i\,\mathrm{Sin}\left(\frac{u_x'-u_x}{2}\right).\,\mathrm{Cos}\left(\frac{u_x'+u_x}{2}\right)=$$
$$=P\,\mathrm{Cos}\,u'\mathrm{Sin}(v'-v)\mathrm{Cos}\theta_1,$$

$$i(\operatorname{Sin} u_y' - \operatorname{Sin} u_y) = 2\,i\,\operatorname{Sin}\left(\frac{u_y' - u_y}{2}\right).\operatorname{Cos}\left(\frac{u_y' + u_y}{2}\right) =$$

$$= P \operatorname{Cos} u' \operatorname{Sin}(v' - v) \operatorname{Sin}\theta_1,$$

откуда

$$\operatorname{Tg}^2\theta_1 = \frac{\operatorname{Sin}\left(\frac{u_y' - u_y}{2}\right) \operatorname{Cos}\left(\frac{u_y' + u_y}{2}\right)}{\operatorname{Sin}\left(\frac{u_x' - u_x}{2}\right) \operatorname{Cos}\left(\frac{u_x' + u_x}{2}\right)}, \tag{25}$$

и

$$P = \frac{2\,i\,\operatorname{Sin}\left(\frac{u_x' - u_x}{2}\right) \operatorname{Cos}\left(\frac{u_x' + u_x}{2}\right)}{\operatorname{Cos} u' \operatorname{Sin}(v' - v) \operatorname{Cos}\theta_1} =$$

$$= \frac{2\,i\,\operatorname{Sin}\left(\frac{u_y' - u_y}{2}\right) \operatorname{Cos}\left(\frac{u_y' + u_y}{2}\right)}{\operatorname{Cos} u' \operatorname{Sin}(v' - v) \operatorname{Sin}\theta_1}, \tag{25}$$

получимъ

$$D \operatorname{Cos}\mu \operatorname{Sin}A = \frac{\operatorname{Cos} u' \operatorname{Sin}(v' - v)}{\sqrt{1 - i \operatorname{Cos} 2v}} \{1 + P \operatorname{Sin}(v + \theta_1)\} \tag{26}$$

Полагая здѣсь

$$P \operatorname{Sin}(v + \theta_1) = \operatorname{Tg}\eta, \tag{27}$$

получимъ окончательно

$$D \operatorname{Cos}\mu \operatorname{Sin}A = \frac{\operatorname{Cos} u' \operatorname{Sin}(v' - v)}{\sqrt{1 - i \operatorname{Cos} 2v}} \cdot \frac{\operatorname{Cos}(45^{\circ} - \eta)}{\sqrt{2} \operatorname{Cos}\eta}. \tag{28}$$

Формулы (23), (24) и (25) вполнѣ рѣшаютъ вопросъ объ опредѣленіи хорды D, зенитнаго разстоянія $90^{\circ} + \mu$ и азимута $180^{\circ} + A$.

§ 5. Въ случаѣ $i=0$ мы получаемъ формулы соотвѣтствующія эллипсоиду вращенія. Въ этомъ случаѣ θ, φ и η равны нулю и мы получимъ:

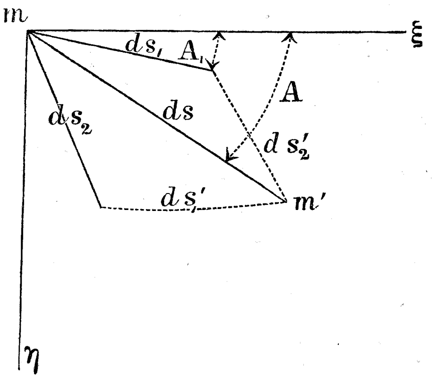
$$
\begin{aligned}
D^2 &= 4\rho^2 \operatorname{Sin}^2\frac{\omega}{2}\operatorname{Cos}^2\psi, \\
\operatorname{Sin}\mu &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\operatorname{Cos}^2 u}}\operatorname{Sin}\frac{\omega}{2}\operatorname{Sec}\psi, \\
D\operatorname{Cos}\mu\operatorname{Sin}A &= \operatorname{Cos}(v'-v),
\end{aligned}
\tag{29}
$$

гдѣ

$$\operatorname{Sin}^2\psi = e^2\operatorname{Sin}^2\left(\frac{u'-u}{2}\right)\operatorname{Cos}^2\left(\frac{u'+u}{2}\right)\operatorname{Cosec}^2\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

§ 6. Займемся теперь опредѣленіемъ радіуса кривизны въ точкѣ m (x, y, z) кривой линіи σ, проведенной на поверхности S и при томъ такъ, что касательная линія къ кривой σ въ точкѣ m образуетъ съ осью ξ уголъ A.

Пусть поверхность S задана уравненіями (1). Пусть затѣмъ ds элементъ кривой σ, соединяющій точку m', координаты которой $u+du$ и $v+dv$. Вообразимъ на поверхности S двѣ кривыя линіи



σ_1 и σ_1', проходящія соотвѣтственно черезъ точки m и m' и при томъ такія, что для точекъ каждой изъ нихъ v остается постояннымъ. Вообразимъ двѣ другія кривыя линіи σ_2 и σ_2' на поверхности S, проходящія соотвѣтственно черезъ точки m и m' и обладающія тѣмъ свойствомъ, что для точекъ этихъ кривыхъ u остается постояннымъ. Элементы этихъ кривыхъ линій ds_1, ds_1', ds_2 и ds_2', опредѣляемые взаимнымъ пересѣченіемъ кривыхъ, образуютъ четыреугольникъ. Такъ какъ въ предѣлѣ, при du и dv равныхъ нулю, элементы ds_1' и ds_2 совпадутъ соотвѣтственно съ элементами ds_1 и ds_2', то можно принять $ds_1'=ds_1$ и $ds_2'=ds_2$, а четыреугольникъ, образованный этими элементами за параллелограммъ; вслѣдствіе этого, обозначая черезъ A_1 уголъ, образуемый съ осью ξ элементомъ ds_1, че-
dезъ A_2 уголъ, образуемый съ тою же осью элементомъ ds_2 и

черезъ A уголъ, образуемый съ нею элементомъ ds, мы будемъ имѣть:

$$ds\,\mathrm{Cos}A = ds_1\,\mathrm{Cos}\,A_1 + ds_2\,\mathrm{Cos}A_2,$$

$$ds\,\mathrm{Sin}A = ds_1\,\mathrm{Sin}\,A_1 + ds_2\,\mathrm{Sin}A_2,$$

откуда

$$\frac{ds_1\,\mathrm{Cos}\,A_1 + ds_2\,\mathrm{Cos}\,A_2}{\mathrm{Cos}\,A} = \frac{ds_1\,\mathrm{Sin}A_1 + ds_2\,\mathrm{Sin}A_2}{\mathrm{Sin}\,A} = ds. \qquad (30)$$

Замѣтимъ далѣе, что

$$ds_1 = \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}\,du = \sqrt{F}\,du, \text{ гдѣ}$$

$$F = \left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2, \qquad (31)$$

$$\mathrm{Cos}(ds_1, x) = \frac{\frac{dx}{du}du}{\sqrt{F}\,du} = \frac{1}{\sqrt{F}}\cdot\frac{dx}{du},$$

$$\mathrm{Cos}\,(ds_1.y) = \frac{1}{\sqrt{F}}\,\frac{dy}{du},\quad \mathrm{Cos}\,(ds_1, z) = \frac{1}{\sqrt{F}}\cdot\frac{dz}{du};$$

отсюда получимъ, принимая во вниманіе (9) и (2),

$$\mathrm{Cos}A_1 = \mathrm{Cos}(\xi x)\mathrm{Cos}(ds_1 x) + \mathrm{Cos}(\xi y)\mathrm{Cos}(ds_1 y) + \mathrm{Cos}(\xi\, z)\mathrm{Cos}(ds_1, z) =$$

$$= \frac{LN\frac{dx}{du} + MN\frac{dy}{du} - (1 - N^2)\frac{dz}{du}}{\sqrt{F}\,.\sqrt{1-N^2}} = -\frac{\frac{dz}{du}}{\sqrt{F}.\sqrt{1-N^2}} \qquad (32)$$

$$\operatorname{Sin}A_1 = \operatorname{Cos}(\eta x)\operatorname{Cos}(ds_1 x) + \operatorname{Cos}(\eta y)\operatorname{Cos}(ds_1 y) + \operatorname{Cos}(\eta z)\operatorname{Cos}(ds_1 z) =$$

$$= -\frac{M\dfrac{dx}{du} - L\dfrac{dy}{du}}{\sqrt{F}\sqrt{1-N^2}}. \qquad (33)$$

Разсуждая такимъ же образомъ, получимъ

$$ds_2 = \sqrt{\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2}\, dv = \sqrt{H}dv, \text{ гдѣ}$$

$$H = \left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2, \qquad (34)$$

$$\operatorname{Cos}A_2 = -\frac{\dfrac{dz}{dv}}{\sqrt{H}\sqrt{1-N^2}} \text{ и } \operatorname{Sin}A_2 = -\frac{M\dfrac{dx}{dv} - L\dfrac{dy}{dv}}{\sqrt{H}\sqrt{1-N^2}}. \qquad (35)$$

Воспользовавшись этими соотношеніями, получимъ изъ (30)

$$\frac{\dfrac{dz}{du}du + \dfrac{dz}{dv}dv}{\operatorname{Cos}A} =$$

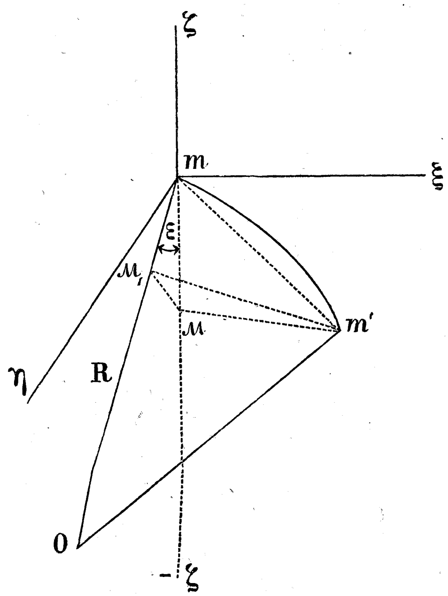
$$= \frac{\left(M\dfrac{dx}{du} - L\dfrac{dy}{du}\right)du + \left(M\dfrac{dx}{dv} - L\dfrac{dy}{dv}\right)dv}{\operatorname{Sin}A}, \qquad (36)$$

откуда

$$\frac{du}{\left(M\dfrac{dx}{dv} - L\dfrac{dy}{dv}\right)\operatorname{Cos}A + \dfrac{dz}{dv}\operatorname{Sin}A} =$$

$$= \frac{dv}{\left(M\dfrac{dx}{du} - L\dfrac{dy}{du}\right)\operatorname{Cos}A + \dfrac{dz}{du}\operatorname{Sin}A}. \qquad (36')$$

Будемъ разсматривать элементъ $ds = mm'$ кривой σ, какъ часть соприкасающагося въ точкѣ m къ этой кривой круга, и пусть E есть уголъ, образуемый главной нормалью къ кривой σ въ точкѣ m съ продолженіемъ нормали ζ къ поверхности S въ той-же точкѣ. Опустимъ изъ точки m' перпендикуляръ $m'\mu$ на продолженіе ξ и затѣмъ изъ точки μ перпендикуляръ $\mu\mu_1$ на главную нормаль къ къ кривой σ. Если черезъ R означимъ радіусъ соприкасающагося круга, то мы будемъ имѣть



$$(mm'^2) = \mu_1 m\,(2\,R - \mu_1 m).$$

Такъ какъ mm' и $\mu_1 m$ безконечно малы, то мы можемъ представить это выраженіе въ видѣ

$$ds^2 = \mu_1 m\; 2\,R = \frac{m\mu}{\mathrm{Cos}\varepsilon} 2R.$$

Такъ какъ $m\mu$ есть координата ξ точки m', то мы будемъ имѣть

$$R = \mathrm{Cos}\varepsilon \frac{ds^2}{2\xi}. \tag{37}$$

Съ другой стороны

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(\frac{dx}{du}du + \frac{dx}{dv}dv\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}du + \frac{dy}{dv}dv\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{dz}{du}du + \frac{dz}{dv}dv\right)^2 =$$

$$= F du^2 + 2G du dv + H dv^2, \tag{38}$$

гдѣ

$$2G=2\left(\frac{dx}{du}\frac{dx}{dv}+\frac{dy}{du}\frac{dy}{dv}+\frac{dz}{du}\frac{dz}{dv}\right). \qquad (39)$$

Означая черезъ Δx, Δy и Δz проекціи хорды mm' на оси x, y и z, получимъ

$$\xi=mm'\operatorname{Cos}(mm'\xi)=mm'[\operatorname{Cos}(mm'x)\operatorname{Cos}(\xi x)+\operatorname{Cos}(m'my)\operatorname{Cos}(\xi y)+$$
$$+\operatorname{Cos}(m'mz)\operatorname{Cos}(\xi z)]=$$

$$=L\Delta x+M\Delta y+N\Delta z=$$

$$=L\left\{\frac{dx}{du}du+\frac{dx}{dv}dv+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2x}{du^2}du^2+2\frac{d^2x}{dudv}dudv+\frac{d^2x}{dv_2}dv^2\right)\right\}+$$

$$+M\left\{\frac{dy}{du}du+\frac{dy}{dv}dv+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{du^2}du^2+2\frac{d^2y}{dudv}dudv+\frac{d^2y}{dv^2}dv^2\right)\right\}+$$

$$+N\left\{\frac{dz}{du}du+\frac{dz}{d\Lambda}dv+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2z}{du^2}du^2+2\frac{d^2z}{dudv}dudv+\frac{d^2z}{dv^2}dv^2\right)\right\}.$$

Принимая во вниманіе 2 и 3, мы можемъ выраженіе для ξ преобразовать въ слѣдующее

$$2\xi=fdu^2+2gdudv+hdv^2, \qquad (40)$$

гдѣ

$$f=L\frac{d^2x}{du^2}+M\frac{d^2y}{du^2}+N\frac{d^2z}{du^2},\quad h=L\frac{d^2x}{dv^2}+M\frac{d^2y}{dv^2}+N\frac{d^2z}{dv^2},$$

$$\text{и}\quad 2g=2\left(L\frac{d^2x}{dudv}+M\frac{d^2y}{dudv}+N\frac{d^2z}{dudv}\right). \qquad (41)$$

Воспользовавшись формулами (37), (38) и (40), мы получимъ для вычисленія радіуса кривизны формулу

$$R=\operatorname{Cos}\varepsilon\frac{Fdu^2+2Gdudv+Hdv^2}{fdu^2+2gdudv+hdv^2}, \qquad (42)$$

а вставивъ сюда вмѣсто du и dv пропорціональныя имъ величины изъ формулы (36), получимъ радіусъ кривизны въ функціи азимута A.

§ 7. Для эллипсоида, котораго уравненіе выражается формулами:

$$x=\rho\sqrt{1+i}\,\mathrm{Cos}u\,\mathrm{Cos}v,\; y=\rho\sqrt{1-i}\,\mathrm{Cos}u\,\mathrm{Sin}v,\; z=\rho\sqrt{1-i^2}\,\mathrm{Sin}u,$$

мы будемъ имѣть, воспользовавшись формулами (17),

$$\frac{du}{\mathrm{Cos}u[1-i\mathrm{Cos}2v]\mathrm{Cos}A}=\frac{dv}{i\mathrm{Sin}u\,\mathrm{Sin}2v\,\mathrm{Cos}A-\Omega\,\mathrm{Sin}A}$$

$$F=\rho^2[1+i\mathrm{Sin}^2u\mathrm{Cos}2v-e^2\mathrm{Cos}^2u],\; G=i\rho^2\mathrm{Sin}2u\mathrm{Sin}2v,$$

$$H=\rho^2\mathrm{Cos}^2u[1-i\mathrm{Cos}2v], \tag{43}$$

$$f=\rho\frac{\sqrt{1+i}\sqrt{1-i}\sqrt{1-e^2}}{\Omega},g=0\;,\;h=\rho\frac{\sqrt{1-i}\sqrt{1+i}\sqrt{1-e^2}}{\Omega}\mathrm{Cos}^2u\,.$$

При помощи этихъ формулъ легко составить выраженіе для радіуса кривизны.

§ 8. Въ случаѣ эллипсоида вращенія $i=0$; и формулы (43) значительно упростятся:

$$\frac{du}{\mathrm{Cos}u\,\mathrm{Cos}A}=\frac{dv}{\sqrt{1-e^2\mathrm{Cos}^2u}.\mathrm{Sin}A}$$

$$F=\rho^2(1-e^2\mathrm{Cos}^2u),\;G=0\;,\;H=\rho^2\mathrm{Cos}^2u, \tag{44}$$

$$f=\rho\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\mathrm{Cos}^2u}}\;,\;g=0\;,\;h=\rho\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\mathrm{Cos}^2u}}\mathrm{Cos}^2u,$$

$$R=\rho\,\mathrm{Cos}\varepsilon\frac{(1-e^2\mathrm{Cos}^2u)^{3/2}}{\sqrt{1-e^2}}.\frac{1}{1-e^2\mathrm{Cos}^2u\mathrm{Sin}^2A}.$$

§ 9. Выраженіе для радіуса кривизны можно получить проще въ томъ случаѣ, когда уравненіе поверхности S' дано въ видѣ

$$F(x,y,z)=0. \tag{45}$$

Пусть n есть нормаль къ поверхности S въ точкѣ m (x, y, z), тогда

$$\mathrm{Cos}(nx)=\frac{1}{\Delta}\frac{dF}{dx},\;\mathrm{Cos}(ny)=\frac{1}{\Delta}\frac{dF}{dy}\;\text{и}\;\mathrm{Cos}(nz)=\frac{1}{\Delta}\frac{dF}{dz}, \tag{46}$$

гдѣ

$$\Delta=\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2}.$$

Положимъ далѣе, что ν есть главная нормаль въ точкч m къ кривой σ, проведенной на поверхности S, а k касательная въ точкѣ m къ кривой σ.

Вообразимъ точку, движущуюся равномѣрно со скоростью v по кривой σ и пусть x, y, z будутъ координаты этой точки въ данный моментъ t, тогда

$$\frac{dx}{dt}=x'=v\,\mathrm{Cos}\,(kx),\ \frac{dy}{dt}=y'=v\,\mathrm{Cos}\,(ky)\text{ и }\frac{dz}{dt}=z'=v\,\mathrm{Cos}\,(kz) \tag{47}$$

и

$$x'\frac{dF}{dx}+y'\frac{dF}{dy}+z'\frac{dF}{dz}=Dv\,\mathrm{Cos}(n,k)=0. \tag{48}$$

Дифференцируя послѣднее равенство относительно t, получимъ:

$$x''\frac{dF}{dx}+y''\frac{dF}{dy}+z''\frac{dF}{dz}+$$

$$+x'\left(\frac{d^2F}{dx^2}x'+\frac{d^2F}{dxdy}y'+\frac{d^2F}{dxdz}z'\right)+y'\left(\frac{d^2F}{dxdy}x'+\frac{d^2F}{dy^2}y'+\frac{d^2F}{dydz}z'\right)+$$

$$+z'\left(\frac{d^2F}{dxdz}x'+\frac{d^2F}{dydz}y'+\frac{d^2F}{dz^2}z'\right)=0. \tag{49}$$

Мы знаемъ изъ механики, что въ случаѣ равномѣрнаго движенія точки по кривой линіи ускореніе этой точки въ моментъ t равно по величинѣ квадрату скорости, дѣленному на радіусъ кривизны траекторіи въ той точкѣ кривой, гдѣ находится движущаяся точка въ моментѣ t, а направлено это ускореніе по главной нормали къ центру кривизны. Означая черезъ R радіусъ кривизны, мы получимъ

$$x''=\frac{v^2}{R}\mathrm{Cos}(\nu x)\ ,\ y''=\frac{v^2}{R}\mathrm{Cos}(\nu y)\text{ и }z''=\frac{v^2}{R}\mathrm{Cos}(\nu z) \tag{50}$$

и слѣдовательно

$$x''\frac{dF}{dx}+y''\frac{dF}{dy}+z''\frac{dF}{dz}=-\Delta\frac{v^2}{R}\mathrm{Cos}(n\nu) \qquad (51)$$

Принимая во вниманіе равенства (47) и (51) и принявъ обозначенія

$$\mathrm{Cos}(kx)=l\,,\ \mathrm{Cos}(ky)=m\,,\ \mathrm{Cos}(kz)=n \text{ и } \mathrm{Cos}(n\nu)=\mathrm{Cos}\varepsilon, \qquad (52)$$

мы можемъ уравненіе (48) написать въ слѣдующемъ видѣ

$$R=\mathrm{Cos}\,\varepsilon\frac{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}{\frac{d^2F}{dx^2}l^2+\frac{d^2F}{dy^2}m^2+\frac{d^2F}{dz^2}n^2+2\frac{d^2F}{dydz}mn+2\frac{d^2F}{dzdx}nl+2\frac{d^2F}{dxdy}lm}. \qquad (53)$$

§ 10. Примѣняя эту формулу къ эллипсоиду, уравненіе котораго

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,,$$

получимъ

$$R=\mathrm{Cos}\,\varepsilon\frac{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z}{c^4}}}{\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}}=$$

$$=\frac{\mathrm{Cos}\varepsilon\sqrt{\frac{\mathrm{Cos}^2u\mathrm{Cos}^2v}{a^2}+\frac{\mathrm{Cos}^2u\mathrm{Sin}^2v}{b^2}+\frac{\mathrm{Sin}^2u}{c^2}}}{\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}}. \qquad (54)$$

Если черезъ r обозначимъ центральный радіусъ векторъ эллипсоида, параллельный касательной k, то

$$r^2\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right)=1$$

и наше выраженіе для радіуса кривизны эллипсоида приметъ слѣдующій видъ

$$R = r^2 \operatorname{Cos} \varepsilon \sqrt{\frac{\operatorname{Cos}^2 u \operatorname{Cos}^2 v}{a^2} + \frac{\operatorname{Cos}^2 u \operatorname{Sin} v}{b^2} + \frac{\operatorname{Sin}^2 u}{c^2}}. \qquad (55)$$

Въ случаѣ нормальнаго сѣченія $\varepsilon = 0$.

Найдемъ максимумъ радіуса вектора r, параллельнаго касательной плоскости къ эллипсоиду въ точкѣ m. Для этого имѣемъ уравненія

$$\begin{gathered} r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ Lx + My + Nz = 0, \end{gathered} \qquad (56)$$

гдѣ x, y, z суть координаты конечной точки нашего радіуса вектора. Изъ этихъ уравненій по извѣстнымъ правиламъ имѣемъ

$$\left(\lambda x + \frac{x}{a^2} + \mu L\right) dx + \left(\lambda y + \frac{y}{b^2} + \mu M\right) dy + \left(\lambda z + \frac{z}{c^2} + \mu N\right) dz = 0,$$

гдѣ λ и μ неопредѣленные множители.

Отсюда получимъ

$$\begin{gathered} \lambda x + \frac{x}{a^2} + \mu L = 0\,, \\ \lambda y + \frac{y}{b^2} + \mu M = 0\,, \\ \lambda z + \frac{z}{c^2} + \mu N = 0\,. \end{gathered} \qquad (57)$$

Помножая первое изъ уравненій, (57) на x, второе на y и третье на z и складывая, получимъ при помощи (56)

$$\lambda r^2 + 1 = 0 \qquad (58)$$

Исключая изъ уравненій (57) μ, получимъ

$$\frac{x}{\left(\frac{L}{\lambda+\frac{1}{a^2}}\right)}=\frac{y}{\left(\frac{M}{\lambda+\frac{1}{b^2}}\right)}=\frac{z}{\left(\frac{N}{\lambda+\frac{1}{c^2}}\right)}. \tag{59}$$

Подставляя въ послѣднее изъ уравненій, (56), вмѣсто x, y и z пропорціональныя имъ величины, получимъ

$$\frac{L^2}{\lambda+\frac{1}{a^2}}+\frac{M^2}{\lambda+\frac{1}{b^2}}+\frac{N^2}{\lambda+\frac{1}{c^2}}=0. \tag{60}$$

Подставляя въ полученное уравненіе вмѣсто λ его значеніе изъ (58) и принимая во вниманіе соотношеніе

$$L^2+M^2+N^2=1,$$

получимъ послѣ простыхъ преобразованій

$$\frac{1}{r^4}-\frac{1}{r^2}\left(\frac{1-L^2}{a^2}+\frac{1-M^2}{b^2}+\frac{1-N^2}{c^2}\right)+\frac{a^2L^2+b^2M^2+c^2N^2}{a^2b^2c^2}=0. \tag{61}$$

Означая черезъ r_1^2, и r_2^2 два корня этого уравненія, получимъ для наибольшаго и наименьшаго радіусовъ кривизны нормальныхъ сѣченій въ точкѣ m выраженія,

$$\left.\begin{aligned} R_1&=r_1^2\sqrt{\frac{\operatorname{Cos}^2u\operatorname{Cos}^2v}{a^2}+\frac{\operatorname{Cos}^2u\operatorname{Sin}^2v}{b^2}+\frac{\operatorname{Sin}^2u}{c^2}},\\ R_2&=r_2^2\sqrt{\frac{\operatorname{Cos}^2u\operatorname{Cos}^2v}{a^2}+\frac{\operatorname{Cos}^2u\operatorname{Sin}^2v}{b^2}+\frac{\operatorname{Sin}^2u}{c^2}},\end{aligned}\right\} \tag{62}$$

а для радіуса средней кривизны K, выраженіе

$$\frac{1}{K}=\sqrt{R_1R_2}=r_1r_2\sqrt{\frac{\operatorname{Cos}^2u\operatorname{Cos}^2v}{a^2}+\frac{\operatorname{Cos}^2u\operatorname{Sin}^2v}{b^2}+\frac{\operatorname{Sin}^2u}{c^2}}. \tag{63}$$

Изъ уравненія (61) заключаемъ, что

$$\frac{1}{r_1^{\,2} r_2^{\,2}} = \frac{a^2L^2 + b^2M^2 + c^2N^2}{a^2b^2c^2}; \tag{64}$$

съ другой стороны вслѣдствіе формулъ (4) (15) и (16)

$$\frac{a^2L^2 + b^2M^2 + c^2N^2}{a^2b^2c^2} = \frac{a^2b^2c^2}{\dfrac{\mathrm{Cos}^2\,u\ \mathrm{Cos}\,v}{a^2} + \dfrac{\mathrm{Cos}^2\,u\ \mathrm{Sin}^2\,v}{b^2} + \dfrac{\mathrm{Sin}^2\,u}{c^2}}, \tag{65}$$

такъ что

$$\frac{1}{K} = abc\left(\frac{\mathrm{Cos}^2\,u\ \mathrm{Cos}^2\,v}{a^2} + \frac{\mathrm{Cos}^2\,u\ \mathrm{Sin}^2\,v}{b^2} + \frac{\mathrm{Sin}^2\,u}{c^2}\right). \tag{66}$$

Подставляя въ уравненія (54) и (66) вмѣсто a, b и c соотвѣтственно

$$\rho\sqrt{1+i}\,,\quad \rho\sqrt{1-i}\quad \text{и}\quad \rho\sqrt{1-e^2},$$

получимъ:

$$R = \rho\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon\frac{\sqrt{1 - e^2\mathrm{Cos}^2u - i[(i - e^2)\mathrm{Cos}\,2v\,\mathrm{Cos}^2u + i\mathrm{Sin}^2u]}}{1 - e^2(1 - n^2) - i[(1 - e^2)(l^2 - m^2) + in^2]}, \tag{67}$$

$$\frac{1}{K} = \frac{\rho}{\sqrt{1+i}\sqrt{1-i}\sqrt{1-e^2}}\left\{1 - e^2\mathrm{Cos}^2u - i[(1 - e^2)\mathrm{Cos}\,2v\,\mathrm{Cos}^2u + \right.$$

$$\left. + i\,\mathrm{Sin}^2u]\right\}. \tag{68}$$

Въ случаѣ эллипсоида вращенія получимъ

$$R = \rho\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon\frac{\sqrt{1 - e^2\mathrm{Cos}^2u}}{1 - e^2(1 - n^2)},\quad \frac{1}{K} = \frac{\rho(1 - e^2\mathrm{Cos}^2u)}{\sqrt{1 - e^2}}. \tag{69}$$

Для того, чтобы выразить l, m и n посредствомъ u, v и азимута касательной k, замѣнимъ въ формулахъ

$$l = \mathrm{Cos}(kx) = \mathrm{Cos}(k\xi)\mathrm{Cos}(x\xi) + \mathrm{Cos}(k\eta)\mathrm{Cos}(x\eta) + \mathrm{Cos}(k\zeta)\mathrm{Cos}(x\zeta),$$

$$m = \mathrm{Cos}(ky) = \mathrm{Cos}(k\xi)\mathrm{Cos}(y\xi) + \mathrm{Cos}(k\eta)\mathrm{Cos}(y\eta) + \mathrm{Cos}(k\zeta)\mathrm{Cos}(y\zeta), \quad (70)$$

$$n = \mathrm{Cos}(kz) = \mathrm{Cos}(k\xi)\mathrm{Cos}(z\xi) + \mathrm{Cos}(k\eta)\mathrm{Cos}(z\eta) + \mathrm{Cos}(k\zeta)\mathrm{Cos}(z\zeta)$$

$\mathrm{Cos}(k\xi)$, $\mathrm{Cos}(k\eta)$ и $\mathrm{Cos}(k\zeta)$ соотвѣтственно черезъ $\mathrm{Cos}\,A$, $\mathrm{Sin}\,A$ и нуль, а остальные косинусы ихъ значеніями изъ формулъ (18), мы получимъ тогда:

$$l = \frac{(1-i)\sqrt{1+i}}{\Omega\sqrt{1-i\mathrm{Cos}2v}}\mathrm{Sin}u\mathrm{Cos}v\mathrm{Cos}A -$$

$$- \frac{\sqrt{1+i}}{\sqrt{1-i\mathrm{Cos}2v}}\mathrm{Sin}v\mathrm{Sin}A\,,$$

$$m = \frac{(1+i)\sqrt{1-i}}{\Omega\sqrt{1-i\mathrm{Cos}2v}}\mathrm{Sin}\mathrm{Sin}v\mathrm{Cos}A + \quad (71)$$

$$\frac{\sqrt{1-i}}{\sqrt{1-i\mathrm{Cos}2v}}\mathrm{Cos}v\mathrm{Sin}A\,,$$

$$n = -\frac{\sqrt{1-e(1-i\mathrm{Cos}^2 2v)}}{\Omega\sqrt{1-i\mathrm{Cos}2v}}\mathrm{Cos}u\mathrm{Cos}A\,.$$

§ 11. Систему осей ξ, η и ζ, послужившую намъ для нахожденія разстоянія, азимута и зенитнаго разстоянія точки m' относительно точки m, а также и радіуса кривизны кривой σ, проведенной на поверхности S, мы будемъ называть астрономической системою осей въ точкѣ m, при чемъ ось ζ будемъ называть вертнкальной линіей, плоскость $\xi m\eta$ горизонтомъ, плоскость $\zeta m\xi$ меридіаномъ, а плоскость $\zeta m\eta$ первымъ вертикаломъ. Уголъ (ζz) будемъ называть дополненіемъ до широты φ, а уголъ (ηy) долготою λ.

Широта и долгота точки m опредѣляется по формуламъ

$$\mathrm{Sin}\varphi = N, \quad \mathrm{Cos}\lambda = \frac{L}{\sqrt{1-N^2}} = \frac{L}{\mathrm{Cos}\varphi}, \quad \mathrm{Sin}\lambda = \frac{M}{\mathrm{Cos}\varphi}, \quad (72)$$

откуда

$$L = \mathrm{Cos}\varphi\mathrm{Cos}\lambda, \quad M = \mathrm{Cos}\varphi\mathrm{Sin}\lambda \text{ и } N = \mathrm{Sin}\varphi\,. \quad (73)$$

Для случая эллипсоида получимъ, пользуясь формулами (17)

$$\mathrm{Cos}\varphi\mathrm{Cos}\lambda=\frac{\sqrt{1-i}\ \sqrt{1-e^2}}{\Omega}\mathrm{Cos}u\mathrm{Cos}v,$$

$$\mathrm{Cos}\varphi\mathrm{Sin}\lambda=\frac{\sqrt{1+i}\ \sqrt{1-e^2}}{\Omega}\mathrm{Cos}u\mathrm{Cos}v, \qquad (74)$$

$$\mathrm{Sin}\varphi=\frac{\sqrt{1+i}\ \sqrt{1-i}}{\Omega}\mathrm{Sin}u.$$

Въ случаѣ эллипсоида вращенія, $i=0$, и мы имѣемъ

$$\mathrm{Cos}\varphi\mathrm{Cos}\lambda=\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\mathrm{Cos}^2u}}\mathrm{Cos}u\mathrm{Cos}v,$$

$$\mathrm{Cos}\varphi\mathrm{Sin}\lambda=\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\mathrm{Cos}^2u}}\mathrm{Cos}u\mathrm{Sin}v,$$

$$\mathrm{Sin}\varphi=\frac{1}{\sqrt{1-e^2\mathrm{Cos}^2u}}\mathrm{Sin}u.$$

Для вычисленія u и v по φ и λ имѣемъ въ случаѣ эллипсоида формулы

$$\mathrm{Tg}u=\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1+i\mathrm{Cos}2\lambda}}\mathrm{Tg}\varphi$$

и (76)

$$\mathrm{Tg}v=\sqrt{\frac{1-i}{1+i}}\mathrm{Tg}\lambda,$$

которыя въ случаѣ эллипсоида вращенія дадутъ

$$\mathrm{Tg}u=\sqrt{1-e^2}\mathrm{Tg}\varphi$$

и (77)

$$v=\lambda.$$

Выразимъ въ функціи φ и λ важнѣйшія изъ полученныхъ нами величинъ.

Замѣтимъ во-первыхъ, что $\mathrm{Cos}\varphi$, $\mathrm{Cos}\lambda$, $\mathrm{Cos}\chi$ $\mathrm{Sin}\lambda$ и $\mathrm{Sin}\varphi$ представляютъ собою косинусы угловъ, образуемыхъ нормалью ζ къ эллипсоиду, уравненіе котораго

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

такъ что

$$\frac{\mathrm{Cos}\varphi\mathrm{Cos}\lambda}{\frac{x}{a^2}}=\frac{\mathrm{Cos}\varphi\mathrm{Sin}\lambda}{\frac{y^2}{b^2}}=\frac{\mathrm{Sin}\varphi}{\frac{z^2}{c^2}},$$

или

$$\frac{a\mathrm{Cos}\varphi\mathrm{Cos}\lambda}{\frac{x}{a}}=\frac{b\,\mathrm{Cos}\varphi\mathrm{Sin}\lambda}{\frac{y}{b}}=\frac{c\mathrm{Sin}\varphi}{\frac{z}{c}}=$$

$$=\sqrt{a^2\mathrm{Cos}^2\varphi\mathrm{Cos}^2\lambda+b^2\mathrm{Cos}^2\varphi\mathrm{Sin}^2\lambda+c^2\mathrm{Sin}^2\varphi},$$

вслѣдствіе чего

$$\frac{x}{a^2}=\frac{\mathrm{Cos}\varphi\mathrm{Cos}\lambda}{\rho\Delta},\quad \frac{y}{b^2}=\frac{\mathrm{Cos}\varphi\mathrm{Sin}\lambda}{\rho\Delta}\quad \text{и}\quad \frac{z}{c^2}=\frac{\mathrm{Sin}\varphi}{\rho\Delta}, \tag{78}$$

гдѣ

$$\rho\Delta=\sqrt{a^2\mathrm{Cos}^2\varphi\mathrm{Cos}^2\lambda+b^2\mathrm{Cos}^2\varphi\mathrm{Sin}^2\lambda+c^2\mathrm{Sin}^2\varphi}.$$

Принимая во вниманіе формулы (14) и (17) bis, имѣемъ

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\mathrm{Cos}^2u\mathrm{Cos}^2v}{a^2}+\frac{\mathrm{Cos}^2u\mathrm{Sin}^2v}{b^2}+\frac{\mathrm{Sin}^2u}{c^2}}=\frac{\rho^2\Omega}{abc}. \tag{79}$$

Съ другой стороны изъ формулъ (78) имѣемъ

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}=\frac{1}{\rho\Delta} \tag{80}$$

Сравнивая формулы (78) и (80), получимъ

$$\rho^3\Delta\Omega=abc.$$

Подставляя сюда вмѣсто a, b и c $\rho\sqrt{1+i}$, $\rho\sqrt{1-i}$ и $\rho\sqrt{1-e^2}$ будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned}\Delta\Omega&=\sqrt{1+i}\,\sqrt{1-i}\,\sqrt{1-e^2},\\ \text{гдѣ}\qquad \Omega&=\sqrt{1-e^2\mathrm{Cos}^2u-i[(1-e^2)\mathrm{Cos}^2u\mathrm{Cos}2v+i\mathrm{Sin}^2u]}\\ \Delta&=\sqrt{1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi+i\mathrm{Cos}^2\varphi\mathrm{Cos}2\lambda}\,.\end{aligned}\right\}\quad(81)$$

Далѣе получимъ изъ формулъ (54), (79) и (81) выраженіе для радіуса кривизны

$$\begin{aligned}R&=\frac{abc\rho^2\Omega}{b^2c^2l^2+c^2a^2m^2+a^2b^2n^2}=\\ &=\frac{\rho\sqrt{1+i}\,\sqrt{1-i}\,\sqrt{1-e^2}\Omega}{1-e^2(1-n^2)-i[(1-e^2)(l^2-m^2)+in^2]}=\\ &=\frac{\rho(1+i)(1-i)(1-e^2)}{\Delta\{1-e^2(1-n^2)-i[(1-e^2)(l^2-m^2)+in^2]}\,.\end{aligned}\qquad(82)$$

Такимъ же образомъ получимъ изъ (68) и (81)

$$\begin{aligned}\frac{1}{K}&=\frac{\rho\Omega^2}{\sqrt{1+i}\,\sqrt{1-i}\,\sqrt{1-e^2}}=\\ &=\frac{\rho\sqrt{1+i}\,\sqrt{1-i}\,\sqrt{1-e^2}}{\Delta^2}\,.\end{aligned}\qquad(83)$$

Для того, чтобы получить l, m и n въ функціи φ и λ замѣнимъ въ формулахъ (70) $\mathrm{Cos}(\varkappa\xi)$, $\mathrm{Cos}(\varkappa\eta)$ и $\mathrm{Cos}(\varkappa\zeta)$ соотвѣтственно черезъ CosA, SinA и 0, остальные косинусы выразимъ при помощи формулъ (18) черезъ L, M и N, а эти послѣднія величины черезъ φ и λ; мы получимъ тогда

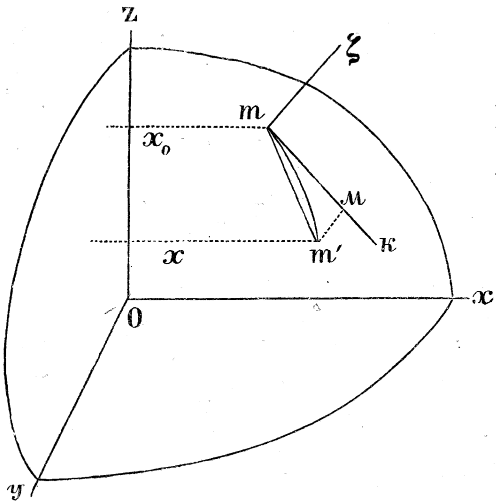
$$\begin{aligned}l&=\mathrm{Cos}A\mathrm{Sin}\varphi\mathrm{Cos}\lambda-\mathrm{Sin}A\mathrm{Sin}\lambda\,,\\ m&=\mathrm{Cos}A\mathrm{Sin}\varphi\mathrm{Sin}\lambda+\mathrm{Sin}A\mathrm{Cos}\lambda\,,\\ n&=-\mathrm{Cos}A\mathrm{Cos}\varphi,\\ 1-n^2&=1-\mathrm{Cos}^2A\mathrm{Cos}^2\varphi,\\ l^2-m^2&=\mathrm{Cos}^2A\mathrm{Sin}^2\varphi\mathrm{Cos}2\lambda-\mathrm{Sin}2A\mathrm{Sin}\varphi\mathrm{Sin}2\lambda+\mathrm{Sin}^2A\mathrm{Cos}2\lambda.\end{aligned}\qquad(84)$$

§ 12. Пусть σ есть нормальное сѣченіе эллипсоида, уравненіе котораго

$$\frac{x^2}{\rho^2(1+i)}+\frac{y^2}{\rho^2(1-i)}+\frac{z^2}{\rho^2(1-{}^2\varphi)}=1\,, \tag{85}$$

проведенное черезъ точку m этого эллипсоида. Пусть ζ есть нормаль къ эллипсоиду въ точкѣ m, а k касательная линія къ σ въ точкѣ m; тогда ζ и k можно разсматривать какъ координаты какой либо точки m′ этого нормальнаго сѣченія, отстоящей отъ точки m по дугѣ этого сѣченія на разстояніе s, а по хордѣ на разстояніе D.

Если x, y, z суть координаты точки m, то проектируя хорду mm′=D и ломаную линію mμ m′ на оси x, y и z, получимъ, замѣчая что m′μ=ζ, а mμ=k,



$$\begin{aligned} x-x_0 &= -L\zeta+lk,\\ y-y_0 &= -M\zeta+mk,\\ z-z_0 &= -N\zeta+nk. \end{aligned} \tag{86}$$

Возвышая въ квадратъ обѣ части каждаго изъ послѣднихъ уравненій, помножая ихъ соотвѣтственно на

$$\frac{1}{\rho^2(1+i)},\quad \frac{1}{\rho^2(1-i)} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\rho^2(1-e^2)},$$

и складывая, получаемъ

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{\rho^2(1+i)}+\frac{y^2}{\rho^2(1-i)}+\frac{z^2}{\rho^2(1-e^2)}+\frac{x_0{}^2}{\rho^2(1+i)}+\frac{y_0{}^2}{\rho^2(1+i)}+\frac{z_0{}^2}{\rho^2(1-e^2)}-\\ &-2\left(\frac{xx_0}{\rho^2(1+i)}+\frac{yy_0}{\rho^2(1-i)}+\frac{zz_0}{\rho^2(1-e^2)}\right)=\\ &=\left(\frac{L^2}{\rho^2(1+i)}+\frac{M^2}{\rho^2(1-i)}+\frac{N^2}{\rho^2(1-e^2)}\right)\zeta^2-\\ &-2\left(\frac{Ll}{\rho^2(1+i)}+\frac{Mm}{\rho^2(1-i)}+\frac{Nn}{\rho^2(1-e^2)}\right)\zeta k+\\ &+\left(\frac{l^2}{\rho^2(1+i)}+\frac{m^2}{\rho^2(1-i)}+\frac{n^2}{\rho^2(1-e^2)}\right)k^2. \end{aligned} \tag{87}$$

Замѣтивъ что x, y, z и x_0, y_0, z_0 удовлетворяютъ уравненію эллипсоида (85), а

$$\frac{\frac{x_0}{\rho^2(1+i)}x+\frac{y_0}{\rho^2(1-i)}y+\frac{z_0}{\rho^2(1-e^2)}z-1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{\rho^4(1+i)^2}+\frac{y_0^2}{\rho^4(1-i)^2}+\frac{z_0^2}{\rho^4(1-e^2)^2}}}=-\zeta,$$

мы можемъ уравненіе (87) представить подъ видомъ

$$Ak^2-2Bk\zeta+C\zeta^2-2P\zeta=0, \tag{88}$$

гдѣ значеніе коэффиціента P выражается формулой

$$P=\sqrt{\frac{x_0^2}{\rho^4(1+i)^2}+\frac{y_0^2}{\rho^4(1-i)^2}+\frac{z_0^2}{\rho^4(1-e^2)^2}}$$

или, вслѣдствіе того, что по формуламъ (14) и (17)

$$\left.\begin{aligned}x_0&=\rho\sqrt{1+i}\,\mathrm{Cos}\,u\,\mathrm{Cos}\,v=\rho\frac{\Omega\sqrt{1+i}}{\sqrt{1-i}\sqrt{1-e^2}}L,\\ y_0&=\rho\sqrt{1-i}\,\mathrm{Cos}\,u\,\mathrm{Sin}\,v=\rho\frac{\Omega\sqrt{1-i}}{\sqrt{1+i}\sqrt{1-e^2}}M,\\ z_0&=\rho\sqrt{1-e^2}\,\mathrm{Sin}\,u=\rho\frac{\Omega\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1+i}\sqrt{1-i}}N,\end{aligned}\right\} \tag{89}$$

$$\begin{aligned}P&=\sqrt{\frac{\mathrm{Cos}^2u\,\mathrm{Cos}^2v}{\rho^2(1+i)}+\frac{\mathrm{Cos}^2u\,\mathrm{Sin}^2v}{\rho^2(1-i)}+\frac{\mathrm{Sin}^2u}{\rho^2(1-e^2)}}=\\ &=\frac{\Omega}{\rho\sqrt{1+i}\sqrt{1-i}\sqrt{1-e^2}}.\end{aligned} \tag{90}$$

Значенія коэффиціентовъ A, B и C въ формулѣ (81) будутъ:

$$\begin{aligned}A&=\frac{l^2}{\rho^2(1+i)}+\frac{m^2}{\rho^2(1-i)}+\frac{h^2}{\rho^2(1-e^2)}=\\ &=\frac{1-e^2(1-n^2)-i[(1-e^2)(l^2-m^2)+in^2]}{\rho^2(1+i)(1-i)(1-e^2)},\\ B&=\frac{lL}{\rho^2(1+i)}+\frac{mM}{\rho^2(1-i)}+\frac{nN}{\rho^2(1-e^2)}=\\ &=\frac{e^2Nn-i[(1-e^2)(Ll-Mm)-iNn]}{\rho^2(1+i)(1-i)(1-e^2)}\end{aligned} \tag{91}$$

$$C=\frac{L^2}{\rho^2(1+i)}+\frac{M^2}{\rho^2(1-i)}+\frac{N^2}{\rho^2(1-e^2)}=$$

$$=\frac{1-e^2(1-N^2)-i[(1-e^2)(L^2-M^2)+iN^2]}{\rho^2(1+i)(1-i)(1-e^2)}.$$

Уравненіе (88) можно привести къ виду:

$$(1+h^2)k^2-2hfk\zeta+(1+f^2)\zeta^2+2p\zeta=0; \tag{92}$$

для этого мы должны имѣть

$$\frac{1+h^2}{A}=\frac{hf}{B}=\frac{1+f^2}{C}=\frac{p}{P},$$

или

$$h^2=\frac{A}{P}p-1,\quad hf=\frac{B}{P}p\quad \text{и}\quad f^2=\frac{C}{P}p-1.$$

Подставляя значенія h^2 и f^2 въ уравненіе

$$h^2f^2=\frac{B^2}{P^2}p^2,$$

получимъ для p уравненіе

$$\frac{AC-B^2}{P^2}p^2-\frac{A+C}{P}p+1=0.$$

Изъ формулъ (91) мы видимъ, что

$$AC-B^2=\frac{(mN-Mm)^2}{\rho^4(1-i)(1-e^2)}+\frac{(nL-Nl)^2}{\rho^4(1+i)(1-e^2)}+\frac{(lM-Lm)^2}{\rho^4(1+i)(1-i)} \tag{93}$$

есть величина положительная, и мы получимъ

$$\begin{aligned} p&=P\frac{A+C+\sqrt{(A+C)^2+4B^2}}{2(AC-B^2)},\\ h^2&=A\frac{A-C+2B^2+\sqrt{(A+C)^2+4B^2}}{2(AC-B^2)},\\ f^2&=C\frac{C-A+2B^2+\sqrt{(C-A)^2+4B^2}}{2(AC-B^2)}. \end{aligned} \tag{94}$$

Изъ уравненія (85) получимъ

$$1+h^2-hfk\frac{2\zeta}{k^2}+\frac{(1+f^2)}{2}\zeta\frac{2\zeta}{k^2}=p\frac{2\zeta}{k^2}.$$

Замѣтивъ, что для $\zeta=0$ и $k=0$ выраженіе $\frac{2\zeta}{k^2}$ стремится къ $\frac{1}{R}$, гдѣ R радіусъ кривизны кривой σ въ точкѣ m, мы получимъ

$$\frac{1}{R}=\frac{1+h^2}{p}=\frac{A}{P}=\frac{\frac{l^2}{\rho^2(1+i)}+\frac{m^2}{\rho^2(1-i)}+\frac{n^2}{\rho^2(1-e^2)}}{\sqrt{\frac{Cos^2uCos^2v}{\rho^2(1+i)}+\frac{Cos^2uSin^2v}{\rho^2(1-i)}+\frac{Sin^2u}{\rho^2(1-e^2)}}},$$

что вполнѣ согласно съ формулой (54).

Воспользовавшись послѣднимъ соотношеніемъ и полагая

$$k=rCos\theta,\ \zeta=rSin\theta \text{ и } \frac{r}{R}=\eta, \tag{95}$$

получимъ изъ (92)

$$\{1+(hCos\theta-fSin\theta)^2\}\eta=2(1+h^2)Sin\theta. \tag{96}$$

Послѣднее уравненіе даетъ намъ возможность получить θ въ функціи отъ η съ желаемымъ приближеніемъ.

Ограничимся четвертыми степенями η и положимъ

$$\theta=\alpha\eta+\beta\eta^2+\gamma\eta^3+\delta\eta^4;$$

тогда мы будемъ имѣть съ тѣмъ-же приближеніемъ:

$$\theta^2=\alpha^2\eta^2+2\alpha\beta\eta^3+(2\alpha\gamma+\beta^2)\eta^4,$$
$$\theta^3=\alpha^3\eta^3+(\alpha^2\beta+\beta^2\alpha)\eta^4,$$
$$\theta^4=\alpha^4\eta^4,$$
$$Cos\theta=1-\frac{1}{2}\alpha^2\eta^2-\alpha\beta\eta^3-(\alpha\gamma+\frac{1}{2}\beta^2-\frac{1}{24}\alpha^4)\eta^4,$$
$$Sin\theta=\alpha\eta+\beta\eta^2+(\gamma-\frac{1}{6}\alpha^3)\eta^3+(\delta-\frac{1}{6}\alpha^2\beta-\frac{1}{6}\beta^2\alpha)\eta^4,$$

$$h\mathrm{Cos}\theta-f\mathrm{Sin}\theta=h-f\alpha\eta-\left(\frac{1}{2}h\alpha^2+f\beta\right)\eta^2-\left[h\alpha\beta+f\left(\gamma-\frac{1}{6}\alpha^3\right)\right]\eta^3$$

$$\eta(h\mathrm{Cos}\theta-f\mathrm{Sin}\theta)^2=h^2\eta-2hf\alpha\eta^2-(h^2\alpha^2+2fh\beta-f^2\alpha^2)\eta^3-$$
$$-\left[2h^2\alpha\beta+2fh\left(\gamma-\frac{4}{6}\alpha^3\right)-2f^2\alpha\beta\right]\eta^4,$$

$$\frac{\eta+\eta(h\mathrm{Cos}\theta-f\mathrm{Sin}\theta)^2}{2(1+h^2)}=\frac{1}{2}\eta-F\alpha\eta^2-\frac{1}{2}(-H\alpha^2+2F\beta)\eta^3-$$
$$-\left[-H\alpha\beta+F\left(\gamma-\frac{4}{6}\alpha^3\right)\right]\eta^4,$$

гдѣ
$$F=\frac{hf}{1+h^2}\quad\text{и}\quad H=\frac{f^2-h^2}{1+h^2}. \tag{97}$$

Сравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ η въ выраженіяхъ

$$\frac{\eta+\eta(h\mathrm{Cos}\theta-f\mathrm{Sin}\theta)^2}{2(1+h^2)}\quad\text{и}\quad \mathrm{Sin}\theta;$$

получимъ послѣдовательно:

$$\alpha=\frac{1}{2},$$

$$\beta=-F\alpha=-\frac{1}{2}F,$$

$$\gamma=\frac{1}{6}\alpha^3-\frac{1}{2}(-H\alpha^2+2F\beta)=\frac{1}{48}+\frac{1}{8}H+\frac{1}{2}F^2,$$

$$\delta=\frac{1}{6}\alpha^2\beta+\frac{1}{6}\beta^2\alpha-\left[-H\alpha\beta+F\left(\gamma-\frac{4}{6}\alpha^3\right)\right]=-\frac{3}{8}HF-\frac{1}{2}F^3,$$

и наконецъ:

$$\theta=\frac{1}{2}\eta-\frac{1}{2}F\eta^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{4}H-F^2\right)\eta^3-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}HF+F^3\right)\eta^4, \tag{98}$$

гдѣ $\eta=\dfrac{r}{R}$.

Послѣднее уравненіе представляетъ собою уравненіе кривой σ въ полярныхъ координатахъ r и θ, а потому, замѣтивъ что

$$d\sigma=\sqrt{1+r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}\,dr=\left\{1+\frac{1}{2}r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2-\frac{1}{8}r^4\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^4+\ldots\right\}dr$$

гдѣ

$$\frac{d\theta}{dr}=\frac{1}{R}\frac{d\theta}{d\eta}=\frac{1}{R}\left\{\frac{1}{2}-F\eta+\left(\frac{3}{48}+\frac{3}{8}H+\frac{3}{2}F^2\right)\eta^2-\left(\frac{6}{4}HF+2F^3\right)\eta^3\right\},$$

$$\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2=\frac{1}{R^2}\left\{\frac{1}{4}-F\eta+\left(\frac{1}{16}+\frac{3}{8}H+\frac{5}{2}F^2\right)\eta^2-\left(\frac{1}{8}F+\frac{9}{4}FH+5F^3\right)\eta^3\right\},$$

$$\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^4=\frac{1}{R^4}\left\{\frac{1}{16}-\frac{1}{2}F\eta+\ldots\ldots\right\},$$

получимъ

$$d\sigma=\left\{1+\frac{1}{8}\frac{r^2}{R^2}-\frac{1}{2}F\frac{r^3}{R^3}+\left(\frac{3}{128}+\frac{3}{16}H+\frac{5}{4}F^2\right)\frac{r^4}{R^4}-\left(\frac{3}{8}FH+\frac{5}{2}F^3\right)\frac{r^5}{R^5}+\ldots\ldots\right\}dr$$

такъ что дуга s, соотвѣтствующая $r=d$, будетъ выражена формулою:

$$s=\int_0^D d\sigma=D+\frac{1}{24}\frac{D^3}{R^2}-\frac{1}{8}F\frac{D^4}{R^3}+\left(\frac{3}{640}+\frac{3}{80}H+\frac{1}{4}F^2\right)\frac{D^5}{R^4}-\left(\frac{3}{16}FH+\frac{5}{12}F^3\right)\frac{D^6}{R^5}+\ldots\ldots \tag{99}$$

Остановимся на разсмотрѣніи выраженій H и F. Для этого имѣемъ изъ равенства

$$\frac{A}{1+h^2}=\frac{B}{hf}=\frac{C}{1+f^2},$$

что

$$F=\frac{hf}{1+h^2}=\frac{B}{A} \text{ и } H=\frac{f^2-h^2}{1+h^2}=\frac{C-A}{A}$$

Изъ формулъ (91) слѣдуетъ далѣе, что

$$F=\frac{e^2Nn-i[(1-e^2)(Ll-Mm)+iNn]}{1-e^2(1-n^2)-i[(1-e^2)(l^2-m^2)+in^2]}, \qquad (100)$$

$$H=\frac{e^2(N^2-n^2)-i\{(1-e^2)[(L^2-M^2)-(l^2-m^2)]+i(N^2-n^2)\}}{1-e^2(1-n^2)-i[(1-e^2)(l^2-m^2)+in^2]},$$

откуда мы видимъ, что F и H суть величины порядка e^2 и i.

Такъ какъ при

$$\begin{aligned} \rho&=6378147 \text{ метровъ},\\ e&=0.0825322 \\ \text{и}\quad i&=0.00007259162, \end{aligned} \qquad (101)$$

члены порядка e^2D^5, а тѣмъ болѣе члены порядка iD^5, e^4D^4 и i^2D^4 ничтожны даже для $D=200$ километрамъ, то можно эти члены въ формулѣ (99) отбросить; мы получимъ тогда

$$s=D+\frac{D^3}{24R^2}-\frac{1}{8}F\frac{D^4}{R^3}+\frac{3}{640}\frac{D^5}{R^4}. \qquad (102)$$

Для того, чтобы выразить F въ функціяхъ φ, λ и A, воспользуемся формулами (73), (83) и (84); мы получимъ, пренебрегая членами порядка ie^2, и i^2

$$\begin{aligned} F=&-e^2\mathrm{Cos}A\mathrm{Sin}\varphi\mathrm{Cos}\varphi-i(\mathrm{Cos}A\mathrm{Sin}\varphi\mathrm{Cos}\varphi\mathrm{Cos}2\lambda-\\ &-\mathrm{Sin}A\mathrm{Cos}\varphi\mathrm{Sin}2\lambda). \end{aligned} \qquad (103)$$

Съ такимъ же приближеніемъ получимъ изъ (82), (83), и (84)

$$(104)\quad \frac{1}{R}=\frac{\{1-e^2(1-\mathrm{Cos}^2A\mathrm{Cos}^2\varphi)-i(\mathrm{Cos}^2A\mathrm{Sin}^2\varphi\mathrm{Cos}2\lambda-\mathrm{Sin}2A\mathrm{Sin}\varphi\mathrm{Sin}2\lambda+\mathrm{Sin}^2A\mathrm{Cos}2\lambda)\}\,\Delta}{\rho(1-e^2)},$$

гдѣ

$$\Delta=\sqrt{1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi}\left\{1-\frac{1}{2}i\mathrm{Cos}^2\varphi\mathrm{Cos}2\lambda\right\}. \qquad (105)$$

Пусть R′ и F′ представляютъ значенія этихъ функцій для точки m′, координаты которой u′, v′ или φ' λ' и которая лежитъ въ концѣ дуги s, тогда формула

$$s'=D+\frac{D^3}{24R'^2}-\frac{1}{8}F'\frac{D^4}{R'^3}+\frac{3}{640}\frac{D^5}{R'^4} \qquad (106)$$

представитъ длину нормальнаго сѣченія, проходящаго черезъ нормаль точки m' и черезъ точку m'. Разность $s'-s$ выразится формулой

$$s'-s=\left(\frac{1}{R'^2}-\frac{1}{R^2}\right)\frac{D^3}{24}-\left(\frac{F'}{R'^3}-\frac{F}{R^3}\right)\frac{D^4}{8}+\left(\frac{1}{R'^4}-\frac{1}{R^4}\right)\frac{3D^5}{640}.$$

Разности, стоящія въ круглыхъ скобкахъ послѣдней формулы, суть величины порядка $\frac{e^2D}{\rho^2}$, ибо $\varphi'-\varphi$ и $\lambda'-\lambda$ суть величины порядка d. Отсюда видимъ, что разность $s'-s$ будетъ величина порядка $\frac{e^2D^4}{\rho^2}$.

Съ достаточной точностью можно принять въ большинствѣ случаевъ для длины дуги s среднее значеніе s_0 между s и s'; и вычислять его по формулѣ:

$$s_0=\frac{s+s'}{2}=D+\frac{D^3}{24R_0{}^2}+\frac{3D^5}{640R_0{}^4}, \qquad (107)$$

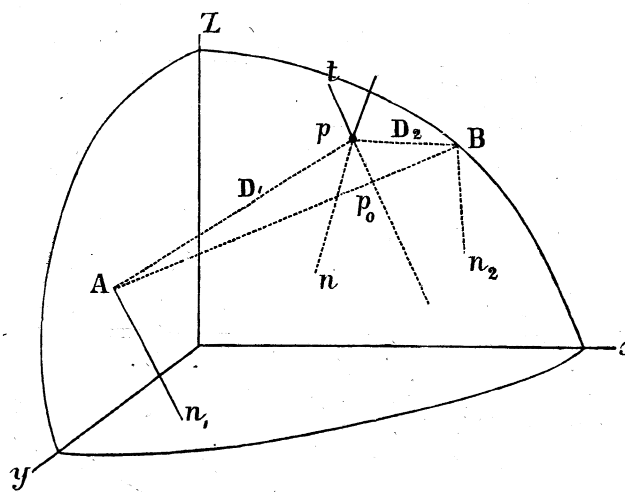
принимая

$$\frac{1}{R_0}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{\triangle'}{\triangle}}.$$

§ 13. Займемся изслѣдованіемъ нѣкоторыхъ кривыхъ, проведенныхъ на поверхности, заданной уравненіями

$$x=F_1(u,v), \quad y=F_2(u,v), \quad z=F_3(u,v). \qquad (108)$$

Пусть прямая t движется такъ, что постоянно пересѣкаетъ хорду AB, соединяющую двѣ точки поверхности A и B, координаты которыхъ суть x_1, y_1 и z_1 и x_2, y_2 и z_2, при чемъ направленіе линіи t, опредѣляемое косинусами α, β и γ угловъ, образуемыхъ ею съ осями x, y, z, мѣняется по опредѣленному закону; точка пересѣченія p линіи t съ поверхностью опишетъ тогда нѣкоторую кривую линію. Если t остается во время движенія параллельной нормали n, къ поверхности въ точкѣ A, то кривая, описываемая точкою p, будетъ нормальное сѣченіе въ точкѣ A, проходящее черезъ точку B; если t остается параллельной нормали n_2 къ поверхности въ точкѣ B, то кривая, описанная точкою p, будетъ нормальное сѣченіе въ B, проходящее черезъ A, и наконецъ, если t вездѣ совпадаетъ съ нормалью n къ поверхности въ точкѣ p, то кривая, описанная точкою p, носитъ названіе линіи провѣшиванія.



Чтобы вывести уравненія, характеризующія эти кривыя, означимъ черезъ x_0, y_0, z_0 координаты точки пересѣченія p_0 линіи t съ хордою AB, а черезъ x, y, z координаты точки p, тогда уравненіе прямой t будетъ:

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}\,. \tag{109}$$

Если черезъ D, D_1 и D_2 означимъ длины AB, Ap_0, то уравненіе хорды AB будетъ

$$\frac{x_0-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_0-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z_0-z_1}{z_2-z_1}=\frac{D_1}{D} \tag{110}$$

или

$$\frac{x_0-x_2}{x_2-x_1}=\frac{y_0-y_2}{y_2-y_1}=\frac{z_0-z_1}{z_2-z_1}=\frac{D_2}{D}\,. \tag{111}$$

Опредѣливъ изъ уравненій (110) x_0, y_0, z_0, получимъ

$$x_0=\frac{D_1(x_2-x_1)+Dx_1}{D},\quad y_0=\frac{D_1(y_2-y_1)+Dy_1}{D} \text{ и } z_0=\frac{D_1(z_2-z_1)+Dz_1}{D}.$$

Подставляя значенія x_0, y_0, z_0 въ уравненіе (109), получимъ:

$$\frac{D(x-x_1)-D_1(x_2-x_1)}{D\alpha}=\frac{D(y-y_1)-D_1(y_2-y_1)}{D\beta}=$$

$$=\frac{D(z-z_1)-D_1(z_2-z_1)}{D\gamma};$$

исключая изъ этихъ уравненій D, получимъ равенства

$$\frac{D_1}{D}=\frac{\beta(z-z_1)-\gamma(y-y_1)}{\beta(z_2-z_1)-\gamma(y_2-y_1)}=\frac{\gamma(x-x_1)-\alpha(z-z_1)}{\gamma(x_2-x_1)-\alpha(z_2-z_1)}=$$

$$=\frac{\alpha(y-y_1)-\beta(x-x_1)}{\alpha(y_2-y_1)-\beta(x_2-x_1)}, \qquad (112)$$

изъ которыхъ одно—слѣдствіе другого.

Еслибы x_0, y_0 и z_0 опредѣлили изъ уравненій (111), то получили бы вмѣсто (112), уравненіе

$$\frac{D_2}{D}=\frac{\beta(z-z_2)-\gamma(y-y_2)}{\beta(z_1-z_2)-\gamma(y_1-y_2)}=\frac{\gamma(x-x_2)-\alpha(z-z_2)}{\gamma(x_1-x_2)-\alpha(z_1-z_2)}=$$

$$=\frac{\alpha(y-y_1)-\beta(x-x_2)}{\alpha(y_1-y_2)-\beta(x_1-x_2)}. \qquad (113)$$

Раздѣляя почленно равенства (112) на равенства (113), получимъ:

$$\frac{D_1}{D_2}=\frac{\beta(z-z_1)-\gamma(y-y_1)}{\beta(z-z_2)-\gamma(y-y_2)}=\frac{\gamma(x-x_1)-\alpha(z-z_1)}{\gamma(x-x_2)-\alpha(z-z_2)}=$$

$$=\frac{\alpha(y-y_1)-\beta(x-x_1)}{\alpha(y-y_2(-\beta(x-x_2)}. \qquad (114)$$

Каждое изъ двухъ равенствъ (114) приводитъ къ слѣдующему:

$$\alpha[(y-y_1)(z-z_2)-(z-z_1)(y-y_2)]+\beta[(z-z_1)(x-x_2)-$$

$$-(x-x_1)(z-z_2)]+\gamma[(x-x_1)(y-y_2)-(y-y_1)(x-x_2)]$$

$$=0. \qquad (115)$$

Здѣсь α, β и γ суть вообще функціи D_1 или D_2, которыя въ свою очередь, посредствомъ уравненій (112) или (113) могутъ быть выражены въ функціи x, y и z. Подставляя въ уравненіе, (115) вмѣсто x, y и z ихъ значенія изъ (108), получимъ искомое уравненіе кривой на данной поверхности.

§ 14. Въ случаѣ эллипсоида, уравненіе котораго

$$x=\rho\sqrt{1+i}.L\,,\ \ y=\rho\sqrt{1-i}.M \text{ и } z=\rho\sqrt{1-e^2}.N\,, \tag{116}$$

гдѣ

$$L=\mathrm{Cos}u\mathrm{Cos}v\,,\quad M=\mathrm{Cos}u\mathrm{Sin}v \text{ и } N=\mathrm{Sin}u\,, \tag{117}$$

положимъ

$$\alpha=\frac{\sqrt{1-i}\sqrt{1-e^2}}{\Omega'}L'\,,\quad \beta=\frac{\sqrt{1+i}\sqrt{1-e^2}}{\Omega'}M',$$

$$\gamma=\frac{\sqrt{1+i}\sqrt{1-i}}{\Omega'}N'\,, \tag{118}$$

гдѣ

$$\Omega'=\sqrt{1-e^2(1-N'^2)-i[(1-e^2)(L'^2-M'^2)+iN'^2]}\,;$$

тогда уравненіе (115) приметъ видъ

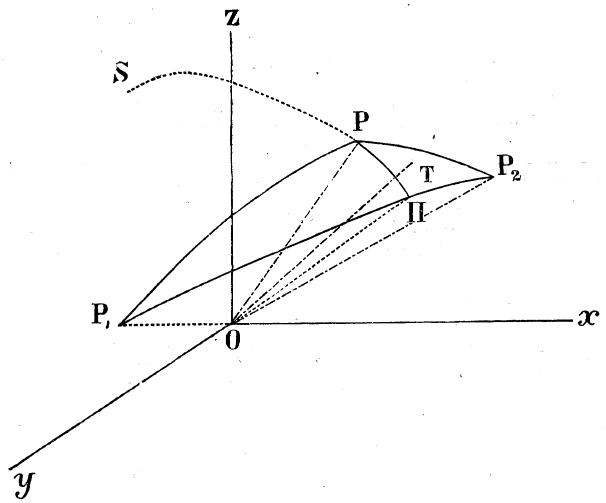
$$\begin{aligned}&\frac{L'}{1+i}[(M-M_1)(N-N_2)-(N-N_1)(M-M_2)]+\\&+\frac{M'}{1-i}[(N-N_1)(L-L_2)-(L-L_1)(N-N_2)]+\\&+\frac{N'}{1-e^2}[(L-L_1)(M-M_2)-(M-M_1)(L-L_2)]=0.\end{aligned} \tag{119}$$

Если отбросить степени e^2 и i, высшія первыхъ, то можно уравненіе (119) представить въ видѣ

$$\begin{aligned}&L'[(M_1N_2-M_2N_1)-(M_1N-N_1M)+(M_2N-N_2M)]+\\&+M'[(N_1L_2-N_2L_1)-(N_1L-L_1N)+(N_2L-L_2N)]+\\&+N'[(L_1M_2-L_2M_1)-(L_1M-M_1L)+(L_2M-M_2L)]=\\&=i\{L'[M-M_1)(N-N_2)-(N-N_1)(M-M_2)]-\\&-M'[(N-N_1)(L-L_2)-(L-L_1)(N-N_2)]\}-\\&-e^2N'[(L-L_1)(M-M_2)-(M-M_1)(L-L_2)].\end{aligned} \tag{120}$$

Еслибы мы пожелали оставить члены порядка e^4, то вмѣсто e^2 пришлось бы писать $e^2(1+e^2)$, что не усложнило бы значительно вычисленіе.

Условимся u и v разсматривать какъ широту и долготу нѣкоторой точки P на сферѣ радіуса, равнаго ρ, тогда ρL, ρM и ρN будутъ прямоугольныя координаты этой точки въ системѣ осей, имѣющихъ начало въ центрѣ o сферы, ось z которой направлена черезъ полюсъ сферы, а плоскость zx совпадаетъ съ плоскостью перваго меридіана. Точку P будемъ разсматривать какъ изображеніе на сферѣ точки p, лежащей на эллипсоидѣ. Такимъ же образомъ u', v', $\rho L'$, $\rho M'$ и $\rho N'$ будутъ координатами нѣкорой точки T; u_1, v_1, ρL_1, ρM_1 и ρN_1, координатами точки P_1,



изображенія точки A и u_2, v_2, ρL_2, ρM_2 и ρN_2 координаты точки P_2, изображенія точки B. Положимъ теперь

$$\left.\begin{aligned}
a&=\frac{M_1N_2-N_1M_2}{\operatorname{Sin}(P_1oP_2)},\quad b=\frac{N_1L_2-L_1N_2}{\operatorname{Sin}(P_1oP_2)},\quad c=\frac{L_1M_2-M_1L_2}{\operatorname{Sin}(P_1oP_2)}\\
a_1&=\frac{N_1M'-M_1N'}{\operatorname{Sin}(ToP_1)},\quad b_1=\frac{L_1N'-N_1L'}{\operatorname{Sin}(ToP_1)},\quad c_1=\frac{M_1L'-L_1M'}{\operatorname{Sin}(ToP_1)}\\
a_2&=\frac{N_2M'-M_2N'}{\operatorname{Sin}(ToP_2)},\quad b_2=\frac{L_2N'-N_2L'}{\operatorname{Sin}(ToP_2)},\quad c_2=\frac{M_2L'-L_2M'}{\operatorname{Sin}(ToP_2)}
\end{aligned}\right\}\quad(121)$$

и

$$a'=\rho^2\frac{(M-M_1)(N-N_2)-(N-N_1)(M-M_2)}{\overline{P_1P}.\ \overline{P_2P}.\ \operatorname{Sin}(P_1PP_2)},$$

$$b'=\rho^2\frac{(N-N_1)(L-L_2)-(L-L_1)(N-N_2)}{\overline{P_1P}.\overline{P_2P}.\operatorname{Sin}(P_1PP_2)},\quad(122)$$

$$c'=\rho^2\frac{(L-L_1)(M-M_2)-(M-M_1)(L-L_2)}{\overline{P_1P}.\ \overline{P_2P}\mathrm{Sin}(P_1PP_2)};$$

тогда a, b и c будутъ косинусы угловъ, образуемыхъ съ осями ox, oy и oz линіей oS, перпендикулярной къ линіямъ oP_1 и oP_2.

Дѣйствительно a, b и c удовлетворяютъ условіямъ

$$aL_1+bM_1+cN_1=0,$$
$$aL_2+bM_2+cN_2=0$$

и кромѣ того

$$a^2+b^2+c^2=\frac{(M_1N_2-N_1M_2)^2+(N_1L_2-L_1N_2)^2+(L_1M_2-M_1L_2)^2}{\mathrm{Sin}^2(P_1oP_2)}=$$

$$=\frac{(L_1^2+M_1^2+N_1^2)(L_2^2+M_2^2+N_2^2)-(L_1L_2+M_1M_2+N_1N_2)^2}{\mathrm{Sin}^2(P_1oP_2)}=$$

$$=\frac{1-\mathrm{Cos}^2(P_1oP_2)}{\mathrm{Sin}^2(P_1oP_2)}=1\ .$$

Подобнымъ же образомъ увидимъ, что a_1, b_1 и c_1 и a_2, b_2 и c_2 суть косинусы угловъ, образуемыхъ прямыми oS_1 и oS_2, соотвѣтственно перпендикулярными къ плоскостямъ POP_1 и POP_2.

Такимъ-же образомъ найдемъ, что a′, b′ и c′ суть косинусы угловъ, образуемыхъ съ осями координатъ линіею os′, перпендикулярной къ плоскости P_1PP_2. Дѣйствительно замѣтивъ что

$$\rho(L-L_1)=\overline{PP_1}\mathrm{Cos}(PP_1x),\ \rho(M-M_1)=\overline{PP_1}\mathrm{Cos}(PP_1y),$$
$$\rho(N-N_1)=\overline{PP_1}\mathrm{Cos}(PP_1z),$$

$$\rho(L-L_2)=\overline{PP_2}\mathrm{Cos}(PP_2x),\ \rho(M-M_2)=\overline{PP_2}\mathrm{Cos}(PP_2y),$$
$$\rho(N-N_2)=\overline{PP_2}\mathrm{Cos}(PP_2z),$$

увидимъ, что a′, b′ и c′ удовлетворяютъ условіямъ:

$$a'\mathrm{Cos}(PP_1x)+b'\mathrm{Cos}(PP_1y)+c'\mathrm{Cos}(PP_1z)=0,$$
$$a'\mathrm{Cos}(PP_2x)+b'\mathrm{Cos}(PP_2y)+c'\mathrm{Cos}(PP_2z)=0,$$

и что, кромѣ того

$$a'^2+b'^2+c'^2=\overline{PP_1}^2.\overline{PP_2}^2\frac{[\mathrm{Cos}(PP_1y)\mathrm{Cos}(PP_2z)-\mathrm{Cos}(PP_1z)\mathrm{Cos}(PP_2y)]^2+\ldots}{\overline{PP_1}^2.\overline{PP_2}^2\mathrm{Sin}^2(P_1PP_2)}=$$

$$=\frac{[\mathrm{Cos}^2(PP_1x)+\mathrm{Cos}^2(PP_1y)+\mathrm{Cos}_2(PP_1z)][\mathrm{Cos}^2(PP_2x)+\mathrm{Cos}^2(PP_2y)+\mathrm{Cos}^2(PP_2z)]}{\mathrm{Sin}^2(P_1PP_2)}-$$

$$-\frac{[\mathrm{Cos}(PP_1x)\mathrm{Cos}(PP_2x)+\mathrm{Cos}(PP_1y)\mathrm{Cos}(PP_2y)+\mathrm{Cos}(PP_1z)\mathrm{Cos}(PP_2z)]^2}{\mathrm{Sin}^2(P_1PP_2)}=$$

$$=\frac{1-\mathrm{Cos}^2(P_1PP_2)}{\mathrm{Sin}^2(P_1PP_2)}=1\,.$$

Воспользовавшись обозначеніями (121) и (122) и замѣчая, что

$$\overline{PP_1}=2\rho\mathrm{Sin}\left(\frac{PoP_1}{2}\right)\ \text{и}\ \overline{PP_2}=2\rho\mathrm{Sin}\left(\frac{PoP_2}{2}\right),$$

мы можемъ уравненіе (120) написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\mathrm{Sin}(P_1oP_2)(aL'+bM'+cN')+$$
$$\mathrm{Sin}(P_1oT)(a_1L+b_1M+c_1N)-\mathrm{Sin}(P_2oT)(a_2L+b_2M+c_2N)=$$
$$=4\,\mathrm{Sin}\left(\frac{PoP_1}{2}\right)\mathrm{Sin}\left(\frac{PoP_2}{2}\right)\{i(L'a'-M'b')-e^2N'c'\}\mathrm{Sin}(P_1PP_2)\qquad(123)$$

или, еще короче, такъ

$$\mathrm{Sin}(P_1oP_2)\mathrm{Cos}(SoT)+\mathrm{Sin}(P_1oT)\mathrm{Cos}(S_1oP)-\mathrm{Sin}(P_2oT)\mathrm{Cos}(S_2oP)=$$
$$=4\,\mathrm{Sin}\left(\frac{PoP_1}{2}\right)\mathrm{Sin}\left(\frac{PoP_2}{2}\right)\{i(L'a'-M'b')-e^2N'c'\}\mathrm{Sin}(P_1PP_2).\qquad(124)$$

§ 15. Въ случаѣ нормальнаго сѣченія s_1 въ точкѣ A, проходящаго черезъ точку B, T параллельно n_1 или oP_1, такъ что $SoT=90^\circ$, $P_1oT=0$ и $P_2oT=P_1oP_2$, и S_2 совпадаетъ съ S_1, вслѣдствіе чего уравненіе кривой s_1 будетъ

$$-\mathrm{Sin}(\Pi oP)=4\mathrm{Sin}\left(\frac{PoP_1}{2}\right)\mathrm{Sin}\left(\frac{PoP_2}{2}\right)\{i(L_1a'-M_1b')+e^2N_1c'\}\frac{\mathrm{Sin}(P_1PP_2)}{\mathrm{Sin}(P_1oP_2)},$$

гдѣ П есть точка пересѣченія дуги SP съ дугою P_1P_2.

Изъ этой формулы мы видимъ, что $\mathrm{Sin}(\Pi o P)$ есть величина порядка c^2 и i. Пренебрегая величинами высшихъ порядковъ, мы можемъ принять

$$a'=a,\quad b'=b,\quad c'=c$$

$$P_1PP_2=P_1\Pi P_2=\frac{1}{2}(360^0-P_1oP_2);\quad \mathrm{Sin}(P_1PP_2)=\mathrm{Sin}\left(\frac{P_1oP_2}{2}\right)$$

или, означая дугу P_1P_2 черезъ σ, а черезъ ρ'' произведеніе $\rho\mathrm{Sin}1''$,

$$\mathrm{Sin}(P_1PP_2)=\mathrm{Sin}\left(\frac{\sigma}{2\rho''}\right).$$

Означая далѣе дуги $P\Pi$, $P_1\Pi$ и $P_2\Pi$ соотвѣтственно черезъ δ_1, σ_1 и σ_2, мы можемъ принять

$$\mathrm{Sin}(\Pi o P)=\frac{\delta_1}{\rho},$$

$$\mathrm{Sin}\left(\frac{PoP_1}{2}\right)=\mathrm{Sin}\left(\frac{\Pi oP_1}{2}\right)=\mathrm{Sin}\left(\frac{\sigma_1}{2\rho''}\right),$$

и

$$\mathrm{Sin}\left(\frac{PoP_2}{2}\right)=\mathrm{Sin}\left(\frac{\Pi oP_2}{2}\right)=\mathrm{Sin}\left(\frac{\sigma_2}{2\rho''}\right);$$

мы получимъ тогда для нормальнаго сѣченія s_1 уравненіе

$$\delta_1=-2\rho\frac{\mathrm{Sin}\left(\frac{\sigma_1}{2\rho''}\right)\mathrm{Sin}\left(\frac{\sigma_2}{2\rho''}\right)}{\mathrm{Cos}\left(\frac{\sigma}{2\rho''}\right)}\Big\{i(L_1a-M_1b)-e^2N_1c\Big\}. \qquad (125)$$

Разсуждая такимъ-же образомъ для нормальнаго сѣченія s_2 точки B, проходящаго черезъ A, получимъ

$$\delta_2=2\rho\frac{\mathrm{Sin}\left(\frac{\sigma_1}{2\rho''}\right)\mathrm{Sin}\left(\frac{\sigma_2}{2\rho''}\right)}{\mathrm{Cos}\left(\frac{\sigma}{2\rho''}\right)}\Big\{i(L_2a-M_2b)-e^2N_2c\Big\}. \qquad (126)$$

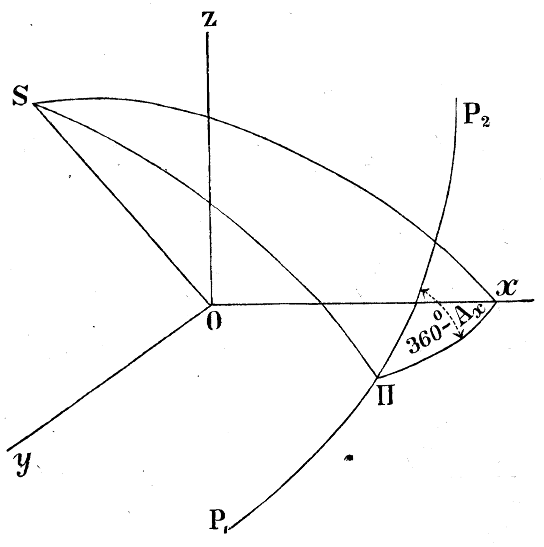
Для линіи провѣшиванія прямая t совпадаетъ съ нормалью n въ точкѣ p и слѣдовательно линія oT совпадаетъ съ линіей 0P, вслѣдствіе чего

$$Pos_1 = Pos_2 = 90^0 \text{ и } ToS = PoS = 90^0 - \frac{\delta}{\rho''}.$$

Разсуждая, какъ и для нормальныхъ сѣченій, получимъ изъ (124)

$$\delta = 2\rho \frac{\operatorname{Sin}\left(\frac{\sigma_1}{2\rho''}\right)\operatorname{Sin}\left(\frac{\sigma_2}{2\rho''}\right)}{\operatorname{Cos}\left(\frac{\sigma}{2\rho''}\right)}\left\{i(La - Mb) - e^2Nc\right\}. \qquad (127)$$

Означимъ черезъ u_x, u_{1x} и u_{2x} широты точекъ P, P_1 и P_2 если принять за полярную ось ось ox, черезъ u_x широту точки Π_1 а черезъ A_x азимутъ въ точкѣ Π дуги P_1P_2 относительно полярной оси ox; тогда, какъ легко усмотрѣть изъ треугольника $SX\Pi$, гдѣ



$$\widehat{\Pi X} = 90^0 - u_x$$
$$\widehat{S\Pi} = 90^0$$
$$< P_2 \Pi S = 90^0$$
$$< P_2 \Pi x = 360^0 - A_x$$
$$\text{и } \operatorname{Cos}\widehat{Sx} = a$$

мы будемъ имѣть:

$$a = \operatorname{Sin}u_x \operatorname{Cos}90^0 + \operatorname{Cos}u_x \operatorname{Sin}90^0 \operatorname{Cos}(450^0 - A_x)$$

или

$$a = \operatorname{Cos}u_x \operatorname{Sin}A_x.$$

Вводя подобныя-же означенія относительно оси y и z, получимъ

$$b = \operatorname{Cos}u_y \operatorname{Sin}A_y \quad c = \operatorname{Cos}u \operatorname{Sin}A,$$

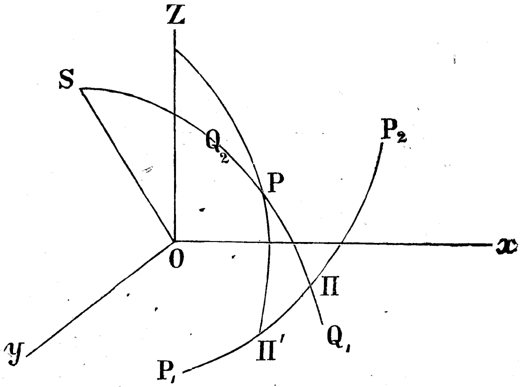
гдѣ указатель z отброшенъ.

Мы получимъ такимъ образомъ формулы (125), (126) и (127) въ слѣдующемъ видѣ

$$\delta_1 = -2\rho \frac{\mathrm{Sin}\left(\frac{\sigma_1}{2\rho''}\right)\mathrm{Sin}\left(\frac{\sigma_2}{2\rho''}\right)}{\mathrm{Cos}\left(\frac{\sigma}{2\rho''}\right)} \Big\{ i(\mathrm{Sin}u_{1x}\mathrm{Cos}u_x\mathrm{Sin}A_x - \mathrm{Sin}u_{1y}\mathrm{Cos}u_y\mathrm{Sin}A_y) - e^2\mathrm{Sin}u_1\mathrm{Cos}u\mathrm{Sin}A \Big\}, \tag{128}$$

$$\delta_2 = 2\rho \frac{\mathrm{Sin}\left(\frac{\sigma_1}{2\rho''}\right)\mathrm{Sin}\left(\frac{\sigma_2}{2\rho''}\right)}{\mathrm{Cos}\left(\frac{\sigma}{2\rho''}\right)} \Big\{ i(\mathrm{Sin}u_{2x}\mathrm{Cos}u_x\mathrm{Sin}A_x - \mathrm{Sin}u_{2y}\mathrm{Cos}u_y\mathrm{Sin}A_y) - e^2\mathrm{Sin}u_2\mathrm{Cos}u\mathrm{Sin}A \Big\}, \tag{129}$$

$$\delta = 2\rho \frac{\mathrm{Sin}\left(\frac{\sigma_1}{2\rho''}\right)\mathrm{Sin}\left(\frac{\sigma_2}{2\rho''}\right)}{\mathrm{Cos}\left(\frac{\sigma}{2\rho''}\right)} \Big\{ i(\mathrm{Sin}u_x\mathrm{Cos}u_x\mathrm{Sin}A_x - \mathrm{Sin}u_y\mathrm{Cos}u_y\mathrm{Sin}A_y) - e^2\mathrm{Sin}u\mathrm{Cos}u\mathrm{Sin}A \Big\}. \tag{130}$$



Зная разстояніе $\delta = \widehat{P\Pi}$ точки P отъ дуги $\widehat{P_1P_2}$ можно найти разстояніе $\delta' = \widehat{P\Pi'}$ точки P отъ той же дуги, считаемое по меридіану; для этого замѣтимъ, что

$$\delta' = \frac{\delta}{\mathrm{Sin}A}.$$

Пусть точки Q_1, P и Q_2 суть изображенія точекъ пересѣченія дуги SП соотвѣтственно съ изображеніемъ нормальнаго сѣченія въ точкѣ A на B, съ изображеніемъ кривой провѣшиванія и съ изображеніемъ нормальнаго сѣченія въ B на A; тогда, означая черезъ $\triangle_1$ и $\triangle_2$ разстоянія $\widehat{Q_1P}$ и $\widehat{Q_2P}$, а черезъ $\triangle$ разстояніе $\widehat{Q_2Q_1}$, мы получимъ изъ формулъ (128), (129) и (130).

$$\Delta_1 = 2\rho \frac{\operatorname{Sin}\left(\frac{\sigma}{2\rho''}\right)\operatorname{Sin}\left(\frac{\sigma_2}{2\rho''}\right)}{\operatorname{Cos}\left(\frac{\sigma}{2\rho''}\right)}\Big\{ i[(\operatorname{Sin}u_x - \operatorname{Sin}u_{1x})\operatorname{Cos}\mathfrak{u}_x\operatorname{Sin}A_x -$$

$$-(\operatorname{Sin}u_y - \operatorname{Sin}u_{1y})\operatorname{Cos}\mathfrak{u}_y\operatorname{Sin}A_y] - e^2(\operatorname{Sin}u - \operatorname{Sin}u_1)\operatorname{Cos}\mathfrak{u}\operatorname{Sin}A\Big\},$$

$$(131)\quad \Delta_2 = 2\rho \frac{\operatorname{Sin}\left(\frac{\sigma_1}{2\rho''}\right)\operatorname{Sin}\left(\frac{\sigma_2}{2\rho''}\right)}{\operatorname{Cos}\left(\frac{\sigma}{2\rho''}\right)}\Big\{ i[(\operatorname{Sin}u_x - \operatorname{Sin}u_{2x})\operatorname{Cos}\mathfrak{u}_x\operatorname{Sin}A_x -$$

$$-(\operatorname{Sin}u_y - \operatorname{Sin}u_{2y})\operatorname{Cos}\mathfrak{u}_y\operatorname{Sin}A_y] - e^2(\operatorname{Sin}u - \operatorname{Sin}u_2)\operatorname{Cos}\mathfrak{u}\operatorname{Sin}A\Big\},$$

и

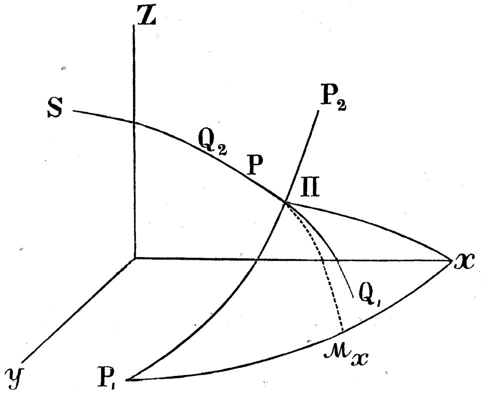
$$\Delta = 2\rho \frac{\operatorname{Sin}\left(\frac{\sigma_1}{2\rho''}\right)\operatorname{Sin}\Big)\frac{\sigma_2}{2\rho''}\Big)}{\operatorname{Sos}\left(\frac{\sigma}{2\rho''}\right)}\Big\{ i[(\operatorname{Sin}u_{2x} - \operatorname{Sin}u_{1x})\operatorname{Cos}\mathfrak{u}_x\operatorname{Sin}A_x -$$

$$-(\operatorname{Sin}u_{2y} - \operatorname{Sin}u_{1y})\operatorname{Cos}\mathfrak{u}_y\operatorname{Sin}A_y] - e^2(\operatorname{Sin}u_2 - \operatorname{Sin}u_1)\operatorname{Cos}\mathfrak{u}\operatorname{Sin}A\Big\}.$$

Сохраняя въ этихъ формулахъ только наиболѣе вліятельные члены, примемъ

$$\operatorname{Sin}\left(\frac{\sigma_1}{2\rho''}\right) = \frac{\sigma_1}{2\rho},\quad \operatorname{Sin}\left(\frac{\sigma_2}{2\rho''}\right) = \frac{\sigma_2}{2\rho},\quad \operatorname{Cos}\left(\frac{\sigma}{2\rho''}\right) = 1$$

$$(\operatorname{Sin}u_x - \operatorname{Sin}u_{1x}) = (u_x - u_{1x})\operatorname{Cos}u_{1x},\ \text{и т. д.}$$



Мы можемъ также вмѣсто u_x принять $\mathfrak{u}_x$, тогда отложивъ по дугѣ $\widehat{P_1x}$ дугу $\widehat{x\mu_x} = \widehat{\Pi x}$, мы получимъ изъ треугольника $P_1\mu_x\Pi$, въ которомъ уголъ $P_1\Pi\mu_x$ можно принять равнымъ $A_x - 90^\circ$, а $\Pi\mu_x P_1 = 90^\circ$:

$$u_{1x}-u_x=u_{1x}-u_x=\frac{1}{\rho}\overset{\frown}{P_1\mu_x}=\frac{1}{\rho}P_1\pi\operatorname{Sin}(A_x-90^\circ)=-\frac{\sigma_1}{\rho}\operatorname{Cos}A_x.$$

Мы получимъ такимъ образомъ, принявъ еще

$$u_{1x}=u_x,\quad u_{1y}=u_y \quad \text{и} \quad u_1=u.$$

$$\triangle_1=\frac{1}{4\rho^2}\sigma_1{}^2\sigma_2\left\{i\left[\operatorname{Cos}^2u_x\operatorname{Sin}2A_x-\operatorname{Cos}^2u_y\operatorname{Sin}2A_y\right]-e^2\operatorname{Cos}^2u\operatorname{Sin}2A\right\},$$

$$\tag{132}$$

$$\triangle_2=\frac{1}{4\rho^2}\sigma_1\sigma_2{}^2\left\{i\left[\operatorname{Cos}^2u_x\operatorname{Sin}2A_x-\operatorname{Cos}^2u_y\operatorname{Sin}2A_y\right]-e^2\operatorname{Cos}^2u\operatorname{Sin}2A\right\}.$$

Изъ этихъ равенствъ мы можемъ найти величину угла φ_1, образуемаго въ точкѣ P_1 изображеніями линіи провѣшиванія и нормальнаго сѣченія въ точкѣ А на точку В. Въ самомъ дѣлѣ этотъ уголъ равенъ предѣлу выраженія $\frac{\triangle_1}{\sigma_1}$ при $\sigma_1=0$ и будетъ слѣдовательно равняться нулю. Также найдемъ уголъ φ_2, образуемый въ точкѣ P_2 изображеніемъ линіи провѣшиванія и нормальнаго сѣченія въ точкѣ В на А; этотъ уголъ тоже будетъ равенъ нулю. Такимъ образомъ линія провѣшиванія будетъ касаться перваго нормальнаго сѣченія въ точкѣ А и второго въ точкѣ В.

Чтобы найти уголъ, образуемый изображеніями обоихъ нормальныхъ сѣченій при точкѣ P_1, который можно принять равнымъ углу между самими нормальными сѣченіями въ точкѣ А, замѣтимъ, что этотъ уголъ будетъ равенъ углу E_1, образуемому при точкѣ P_1 изображеніями линіи провѣшиванія и второго нормальнаго сѣченія, то есть

$$E_1=\lim\frac{\Delta_2}{\sigma_1} \text{ при } \sigma_1=0.$$

Замѣчая что для $\sigma_1=0$, $\sigma_2=\sigma$, $u_x=u_{1x}$, $u_y=u_{1y}$ $u=u_1$, $A_x=A_{1x}$, $A_y=A_{1y}$ и $A=A_1$ получимъ

$$E_1=\frac{1}{4\rho^2}\sigma^2\left\{i\left[\operatorname{Cos}^2u_{1x}\operatorname{Sin}2A_{1x}-\operatorname{Cos}^2u_{1y}\operatorname{Sin}2A_{1y}\right]-e^2\operatorname{Cos}^2u_1\operatorname{Sin}2A_1\right\}$$

Даже для дуги въ половину градуса уголъ E_1 не превышаетъ десятой доли секунды, а δ, δ_1 и δ, составляютъ сотыя части метра.

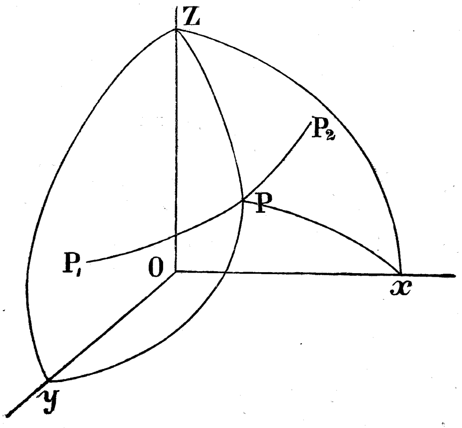
§ 16. Покажемъ какимъ образомъ производится вычисленіе угловъ u_x, u_y, A_x, A_y въ функціи u, v и A. Мы имѣемъ для этого во-первыхъ формулы:

$$\mathrm{Sin}u_x = L = \mathrm{Cos}u\mathrm{Cos}v,$$

и

$$\mathrm{Sin}u_y = M = \mathrm{Cos}u\mathrm{Sin}v.$$

Далѣе имѣемъ изъ чертежа



$$zPP_2 = A,\ xPP_2 = 360^0 - Ax,$$

$$zPP_1 = 180^0 - A,$$

$$yPP_1 = A_y - 180.$$

Изъ треугольника zxP имѣемъ

$$\mathrm{Cos}(zox) = \mathrm{Sin}u_x\mathrm{Sin}u + $$
$$+ \mathrm{Cos}u_x\mathrm{Cos}u\mathrm{Cos}(A_x - A),$$

и

$$\frac{\mathrm{Sin}(zox)}{\mathrm{Sin}(A - A_x)} = \frac{\mathrm{Cos}u_x}{\mathrm{Sin}v},$$

откуда

$$\mathrm{Cos}(A_x - A) = -\mathrm{Tg}u_x\mathrm{Tg}u$$

и

$$\mathrm{Sin}(A_x - A) = -\frac{\mathrm{Sin}v}{\mathrm{Cos}u_x}.$$

Помножая первое изъ двухъ послѣднихъ равенствъ на SinA, второе на CosA и складывая, а потомъ помножая первое на CosA, второе на SinA и вычитая получимъ

$$\mathrm{Sin}A_x = -\frac{\mathrm{Sin}u_x \mathrm{Tg}u \mathrm{Sin}A + \mathrm{Sin}v \mathrm{Cos}A}{\mathrm{Cos}u_x}$$

и $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ (135)

$$\mathrm{Cos}A_x = -\frac{\mathrm{Sin}u_x \mathrm{Tg}u \mathrm{Cos}A - \mathrm{Sin}v \mathrm{Sin}A}{\mathrm{Cos}u_x},$$

Перемножая два послѣднія равенства, получимъ, подставляя въ результатѣ вмѣсто $\mathrm{Sin}^2 u_x$, $\mathrm{Cos}^2 u \mathrm{Cos}^2 v$:

$$2\mathrm{Cos}^2 u_x \mathrm{Sin}2A_x = (\mathrm{Sin}^2 u \mathrm{Cos}^2 v - \mathrm{Sin}^2 v)\mathrm{Sin}2A + \\ + \mathrm{Sin}u \mathrm{Sin}2v \mathrm{Cos}2A,$$

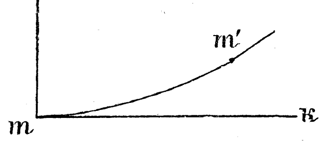
подобнымъ же образомъ получимъ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ (136)

$$2\mathrm{Cos}^2 u_y \mathrm{Sin}2A_y = (\mathrm{Sin}^2 u \mathrm{Sin}^2 v - \mathrm{Cos}^2 v)\mathrm{Sin}2A - \\ - \mathrm{Sin}u \mathrm{Sin}2v \mathrm{Cos}2A.$$

Возвышая формулы (135) почленно въ квадратъ и вычитая, получимъ:

$$\left.\begin{array}{l} 2\mathrm{Cos}^2 u_x \mathrm{Cos}2A_x = (\mathrm{Sin}^2 u \mathrm{Cos}^2 v - \mathrm{Sin}^2 v)\mathrm{Cos}2A - \mathrm{Sin}u \mathrm{Sin}2v \mathrm{Sin}2A \\ 2\mathrm{Cos}^2 u_y \mathrm{Cos}2A_y = (\mathrm{Sin}^2 u \mathrm{Sin}^2 v - \mathrm{Cos}^2 v)\mathrm{Cos}2A + \mathrm{Sin}u \mathrm{Sin}2v \mathrm{Sin}2A. \end{array}\right\} \quad (137)$$

§ 17. Пусть k и ζ суть прямоугольныя и прямолинейныя координаты точки m′ плоской кривой, касающейся въ точкѣ m, принятой за начало координатной системы (kζ), оси k, а s длина дуги mm′. Разсматривая k и ζ какъ функціи отъ s, мы можемъ написать по строкѣ Маклореня, замѣчая, что:



$$k_m = 0, \left(\frac{dk}{ds}\right)_m = s, \ \zeta_m = 0 \text{ и } \left(\frac{d\zeta}{ds}\right) = 0,$$

$$k = s + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2k}{ds^2}\right)_m s^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3k}{ds^3}\right)_m s^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{d^4k}{ds^4}\right)_m s^4 + \ldots\ldots$$

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\zeta}{ds^2}\right)_m s^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3\zeta}{ds^3}\right)_m s^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{d^4\zeta}{ds^4}\right)_m s^4 + \ldots\ldots$$

Если предположимъ, что точка m′ движется по кривой равномѣрно съ постоянною скоростью v, то проекціи ея скорости на оси координатъ будутъ:

$$\frac{dk}{dt}=\frac{dk}{ds}\frac{ds}{dt}=v\frac{dk}{ds} \quad \text{и} \quad \frac{d\zeta}{dt}=v\frac{d\zeta}{ds},$$

а проекціи ускоренія этой точки будутъ

$$\frac{d^2k}{dt^2}=v\frac{d}{dt}\frac{dk}{ds}=v\frac{d}{ds}\frac{dk}{ds}\frac{ds}{dt}=v^2\frac{d^2k}{ds^2}$$

и

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}=v^2\frac{d^2\zeta}{ds^2}.$$

Съ другой стороны мы знаемъ, что ускореніе, получаемое точкой движущейся по кривой равномѣрно, будетъ равно по величинѣ квадрату скорости, дѣленному на радіусъ кривизны R кривой въ той ея точкѣ, въ которой находится движущаяся точка, а направленіе этого ускоренія нормально къ кривой и проходитъ черезъ центръ кривизны, такъ что

$$v^2\frac{d^2k}{ds^2}=\frac{v^2}{R}\mathrm{Cos}(nk) \quad \text{и} \quad v^2\frac{d^2\zeta}{ds^2}=\frac{v^2}{R}\mathrm{Cos}(n\zeta),$$

гдѣ n направленіе нормали. Когда точка m′ находится вблизи точки m, то

$$\mathrm{Cos}(nk)=-\mathrm{Sin}(n\zeta)=-\mathrm{Sin}\frac{s}{R}=-\frac{s}{R} \quad \text{и} \quad \mathrm{Cos}(n\zeta)=1-\frac{1}{2}\frac{s^2}{R^2},$$

такъ что

$$\frac{d^2k}{ds^2}=-\frac{s}{R},\quad \frac{d^3k}{ds^3}=-\frac{1}{R^2}+2s\frac{1}{R^3}\frac{dR}{ds},$$

$$\frac{d^4k}{ds^4}=2\frac{1}{R^3}\frac{dR}{ds}+2\frac{1}{R^3}\frac{dR}{ds}-6s\frac{1}{R^4}\left(\frac{dR}{ds}\right)^2+2s\frac{1}{R^3}\frac{d^2R}{ds^2},$$

а при $s=0$

$$\left(\frac{d^2k}{ds^2}\right)_m=0,\quad \left(\frac{d^3k}{ds^3}\right)_m=-\frac{1}{R^2} \quad \text{и} \quad \left(\frac{d^4k}{ds^4}\right)_m=4\frac{1}{R^3}\frac{dR}{ds},$$

гдѣ значеніе R и его производной соотвѣтствуютъ точкѣ m. Такимъ же образомъ получимъ:

$$\frac{d^2\zeta}{ds^2}=\frac{1}{R}-\frac{1}{2}\frac{s^2}{R^2}, \qquad \frac{d^3\zeta}{ds^3}=-\frac{1}{R^2}\frac{dR}{ds}-\frac{s}{R^2}+\frac{s^2}{R^3}\frac{dR}{ds},$$

а для s=0

$$\left(\frac{d^2\zeta}{ds^2}\right)_m=\frac{1}{R} \text{ и } \left(\frac{d^3\zeta}{ds^3}\right)_m= \quad \frac{1}{R^2}\frac{dR}{ds}.$$

Воспользовавшись этимъ, получимъ:

$$k=s-\frac{s^3}{6R^2}+\frac{s^4}{6R^3}\left(\frac{dR}{ds}\right)+\ldots\ldots$$

$$\zeta= \quad \frac{s^2}{2R}-\frac{s^2}{6R}\left(\frac{dR}{ds}\right)+\ldots\ldots;$$

эти формулы можно написать такъ:

$$k=R\mathrm{Sin}\left(\frac{s}{R}\right)+\frac{s^4}{6R^3}\left(\frac{dR}{ds}\right)+\ldots\ldots$$

$$\zeta=R\left[1-\mathrm{Cos}\left(\frac{s}{R}\right)\right]-\frac{s^3}{6R^2}\left(\frac{dR}{ds}\right)+\ldots\ldots$$

Означая черезъ $\mathfrak{R}$ средній радіусъ кривизны въ точкѣ m, то есть полагая

$$\mathfrak{R}=\frac{1}{K},$$

мы можемъ послѣднія формулы для k и ζ преобразовать слѣдующимъ образомъ

$$k=\mathfrak{R}\mathrm{Sin}\left(\frac{s}{\mathfrak{R}}\right)+\frac{s^3}{3}\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathfrak{R}}+\frac{1}{R}\right)\left(\frac{1}{\mathfrak{R}}-\frac{1}{R}\right)+\frac{s^4}{6}\left(\frac{dR}{ds}\right)+\ldots.$$

(138)

$$\zeta=\mathfrak{R}\left(1-\mathrm{Cos}\,\frac{s}{\mathfrak{R}}\right)-\frac{s^2}{2}\left(\frac{1}{\mathfrak{R}}-\frac{1}{R}\right)+\ldots\ldots$$

§ 18. Примѣняя эти формулы къ нормальному сѣченію эллипсоида въ точкѣ A на точку B, получимъ, принявъ

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathfrak{R}}+\frac{1}{R}\right)=\frac{1}{\mathfrak{R}}$$

и положивъ

$$\frac{1}{\mathfrak{R}}-\frac{1}{R}=\delta\left(\frac{1}{\mathfrak{R}}\right),$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{k}{\mathfrak{R}}&=\operatorname{Sin}\left(\frac{s}{\mathfrak{R}}\right)+\frac{s^3}{3\mathfrak{R}^2}\delta\left(\frac{1}{\mathfrak{R}}\right)+\ldots\ldots\\ \frac{\zeta}{\mathfrak{R}}&=1-\operatorname{Cos}\frac{s}{\mathfrak{R}}-\frac{s^2}{2\mathfrak{R}}\delta\left(\frac{1}{\mathfrak{R}}\right)+\ldots\ldots\end{aligned}\right\}\qquad(139)$$

Чтобы вычислить $\delta\left(\frac{1}{\mathfrak{R}}\right)$, вспомнимъ, что согласно (82)

$$\frac{1}{R}=\frac{\Delta[1-il^2+im^2+en^2-e^2]}{\rho(1+i)(1-i)(1-e^2)},$$

гдѣ по формуламъ (78) и (73)

$$\Delta=\frac{1}{\rho}\sqrt{a^2L^2+b^2M^2+c^2N^2}=\sqrt{1+iL^2-iM^2-e^2N^2}=$$

$$=1+\frac{1}{2}eL^2-\frac{1}{2}iM^2-\frac{1}{2}e^2N^2.$$

Подставимъ это значеніе Δ въ формулу для $\frac{1}{R}$ получимъ

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{\rho}\left\{1+i\left(\frac{1}{2}L^2-l^2\right)-i\left(\frac{1}{2}M^2-m^2\right)-e^2\left(\frac{1}{2}N^2-n^2\right)\right\}.$$

Подобнымъ-же образомъ получимъ изъ (83)

$$K=\frac{1}{\mathfrak{R}}=\frac{1}{\rho}\left(1+iL^2-iM^2-e^2N^2+\frac{1}{2}e^2\right),$$

такъ что

$$\delta\left(\frac{1}{\mathfrak{R}}\right)=\frac{1}{\rho}\left[i\left(\frac{1}{2}L^2+l^2-\frac{1}{2}\right)-i\left(\frac{1}{2}M^2+m^2-\frac{1}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-e^2\left(\frac{1}{2}N^2+n^2-\frac{1}{2}\right)\right].$$

Положимъ въ послѣдней формулѣ

$$L^2 = \mathrm{Sin}^2\varphi_x,\ M^2 = \mathrm{Sin}^2\varphi_y,\ l^2 = \mathrm{Cos}^2\varphi_x \mathrm{Cos}^2 A_x \text{ и } m^2 = \mathrm{Cos}^2\varphi_y \mathrm{Cos}^2 A_y \quad (140)$$

и замѣтимъ, что по формуламъ (73) и (84)

$$N^2 = \mathrm{Sin}^2\varphi \text{ и } n^2 = \mathrm{Cos}^2\varphi \mathrm{Cos}^2 A; \quad (141)$$

мы получимъ тогда

$$\delta\left(\frac{1}{\mathfrak{R}}\right) = \frac{1}{2\rho}\left[i\mathrm{Cos}^2\varphi_x \mathrm{Cos}\, 2A_x - i\mathrm{Cos}^2\varphi_y \mathrm{Cos}\, 2A_y - e^2 \mathrm{Cos}^2\varphi \mathrm{Cos}\, 2A\right]. \quad (142)$$

Здѣсь φ_x, φ_y, A_x и A_y могутъ быть выражены посредствомъ φ, λ и A подобнымъ же образомъ какъ u_x, u_y, A_x и A_y черезъ u, v и A (135, 137).

Формулы (139) и (142) вполнѣ опредѣляютъ положеніе точки m'. Эти формулы можно представить, замѣнивъ ρ черезъ $\mathfrak{R}$, слѣдующимъ образомъ:

$$k = \mathfrak{R}\mathrm{Sin}\left(\frac{s}{\mathfrak{R}}\right) - \frac{s^3 p}{6\mathfrak{R}^2},\quad \zeta = \mathfrak{R}\left(1 - \mathrm{Cos}\frac{s}{\mathfrak{R}}\right) + \frac{s^2 p}{4\mathfrak{R}}. \quad (143)$$

гдѣ $\quad p = i\mathrm{Cos}^2\varphi_x \mathrm{Cos}\, 2A_x - i\mathrm{Cos}^2\varphi_y \mathrm{Cos}\, 2A_y - e^2 \mathrm{Cos}^2\varphi \mathrm{Cos}\, 2A$

Означая черезъ s' и p' величины s' и p', соотвѣтствующія другому азимуту, долготѣ и широтѣ конечной точки, мы получимъ

$$k' = \mathfrak{R}\mathrm{Sin}\left(\frac{s'}{\mathfrak{R}}\right) - \frac{s'^3 p'}{6\mathfrak{R}^2},\quad \zeta = \mathfrak{R}\left[1 - \mathrm{Cos}\left(\frac{s'}{\mathfrak{R}}\right)\right] + \frac{s'^2 p'}{4\mathfrak{R}}. \quad (144)$$

Пренебрегая степенями s и s' высшими четвертой, получимъ далѣе:

$$kk' = \mathfrak{R}^2 \mathrm{Sin}\left(\frac{s}{\mathfrak{R}}\right) \mathrm{Sin}\left(\frac{s'}{\mathfrak{R}}\right) - \frac{ss'}{6\mathfrak{R}^2}(s^2 p + s'^2 p'),$$

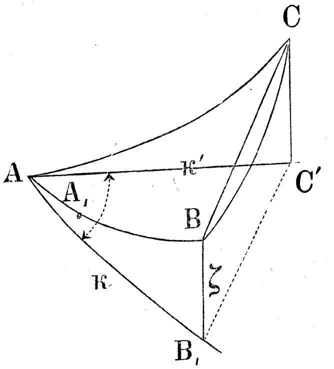
$$k^2 = \mathfrak{R}^2 \mathrm{Sin}^2\left(\frac{s}{\mathfrak{R}}\right) - \frac{s^4 p}{3\mathfrak{R}^2}.$$

$$\zeta\zeta'=\Re^2\left[1-\operatorname{Cos}\left(\frac{s}{\Re}\right)-\operatorname{Cos}\left(\frac{s}{\Re}\right)+\operatorname{Cos}\left(\frac{}{\Re}\right)\operatorname{Cos}\left(\frac{s}{\Re}\right)\right]+$$

$$+\frac{s^2s'^2}{8\Re^2}(p+p'),$$

$$\zeta^2=R^2\left[1-2\operatorname{Cos}\left(\frac{s}{\Re}\right)+\operatorname{Cos}^2\left(\frac{s}{\Re}\right)\right]+\frac{s^4p}{4\Re^2}\cdot \tag{144}$$

§ 19. Пусть A, B и C представляютъ собою углы сферическаго треугольника; a, b и c—его стороны. Пусть $A'=A+dA$, $B'=B+dB$ и $C'=C+dC$ будутъ углы эллипсоидальнаго треугольника, стороны котораго имѣютъ длины a, b и c и представляютъ собою линіи провѣшиванія, длины которыхъ можно принять равными длинамъ соотвѣтствующихъ нормальныхъ сѣченій, безразлично того, или другого направленія. Черезъ α, β и γ означимъ азимуты сторонъ эллипсоидальнаго треугольника, считаемыхъ въ направленіи порядка буквъ AB, BC и CA. Радіусъ сферы примемъ равнымъ $\Re$, средней кривизнѣ въ срединѣ эллипсоидальнаго треугольника. Означая черезъ k и ζ координаты точки B и черезъ k' и ζ' координаты точки C, вершинъ эллипсоидальнаго треугольника, имѣемъ изъ чертежа



$$\overline{BC}^2=k^2+k'^2-2kk'\operatorname{Cos}A'+(\zeta'-\zeta)^2$$

Подставляя сюда вмѣсто k, k', ζ и ζ' ихъ величины изъ формулъ (144), получимъ

$$\overline{BC}^2=\Re^2\Big\{\operatorname{Sin}^2b-\frac{1}{3}b^4p_b+\operatorname{Sin}^2c\quad\frac{1}{3}c^4p_c-2\operatorname{Sin}b\operatorname{Sin}c\operatorname{Cos}A'+$$

$$+\frac{1}{3}(b^3cp_b+c^3bp_c)+1-2\operatorname{Cos}b+\operatorname{Cos}^2b+\frac{1}{4}b^4p_b-2+2\operatorname{Cos}b+$$

$$+2\operatorname{Cos}c-2\operatorname{Cos}b\operatorname{Cos}c-\frac{1}{4}b^2c^2(p_b+p_c)+1-2\operatorname{Cos}c+\operatorname{Cos}^2c+\frac{1}{4}c^4pc\Big\},$$

сдѣлавъ приведеніе подобныхъ членовъ, получимъ

$$BC^2=\mathfrak{R}^2\Big[2(1-\operatorname{Cos}b\operatorname{Cos}c-\operatorname{Sin}b\operatorname{Sin}c\operatorname{Cos}A')+$$
$$+\frac{b^2}{12}p_b(-3c^2-b^2+4bc\operatorname{Cos}A')$$
$$+\frac{c^2}{12}p_c(-3b^2-c^2+4bc\operatorname{Cos}A')\Big]. \qquad (145)$$

Съ другой стороны мы можемъ выразить длину хорды d, соотвѣтствующую дугѣ s помощію формулъ (144)

$$d^2=k^2+\zeta^2=2\mathfrak{R}^2\left[1-\operatorname{Cos}\left(\frac{s}{\mathfrak{R}}\right)\right]-\frac{s^4p}{12\mathfrak{R}^2}. \qquad (146)$$

Примѣняя эту формулу къ хордѣ $\overline{BC}$, соотвѣтствующей сторонѣ a, получимъ

$$\overline{BC}^2=\mathfrak{R}^2\left\{2[1-\operatorname{Cos}a]-\frac{1}{12}a^4p_a\right\}. \qquad (147)$$

Сравнивая формулы (145) и (147) получимъ

$$2(\operatorname{Cos}a-\operatorname{Cos}b\operatorname{Cos}c-\operatorname{Sin}b\operatorname{Sin}c\operatorname{Cos}A')+$$
$$+a^4[I_x\operatorname{Cos}2\alpha_x+I_y\operatorname{Cos}2\alpha_y+I\operatorname{Cos}2\alpha]+$$
$$+b^2H[I_x\operatorname{Cos}2\beta_x+I_y\operatorname{Cos}2\beta_y+I\operatorname{Cos}2\beta]+$$
$$+c^2K[I_x\operatorname{Cos}2\gamma_x+I_y\operatorname{Cos}2\gamma_y+I\operatorname{Cos}2\gamma]=0 \qquad (148)$$

гдѣ

$$I_x=-\frac{1}{12}i\operatorname{Cos}^2\varphi_x,\quad I_y=\frac{1}{12}i\operatorname{Cos}^2\varphi_y,\quad I=\frac{1}{12}e^2\operatorname{Cos}^2\varphi, \qquad (149)$$

$$H=4bc\operatorname{Cos}A-3c^2-b^2=-a^2-2ac\operatorname{Cos}B.$$

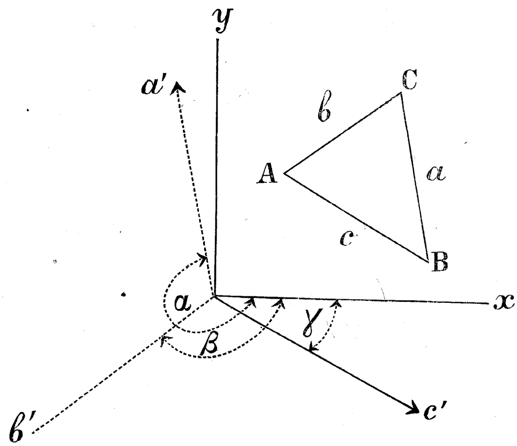
и (150)

$$K=4bc\operatorname{Cos}A-3b^2-c^2=-a^2-2ab\operatorname{Cos}C.$$

Въ послѣднихъ двухъ выраженіяхъ принято $A'=A$, такъ какъ H и K множатся на малыя величины I_x, I_y и I.

§ 20. Прежде чѣмъ приступить къ преобразованію формулы (148), представляющей собою основную формулу тригонометріи пебольшихъ треугольниковъ на эллипсоидѣ, мы выведемъ нѣкоторыя важныя формулы плоской тригонометріи.

Пусть треугольникъ ABC отнесенъ къ системѣ прямоугольныхъ прямолинейныхъ осей ох и оу. Пусть a′, b′ и c′ суть линіи, проходящія черезъ начало координатъ и соотвѣтственно параллельны сторонамъ $a = BC$, $b = CA$ и $c = AB$ и α, β и γ азимуты этихъ сторонъ относительно оси ох, тогда



$$A = 180^0 - \beta + \gamma,$$
$$B = 180 - \gamma + \alpha, \qquad (151)$$
$$C = 180 - \alpha + \beta.$$

Проектируя стороны треугольника на оси ох и оу получимъ

$$a\mathrm{Cos}\alpha + b\mathrm{Cos}\beta + c\mathrm{Cos}\gamma = 0, \qquad (152)$$
$$a\mathrm{Sin}\alpha + b\mathrm{Sin}\beta + c\mathrm{Sin}\gamma = 0.$$

Помножая первое изъ двухъ послѣднихъ уравненій на $\mathrm{Sin}\gamma$, а второе на $\mathrm{Cos}\gamma$ и вычитая, получимъ принимая во вниманіе (151)

$$a\mathrm{Sin}B - b\mathrm{Sin}A = 0, \qquad (153)$$

а перенося во вторую часть послѣдніе члены этихъ же уравненій, возвышая затѣмъ въ квадратѣ и складывая получимъ

$$a^2 - 2ab\mathrm{Cos}C + b^2 = c^2. \qquad (154)$$

Уравненія (153) и (154) представляютъ собою, какъ извѣстно, основныя уравненія плоской тригонометріи.

Изъ этихъ формулъ мы получимъ весьма важныя въ геодезіи формулы слѣдующимъ образомъ: имѣемъ

$$\mathrm{Cos}A = -\mathrm{Cos}(\beta - \gamma) \text{ и } \mathrm{Cos}2\alpha = \mathrm{Cos}^2\alpha - \mathrm{Sin}^2\alpha;$$

отсюда

$$a\mathrm{Cos}A\mathrm{Cos}2\alpha=a(\mathrm{Sin}\beta\mathrm{Sin}\gamma+\mathrm{Cos}\beta\mathrm{Cos}\gamma)(\mathrm{Sin}^2\alpha-\mathrm{Cos}^2\alpha)$$

или

$$a\mathrm{Cos}A\mathrm{Cos}2\alpha=a[\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Sin}\beta\mathrm{Sin}\gamma-\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Cos}\beta\mathrm{Cos}\gamma-$$
$$-\mathrm{Sin}\beta\mathrm{Sin}\gamma\mathrm{Cos}^2\alpha+\mathrm{Cos}\beta\mathrm{Cos}\gamma\mathrm{Sin}^2\alpha].$$

Напишемъ подобныя же выраженія для $b\mathrm{Cos}B\mathrm{Cos}2\beta$ и $c\mathrm{Cos}C\mathrm{Cos}2\gamma$ и сложимъ ихъ; тогда, замѣтивъ, что на основаніи (152), сумма членовъ подобныхъ первымъ двумъ членамъ второй части послѣдней формулы при сложеніи пропадаетъ, получимъ

$$P=a\mathrm{Cos}A\mathrm{Cos}2\alpha+b\mathrm{Cos}B\mathrm{Cos}2\beta+c\mathrm{Cos}C\mathrm{Cos}2\gamma=$$
$$=-a\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Sin}\beta\mathrm{Sin}\gamma+a\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Cos}\beta\mathrm{Cos}\gamma-$$
$$-b\mathrm{Cos}^2\beta\mathrm{Sin}\gamma\mathrm{Sin}\alpha+b\mathrm{Sin}^2\beta\mathrm{Cos}\gamma\mathrm{Cos}\alpha-$$
$$-c\mathrm{Cos}^2\gamma\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Sin}\beta+e\mathrm{Sln}^2\gamma\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Cos}\beta.$$

Замѣчая далѣе, что

$$-a\mathrm{Cos}\alpha=b\mathrm{Cos}\beta+c\mathrm{Cos}\gamma \text{ и } -a\mathrm{Sin}\alpha=b\mathrm{Sin}\beta+c\mathrm{Sin}\gamma$$

получимъ, что

$$P=b(\mathrm{Cos}\beta\mathrm{Sin}\beta\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Sin}\gamma-\mathrm{Sin}\beta\mathrm{Cos}\beta\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Cos}\gamma-\mathrm{Cos}^2\beta\mathrm{Sin}\gamma\mathrm{Sin}\alpha+$$
$$+\mathrm{Sin}^2\beta\mathrm{Cos}\gamma\mathrm{Cos}\alpha)+c(\mathrm{Cos}\gamma\mathrm{Sin}\gamma\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Sin}\beta-\mathrm{Sin}\gamma\mathrm{Cos}\gamma\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Cos}\beta-$$
$$-\mathrm{Cos}^2\gamma\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Sin}\beta+\mathrm{Sin}^2\gamma\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Cos}\beta)=$$
$$=b[\mathrm{Cos}\beta\mathrm{Sin}\gamma\mathrm{Sin}(\beta-\alpha)+\mathrm{Sin}\beta\mathrm{Cos}\gamma\mathrm{Sin}(\beta-\alpha)]+$$
$$+c[\mathrm{Sin}\beta\mathrm{Cos}\gamma\mathrm{Sin}(\gamma-\alpha)+\mathrm{Cos}\beta\mathrm{Sin}\gamma\mathrm{Sin}(\gamma-\alpha)]=$$
$$=-b\mathrm{Sin}C\mathrm{Sin}(\beta+\gamma)+c\mathrm{Sin}B\mathrm{Sin}(\beta+\gamma)=0.$$

Такимъ образомъ получимъ

$$a\mathrm{Cos}A\mathrm{Cos}2\alpha+b\mathrm{Cos}B\mathrm{Cos}2\beta+c\mathrm{Cos}C\mathrm{Cos}2\gamma=0, \qquad (155)$$

а повернувъ оси координатъ на 45^0 такъ, чтобы увеличить азимуты на 45^0, получимъ

$$a\mathrm{Cos}A\mathrm{Sin}2\alpha+b\mathrm{Cos}B\mathrm{Sin}2\beta+c\mathrm{Cos}C\mathrm{Sin}2\gamma=0. \qquad (156)$$

Изъ формулъ (152) легко получаются формулы

$$a^2\mathrm{Cos}2\alpha = b^2\mathrm{Cos}2\beta + 2bc\mathrm{Cos}(\beta+\gamma) + c^2\mathrm{Cos}2\gamma \qquad (157)$$

и

$$a^2\mathrm{Sin}2\alpha = b^2\mathrm{Sin}2\beta + 2bc\mathrm{Sin}(\beta+\gamma) + c^2\mathrm{Sin}2\gamma. \qquad (158)$$

§ 21. Возвращаясь къ равенству (148) получимъ изъ него, вставляя вмѣсто CosA′ равное ему $\mathrm{Cos}(A+dA) = \mathrm{Cos}A - dA\mathrm{Sin}A$, означая черезъ S площадь треугольника и замѣтивъ, что

$$\mathrm{Cos}a - \mathrm{Cos}b\mathrm{Cos}c - \mathrm{Sin}b\mathrm{Sin}c\mathrm{Cos}A = 0,$$

$$\begin{aligned}4SdA = &[-a^4\mathrm{Cos}2\alpha_x + b^2\mathrm{Cos}2\beta_x(a^2+2ac\mathrm{Cos}B) + c^2\mathrm{Cos}2\gamma_x(a^2+2ab\mathrm{Cos}C)]I_x +\\ &+[-a^4\mathrm{Cos}2\alpha_y + b^2\mathrm{Cos}2\beta_y(a^2+2ac\mathrm{Cos}B) + c^2\mathrm{Cos}2\gamma_y(a^2+2ab\mathrm{Cos}C)]I_y +\\ &+[-a^4\mathrm{Cos}2\alpha + b^2\mathrm{Cos}2\beta(a^2+2ac\mathrm{Cos}B) + c^2\mathrm{Cos}2\gamma(a^2+2ab\mathrm{Cos}C)]I =\\ &= Q_xI_x + Q_yI_y + QI \qquad (159)\end{aligned}$$

Послѣднюю формулу можно упростить, примѣняя къ выраженіямъ стоящимъ въ квадратныхъ скобкахъ и обозначенныхъ Q_x, Q_y и Q формулы (155) и (157). Такимъ образомъ мы имѣемъ

$$\begin{aligned}Q = &-a^4\mathrm{Cos}2\alpha + b^2\mathrm{Cos}2\beta(a^2+2ac\mathrm{Cos}B) + c^2\mathrm{Cos}2\gamma(a^2+2ab\mathrm{Cos}C) =\\ &= a^2[-a^2\mathrm{Cos}2\alpha + b^2\mathrm{Cos}2\beta + c^2\mathrm{Cos}2\gamma] + 2abc[b\mathrm{Cos}B\mathrm{Cos}2\beta + c\mathrm{Cos}C\mathrm{Cos}2\gamma]\end{aligned}$$

Примѣняя формулы (155) и (157), получимъ

$$\begin{aligned}Q = &a^2[-2bc\mathrm{Cos}(\gamma+\beta)] - 2abc.a\mathrm{Cos}A\mathrm{Cos}2\alpha =\\ &= -2abc.a[\mathrm{Cos}(\gamma+\beta) + \mathrm{Cos}A\mathrm{Cos}2\alpha] = -2abc.a[\mathrm{Cos}(\gamma+\beta) - \mathrm{Cos}(\gamma-\beta)\mathrm{Cos}2\alpha] =\\ &= -a^2bc\{\mathrm{Cos}(\gamma+\beta) + \mathrm{Cos}(\gamma+\beta) - \mathrm{Cos}[2\alpha+\gamma-\beta] - \mathrm{Cos}[2\alpha-\gamma+\beta]\} =\\ &= 2a^2bc[\mathrm{Sin}(\alpha-\beta)\mathrm{Sin}(\alpha+\gamma) - \mathrm{Sin}(\gamma-\alpha)\mathrm{Sin}(\alpha+\beta)] =\\ &= -2abc[a\mathrm{Sin}B\mathrm{Sin}(\alpha+\beta) - a\mathrm{Sin}C\mathrm{Sin}(\alpha+\gamma)] =\\ &= 2abc\mathrm{Sin}A[b\mathrm{Sin}(\alpha+\beta) - c\mathrm{Sin}(\gamma+\alpha)]. \qquad (160)\end{aligned}$$

Путемъ подобныхъ же преобразованій упростимъ и остальные члены формулы (159) и получимъ, выставляя значеніе s и сокращая общихъ множителей

$$dA = abc\left\{ I_x\left[\frac{\mathrm{Sin}(\alpha_x+\gamma_x)}{b} - \frac{\mathrm{Sin}(\alpha_x+\beta_x)}{c}\right] + \right.$$

$$+ I_y\left[\frac{\mathrm{Sin}(\alpha_y+\gamma_y)}{b} - \frac{\mathrm{Sin}(\alpha_y+\beta_y)}{c}\right] +$$

$$\left. + I\left[\frac{\mathrm{Sin}(\alpha+\gamma)}{b} - \frac{\mathrm{Sin}(\alpha+\beta)}{c}\right]\right\}.$$

Подобнымъ же образомъ получимъ

$$dB = abc\left\{ I_y\left[\frac{\mathrm{Sin}(\beta_x+\alpha_x)}{c} - \frac{\mathrm{Sin}(\gamma_x+\beta_x)}{a}\right] + \right. \tag{161}$$

$$\left. + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right\},$$

и

$$dC = abc\left\{ I_x\left[\frac{\mathrm{Sin}(\gamma_x+\beta_x)}{a} - \frac{\mathrm{Sin}(\alpha_x+\gamma_x)}{b}\right] + \right.$$

$$\left. + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right\}.$$

Изъ послѣднихъ формулъ усматриваемъ весьма важное обстоятельство, заключающееся въ томъ, что хотя углы эллипсоидальнаго треугольника и отличаются отъ угловъ сферическаго треугольника, длины сторонъ котораго соотвѣтственно равны сторонамъ перваго, но суммы угловъ перваго и второго треугольниковъ между собою равны такъ что

$$A'+B'+C' = A+B+C. \tag{162}$$

§ 22. Обратимся къ вычисленію длины дугъ кривыхъ линій на эллипсоидѣ, данномъ уравненіями

$$x = \rho\sqrt{1+i}\,\mathrm{Cos}u\mathrm{Cos}v = \rho\frac{(1+i)\mathrm{Cos}\varphi\mathrm{Cos}\lambda}{\Delta},$$

$$y = \rho\sqrt{1-i}\,\mathrm{Cos}u\mathrm{Sin}v = \rho\frac{(1-i)\mathrm{Cos}\varphi\mathrm{Sin}\lambda}{\Delta},$$

$$z = \rho\sqrt{1-e^2}\ \mathrm{Sin}\,u = \rho\frac{(1-e^2)\mathrm{Sin}\varphi}{\Delta},$$

$$\Delta = \sqrt{1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi + i\,\mathrm{Cos}^2\varphi\mathrm{Cos}2\lambda}.$$

Вычислимъ сначала дифференціалъ дуги кривой, заданной уравненіемъ:

$$\lambda = f(\varphi) \text{ или } \varphi = f_1(\lambda) \tag{163}$$

мы имѣемъ въ первомъ случаѣ

$$\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2 =$$
$$= F + 2G\frac{d\lambda}{d\varphi} + H\left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2, \tag{164}$$

а во второмъ

$$\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = F\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 + 2G\frac{d\varphi}{d\lambda} + H, \tag{165}$$

гдѣ

$$F = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2,$$

$$G = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial z}{\partial \lambda}, \quad H = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2. \tag{166}$$

Дѣло сводится, такимъ образомъ, къ отысканію частныхъ производныхъ x, y и z относительно φ и λ, которыя мы отличили знакомъ знакомъ „∂“ При вычисленіи этихъ производныхъ мы будемъ пренебрегать степенями e высшими четвертой и i высшими первой, а также и произведеніями ie^2, ie^4 и т. д.

Мы имѣемъ во-первыхъ

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} = -\frac{e^2 \mathrm{Sin}\varphi \mathrm{Cos}\varphi + i\,\mathrm{Sin}\varphi \mathrm{Cos}\varphi \mathrm{Cos}2\lambda}{\Delta} \quad \text{и}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} = -i\frac{\mathrm{Cos}^2\varphi \mathrm{Sin}2\lambda}{\Delta} \tag{167}$$

кромѣ того, замѣтимъ, что съ принятымъ приближеніемъ, можно представить Δ въ слѣдующемъ видѣ

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1 - \frac{1}{2}i\,\mathrm{Cos}^2\varphi \mathrm{Cos}2\lambda}{\sqrt{1 - e^2 \mathrm{Sin}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2\mathrm{Sin}^2\varphi}} - \frac{1}{2}i\,\mathrm{Cos}^2\varphi \mathrm{Cos}2\lambda. \tag{168}$$

Далѣе имѣемъ

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi}=\rho\Big[-\frac{\mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Cos}\lambda}{\Delta}+e^2\frac{\mathrm{Cos}^2\varphi\,\mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Cos}\lambda}{\Delta^3}+$$

$$+i\left(\frac{\mathrm{Cos}^2\varphi\,\mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Cos}2\lambda\,\mathrm{Cos}\lambda}{\Delta^3}-\frac{\mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Cos}\lambda}{\Delta}+\ldots\ldots\right)\Big]=$$

$$=-\rho\frac{\mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Cos}\lambda}{\sqrt{1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi}}\left[1-e^2\frac{\mathrm{Cos}^2\varphi}{1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi}+i\left(1-\frac{3}{2}\mathrm{Cos}^2\varphi\,\mathrm{Cos}2\lambda\right)\right].$$

$$=-\rho\frac{\mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Cos}\lambda}{\sqrt{1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi}}\left\{1-e^2\frac{\mathrm{Cos}^2\varphi}{1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi}\right\}\left\{1+i\left(1-\frac{3}{2}\mathrm{Cos}^2\varphi\,\mathrm{Cos}2\lambda\right)\right\}=$$

$$=-\rho(1-e^2)\frac{\mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Cos}\lambda}{(1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi)^{3/2}}\left\{1+\frac{i}{2}(2-3\mathrm{Cos}^2\varphi\,\mathrm{Cos}2\lambda)\right\}.$$

Точно также получимъ

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial \varphi}&=-\rho(1-e^2)\frac{\mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Sin}\lambda}{(1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi)^{3/2}}\left\{1-\frac{i}{2}(2+3\mathrm{Cos}^2\varphi\,\mathrm{Cos}2\lambda)\right\},\\ \frac{\partial z}{\partial \varphi}&=\rho(1-e^2)\frac{\mathrm{Cos}\varphi}{(1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi)^{3/2}}\left\{1-\frac{i}{2}(1-3\mathrm{Sin}^2\varphi)\mathrm{Cos}2\lambda\right\}\end{aligned}\right\}\quad(169)$$

и далѣе

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda}=-\rho\frac{\mathrm{Cos}\varphi\,\mathrm{Sin}\lambda}{\sqrt{1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi}}\left\{1+i\left(1-2\mathrm{Cos}^2\varphi\,\mathrm{Cos}^2\lambda-\frac{1}{2}\mathrm{Cos}^2\varphi\,\mathrm{Cos}2\lambda\right)\right\}.$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda}=\rho\frac{\mathrm{Cos}\varphi\,\mathrm{Cos}\lambda}{\sqrt{1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi}}\left\{1-i\left(1-2\mathrm{Cos}^2\varphi\,\mathrm{Sin}^2\lambda+\frac{1}{2}\mathrm{Cos}^2\varphi\,\mathrm{Cos}2\lambda\right)\right\},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda}=\rho\frac{(1-e^2)\mathrm{Sin}\varphi}{\sqrt{1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi}}\,i\,\mathrm{Cos}^2\varphi\,\mathrm{Sin}2\lambda\,.$$

Отсюда получимъ

$$F=\frac{\rho^2(1-e^2)^2}{(1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi)^2}\left[1-i(1-3\mathrm{Sin}^2\varphi)\mathrm{Cos}2\lambda\right],$$

$$H=\rho^2\frac{\mathrm{Cos}^2\varphi}{1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi}\left[1-2i\left(1+\frac{1}{2}\mathrm{Cos}^2\varphi\right)\mathrm{Cos}2\lambda\right] \qquad (170)$$

$$G=\rho^2 i\mathrm{Sin}2\varphi\mathrm{Cos}2\lambda.$$

Полученныя нами выраженія можно написать слѣдующимъ образомъ:

$$F=F_0+iF', \quad H=H_0+iH', \quad G=iG',$$

гдѣ

$$F_0=\frac{\rho^2(1-e^2)^2}{(1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi)^3}, \quad F'=-\rho^2(1-3\mathrm{Sin}^2\varphi)\mathrm{Cos}2\lambda,$$

$$H_0=\frac{\rho^2\mathrm{Cos}^2\varphi}{1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi}, \quad H'=-2\rho^2(1+\frac{1}{2}\mathrm{Cos}^2\varphi)\mathrm{Cos}2\lambda, \qquad (171)$$

$$G=\rho^2\mathrm{Sin}2\varphi\mathrm{Cos}2\lambda.$$

Изъ уравненія кривой получимъ производныя $\frac{d\lambda}{d\varphi}$ и $\frac{d\varphi}{d\lambda}$ подъ видомъ

$$\frac{d\lambda}{d\varphi}=\Lambda_0+i\Lambda' \quad \text{и} \quad \frac{d\varphi}{d\lambda}=\Phi_0+i\Phi'. \qquad (172)$$

Принявъ эти обозначенія, мы можемъ въ томъ случаѣ, когда λ дано въ функціи φ выраженіе ds написать подъ видомъ

$$ds=\{F_0+H_0\Lambda_0{}^2+i[2H\Lambda'+F'+2G'\Lambda_0+H'\Lambda_0{}^2]\}d\varphi^2,$$

откуда

$$ds^2=\sqrt{F_0+H_0\Lambda_0{}^2}d\varphi+\frac{1}{2}i\frac{2H\Lambda'+F'+2G'\Lambda_0+H'\Lambda_0{}^2}{\sqrt{F_0+H_0\Lambda_0{}^2}}d\varphi. \qquad (173)$$

Означая черезъ s длину кривой линіи на эллипсоидѣ, а черезъ s_0 длину этой кривой, разсчитанной въ предположеніи $i=o$, т. е. на эллипсоидѣ вращенія, получимъ

$$s=s_0+\frac{1}{2}i\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{2H_0\Lambda'+F'+2G'\Lambda_0+H'\Lambda_0{}^2}{\sqrt{F_0+H_0\Lambda_0{}^2}}d\varphi. \qquad (174)$$

Если φ выражено въ функціи λ, мы получимъ

$$s = s_0 + \frac{1}{2} i \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{2F_0\Phi' + F'\Phi_0^2 + 2G'\Phi_0 + H'}{\sqrt{F_0\Lambda_0^2 + H_0}} d\lambda\,. \tag{175}$$

§ 23. Для вычисленія поправки дуги меридіана на эллипсоидѣ замѣтимъ, что для меридіана мы имѣемъ $\lambda = \text{Const}$ и слѣдовательно, $\Lambda_0 = \Lambda' = 0$.

Мы получимъ такимъ образомъ

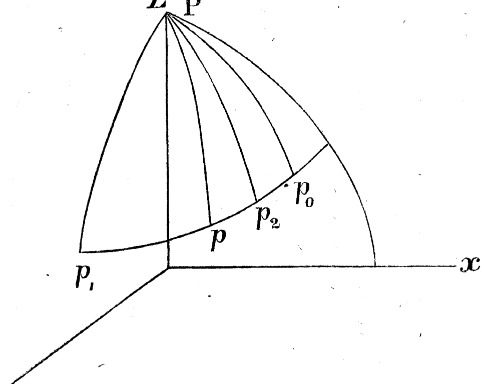
$$s = s_0 + \frac{1}{2} i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{F' d\varphi}{\sqrt{F_0}} = s_0 + \frac{1}{2} i\rho \operatorname{Cos} 2\lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (1 - 3\operatorname{Sin}^2\varphi) d\varphi =$$

$$= s_0 + \frac{1}{4} i\rho \operatorname{Cos} 2\lambda [\varphi_1 \quad \varphi_2 - 3\operatorname{Cos}(\varphi_1 + \varphi_2)\operatorname{Sin}(\varphi_1 + \varphi_2)]\,. \tag{176}$$

Для дуги параллели мы будемъ имѣть $\varphi = \text{Const}$ и слѣдовательно $\Phi_0 = \Phi' = 0$ и

$$s = s_0 + \frac{1}{2} i \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{H' d\lambda}{\sqrt{H_0}} = s_0 + i\rho\left(1 + \frac{1}{2}\operatorname{Cos}^2\varphi\right)\operatorname{Cos}(\lambda_2 + \lambda_1)\operatorname{Sin}(\lambda_2 - \lambda_1)\,. \tag{177}$$

§ 24. Для нормальныхъ сѣченій, кривой провѣшиванія и геодезической кривой, которыя для случая $e^2 = 0$ и $i = 0$ превращаются въ большіе круги на сферѣ радіуса ρ, мы можемъ въ поправочномъ членѣ пренебречь степенями $i = \frac{7}{4} e^4 = 0.00007$ высшими первой и степенями e высшими четвертой. Чтобы выразить $\operatorname{Cos} 2\lambda$ въ функціи φ, можно пользоваться сферическими треугольниками слѣдующимъ образомъ: именно изъ треугольни-



ковъ общая вершина которыхъ находится въ полюсѣ, а остальныя вершины въ точкахъ $p_1(\varphi_1, \lambda_1)$, $p(\varphi, \lambda)$, $p_2(\varphi_{22}\lambda_2)$ и $p_0(\varphi_0, \lambda_0)$ изображенныхъ на чертежѣ

$$\begin{aligned}
&Tg\varphi_1 Sin(\lambda-\lambda_0)+Tg\varphi_0 Sin(\lambda_1-\lambda)=Tg\varphi Sin(\lambda_1-\lambda_0),\\
&Tg\varphi_2 Sin(\lambda-\lambda_0)+Tg\varphi_0 Sin(\lambda_1-\lambda)=Tg\varphi Sin(\lambda_2-\lambda_0),\\
&Tg\varphi_1 Sin(\lambda_2-\lambda)+Tg\varphi_2 Sin(\lambda_1-\lambda_0)=Tg\varphi_0 Sin(\lambda_1-\lambda_2).
\end{aligned} \tag{178}$$

Первыя изъ этихъ формулъ даютъ

$$\begin{aligned}
&A_1 Sin\lambda+B_1 Cos\lambda=S_1 Tg\varphi,\\
&A_2 Sin\lambda+B_2 Cos\lambda=S_2 Tg\varphi,
\end{aligned} \tag{179}$$

гдѣ

$$\begin{aligned}
&A_1=Tg\varphi_1 Cos\lambda_0-Tg\varphi_0 Cos\lambda_1,\ B_1=Tg\varphi_0 Sin\lambda_1-Tg\varphi_1 Sin\lambda_0,\\
&S_1=Sin(\lambda_1-\lambda_0),\\
&A_2=Tg\varphi_2 Cos\lambda_0-Tg\varphi_0 Cos\lambda_2,\ B_2=Tg\varphi_0 Sin\lambda_2-Tg\varphi_2 Sin\lambda_0,\\
&S_1=Sin(\lambda_1-\lambda_0),
\end{aligned} \tag{180}$$

Изъ уравненій (179) получимъ

$$\begin{aligned}
&(A_1B_2-A_2B_1)Sin\lambda=(S_1B_2-S_2B_1)Tg\varphi,\\
&(B_1A_2-B_2A_1)Cos\lambda=(S_1A_2-S_2A_1)Tg\varphi,
\end{aligned}$$

откуда

$$Cos2\lambda=QTg^2\varphi \quad и \quad Sin2\lambda=\mathfrak{Q}Tg^2\varphi$$

гдѣ

$$\begin{aligned}
&Q=-\frac{(S_1B_2-S_2B_1)^2-(S_1A_2-S_2A_1)^2}{(A_1B_2-A_2B_1)^2} \quad и\\
&\mathfrak{Q}=2\frac{(S_1B_2-S_2B_1)(S_1A_2-S_2A_1)}{(A_1B_2-A_2B_1)^2}.
\end{aligned} \tag{181}$$

Послѣднее изъ равенствъ (178) даетъ намъ возможность вычислить $tg\varphi_0$.

§ 25. Для того чтобы получить выраженіе для поправки длины геодезической кривой, соединяющей точки $p_1(\varphi_1, \lambda_1)$ и $p_2(\varphi_2, \lambda_2)$

для эллипсоида, воспользуемся формулой (36), примѣняя ее къ координатамъ φ и λ; тогда получимъ

$$\mathrm{TgA}=\frac{M\frac{\partial x}{\partial\varphi}-L\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\left(M\frac{\partial x}{\partial\lambda}-L\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)\frac{d\lambda}{d\varphi}}{\frac{\partial z}{\partial\varphi}+\frac{\partial z}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{d\varphi}}, \tag{182}$$

гдѣ A азимутъ кривой, уравненіе которой

$$\lambda=f(\varphi).$$

Примѣняя затѣмъ формулы (73) и (169), получимъ

$$M\frac{\partial x}{\partial\varphi}-L\frac{\partial y}{\partial\varphi}=-\frac{1}{2}\,i\rho\,\mathrm{Sin}2\varphi\,\mathrm{Sin}2\lambda,$$

или, съ принятымъ приближеніемъ

$$M\frac{\partial x}{\partial\varphi}-L\frac{\partial y}{\partial\varphi}=-i\rho\frac{1}{\sqrt{1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi}}\frac{d\lambda}{d\varphi}\mathrm{Cos}^2\varphi\,\mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Sin}2\lambda\frac{1}{\mathrm{Cos}\varphi\frac{d\lambda}{d\varphi}}; \tag{183}$$

Выраженіе $\mathrm{Cos}\varphi\frac{d\lambda}{d\varphi}$ въ равенствѣ (183) можно замѣнить его приближеннымъ значеніемъ, принимая кривую $\lambda=f(\varphi)$ за большой кругъ на сферѣ радіуса s, проходящій черезъ точки (φ_1, λ_1) и $(\varphi_2\lambda_2)$ этой сферы.

Если черезъ φ_0 обозначимъ широту параллели, которой разсматриваемый большой кругъ касается, а черезъ α азимутъ этого большого круга въ точкѣ (φ,λ), то

$$\mathrm{Cos}\varphi\frac{d\lambda}{d\varphi}=\mathrm{Tg}\alpha=\frac{\mathrm{Cos}\varphi_0}{\sqrt{\mathrm{Cos}^2\varphi-\mathrm{Cos}^2\varphi_0}}, \tag{184}$$

и равенство (183) можетъ быть представлено въ видѣ

$$M\frac{\partial x}{\partial\varphi}-L\frac{\partial y}{\partial\varphi}=-i\rho\frac{\mathrm{Cos}^2\varphi\frac{d\lambda}{d\varphi}}{\sqrt{1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi}}\cdot\mathrm{Sin}\varphi\frac{\sqrt{\mathrm{Cos}^2\varphi-\mathrm{Cos}^2\varphi_0}}{\mathrm{Cos}\varphi_0}\mathrm{Sin}2\lambda. \tag{185}$$

Далѣе получимъ такимъ-же образомъ

$$\left(M\frac{\partial x}{\partial \lambda}-L\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)\frac{d\lambda}{d\varphi}=-\zeta\frac{\mathrm{Cos}^2\frac{d\lambda}{d\varphi}}{\sqrt{1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi}}\left\{1+i\left(1+\frac{1}{2}\mathrm{Cos}^2\varphi\right)\mathrm{Cos}\,2\lambda\right\},\quad(186)$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi}+\frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{d\varphi}=\zeta\frac{(1-e^2)\mathrm{Cos}\varphi}{(1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi)^{3/2}}\left\{1-i\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{Sin}^2\varphi\right)\mathrm{Cos}2\lambda-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\mathrm{Sin}\varphi\frac{\mathrm{Cos}\varphi_0}{\sqrt{\mathrm{Cos}^2\varphi-\mathrm{Cos}^2\varphi_0}}\mathrm{Sin}\,2\lambda\right]\right\}.\quad(187)$$

Воспользовавшись формулами (185), (186) и (187), получимъ изъ (182)

$$\mathrm{Tg}A=\frac{1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi}{1-e^2}\mathrm{Cos}\varphi\,\frac{d\lambda}{d\varphi}(1-q^2e^4\delta),\quad(188)$$

гдѣ

$$\delta=2\mathrm{Cos}^2\varphi\mathrm{Cos}2\lambda+\mathrm{Sin}\varphi\mathrm{Sin}2\lambda\left(\frac{\sqrt{\mathrm{Cos}^2\varphi-\mathrm{Cos}^2\varphi_0}}{\mathrm{Cos}^4\varphi_0}-\frac{\mathrm{Cos}\varphi_0}{\sqrt{\mathrm{Cos}^2\varphi-\mathrm{Cos}^2\varphi_0}}\right),\quad(189)$$

и

$$q^2=\frac{i}{e^4}.\quad(190)$$

Выразимъ теперь TgA въ функціи φ и λ пользуясь тѣми свойствами геодезической линіи на эллипсоидѣ, что произведеніе радіуса кривизны R въ точкѣ (φ, λ) этой кривой на кубъ разстоянія, p, отъ центра эллипсоида, касательной плоскости проведенной въ той-же точкѣ къ эллипсоиду, есть величина постоянная для всѣхъ точекъ данной геодезической кривой, то-есть свойствомъ выражаемымъ равенствомъ

$$Rp^3=\mathrm{Const}.$$

Примѣняя формулы (80), (81), (82) и (84), и опредѣляя постоянную такъ, чтобы въ точкѣ кривой, въ которой $A=90^0$, $\varphi=\varphi_0$ и $\lambda=\lambda_0$, получимъ, замѣнивъ i черезъ q^2e^4 съ приближеніемъ до e^6,

$$\frac{1-e^2\operatorname{Sin}^2\varphi+q^2e^4\operatorname{Cos}^2\varphi\operatorname{Cos}2\lambda}{1-e^2+e^2\operatorname{Cos}^2A\operatorname{Cos}^2\varphi-q^2e^4(1-e^2)\sigma}=$$

$$=\frac{1-e^2\operatorname{Sin}^2\varphi_0+q^2e^4\operatorname{Cos}^2\varphi_0\operatorname{Cos}2\lambda_0}{1-e^2-q^2e^4(1-e^2)\operatorname{Cos}2\lambda_0},$$

гдѣ

$$\sigma=\operatorname{Cos}^2A\operatorname{Sin}^2\varphi\operatorname{Cos}2\lambda-2\operatorname{Sin}A\operatorname{Cos}A\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Sin}2\lambda+\operatorname{Sin}^2A\operatorname{Cos}2\lambda.$$

Уравненіе (191) можетъ быть преобразовано къ виду

$$\frac{1-e^2\operatorname{Sin}^2\varphi+q^2e^4\operatorname{Cos}^2\varphi\operatorname{Cos}2\lambda}{1+\frac{e^2}{1-e^2}\operatorname{Cos}^2\varphi\operatorname{Cos}^2A-q^2e^4\sigma}=\frac{1-e^2\operatorname{Sin}^2\varphi_0+q^2e^4\operatorname{Cos}^2\varphi_0\operatorname{Cos}2\lambda}{1-q^2e^4\operatorname{Cos}2\lambda_0}. \tag{192}$$

Освобождаясь отъ знаменателей, сдѣлавъ приведеніе подобныхъ членовъ и сокращая общаго множителя e^2, получимъ

$$\operatorname{Sin}^2\varphi-\operatorname{Sin}^2\varphi_0+\frac{1-e^2\operatorname{Sin}^2\varphi_0}{1-e^2}\operatorname{Cos}^2\varphi\operatorname{Cos}^2A,$$
$$+q^2e^2\{(1+\operatorname{Cos}^2\varphi)\operatorname{Cos}2\lambda_0-\operatorname{Cos}^2\varphi\operatorname{Cos}2\lambda-\sigma\}$$
$$+q^2e^4\{\operatorname{Cos}^2\varphi\operatorname{Cos}^2\varphi_0\operatorname{Cos}2\lambda\operatorname{Cos}^2A+\operatorname{Sin}^2\varphi\sigma-\operatorname{Cos}2\lambda_0\}=0.$$

Послѣднее равенство преобразуемъ, раздѣливъ его на Cos^2A и замѣняя $\frac{1}{\operatorname{Cos}^2A}$ черезъ $1+\operatorname{Tg}^2A$; мы получимъ тогда:

$$(\operatorname{Cos}^2\varphi-\operatorname{Cos}^2\varphi_0)\operatorname{Tg}^2A-(\operatorname{Cos}^2\varphi-\operatorname{Cos}^2\varphi_0)+\frac{1-e^2\operatorname{Sin}^2\varphi_0}{1-e^2}\operatorname{Cos}^2\varphi$$
$$+q^2e^2\{[(1+\operatorname{Cos}\varphi_0)\operatorname{Cos}2\lambda_0-\operatorname{Cos}^2\varphi\operatorname{Cos}2\lambda]\operatorname{Tg}^2A$$
$$-\frac{\sigma}{\operatorname{Cos}^2A}+(1+\operatorname{Cos}^2\varphi_0)\operatorname{Cos}2\lambda_0-\operatorname{Cos}^2\varphi\operatorname{Cos}2\lambda\}$$
$$+q^2e^4\{\operatorname{Cos}^2\varphi\operatorname{Cos}^2\varphi_0\operatorname{Cos}2\lambda+\operatorname{Sin}^2\varphi\frac{\sigma}{\operatorname{Cos}^2A}-$$
$$-\operatorname{Cos}2\lambda_0-\operatorname{Cos}2\lambda_0\operatorname{Tg}^2A\}=0.$$

Замѣтивъ, что

$$\frac{\sigma}{\mathrm{Cos}^2 A}=\mathrm{Sin}^2\varphi\mathrm{Cos}2\lambda-2\mathrm{Sin}\varphi\mathrm{Sin}2\lambda\mathrm{Tg}A+\mathrm{Cos}2\lambda\mathrm{Tg}^2 A,$$

получимъ

$$-(\mathrm{Cos}^2\varphi-\mathrm{Cos}^2\varphi_0)\mathrm{Tg}^2 A+\frac{1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi}{1-e^2}\mathrm{Cos}^2\varphi_0+$$

$$+q^2e^2\{[(1+\mathrm{Cos}^2\varphi_0)\mathrm{Cos}2\lambda_0-(1+\mathrm{Cos}^2\varphi)\mathrm{Cos}2\lambda]\mathrm{Tg}^2 A+$$
$$+2\mathrm{Sin}\varphi\mathrm{Sin}2\lambda\mathrm{Tg}A+(1+\mathrm{Cos}^2\varphi_0)\mathrm{Cos}2\lambda_0-\mathrm{Cos}2\lambda\}$$
$$+q^2e^4\{(\mathrm{Cos}^2\varphi\mathrm{Cos}^2\varphi_0+\mathrm{Sin}^2\varphi\mathrm{Sin}^2\varphi_0)\mathrm{Cos}2\lambda-\mathrm{Cos}2\lambda_0$$
$$-2\mathrm{Sin}\varphi\mathrm{Sin}^2\varphi_0\mathrm{Sin}2\lambda\mathrm{Tg}A+(\mathrm{Sin}^2\varphi_0\mathrm{Cos}2\lambda-\mathrm{Cos}2\lambda_0)\mathrm{Tg}^2 A\}=0. \quad (193)$$

Положимъ

$$\frac{d\lambda}{d\varphi}=\Lambda+q^2e^2\overline{\Lambda}; \quad (194)$$

мы получимъ тогда по формулѣ (188)

$$\mathrm{Tg}^2 A=\left(\frac{1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi}{1-e^2}\right)^2\mathrm{Cos}^2\varphi\{\Lambda^2+2q^2\overline{\Lambda}\Lambda+q^2e^4(q^2\overline{\Lambda}^2+\delta\Lambda^2)\} \quad (195$$

$$\mathrm{Tg}A=\frac{1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi}{1-e^2}\mathrm{Cos}\varphi\{\Lambda+q^2e^2\overline{\Lambda}+q^2e^4\delta\Lambda\}. \quad (196)$$

Полагаемъ далѣе для сокращенія

$$R=\sqrt{\mathrm{Cos}^2\varphi-\mathrm{Cos}^2\varphi_0}\quad D=\sqrt{(1+\mathrm{Cos}^2\varphi_0)\mathrm{Cos}2\lambda_0-(1+\mathrm{Cos}^2\varphi)\mathrm{Cos}2\lambda}$$

и

$$P=(\mathrm{Cos}^2\varphi\mathrm{Cos}^2\varphi_0+\mathrm{Sin}^2\varphi\mathrm{Sin}^2\varphi_0)\mathrm{Cos}2\lambda-\mathrm{Cos}2\lambda_0$$
$$-2\mathrm{Sin}\varphi\mathrm{Sin}^2\varphi_0\mathrm{Sin}2\lambda\mathrm{Tg}A \quad (197)$$
$$+(\mathrm{Sin}^2\varphi_0\mathrm{Cos}2\lambda-\mathrm{Cos}2\lambda_0)\mathrm{Tg}^2 A,$$

причемъ замѣтимъ, что въ выраженіи для P мы можемъ положить

$$\mathrm{Cos}2\lambda=Q\mathrm{Tg}^2\varphi,\quad \mathrm{Sin}2\lambda=\mathfrak{Q}\mathrm{Tg}^2\varphi$$

и

$$\mathrm{Tg}A=\frac{\mathrm{Cos}\varphi_0}{\sqrt{\mathrm{Cos}^2\varphi-\mathrm{Cos}^2\varphi_0}}.$$

Принявъ эти означенія и подставляя въ формулу (193) значенія Tg^2A и TgA изъ (195) и (196), получимъ

$$-R^2\mathrm{Cos}^2\varphi\left(\frac{1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi}{1-e^2}\right)^2\Lambda^2+\mathrm{Cos}^2\varphi_0\left(\frac{1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi}{1-e^2}\right)$$

$$+q^2e^2\left\{-2R^2\mathrm{Cos}^2\varphi\left(\frac{1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi}{1-e^2}\right)^2\Lambda^2\frac{\overline{\Lambda}}{\Lambda}\left[1+e^2\left(q^2\frac{\overline{\Lambda}}{\Lambda}+\delta\frac{\overline{\overline{\Lambda}}}{\Lambda}\right)\right]\right.$$

$$+\left(\frac{D}{R}\right)^2R^2\mathrm{Cos}^2\varphi\left(\frac{1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi}{1-e^2}\right)^2\Lambda^2\left(1+2q^2e^2\frac{\overline{\Lambda}}{\Lambda}\right)$$

$$-\frac{\mathrm{Sin}\varphi\mathrm{Sin}2\lambda}{R}R\,\mathrm{Cos}\varphi\left(\frac{1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi}{1-e^2}\right)\Lambda\left(1+q\,e^2\frac{\overline{\Lambda}}{\Lambda}\right)$$

$$\left.+(1+\mathrm{Cos}^2\varphi_0)\mathrm{Cos}2\lambda_0-\mathrm{Cos}2\lambda\right\}+q^2e^4P=0. \qquad (198)$$

Такъ какъ при $q=0$ уравненіе (193) удовлетворяется значеніемъ $\mathrm{tg}A=\frac{1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi}{1-e^2}\mathrm{Cos}\varphi\Lambda$, то

$$\Lambda^2=\frac{\mathrm{Cos}^2\varphi_0}{\mathrm{Cos}^2\varphi}\,\frac{1-e^2}{1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi}\,\frac{1}{R^2} \qquad (199)$$

и уравненіе (198) приметъ слѣдующій видъ

$$-2\mathrm{Cos}\varphi_0(1+e^2\mathrm{Cos}^2\varphi)\frac{\overline{\Lambda}}{\Lambda}\left[1+e^2\left(q^2\frac{\overline{\Lambda}}{\Lambda}+\delta\frac{\overline{\overline{\Lambda}}}{\Lambda}\right)\right]$$

$$+\left(\frac{D}{R}\right)^2\mathrm{Cos}^2\varphi_0(1+e^2\mathrm{Cos}^2\varphi)\left(1+2q^2e^2\frac{\overline{\Lambda}}{\Lambda}\right)$$

$$-2\frac{\mathrm{Sin}\varphi\mathrm{Sin}2\lambda}{R}\mathrm{Cos}\varphi_0\left(1+\frac{1}{2}e^2\mathrm{Cos}^2\varphi\right)\left(1+q^2e^2\frac{\overline{\Lambda}}{\Lambda}\right)$$

$$+(1+\mathrm{Cos}^2\varphi_0)\mathrm{Cos}2\lambda_0-\mathrm{Cos}2\lambda+e^2P=0. \qquad (200)$$

Послѣднее уравненіе можетъ быть приведено къ виду

$$\overline{\Lambda}=\overline{\Lambda}'+e^2\overline{\Lambda}'', \qquad (201)$$

гдѣ

$$2\overline{\Lambda}'=\frac{(1+\mathrm{Cos}^2\varphi_0)\mathrm{Cos}\,2\lambda_0-(1+\mathrm{Cos}^2\varphi)\mathrm{Cos}\,2\lambda}{(\mathrm{Cos}^2\varphi-\mathrm{Cos}^2\varphi_0)^{3/2}}\cdot\frac{\mathrm{Cos}\varphi_0}{\mathrm{Cos}\varphi}$$

$$+2\frac{\mathrm{Sin}\varphi\mathrm{Sin}\,2\lambda}{\mathrm{Cos}^2\varphi-\mathrm{Cos}^2\varphi_0}\frac{1}{\mathrm{Cos}\varphi}+$$

$$+\frac{(1+\mathrm{Cos}^2\varphi_0)\mathrm{Cos}\,2\lambda_0-\mathrm{Cos}\,2\lambda}{(\mathrm{Cos}^2\varphi-\mathrm{Cos}^2\varphi_0)^{1/2}}\frac{1}{\mathrm{Cos}_0\varphi\mathrm{Cos}\varphi} \tag{202}$$

и

$$2\overline{\Lambda}''=-2\overline{\Lambda}'\left(\frac{3}{2}\mathrm{Cos}^2\varphi+q^2\frac{\overline{\Lambda}'}{\Lambda}+\delta\frac{\Lambda}{\overline{\Lambda}'}\right)+$$

$$+\frac{(1+\mathrm{Cos}^2\varphi_0)\mathrm{Cos}\,2\lambda_0-(1+\mathrm{Cos}^2\varphi)\mathrm{Cos}\,2\lambda}{(\mathrm{Cos}^2\varphi-\mathrm{Cos}^2\varphi)^{3/2}}\cdot\frac{\mathrm{Cos}\varphi_0}{\mathrm{Cos}\varphi}\left(\mathrm{Cos}^2\varphi+2q^2\frac{\overline{\Lambda}'}{\Lambda}\right)$$

$$-2\frac{\mathrm{Sin}\varphi\mathrm{Sin}\,2\lambda}{\mathrm{Cos}^2\varphi-\mathrm{Cos}^2\varphi_0}\frac{1}{\mathrm{Cos}\varphi}\left(\frac{1}{2}\mathrm{Cos}^2\varphi+2q^2\frac{\overline{\Lambda}'}{\Lambda}\right)+P\frac{\Lambda}{\mathrm{Cos}^2\varphi_0}, \tag{203}$$

причемъ въ послѣдней формулѣ Λ можетъ быть замѣнено выраженіемъ

$$\frac{\mathrm{Cos}\varphi_0}{\mathrm{Cos}\varphi}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Cos}^2\varphi-\mathrm{Cos}^2\varphi_0}}.$$

Для того, чтобы въ формулѣ для $\overline{\Lambda}'$ выразить $\mathrm{Cos}\,2\lambda$ и $\mathrm{Sin}\,2\lambda$ въ функціи отъ φ, замѣтимъ, что въ силу формулъ (181),

$$\mathrm{Cos}\,2\lambda=(\mathrm{Cos}\,2\lambda)_{e=0}-2e^2\left(\mathrm{Sin}\,2\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial e^2}\right)_{e=0}$$

$$=Q\mathrm{Tg}^2\varphi-2e\,\mathfrak{Q}\mathrm{Tg}^2\varphi\left(\frac{\partial\lambda}{\partial e^2}\right)_{e=0} \tag{204}$$

и $$\mathrm{Sin}\,2\lambda=\mathfrak{Q}\mathrm{Tg}^2\varphi+2e^2Q^2\mathrm{Tg}^2\varphi\left(\frac{\partial\lambda}{\partial e^2}\right)_{e=0}.$$

Дифференцируя (194) по e^2 и полагая въ результатѣ $e=0$, получимъ

$$\left[\frac{\partial}{\partial e^2}\left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)\right]_{e=0}=\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial e^2}\right)_{e=0}+q^2\overline{\Lambda'}$$

$$=-\frac{\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Cos}\varphi_0}{\sqrt{\operatorname{Cos}^2\varphi-\operatorname{Cos}^2\varphi_0}}+\frac{1}{2}q^2\left\{\frac{\operatorname{Cos}\varphi_0}{\operatorname{Cos}\varphi}\,\frac{(1+\operatorname{Cos}^2\varphi_0)\operatorname{Cos}2\lambda_0}{(\operatorname{Cos}^2\varphi-\operatorname{Cos}^2\varphi_0)^{3/2}}\right.$$

$$+Q\frac{\operatorname{Cos}\varphi_0}{\operatorname{Cos}\varphi}\,\frac{(1+\operatorname{Cos}^2\varphi)\operatorname{Tg}^2\varphi}{(\operatorname{Cos}^2\varphi-\operatorname{Cos}^2\varphi_0)^{3/2}}-2\mathfrak{Q}\,\frac{\operatorname{Tg}^3\varphi}{\operatorname{Cos}^2\varphi-\operatorname{Cos}^2\varphi_0}$$

$$\left.+\frac{(1+\operatorname{Cos}^2\varphi_0)\operatorname{Cos}2\lambda_0}{\operatorname{Cos}\varphi_0\operatorname{Cos}\varphi(\operatorname{Cos}^2\varphi-\operatorname{Cos}^2\varphi_0)^{1/2}}-Q\frac{\operatorname{Tg}^2\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi_0\operatorname{Cos}\varphi(\operatorname{Cos}^2\varphi-\operatorname{Cos}^2\varphi_0)^{1/2}}\right\},$$

откуда интегрируя, получимъ

$$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial e^2}\right)_{e=0}=\operatorname{Cos}\varphi_0\int_{\varphi}^{\varphi'}\frac{\operatorname{Cos}\varphi d\varphi}{\sqrt{\operatorname{Cos}^2\varphi-\operatorname{Cos}^2\varphi_0}}-$$

$$-\frac{1}{2}q^2\left\{\operatorname{Cos}^2\varphi_0(1+\operatorname{Cos}^2\varphi_0)\operatorname{Cos}2\lambda_0\int_{\varphi}^{\varphi'}\frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi(\operatorname{Cos}^2\varphi-\operatorname{Cos}^2\varphi_0)^{3/2}}\right.$$

$$+Q\operatorname{Cos}\varphi_0\int_{\varphi}^{\varphi'}\frac{(1+\operatorname{Cos}^2\varphi)\operatorname{Tg}^2\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi(\operatorname{Cos}^2\varphi-\operatorname{Cos}^2\varphi_0)^{3/2}}-$$

$$-2\mathfrak{Q}\int_{\varphi}^{\varphi'}\frac{\operatorname{Tg}^3\varphi d\varphi}{\operatorname{Cos}^2\varphi-\operatorname{Cos}^2\varphi_0}\tag{205}$$

$$+\frac{(1+\operatorname{Cos}^2\varphi_0)\operatorname{Cos}2\lambda_0}{\operatorname{Cos}\varphi_0}\int_{\varphi}^{\varphi'}\frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi(\operatorname{Cos}^2\varphi-\operatorname{Cos}^2\varphi_0)^{1/2}}-$$

$$\left.-\frac{Q}{\operatorname{Cos}^2\varphi_0}\int_{\varphi}^{\varphi'}\frac{\operatorname{Tg}^2\varphi d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi(\operatorname{Cos}^2\varphi-\operatorname{Cos}^2\varphi_0)^{1/2}}\right\},$$

гдѣ φ' есть широта точки пересѣченія большого круга, проходящаго черезъ точки $(\varphi_1\lambda_1)$ и $(\varphi_2\lambda_2)$, а интегралы послѣдовательными подстановками

$$\mathrm{Sin}\varphi = \mathrm{Sin}\varphi_0 \mathrm{Sin}\psi \text{ и } \mathrm{Tg}\psi = x\,,$$

приводятся къ весьма простому раціональному алгебраическому виду.

Изъ этихъ соображеній мы видимъ, что

$$\overline{\Lambda'} = \Lambda' + e^2(\Lambda')\left(\frac{\partial\lambda}{\partial e^2}\right)_{e=0},$$

гдѣ

$$2\Lambda' = \frac{(1+\mathrm{Cos}^2\varphi_0)\mathrm{Cos}2\lambda_0 - Q(1+\mathrm{Cos}^2\varphi)\mathrm{Tg}^2\varphi}{\mathrm{Cos}^2\varphi - \mathrm{Cos}^2\varphi_0)^{3}/_{2}}\,\frac{\mathrm{Cos}\varphi_0}{\mathrm{Cos}\varphi}$$

$$-2\mathfrak{Q}\frac{\mathrm{Sin}\varphi\mathrm{Tg}^2\varphi}{\mathrm{Cos}^2\varphi - \mathrm{Cos}^2\varphi_0}\,\frac{1}{\mathrm{Cos}\varphi} + \frac{(1+\mathrm{Cos}^2\varphi_0)\mathrm{Cos}2\lambda_0 - Q\mathrm{Tg}^2\varphi}{(\mathrm{Cos}^2\varphi - \mathrm{Cos}^2\varphi_0)^{1}/_{2}}\,\frac{1}{\mathrm{Cos}\varphi_0\mathrm{Cos}\varphi}, \tag{206}$$

а (Λ') получается изъ Λ' если Q замѣнить черезъ $(-2\mathfrak{Q})$, а $\mathfrak{Q}$ черезъ $2Q$.

Если положимъ

$$(\Lambda')\left(\frac{\partial\lambda}{\partial e^2}\right)_{e=0} + \overline{\Lambda''} = \Lambda'', \tag{207}$$

то замѣнивъ въ этомъ выраженіи $\overline{\Lambda'}$ черезъ Λ', получимъ

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = \Lambda + q^2e^2\Lambda' + q^2e^4\Lambda'', \tag{208}$$

гдѣ Λ, Λ' и Λ'' суть функціи φ.

Введемъ теперь слѣдующія означенія

$$F = f + q^2e^4f'',\quad G = q^2e^4g'',\quad H = h + q^2e^4h'', \tag{209}$$

гдѣ значенія f, h, f'', g'' и h'' очевидны изъ сравненія формулъ (209) съ формулами (170).

Принявъ эти означенія мы будемъ имѣть

$$ds = ds_0 + \overline{ds_1} + \overline{ds_2}\,, \tag{210}$$

гдѣ

$$ds_0 = \sqrt{f^2 + h^2\Lambda^2}, \quad \overline{ds_1} = q^2e^2 \frac{L\Lambda\Lambda'}{\sqrt{f^2+h^2\Lambda^2}},$$

и

$$\overline{ds_2} = \frac{1}{2}q^2e^4\left\{\frac{f''+2g''\Lambda+h''\Lambda^2+h_0(2\Lambda\Lambda''+q^2\Lambda'^2)}{\sqrt{f^2+h^2\Lambda^2}}\right. \tag{211}$$

$$\left. - q^2\frac{h^2\Lambda'^2\Lambda^2}{(f+h^2\Lambda^2)^{3/2}}\right\}.$$

Замѣтивъ, что

$$\Lambda = \frac{\operatorname{Cos}\varphi_0}{\operatorname{Cos}\varphi} \frac{1-\frac{1}{2}e^2\operatorname{Cos}^2\varphi}{\sqrt{\operatorname{Cos}^2\varphi - \operatorname{Cos}^2\varphi}}, \quad L = \rho^2\operatorname{Cos}^2\varphi(1+e^2\operatorname{Sin}^2\varphi)$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{f+h\Lambda^2}} = \frac{\sqrt{\operatorname{Cos}^2\varphi - \operatorname{Cos}^2\varphi}}{\operatorname{Cos}\varphi}\left\{1-\frac{1}{2}e^2(1+\operatorname{Sin}^2\varphi_0 - 3\operatorname{Sin}^2\varphi)\right\},$$

получимъ

$$\frac{h\Lambda}{\sqrt{f+h\Lambda^2}} = \rho\operatorname{Cos}\varphi_0[1-e^2(1+\operatorname{Sin}^2\varphi_0 - 3\operatorname{Sin}^2\varphi)], \tag{212}$$

откуда

$$\overline{ds_1} = ds_1 + e^2(ds_1),$$

гдѣ

$$ds_1 = q^2e^2\rho\operatorname{Cos}\varphi_0\Lambda',$$

$$(ds_1) = -q^2e^2\zeta\operatorname{Cos}\varphi_0(1+\operatorname{Sin}^2\varphi_0 - 3\operatorname{Sin}^2\varphi)\Lambda'.$$

Полагая

$$e^2(ds_1) + \overline{ds_2} = ds_2,$$

получимъ окончательно

$$ds = ds_0 + ds_1 + ds_2. \tag{213}$$

Вычисленіе поправочнаго члена

$$s_1 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} ds_1 = e^2q^2\rho\operatorname{Cos}\varphi_0\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\Lambda' d\varphi, \tag{214}$$

не представляетъ затрудненій. Въ самомъ дѣлѣ

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\Lambda'\varphi d=\frac{1}{2}(1+\mathrm{Cos}^2\varphi_0)\mathrm{Cos}\varphi_0\mathrm{Cos}2\lambda_0\int\frac{d\varphi}{(\mathrm{Cos}^2\varphi-\mathrm{Cos}^2\varphi_0)^{3/2}\mathrm{Cos}\varphi}$$

$$-\frac{1}{2}Q\,\mathrm{Cos}\varphi_0\int\frac{\mathrm{Sin}^2\varphi d\varphi}{\mathrm{Cos}^3\varphi(\mathrm{Cos}^2\varphi-\mathrm{Cos}^2\varphi_0)^{3/2}}$$

$$-\mathfrak{Q}\int\frac{\mathrm{Sin}^3\varphi d\varphi}{\mathrm{Cos}^3\varphi(\mathrm{Cos}^2\varphi-\mathrm{Cos}^2\varphi_0)} \qquad (215)$$

$$+\frac{(1+\mathrm{Cos}^2\varphi_0)}{\mathrm{Cos}\varphi_0}\mathrm{Cos}2\lambda_0\int\frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\varphi(\mathrm{Cos}^2\varphi-\mathrm{Cos}^2\varphi_0)^{1/2}}$$

$$-\frac{Q}{\mathrm{Cos}\varphi_0}\int\frac{\mathrm{Sin}^2\varphi d\varphi}{\mathrm{Cos}^3\varphi(\mathrm{Cos}^2\varphi-\mathrm{Cos}^2\varphi_0)^{1/2}}.$$

Подстановкой

$$\mathrm{Sin}\varphi=\mathrm{Sin}\varphi_0\mathrm{Sin}(\mathrm{ArcTg}x)$$

это выраженіе приводится къ слѣдующему виду

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\Lambda' d\varphi=\frac{1}{2}\frac{(1+\mathrm{Cos}^2\varphi_0)\mathrm{Cos}\varphi_0}{\mathrm{Sin}^2\varphi_0}\mathrm{Cos}2\lambda_0\int_{x_1}^{x_2}\frac{(1+x)^3dx}{1+\mathrm{Cos}^2\varphi_0x^2}-$$

$$-\frac{1}{2}Q\,\mathrm{Cos}\varphi_0\int_{x_1}^{x_2}\frac{x^2(1+x^2)^3dx}{(1+\mathrm{Cos}^2\varphi_0x^2)^2}$$

$$(216)$$

$$-\mathfrak{Q}\mathrm{Sin}\varphi_0\int_{x_1}^{x_1}\frac{x^3(1+x^2)dx}{(1+\mathrm{Cos}^2\varphi_0x^2)^2}+$$

$$+\frac{(1+\mathrm{Cos}^2\varphi_0)}{\mathrm{Cos}\varphi_0}\mathrm{Cos}2\lambda_0\int_{x_1}^{x_2}\frac{(1+x^2)^2dx}{1+\mathrm{Cos}^2\varphi_0x^2}$$

$$-Q\frac{\mathrm{Sin}\varphi_0}{\mathrm{Cos}\varphi_0}\int_{x_1}^{x_2}\frac{x^2(1+x^2)^2dx}{(1+\mathrm{Cos}^2\varphi_0x^2)^2}.$$

Вычисленіе опредѣленныхъ интеграловъ встрѣчающихся въ послѣдней формулѣ выполняется весьма просто.

Шигалеевскій Починокъ, 10 іюля 1897 года.

Г. Шебуевъ.